$\mu$ **Π** $\lambda$ $\forall$
**Λ99Γ. Τροπική Λογική**
**2012/13, χειμερινό εξάμηνο**

## Ασκήσεις για το σπίτι (III)

**III.1** (1.5 μονάδα)
Να κατασκευαστούν πλαίσιο Kripke $\mathfrak{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$, μοντέλο $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, καθώς και γενικά πλαίσια Kripke $\mathfrak{G}_1 = \langle W, A_1, \mathcal{R} \rangle$ και $\mathfrak{G}_2 = \langle W, A_2, \mathcal{R} \rangle$ τ.π.

- $\mathfrak{F} \nVdash \Box p \to \Box\Box p$
- $\mathfrak{M} \Vdash \Box p \to \Box\Box p$
- $\mathfrak{G}_1 \Vdash \Box p \to \Box\Box p$
- $\mathfrak{G}_2 \nVdash \Box p \to \Box\Box p$

**III.2** (1 μονάδα)
Έστω $\langle W, \mathcal{R}, V \rangle$ ένα μοντέλο Kripke. Αποδείξτε ότι η δομή $\langle W, \{\overline{V}(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{L}_\Box\}, \mathcal{R} \rangle$ αποτελεί γενικό πλαίσιο Kripke.

**III.3** (1.5 μονάδα)
Αποδείξτε ότι η τροπικότητα που περιγράφει «το $\varphi$ ισχύει σε όλους τους προηγούμενους κόσμους» δεν μπορεί να οριστεί συναρτήσει του τελεστή $\Box$, δηλ. ότι δεν υπάρχει τύπος $\psi \in \mathcal{L}_\Box$ που περιέχει μόνο μια προτασιακή μεταβλητή $p$ τ.π. για κάθε μοντέλο $\mathfrak{M} = \langle W, \mathcal{R}, V \rangle$, κάθε $w \in W$, και κάθε $\varphi \in \mathcal{L}_\Box$ να ισχύει

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \psi^p_\varphi \iff (\forall v \in W)(v\mathcal{R}w \Rightarrow \mathfrak{M}, v \Vdash \varphi)$$

Σημ.
1. $\psi^p_\varphi$ είναι ο τύπος που προκύπτει με ομοιόμορφη αντικατάσταση στον $\psi$ του $p$ από τον $\varphi$.
2. Στην απόδειξη μάλλον διευκολύνει να χρησιμοποιηθεί ότι η τροπική ικανοποιησιμότητα είναι αναλλοίωτη ως προς παραγόμενα υπομοντέλα (BdRV, Πρόταση 2.6).

Προθεσμία παράδοσης
Παρασκευή, 23/11/2012 για χειρόγραφα ή Κυριακή, 25/11/2012 για ηλεκτρονική αποστολή.