Αλέξανδρου Δ. Αρβανιτάκη

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΙΣΟΜΕΤΡΙΑΣ ΣΕ ΠΟΛΩΝΙΚΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

Διπλωματική εργασία

$\mu\prod\lambda\forall$

ΑΘΗΝΑ 2001

Στη Μαρία και το Διονύση

Είχα την τύχη να με εισάγει στην Περιγραφική Θεωρία Συνόλων, ένας από τους πρωτοπόρους στον κλάδο, ο καθηγητής Ι. Μοσχοβάκης, ο οποίος είναι και ο επιβλέποντας καθηγητής αυτής της διπλωματικής.

Τον ευχαριστώ λοιπόν θερμά, τόσο για το κουράγιο και τις φιλικές συμβουλές που μου έχει δώσει, όσο και για τον κόπο και την υπομονή που έδειξε προκειμένου να με καθοδηγήσει σ' αυτόν τον πανέμορφο κλάδο των Μαθηματικών.

Χαίρομαι που στην τριμελή επιτροπή συμμετέχει ο δάσκαλός μου, καθηγητής Σ. Αργυρός. Μου δίνεται έτσι η ευκαιρία να τον ευχαριστήσω για άλλη μια φορά για την καθοδήγησή του στο δύσκολο, αλλά όμορφο χώρο της έρευνας. Ελπίζω ότι στο μέλλον θα περάσουμε μαζί ακόμα περισσότερες και ωραιότερες στιγμές σ' αυτό το χώρο.

Οφείλω επίσης να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή Σ. Μερκουράκη που μου κάνει για πολλοστή φορά την τιμή να συμμετέχει σε επιτροπή κρίσης δουλειάς μου.

Θα πρέπει ακόμα να ευχαριστήσω όλους τους συμφοιτητές και φίλους από το Μ.Π.Λ.Α., υποψήφιους διδάκτορες και διδάκτορες από τον τομέα της Ανάλυσης και παλιότερα από το μεταπτυχιακό των Θεωρητικών Μαθηματικών, για τη συναδελφικότητα και φιλικότητά τους.

Τέλος, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ, στην καθηγήτρια του Α.Π.Θ., Κορνηλία Κάλφα που μου ενέπνευσε την αγάπη που έχω για τη Θεωρία Συνόλων και στον καθηγητή Α. Κεχρή, για την πολύτιμη βοήθειά του κατα τη διάρκεια της προετοιμασίας της δουλειάς αυτής.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Ο σκοπός του συγγράμματος αυτού, είναι να παρουσιαστεί μ' έναν πλήρη και κατανοητό τρόπο, ένα πρόσφατο αποτέλεσμα των Su Gao και Κεχρή, [**2**] το οποίο κατατάσσει το πρόβλημα της ταξινόμησης Πολωνικών χώρων μέχρις ισομετρίας, ως προς τη δυσκολία του.

Υπενθυμίζουμε εδώ, ότι ένας *Πολωνικός χώρος* είναι ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, ο οποίος επιδέχεται μια ισοδύναμη πλήρη μετρική.

Ο τρόπος που επιτυγχάνεται αυτή η κατάταξη, περνάει μέσα από μια γενικότερη θεωρία κατάταξης προβλημάτων ταξινόμησης, ως προς κάποια σχέση ισοδυναμίας.

Στα Μαθηματικά, είναι πολύ συνηθισμένα τα προβλήματα τέτοιου είδους: Προβλήματα ταξινόμησης ομάδων, χώρων Banach, τοπολογικών χώρων κ.λ.π. ως προς μια σχέση ισοδυναμίας όπως ισομετρία, ισομορφισμός, ομοιομορφισμός κ.λ.π. Για παράδειγμα είναι σε όλους γνωστό ότι το πρόβλημα της ταξινόμησης γραμμικών χώρων πεπερασμένης διάστασης πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$, είναι επιλύσιμο με την εξής απλή μορφή:

Αν V είναι ένας γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{K}$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την απεικόνιση:

$$\dim : V \mapsto \dim(V) \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Όπως είναι γνωστό τότε, δυο γραμμικοί χώροι V, W είναι ισόμορφοι, αν και μόνο αν $\dim(V) = \dim(W)$.

Στη γενική περίπτωση βέβαια, τέτοιου είδους προβλήματα δεν είναι τόσο απλά, και ακριβώς γι' αυτό έχει έννοια μια θεωρία που συγκρίνει τέτοιου είδους προβλήματα μεταξύ τους. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι στο παραπάνω παράδειγμα, το πρόβλημα ταξινόμησης μέχρις ισομορφισμού γραμμικών χώρων, ανάγεται στο πρόβλημα της ισότητας φυσικών αριθμών. Αυτή η τελευταία διαπίστωση είναι βέβαια λίγο χονδροειδής, από την άποψη ότι δεν έχουμε αναρωτηθεί αρκετά πόσο η απεικόνιση dim είναι εύκολη ως προς τον υπολογισμό της. Θα μπορούσαμε π.χ. σε κάθε τέτοιο πρόβλημα να ορίσουμε την απεικόνιση

$$V \mapsto [V] \tag{2}$$

που απεικονίζει κάθε υπό εξέταση αντικείμενο V στην κλάση ισοδυναμίας του $[V]$, ως προς την υπό μελέτη σχέση ισοδυναμίας. Θα μπορούσε παραδείγματος χάριν, στη συγκεκριμμένη περίπτωση, το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας να είναι αριθμήσιμο, οπότε θα λέγαμε ότι η (2) απλοποιεί τα πράγματα ακριβώς όπως και η (1). Είναι φανερό ότι η (1) απλοποιεί τελείως τα πράγματα στην περίπτωση των γραμμικών χώρων, ενώ η (2) είναι απλώς μια ένδειξη ότι το δοθέν πρόβλημα πιθανόν δεν είναι τόσο δύσκολο, από την άλλη όμως, κανένας δεν θα έλεγε ότι η (2) απλοποιεί τα πράγματα όσο και (1). Η διαφορά είναι προφανής διαισθητικά: Δοθέντος ενός διανυσματικού χώρου V είμαστε πολύ συχνά σε θέση να υπολογίσουμε τον αριθμό $\dim(V)$. Επομένως το όλο πρόβλημα έχει να κάνει και με την ευκολία που παρουσιάζεται στο να υπολογιστεί η συνάρτηση $\dim$. Προσπαθώντας κανείς να γενικεύσει αυτές τις ιδέες συνεπώς, θα πρέπει να θεωρήσει αναγωγές όπως η (1) στις οποίες η συνάρτηση αναγωγής ($\dim$ στην συγκεκριμμένη περίπτωση) να είναι κατά μια έννοια μια εύκολη στον υπολογισμό της συνάρτηση.

Για τους σκοπούς προβλημάτων μαθηματικής φύσης, ένα μέτρο ευκολίας στον υπολογισμό είναι αν μια συνάρτηση είναι Borel ή όχι.

Υπενθυμίζουμε εδώ, ότι για έναν Πολωνικό χώρο X, η σ–άλγεβρα που παράγεται από τα ανοιχτά υποσύνολα του X, λέγεται *σ–άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του X*. Αν τότε ο Y είναι Πολωνικός χώρος, μια συνάρτηση

$$f : X \to Y$$

είναι *Borel,* αν για κάθε B, Borel υποσύνολο του Y, το $f^{-1}(B)$ είναι ένα Borel υποσύνολο του X.

Αυτές οι ιδέες βέβαια εισάγουν στα προβλήματα κατάταξης προβλημάτων ισοδυναμίας την εξής αναγκαιότητα:

Θα πρέπει να μπορεί κάποιος να δεί τα υπό μελέτη αντικείμενα (όπως οι γραμμικοί χώροι του παραδείγματος) να σχηματίζουν ένα ορίσιμο (π.χ. Borel ή αναλυτικό) υποσύνολο ενός Borel χώρου X.

Ένας *χώρος Borel X* είναι ένας χώρος εφοδιασμένος με μια σ–άλγεβρα η οποία μπορεί να προκύψει από μια Πολωνική δομή του X. Μ' αυτόν τον τρόπο, θα μπορούσαμε να πούμε ότι μια απεικόνιση (σαν την $\dim$ του (1)) είναι αναγωγή αν είναι Borel.

Η απαίτηση αυτή, δηλαδή τα υπό μελέτη αντικείμενα να μπορούν να ειδωθούν σαν ένα ορίσιμο υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου, όπως θα δούμε, δεν είναι και πολύ περιοριστική.

Ας δούμε παραδείγματος χάριν, πώς αυτό μπορεί να επιτευχθεί στην περίπτωση των Πολωνικών χώρων.

Τα δυο σημαντικά εργαλεία σ' αυτήν την κατεύθυνση είναι ο χώρος του Urysohn $\mathbb{U}$ και η Effros–Borel δομή. (Βλέπε κεφάλαια 3 και 2 αντίστοιχα.) Ο χώρος του Urysohn εισήχθη στα 1927 στο [**7**] από τον Urysohn και είναι ένα παράδειγμα καθολικού Πολωνικού χώρου με την εξής έννοια: Είναι Πολωνικός χώρος και κάθε άλλος Πολωνικός χώρος είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος σ' ένα κλειστό υποσύνολό του.

Επομένως, κάθε Πολωνικός χώρος μπορεί να θεωρηθεί με προσέγγιση ισομετρίας σαν ένας κλειστός υπόχωρος του χώρου του Urysohn. Αυτό λύνει το μισό πρόβλημα, αφού θα έπρεπε να μπορούμε να δούμε τον τυχόντα Πολωνικό χώρο σαν ένα σημείο Πολωνικού χώρου.

Το άλλο μισό πρόβλημα, λύνεται από την Effros–Borel δομή των κλειστών υποσυνόλων ενός Πολωνικού χώρου. (Βλέπε κεφάλαιο 2). Συγκεκριμμένα, ισχύει το εξής:

Το σύνολο των κλειστών υποσυνόλων ενός Πολωνικού χώρου είναι ένας χώρος Borel, δηλαδή υπάρχει μια δομή Πολωνικού χώρου σ' αυτό το σύνολο.

Χρησιμοποιώντας τα δυο αυτά αποτελέσματα μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε Πολωνικό χώρο σαν ένα σημείο ενός συγκεκριμμένου καθολικού μ' αυτήν την έννοια Πολωνικού χώρου. Επομένως το σύνολο των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{U}$, $F(\mathbb{U})$, μπορεί να θεωρηθεί σαν ο χώρος όλων των Πολωνικών χώρων.

Μια διαφορετική προσέγγιση χρησιμοποιείται από τον J. Clemens στην διδακτορική του διατριβή [**3**].

Έχουμε επομένως στη γενική περίπτωση να κάνουμε με μια σχέση ισοδυναμίας E που αναπαριστά το προς κατάταξη πρόβλημα, ορισμένη σ' ένα ορίσιμο υποσύνολο X ενός Πολωνικού χώρου, του οποίου τα στοιχεία μπορούμε να θεωρήσουμε σαν τα αντικείμενα του προς κατάταξη προβλήματος (χώροι Banach, ομάδες, τοπολογικοί χώροι κ.λ.π.) Απ' αυτήν την άποψη, η απλούστερη περίπτωση είναι να μπορούμε να δούμε την E σαν σχέση ισότητας, όπως στην περίπτωση των γραμμικών χώρων (1). Πιο συγκεκριμμένα, η E (και το πρόβλημα που αναπαριστά) λέγεται *πλήρως ταξινομήσιμη,* αν υπάρχει ένας χώρος Borel Y και μια Borel απεικόνιση

$$c : X \to Y$$

τέτοια ώστε για κάθε x και y στον X,

$$xEy \iff c(x) = c(y).$$

Ο Gromov, στο [**5**] έχει δείξει ότι το πρόβλημα της ισομετρίας συμπαγών χώρων είναι πλήρως ταξινομήσιμο.

Παρακάτω, χρειαζόμαστε την έννοια της αναγωγής μιας σχέσης ισοδυναμίας σε μια άλλη:

Αν E και F είναι σχέσεις ισοδυναμίας σε υποσύνολα X, Y αντίστοιχα, χώρων Borel, τότε λέμε ότι η E είναι *Borel αναγώγιμη* στην F, ή συμβολικά

$$E \leq_B F$$

αν υπάρχει μια Borel απεικόνιση $f : X \to Y$ τέτοια ώστε

$$xEy \iff f(x)Ff(y).$$

Διαισθητικά, αυτό εννοεί όι ένας τρόπος που θα δούλευε για να λύσει το πρόβλημα που αναπαριστά η F, θα δούλευε επίσης για να λύσει το αντίστοιχο πρόβλημα που αναπαριστά η E.

Λέμε επίσης ότι οι E και F είναι *Borel ισοδύναμες* συμβολικά

$$E \sim_B F$$

αν η κάθε μια είναι Borel αναγώγιμη στην άλλη, δηλαδή

$$E \leq_B F \iff E \leq_B F \;\&\; F \nleq_B E,$$

σημαίνει ότι το πρόβλημα ταξινόμησης που αναπαριστάται από την E είναι καθαρά απλούστερο από το αντίστοιχο που αναπαριστάται από την F.

Η μερική προδιάταξη $\leq_B$ εισάγει μια ιεραρχία δυσκολίας στα προβλήματα ταξινόμησης. Η μελέτη αυτής της ιεραρχίας έχει αναδείξει κάποιες βασικές σχέσεις ισοδυναμίας οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για σύγκριση με προβλήματα ταξινόμησης που προκύπτουν σε διάφορους κλάδους των Μαθηματικών. Στα επόμενα θα δούμε μερικές απ' αυτές:

Μια *Πολωνική ομάδα* $< G, \cdot >$ είναι ένας Πολωνικός χώρος G εφοδιασμένος με μια πράξη $\cdot$ ως προς την οποία γίνεται ομάδα. Η σύνδεση μεταξύ των δυο δομών είναι ότι η απεικόνιση

$$G \times G \ni < g, h > \mapsto g \cdot h^{-1} \in G$$

είναι συνεχής.

Αν X είναι ένας Πολωνικός χώρος, τότε λέμε ότι η G *δρά* στον X αν υπάρχει μια πράξη $\cdot : G \times X \to X$ τέτοια ώστε για $g, h \in G$ και $x \in X$,

$$\begin{gathered} g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x \\ 1 \cdot x = x \end{gathered}$$

όπου 1 είναι το μοναδιαίο στοιχείο της G.

Λέμε ότι η δράση είναι *Borel* αν η απεικόνιση $\cdot$ είναι Borel. Για συντομία σ' αυτήν την περίπτωση αναφερόμαστε στον X με την έκφραση *Borel G–χώρος*

Αν ο X είναι ένας Borel G–χώρος, τότε συμβολίζουμε με E_G^X τήν αντίστοιχη σχέση ισοδυναμίας των τροχιών της G :

$$xE_G^X y \iff \exists g(g \cdot x = y).$$

Η τελευταία σχέση είναι προφανώς αναλυτική. Προκύπτει ότι ανάμεσα στις E_G^X για σταθερή G, υπάρχει μια καθολική σχέση ισοδυναμίας με την εξής έννοια:

Υπάρχει ένας Borel G–χώρος X, τέτοιος ώστε για κάθε Borel G–χώρο Y, $E_G^Y \leq_B E_G^X$. Προφανώς, αυτός είναι μοναδικός με προσέγγιση $\sim_B$ και συμβολίζεται E_G^∞.

Επιπλέον, αφήνοντας την G τώρα να τρέχει σε όλες τις Πολωνικές ομάδες, υπάρχει μια καθολική σχέση της μορφής E_G^∞. Είναι ξανά μοναδική με προσέγγιση $\sim_B$ και την καλούμε *η καθολική σχέση ισοδυναμίας που εισάγεται από μια Borel δράση Πολωνικής ομάδας.*

Άλλο ένα σημαντικό παράδειγμα σχέσης ισοδυναμίας είναι η $E_{S_\infty}^\infty$, δηλαδή η καθολική σχέση ισοδυναμίας που εισάγεται από την ομάδα μεταθέσεων του $\mathbb{N}$, S_∞. Αυτή είναι πολύ μικρότερη σε όρους της διάταξης $<_B$ από την καθολική σχέση ισοδυναμίας που εισάγεται από μια Borel δράση μιας Πολωνικής ομάδας. Μια συγκεκριμμένη μορφή της $E_{S_\infty}^\infty$ είναι ο ισομορφισμός γραφημάτων.

Τέλος, ένα τρίτο παράδειγμα τέτοιας σχέσης ισοδυναμίας είναι η E_∞, δηλαδή η καθολική σχέση ισοδυναμίας που εισάγεται από τη Borel δράση μιας αριθμήσιμης ομάδας. Πάλι, η E_∞ είναι η μικρότερη σε όρους της διάταξης $<_B$ από τον ισομορφισμό γραφημάτων.

Το Θεώρημα που μελετάται εδώ είναι το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η σχέση ισοδυναμίας της ισομετρίας Πολωνικών χώρων είναι Borel ισοδύναμη με την καθολική σχέση ισοδυναμίας που εισάγεται από μια Πολωνική ομάδα.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μερικά προκαταρκτικά

Ένας *Πολωνικός μετρικός χώρος,* (X, d) είναι ένας πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Με τον όρο *Πολωνικός χώρος,* εννοούμε έναν τοπολογικό χώρο, ο οποίος είναι ομοιομορφικός μ' έναν Πολωνικό μετρικό χώρο.

Ένας *χώρος Borel* ειναι ένα διατεταγμένο ζεύγος (X, Σ) όπου X είναι ένας Πολωνικός χώρος και Σ είναι η σ- άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του, δηλαδή η μικρότερη οικογένεια υποσυνόλων του X, τέτοια ώστε

1. Αν $U \subset X$ ανοιχτό, τότε $U \in \Sigma$
2. Αν $A \in \Sigma$ τότε και $X \setminus A \in \Sigma$
3. Αν $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία συνόλων στο Σ, τότε $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

Τα μέλη της Σ καλούνται Borel υποσύνολα του X και μια συνάρτηση

$$f : X \to Y,$$

όπου X, Y είναι χώροι Borel λέγεται *Borel* ή *Borel μετρήσιμη* αν η αντίστροφη εικόνα μέσω της f ενός Borel υποσυνόλου του Y, είναι Borel υποσύνολο του X. Όμοια, αν $X_0 \subset X, Y_0 \subset Y$, μια απεικόνιση

$$g : X_0 \to Y_0$$

λέγεται Borel αν η αντίστροφη εικόνα ενός σχετικά Borel υποσυνόλου του Y_0 είναι σχετικά Borel στον X_0.

Εδώ, με τον όρο σχετικά Borel εννοούμε την τομή ενός Borel υποσυνόλου του Y με το Y_0.

Ένα σύνολο $A \subset X$ λέγεται *αναλυτικό,* αν υπάρχει ένας χώρος Borel Yκαι μια Borel απεικόνιση $f : Y \to X$, τέτοια ώστε $f(Y) = A$.

1. Επεκτάσεις συνεχών συναρτήσεων και Πολωνικοί υπόχωροι Πολωνικών χώρων.

Ας είναι X ένας τοπολογικός χώρος, και (Y, d) ένας μετρικός χώρος. Ας είναι ακόμα $A \subset X$ και $f : A \to Y$ Για κάθε $B \subset Y$, θέτουμε

$$\operatorname{diam}(B) = \sup\{d(x, y) : x, y \in B\} \quad \text{και} \quad \operatorname{diam}(\emptyset) = 0.$$

και ορίζουμε την *κύμανση* της f στο $x \in X$ με τον τύπο:

$$\operatorname{osc}_f(x) = \inf\{\operatorname{diam}(f(U)) : U \text{ ανοιχτή περιοχή του } x\}$$

Παρατηρούμε ότι αν $x \in A$, τότε το x είναι ένα σημείο συνέχειας της f αν και μόνο αν $\operatorname{osc}_f(x) = 0$. Πραγματικά,

- Αν η f είναι συνεχής στο x και $\epsilon > 0$, θα υπάρχει U περιοχή του x ώστε
$$f(U) \subset B_d(f(x), \epsilon/2).$$
Συνεπώς $\operatorname{diam} f(U) \leq \epsilon$ και άρα $\operatorname{osc}_f(x) = 0$.
- Αν αντίστροφα $\operatorname{osc}_f(x) = 0$ και $\epsilon > 0$, θα υπάρχει περιοχή U του x ώστε $\operatorname{diam} f(U) < \epsilon$ και συνεπώς
$$f(U) \subset B_d(f(x), \epsilon).$$
Άρα η f θα είναι συνεχής στο x.

Για $\epsilon > 0$ θέτουμε
$$A_\epsilon = \{x \in X : \operatorname{osc}_f(x) < \epsilon\}.$$
Αν $x \in A_\epsilon$ τότε υπάρχει $U \ni x$ ανοιχτή περιοχή του x ώστε $\operatorname{diam} f(U) < \epsilon$. Επομένως για κάθε $y \in U$, $\operatorname{osc}_f(y) < \epsilon$. Άρα το A_ϵ είναι ανοιχτό στο A. Παρατηρούμε τώρα ότι
$$\{x : \operatorname{osc}_f(x) = 0\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n+1}}$$
είναι ένα G_δ σύνολο στο A. Έχουμε δείξει συνεπώς την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2.1. *Ας είναι X ένας τοπολογικός χώρος, Y ένας μετρικός χώρος και*
$$f : X \to Y.$$
Τότε τα σημεία συνέχειας της f είναι ένα G_δ υποσύνολο του X.

Ακόμα:

Πρόταση 2.2. *Ας είναι X ένας μετρικοποιήσιμος χώρος. Τότε κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι ένα G_δ σύνολο.*

Απόδειξη. Ας είναι d μια μετρική συμβιβαστή με την τοπολογία του X. Για $x \in X$, και $\emptyset \neq A \subset X$ ορίζουμε
$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$
Αν τώρα,
$$x_0 \in B(A, \epsilon) = \{x : d(x, A) < \epsilon\}$$
τότε για κάθε $y \in B(x_0, \delta)$ όπου $\delta = \epsilon - d(x, A) > 0$ και για κάθε $z \in A$,
$$d(y, z) \leq d(y, x_0) + d(x_0, z) < \epsilon - d(x, A) > 0$$
Άρα $d(y, A) < \epsilon$ δηλαδή $y \in B(A, \epsilon)$. Άρα $B(A, \epsilon)$ είναι ανοιχτό σύνολο.

Στην ειδική περίπτωση που το F είναι κλειστό, κάθε σημείο εκτός του F θα απέχει θετική απόσταση από το F. Άρα

$$F = \cap_{n\in\mathbb{N}} B\Big(F, \frac{1}{n+1}\Big)$$

και συνεπώς το F θα είναι G_δ. □

Θα χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω, για να αποδείξουμε το επόμενο αποτέλεσμα που οφείλεται στον Kuratowski:

Θεωρημα 2.3. *Ας είναι X μετρικοποιήσιμος, Y πλήρως μετρικοποιήσιμος, $A \subset X$ και $f : A \to Y$ συνεχής. Τότε υπάρχει ένα G_δ σύνολο G με $A \subset G \subset \overline{A}$ στο οποίο η f επεκτείνεται συνεχώς.*

Αποδειξη. Θέτουμε $G = \overline{A} \cap \{x : \operatorname{osc}_f(x) = 0\}$. Αυτό είναι G_δ αφού $\overline{A}$ και $\{x : \operatorname{osc}_f(x) = 0\}$ είναι G_δ. Επειδή η f είναι συνεχής στο A, έπεται

$$A \subset G \subset \overline{A}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : G \to Y$ η οποία ορίζεται ως εξής:

Αν $x \in G \subset \overline{A}$, θα υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο A που συγκλίνει στο x. Επειδή $\operatorname{osc}_f(x) = 0$, η $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι Cauchy στον Y. Άρα θα υπάρχει το όριό της. Θέτουμε

$$g(x) = \lim_n f(x_n).$$

Είναι εύκολο να δειχτεί ότι η G είναι καλά ορισμένη. Αν $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$ είναι δυο ακολουθίες που συγκλίνουν στο x, τότε για κάθε $\epsilon > 0$, θα υπάρχει περιοχή U του x, ώστε $\operatorname{diam}(f(U)) < \epsilon$. Άρα τελικά οι αποστάσεις των όρων της $\{f(x_n)\}_n$ και $\{f(y_n)\}$ γίνονται μικρότερες του ϵ και συνεπώς οι δυό ακολουθίες έχουν το ίδιο όριο.

Για $x \in A$ και $x_n = x$, $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε ότι η g επεκτείνει την f.

Προκειμένου να δούμε ότι η g είναι επιπλέον συνεχής, παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε περιοχή U του X,

$$g(U) \subset \overline{f(U)}.$$

Αν τώρα $x_0 \in G$ και $\epsilon > 0$, επειδή $\operatorname{osc}_f(x_0) = 0$, θα υπάρχει περιοχή U του x_0 τέτοια ώστε $f(U) \subset B(x_0, \epsilon/2)$. Άρα

$$g(U) \subset B(x_0, \epsilon)$$

και συνεπώς η g είναι συνεχής στο x_0. □

Το επόμενο Θεώρημα χαρακτηρίζει τους υπόχωρους των Πολωνικών χώρων που είναι Πολωνικοί.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4. *Αν ο X είναι μετρικοποιήσιμος και ο $Y \subset X$ είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, τότε το Y είναι ένα G_δ υποσύνολο του X. Αντίστροφα, αν ο X είναι πλήρως μετρικοποιήσιμες και το $Y \subset X$ είναι G_δ, τότε και ο Y είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος.*

Ειδικότερα, ένας υπόχωρος Πολωνικού χώρου είναι Πολωνικός αν και μόνο αν είναι G_δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για το πρώτο μέρος, θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$. Αυτή είναι συνεχής και επειδή ο Y είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, από το πιο πάνω θεώρημα του Kuratowski, θα υπάρχει ένα G_δ σύνολο G με $Y \subset G \subset \overline{Y}$ και μια συνεχής επέκταση $g : G \to Y$ της id_Y . Επειδή το Y είναι πυκνό στο G,

$$g = \mathrm{id}_G$$

και συνεπώς $Y = G$.

Για το δεύτερο, ας είναι $Y = \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ με U_n ανοιχτά στο X. Θέτουμε

$$F_n = X \setminus U_n.$$

Έστω ακόμα d μια πλήρης μετρική για τον X. Ορίζουμε μια καινούρια μετρική για τον Y, θέτοντας

$$d'(x, y) = d(x, y) + \sum_{m=0}^{\infty} \Big\{2^{-n-1}, \Big|\frac{1}{d(x, F_n)} - \frac{1}{d(y, F_n)}\Big|\Big\}.$$

Εύκολα προκύπτει ότι η d' είναι μια μετρική.

Αν $d'(x_n, x) \xrightarrow{n} 0$, τότε και $d(x_n, x) \xrightarrow{n} 0$, συνεπώς $x_n \xrightarrow{n} x$. Αν αντίστροφα $x_n \xrightarrow{n} x$ στον Y, τότε για δοθέν $\epsilon > 0$, βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n-1} < \frac{\epsilon}{4}$$

και $n_2 \geq n_1$ ώστε

$$\Big|\frac{1}{d(x_n, F_m)} - \frac{1}{d(x, F_m)}\Big| < \frac{\epsilon}{4k}$$

όταν $n \geq n_2$ και $m \leq k$. Τότε είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι $d'(x_n, x) < \epsilon$ όταν $n \geq n_2$. Άρα η d' είναι μια μετρική συμβιβαστή με την τοπολογία του Y. Αρκεί να δειχτεί ακόμα ότι είναι πλήρης. Αν $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ακολουθία ως προς την d', τότε προφανώς είναι Cauchy και ως προς την d και συνεπώς η y_n συγκλίνει σε κάποιο $y \in X$. Επιπλέον, σταθεροποιώντας $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{m,n\to\infty} \Big|\frac{1}{d(y_n, F_k)} - \frac{1}{d(y_m, F_k)}\Big| = 0.$$

και συνεπώς η ακολουθία $\{\frac{1}{d(y_n,F_k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ θα συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. Άρα η $\{d(y_n, F_k)\}_n$ θα είναι φραγμένη μακριά από το 0 και συνεπώς

$$d(y, F_k) = \lim_n d(y_n, F_k) \neq 0.$$

Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $y \notin F_k$ και έπεται ότι $y \in Y$. $\square$

2. Ο χώρος των συμπαγών υποσυνόλων.

Ας είναι X ένας τοπολογικός χώρος. Συμβολίζουμε με $K(X)$ χώρο όλων των συμπαγών υποσυνόλων του X εφοδιασμένο με την τοπολογία Vietoris, δηλαδή την τοπολογία που παράγεται από σύνολα της μορφής

$$\begin{gathered}\{K \in K(X) : K \subset U\}\\ \{K \in K(X) : K \cap U \neq \emptyset\}.\end{gathered}$$

όπου το U τρέχει στα ανοιχτά υποσύνολα του X. Είναι φανερό ότι πεπερασμένες τομές τέτοιων συνόλων είναι της μορφής

$$\{K \in K(X) : K \subset U_0 \;\&\; K \cap U_1 \neq \emptyset \;\&\; \ldots K \cap U_n \neq \emptyset\}$$

όπου $U_0, U_1, \ldots, U_n$ ανοιχτά στον X, και συνεπώς σύνολα τέτοιας μορφής αποτελούν μια βάση για την τοπολογία Vietoris.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο X είναι εφοδιασμένος επιπλέον με μια μετρική $d \leq 1$. Ορίζουμε τη μετρική Hausdorff d_H στον $K(X)$, ως εξής:

$$d_H(K, L) = \begin{cases} 0, \text{αν } K = L = \emptyset \\ 1, \text{ αν ακριβώς ένα από τα } K,\, L \text{ είναι κενό} \\ \max\{\delta(K, L), \delta(L, K)\}, \text{αν } K, L \neq \emptyset \end{cases}$$

όπου

$$\delta(K, L) = \max\{d(x, L) : x \in K\}.$$

Άρα για μη κενά K και L στον $K(X)$, θα έχουμε ότι

$$d_H(K, L) < \epsilon \iff K \subset B(L, \epsilon) \;\&\; L \subset B(K, \epsilon).$$

Ισχύει η επόμενη:

Πρόταση 2.5. *Η μετρική Hausdorff είναι συμβιβαστή με την τοπολογία Vietoris.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι κάθε περιοχή της μορφής

$$\begin{gathered}\{L \in K(X) : L \subset U\}\\ \text{και } \{L \in K(X) : L \cap U \neq \emptyset\}\end{gathered}$$

$U \subset X$ ανοιχτό, είναι d_H-ανοιχτή. Για την πρώτη περίπτωση αν $K \subset U$, τότε $d(K, X \setminus U) > 0$. Πραγματικά, αν όχι, τότε βρίσκουμε $x_n \in K$, $y_n \in X \setminus U$ ώστε

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}.$$

Επειδή το K είναι συμπαγές, θα υπάρχει $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ υπακολουθία της $\{x_n\}$ και $x \in K$ ώστε $x_{n_k} \to x$. Αλλά τότε $d(x_{n_k}, x) \to 0$ και επειδή

$$d(x, y_{n_k}) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y_{n_k})$$

βρίσκουμε ότι $d(x, X \setminus U) = 0$ που είναι άτοπο αφού U ανοιχτό και $x \in U$. Θέτουμε συνεπώς

$$\epsilon = d(K, X \setminus U) > 0.$$

Αν $L \in B_H(K, \epsilon)$, τότε για κάθε $y \in L$, $d(y, K) < \epsilon$ και συνεπώς $y \in U$. Άρα

$$B_H(K, \epsilon \subset \{L \in K(X) : L \subset U\}.$$

Για τη δεύτερη περίπτωση, αν $K \cap U \neq \emptyset$ διαλέγουμε $x \in K \cap U$ και ας είναι

$$\epsilon = d(x, X \setminus U) > 0.$$

Αν $L \in B_H(K, \epsilon)$, τότε $d(x, L) < \epsilon$ και συνεπώς θα υπάρχει $y \in L$ ώστε $d(x, y) < \epsilon$. Αλλά σ' αυτήν την περίπτωση αναγκαστικά θα ισχύει $y \in U$ και συνεπώς

$$B_H(K, \epsilon) \subset \{L \in K(X) : L \cap U \neq \emptyset\}.$$

Έστω αντίστροφα $B_H(K, \epsilon)$ μια d_H βασική περιοχή του $K \in K(X)$. Επειδή

$$K \subset \cap\{B(x, \epsilon/2) : x \in K\},$$

και ο K είναι συμπαγής, έπεται ότι θα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in K$ ώστε

$$K \subset \cup_{k=1}^{n} B(x_i, \epsilon/2).$$

Θέτουμε $U_i = B(x_i, \epsilon/2)$, $1 \leq i \leq n$ και $U_0 = \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon/2)$. Τότε το σύνολο

$$V = \{L \in K(X) : L \subset U_0 \;\&\; L \cap U_1 \neq \emptyset \;\&\; \ldots \;\&\; L \cap U_n \neq \emptyset\}$$

είναι μια ανοιχτή περιοχή του K στην τοπολογία Vietoris. Επιπλέον, αν $L \in V$ και $y \in L$, τότε θα υπάρχει $1 \leq i \leq n$ ώστε $y \in B(x_i, \epsilon/2)$ και συνεπώς $d(y, K) < \epsilon/2$ Άρα και

$$\delta(L, K) = \max\{d(y, K) : y \in L\} < \epsilon.$$

Αν $x \in K$, τότε θα υπάρχει $1 \leq i \leq n$ ώστε $x \in B(x_i, \epsilon/2)$. Σ' αυτήν την περίπτωση αν $y \in L \cap U_i$, τότε

$$d(x,y) \leq d(x,x_i) + d(x_i,y) < \epsilon.$$

Άρα και

$$\delta(K,L) = \max\{d(x,L) : x \in K\} < \epsilon.$$

και συνεπώς $d_H(L,K) < \epsilon$. □

Θεωρημα 2.6. *Αν ο X είναι μετρικοποιήσιμος χώρος, τότε μετρικοποιήσιμος είναι και ο $K(X)$. Αν X είναι επιπλέον και διαχωρίσιμος, τότε διαχωρίσιμος θα είναι και ο $K(X)$.*

Αποδειξη. Για το δεύτερο μέρος, αν $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια βάση περιοχών για τον X, τότε είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι τα σύνολα της μορφής

$$L \in K(X) : L \subset \cup_{i=1}^{r} G_{n_i} \ \& \ L \cap G_{m_1} \neq \emptyset \ \& \ \ldots \ \& \ L \cap G_{m_l} \neq \emptyset\}$$

θα είναι μια αριθμήσιμη βάση περιοχών για τον $K(X)$. □

Δοθέντος ενός τοπολογικού χώρου X και μιας ακολουθίας (K_n) στον $K(X)$ ορίζουμε το τοπολογικό άνω όριο, $\overline{T\lim_n} K_n$:

$$\overline{T\lim_n} K_n = \{x \in X : \text{Κάθε περιοχή του } x \text{ τέμνεται με το } K_n \text{ για άπειρα } n\}$$

Θεωρημα 2.7. *Αν ο X είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, τότε το ίδιο ισχύει και για τον $K(X)$. Επομένως αν ο X είναι Πολωνικός χώρος, τότε ο $K(X)$ θα είναι επίσης Πολωνικός.*

Αποδειξη. Έστω $d \leq 1$ μια πλήρης ισοδύναμη μετρική για τον X. Θα δείξουμε ότι η d_H είναι σ' αυτήν την περίπτωση πλήρης. Έστω λοιπόν (K_n) μια ακολουθία Cauchy στον $(K(X), d_H)$. Θέτουμε $K = \overline{T\lim_n} K_n$. Αρκεί να δειχτεί ότι $K \in K(X)$ και $d_H(K_n, K) \to 0$. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$K = \cap_n (\overline{\cup_{i=n}^{\infty} K_i}) \tag{3}$$

και συνεπώς το K είναι κλειστό.

Ισχυρισμος (1). Το K είναι συμπαγές.

Είναι αρκετό να δειχτεί ότι είναι ολικά φραγμένο. Για το σκοπό αυτό, θα αποδείξουμε ότι για κάθε n, υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $F_n \subset X$ με $K \subset \cup_{x \in F_n} B(x, 2^{-n})$. Ας υποθέσουμε ότι F_n^i είναι ένα πεπερασμένο σύνολο με $K_i \subset \cup_{x \in F_n^i} B(x, 2^{-n-1})$. Ας είναι $p > n$, τέτοιος ώστε $d_H(K_i, K_j) < 2^{-n-1}$ για $i, j \geq p$. Θέτουμε $F_n = \cup_{n \leq i \leq p} F_n^i$. Επειδή $K \subset \cup_{i=n}^{\infty} K_n$, αρκεί να δειχτεί ότι

$$\cup_{i=n}^{\infty} K_i \subset \cup_{x \in F_n} B(x, 2^{-n})$$

Αν $n \leq i \leq p$ τότε προφανώς $K_i \subset \cup_{x \in F_n} B(x, 2^{-n})$. Αν $i > p$, και $x_0 \in K_i$, τότε υπάρχει $y \in K_p$, ώστε $d(x, y) < 2^{-n-1}$ και υπάρχει $x \in F_n$ ώστε $d(y, x) < 2^{-n-1}$. Άρα $x_0 \in \cup_{x \in F_n} B(x, 2^{-n})$ και συνεπώς $K_i \subset \cup_{x \in F_n} B(x, 2^{-n})$ και σ' αυτήν την περίπτωση.

Ισχυρισμος (2). $d_H(K_n, K) \to 0$.

Σταθεροποιούμε $\epsilon < 0$ και βρίσκουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$i, j \geq N \Rightarrow d_H(K_i, K_j) < \epsilon/2.$$

Θα δείξουμε ότι αν $n \geq N$, $d_H(K_n, K) < \epsilon$.

1. Αν $x \in K$, τότε από την (3), θα υπάρχουν $x_{n_i} \in K_{n_i}$ ώστε $x_{n_i} \to x$. Για αρκετά μεγάλο i, $n_i > N$ και ταυτόχρονα $d(x_{n_i}, x) < \epsilon/2$. Για κάθε τέτοιο i, αν $y_n \in K_n$ τέτοιο ώστε $d(x_{n_i}, y_n) < \epsilon/2$, τότε $d(x, y_n) < \epsilon$ και συνεπώς $\delta(K, K_n) < \epsilon$.
2. Έστω τώρα $y \in K_n$. Βρίσκουμε $n = k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ τέτοια ώστε $d_H(K_{k_j}, K_m) < 2^{-j-1}\epsilon$ για κάθε $m \geq k_j$. Ορίζουμε τότε $x_{k_j} \in K_{k_j}$ ως εξής: Θέτουμε $x_{k_1} = y$ και $x_{k_{j+1}}$ να είναι τέτοιο ώστε $d(x_{k_{j+1}}, x_{k_j}) < 2^{-j-1}\epsilon$. Τότε η $\{x_{k_j}\}$ είναι Cauchy και συνεπώς θα συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο x του K. Παρατηρούμε ότι $d(y, x) < \epsilon$ και συνεπώς $\delta(K_n, K) < \epsilon$.

□

3. Η δομή του χώρου Effros–Borel.

Σ' αυτήν την παράγραφο, συζητάμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να δούμε το σύνολο των κλειστών υποσυνόλων ενός Πολωνικού χώρου με μια δομή που να το καθιστά χώρο Borel. Δοθέντος ενός τοπολογικού χώρου X, συμβολίζουμε με $F(X)$ το σύνολο των κλειστών υποσυνόλων του X. Εφοδιάζουμε τον $F(X)$ με τη σ-άλγεβρα που έχει σαν γεννήτορες τα σύνολα της μορφής

$$\{F \in F(X) : F \cap U \neq \emptyset\}$$

όπου το U τρέχει στα ανοιχτά υποσύνολα του X. Επειδή αν $U = \cup_{i \in I} U_i$ τότε και

$$\{F \in F(X) : F \cap U \neq \emptyset\} = \cup_{i \in I}\{F \in F(X) : F \cap U_i \neq \emptyset\},$$

έπεται ότι αν ο X έχει μια αριθμήσιμη βάση $\{U_n\}$, τότε είναι αρκετό να θεωρήσουμε το U να τρέχει σ' αυτήν την βάση.

Ο χώρος $F(X)$ μ' αυτήν τη σ-άλγεβρα λέγεται χώρος *Effros–Borel* του X.

Θα χρειαστούμε το παρακάτω Λήμμα:

Λημμα 2.8. *Αν ο X είναι Πολωνικός χώρος, τότε η οικογένεια των Borel υποσυνόλων του $K(X)$ παράγεται από τα σύνολα της μορφής:*

$$\{K \in K(X) : K \cap U \neq \emptyset\} \tag{4}$$

όπου U είναι ανοιχτό υποσύνολο του X.

Αποδειξη. Αρκεί να δειχτεί ότι ένα σύνολο της μορφής:

$$\{K \in K(X) : K \subset U\}$$

όπου U είναι ανοιχτό υποσύνολο του X, ανήκει στη σ-άλγεβρα που παράγεται από τα σύνολα της μορφής (4).

Επειδή το U θα είναι F_σ σύνολο, μπορούμε να γράψουμε $U = \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ όπου F_n είναι κλειστά υποσύνολα του X. Άρα

$$K \subset U \iff \forall n (K \cap (X \setminus F_n) = \emptyset)$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} &\{K \in K(X) : K \subset U\} = \\ &= \cap_{n\in\mathbb{N}} (K(X) \setminus \{K \in K(X) : K \cap (X \setminus F_n) \neq \emptyset\}) \end{aligned}$$

και το σύνολο στα δεξιά ανήκει προφανώς στη σ-άλγεβρα που παράγεται από σύνολα της μορφής (4). □

Μπορούμε τώρα ν' αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεωρημα 2.9. *Αν ο X είναι Πολωνικός χώρος, τότε ο χώρος Effros Borel του X είναι χώρος Borel.*

Αποδειξη. Ας είναι $\overline{X}$ μια μετρική συμπαγοποίηση του X. (Παραδείγματος χάριν η κλειστότητα του X σαν υπόχωρου του κύβου του Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$). Συμβολίζουμε με $\overline{A}$ την κλειστότητα του $A \subset X$ στον $\overline{X}$. Η απεικόνιση

$$\Phi : F(X) \ni F \mapsto \overline{F} \in K(\overline{X}).$$

είναι ένα προς ένα αφού αν $\Phi(F_1) = \Phi(F_2)$ τότε $F_1 = \overline{F}_1 \cap X = \overline{F}_2 \cap X = F_2$. Θέτουμε

$$G = \{\Phi(F) = \overline{F} : F \in F(X)\}$$

και αποδεικνύουμε παρακάτω ότι το G είναι G_δ σύνολο στον $K(\overline{X})$. Από το Θεώρημα 2.4, ο X είναι G_δ υποσύνολο του $\overline{X}$, ας είναι συνεπώς

$X = \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, όπου U_n είναι ανοιχτά στον $\overline{X}$. Παρατηρούμε ότι για $K \in K(\overline{X})$,

$$\begin{aligned} K \in G & \text{ αν και μόνο αν } K \cap X \text{ είναι πυκνό στον } K \\ & \text{ αν και μόνο αν } \forall n (K \cap U_n \text{ είναι πυκνό στο } K) \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισοδυναμία προκύπτει από το θεώρημα του Baire. Άρα αν V_m είναι μια βάση για τον $\overline{X}$, τότε

$$\begin{aligned} K \in G & \iff \forall n (K \cap U_n \text{ είναι πυκνό στο } K) \\ & \iff \forall n \forall m (K \cap V_m \neq \emptyset \Rightarrow K \cap (V_m \cap U_m) \neq \emptyset) \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} G = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cap_{m\in\mathbb{N}} (\{K \in K(\overline{X}) : K \cap V_m = \emptyset\} \cup \\ \{K \in K(\overline{X}) : K \cap V_m \cap U_n \neq \emptyset\}) \end{aligned}$$

συνεπώς το G είναι G_δ σαν αριθμήσιμη τομή G_δ συνόλων. Άρα το G είναι Πολωνικός υπόχωρος του $K(\overline{X})$. Το $F(X)$ γίνεται συνεπώς Πολωνικός χώρος αν εφοδιαστεί με την τοπολογία που επάγει η Φ.

Απομένει να ελέγξουμε ότι τα Borel σύνολα ως προς αυτήν την τοπολογία αποτελούν την Effros–Borel δομή του X. Από το προηγούμενο λήμμα τα Borel υποσύνολα του G παράγονται από τα σύνολα της μορφής

$$\{F \in F(X) : \overline{F} \cap U \neq \emptyset\}$$

όπου το U τρέχει στα ανοιχτά υποσύνολα του $\overline{X}$. Αλλά

$$\{F \in F(X) : \overline{F} \cap U \neq \emptyset\} = \{F \in F(X) : F \cap (U \cap X) \neq \emptyset\}$$

και τα σύνολα της τελευταίας μορφής είναι ακριβώς οι γεννήτορες της Effros–Borel δομής στον X. $\square$

4. Πολωνικές ομάδες.

Μια *τοπολογική ομάδα* είναι μια ομάδα $(G, \cdot)$ εφοδιασμένη με μια τοπολογία τέτοια ώστε η απεικόνιση

$$G^2 \ni (x, y) \mapsto x \cdot y^{-1} \in G$$

να είναι συνεχής.

Διατυπώνουμε το παρακάτω θεώρημα,το οποίο οφείλεται στους Birkhoff και Kakutani, χωρίς απόδειξη:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.10. *Ας είναι G μια τοπολογική ομάδα. Τότε η G είναι μετρικοποιήσιμη αν και μόνο αν η G είναι Hausdorff και το μοναδιαίο στοιχείο της έχει μια αριθμήσιμη βάση περιοχών. Επιπλέον, αν η G είναι μετρικοποιήσιμη, τότε δέχεται μια ισοδύναμη μετρική d η οποία είναι* αριστερά αναλλοίωτη, *δηλαδή*

$$d(x \cdot y, x \cdot z) = d(y, z).$$

Προφανώς όμοια η G δέχεται μια δεξιά αναλλοίωτη ισοδύναμη μετρική. Παρ' όλ' αυτά, στη γενική περίπτωση πιθανόν να μη δέχεται μια (και από τις δυό πλευρές) αναλλοίωτη μετρική.

Αν d είναι μια αριστερά αναλλοίωτη ισοδύναμη μετρική για την G, μπορούμε να θεωρήσουμε μια καινούρια μετρική

$$\rho(x,y) = d(x,y) + d(x^{-1}, y^{-1}).$$

Επειδή η απεικόνιση $x \mapsto x^{-1}$ είναι συνεχής, έπεται ότι η ρ είναι ασθενέστερη της d, και επειδή $\rho \leq d$, έπεται ότι η d είναι ασθενέστερη της ρ, άρα η ρ είναι επίσης ισοδύναμη μετρική για την G.

Αν $(\hat{g}, \hat{\rho})$ είναι η πλήρωση της (G, ρ), τότε η πράξη της ομάδας επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο στη $\hat{G}$, έτσι ώστε η $\hat{G}$ να γίνεται μια τοπολογική ομάδα. Επομένως κάθε μετρικοποιήσιμη τοπολογική ομάδα μπορεί να εμφυτευτεί σε μια πλήρως μετρικοποιήσιμη ομάδα. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [**4**, pp. 352–353].

Μια *Πολωνική ομάδα* είναι μια τοπολογική ομάδα της οποίας η τοπολογία είναι Πολωνική. Από τα προηγούμενα έπεται ότι κάθε διαχωρίσιμη μετρικοποιήσιμη ομάδα εμφυτεύεται πυκνά σε μια Πολωνική ομάδα.

Αποδεικνύουμε μερικά Λήμματα για τοπολογικές ομάδες, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω:

Λημμα 2.11. *Ας είναι (X,d) ένας πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Iso}(X,d)$ την ομάδα των ισομετριών του. Εφοδιάζουμε την $\mathrm{Iso}(X,d)$ με την τοπολογία που παράγεται από τις απεικονίσεις $f \mapsto f(x)$, για $x \in X$. Τότε η $\mathrm{Iso}(X,d)$ είναι μια Πολωνική ομάδα.*

Αποδειξη. Σταθεροποιούμε μια ακολουθία $\{x_n\}_n$ πυκνή στο X. Αποδεικνύουμε κατ' αρχάς ότι αν $\{f_i\}_{i\in I}$ είναι ένα δίκτυο στον $\mathrm{Iso}(x,d)$, $f \in \mathrm{Iso}(X,d)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $f_i(x_n) \overset{i\in I}{\to} f(x_n)$,τότε και για κάθε $x \in X$, $f_i(x) \overset{i\in I}{\to} f(x)$. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} d(f_i(x), f(x)) &\leq d(f_i(x), f_i(x_m)) + d(f_i(x_m), f(x_m)) + d(f(x_m), f(x)) \\ &= 2 \cdot d(x, x_m) + d(f_i(x_m), f(x_m)), \end{aligned}$$

οπότε δοθέντος $\epsilon > 0$, βρίσκουμε $m \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x, x_m) < \epsilon/3$ και $i_0 \in I$ ώστε

$$\forall i \geq i_0, d(f_i(x_m), f(x_m)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Τότε θα είναι και $d(f_i(x), f(x)) < \epsilon$ για κάθε $i \geq i_0$.

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι η $\mathrm{Iso}(X,d)$ με την τοπολογία ατή γίνεται τοπολογική ομάδα:

Αν $\{g_i\}_{i\in I}$ είναι δίκτυο που συγκλίνει στη g στον $\mathrm{Iso}(X,d)$, τότε για κάθε $x \in X$,

$$\begin{aligned} d(g_i^{-1}(x), g^{-1}(x)) &= d(x, g_i(g^{-1}(x))) \\ &= d(g(g^{-1}(x)), g_i(g^{-1}(x))) \\ &= d(g(y), g_i(y)) \end{aligned}$$

όπου θέσαμε $y = g^{-1}(x)$. Η τελευταία σχέση δείχνει ότι το $\{g_i^{-1}\}_{i\in I}$ θα συγκλίνει στη g^{-1}. και συνεπώς η απεικόνιση $g \mapsto g^{-1}$ είναι συνεχής. Αν τώρα $(f_i, g_i)_{i\in I}$ είναι ένα δίκτυο στον $(\mathrm{Iso}(X,d))^2$ που συγκλίνει στο (f,g), τότε για κάθε $x \in X$,

$$\begin{aligned} d(f_i g_i(x), fg(x)) &\leq d(f_i(g_i(x)), f_i(g(x))) + d(f_i(g(x)), f(g(x))) \\ &= d(g_i(x), g(x)) + d(f_i(g(x)), f(g(x))) \to 0. \end{aligned}$$

και συνεπώς η πράξη της σύνθεσης είναι συνεχής.

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι τα σύνολα της μορφής

$$B(n, m_1, \ldots, m_n) = \{f \in \mathrm{Iso}(X,d) : \forall 1 \leq i \leq n, d(f(x_i), x_{m_i}) < 1/n\}$$

είναι μια βάση για την τοπολογία του $\mathrm{Iso}(X,d)$ και συνεπώς ο χώρος είναι διαχωρίσιμος.

Θεωρούμε την εξής μετρική στον $\mathrm{Iso}(X,d)$:

$$\delta(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\Big(\frac{d(f(x_n), g(x_n))}{1 + d(f(x_n), g(x_n))} + \frac{d(f^{-1}(x_n), g^{-1}(x_n))}{1 + d(f^{-1}(x_n), g^{-1}(x_n))}\Big)$$

και αρκεί για να έχουμε τελειώσει να δείξουμε ότι η δ είναι ισοδύναμη πλήρης μετρική.

Η ισοδυναμία είναι προφανής. Για την πληρότητα, έστω $\{f_m\}$ ακολουθία δ-Cauchy. Τότε προφανώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $\{f_m(x_n)\}_m$ θα είναι Cauchy στον X. Θέτουμε συνεπώς

$$G(x_n) = \lim_m f_m(x_n) \tag{5}$$

και παρατηρούμε ότι

$$d(g(x_n), g(x_k)) = \lim_m d(f_m(x_n), f_m(x_k)) = \lim_m d(x_n, x_k) = d(x_n, x_k).$$

Άρα η g απεικονίζει ισομετρικά το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον X και συνεπώς επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε μια ισομετρική εμφύτευση του X στον X.

Αρκεί να δειχτεί ακόμα ότι η επεκτεταμένη συνάρτηση στον X, την οποία συμβολίζουμε επίσης με g, θα είναι επί, γιατί τότε η σχέση (5) θα εξασφαλίσει ότι πράγματι η $\{f_m\}$ θα συγκλίνει στην g. Σταθεροποιούμε $y \in X \setminus \mathrm{ran}(g)$. Επειδή το $\mathrm{ran}(g)$ θα είναι κλειστό υποσύνολο του X, θα υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ ώστε $B(y,\epsilon) \subset X \setminus \mathrm{ran}(g)$.Διαλέγουμε $x_n \in B(y, \epsilon/4)$. Επειδή η ακολουθία f_m είναι δ-Cauchy, έπεται ότι Cauchy θα είναι και η ακολουθία $f_m^{-1}(x_n)$. Ας είναι λοιπόν $x \in X$ ώστε $f_m^{-1}(x_n) \to x$. Διαλέγουμε $x_k \in B(x, \epsilon/4)$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} d(f_m(x_k), y) &\leq d(f_m(x_k), f_m(x)) + d(f_m(x), x_n) + d(x_n, y) \\ &= d(x_k, x) + d(x, f_m^{-1}(x_n)) + d(x_n, y) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + d(x, f_m^{-1}(x_n)). \end{aligned}$$

Επειδή συνεπώς $f_m^{-1}(x_n) \to x$, θα υπάρχει m_0 αρκετά μεγάλο ώστε για κάθε $m \geq m_0$, $d(f_m(x_k), y) < \frac{3\epsilon}{4}$. Αλλά τότε από τον ορισμό της g, $d(g(x_k), y) < \epsilon$ που είναι άτοπο. □

ΛΗΜΜΑ 2.12. *Ας είναι H μια Πολωνική ομάδα και $G \subset H$ μια υποομάδα της H. Αν η G είναι Πολωνική, τότε η G είναι κλειστή στην H.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή η κλειστότητα της G στήν H, $\overline{G}$ θα είναι επίσης υποομάδα της H, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η G θα είναι πυκνή στην H. Από το Θεώρημα 2.4, η G θα είναι G_δ υποσύνολο του H και έστω $G = \cap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ όπου U_n ανοιχτά στην H. Κάθε U_n θα είναι προφανώς πυκνό στην H. Αν το G είναι γνήσιο υποσύνολο του H, τότε θα υπάρχει $h \in H \setminus G$ και σ' αυτήν την περίπτωση $hG \cap G = \emptyset$. Άρα

$$\cap_{n \in \mathbb{N}} U_n \cap \cap_{n \in \mathbb{N}} hU_n = \emptyset.$$

που είναι άτοπο από το Θεώρημα κατηγορίας του Baire. □

Αν η G είναι Πολωνική ομάδα τότε μια απεικόνιση

$$G \times X \ni (g, x) \mapsto g \cdot x \in X \tag{6}$$

όπου X είναι ένας χώρος Borel, λέγεται *δράση* αν

1. $1 \cdot x = x$, για κάθε $x \in X$
2. $(g_1, g_2) \cdot x = g_1(g_2 \cdot x)$, για κάθε $x \in X$, $g_1, g_2 \in G$.

Η δράση λέγεται *Borel* αν η απεικόνιση (6) είναι Borel.

Λέμε επίσης ότι ο X είναι ένας Borel G-χώρος. Συμβολίζουμε με E_G^X τήν *σχέση ισοδυναμίας των τροχιών στον X*, δηλαδή τη σχέση ισοδυναμίας που έχει σαν κλάσεις ισοδυναμίας τροχιές στοιχείων του X.

$$xE_G^X y \iff \exists g(g \cdot x = y).$$

Σαν υποσύνολο του $X \times X$, η E_G^X είναι αναλυτική.

Δοθέντων σχέσεων ισοδυναμίας E και F σε υποσύνολα X και Y αντίστοιχα χώρων Borel, λέμε ότι η E είναι *Borel αναγώγιμη* στην F και συμβολίζουμε

$$E \leq_B F,$$

αν υπάρχει μια Borel απεικόνιση $f : X \to Y$ τέτοια ώστε

$$xEy \iff f(x)Ff(y).$$

Λέμε ότι οι E και F είναι *Borel ισοδύναμες,* και συμβολίζουμε

$$E \sim_B F,$$

αν $E \leq_B F$ και $F \leq_B E$. Τέλος, θέτουμε

$$E <_B F \iff E \leq_B F \;\&\; F \nleq_B E.$$

Μια Borel σχέση ισοδυναμίας E σ' ένα υποσύνολο X ενός χώρου Borel λέγεται *πλήρως ταξινομήσιμη* αν είναι Borel αναγώγιμη στην ισότητα σε κάποιο χώρο Borel. Δηλαδή θα πρέπει να υπάρχει κάποιος χώρος Borel Y και μια Borel απεικόνιση $f : X \to Y$ ώστε

$$xEy \iff f(x) = f(y).$$

Γενικά, δοθείσης μιας κλάσης $\mathcal{E}$ σχέσεων ισοδυναμίας, λέμε ότι η $E \in \mathcal{E}$ είναι *καθολική* γι' αυτήν την κλάση, αν για κάθε $F \in \mathcal{E}$, $F \leq_B E$.

Για κάθε Πολωνική ομάδα G, υπάρχει μια καθολική σχέση ισοδυναμίας αυτής της μορφής. Πιο συγκεκριμμένα, δοθείσης της G, μπορούμε να βρούμε έναν Borel G-χώρο X, ώστε για κάθε Borel G-χώρο Y,

$$E_G^Y \leq_B E_G^X.$$

Συμβολίζουμε αυτόν τον χώρο E_G^∞.

Στην περίπτωση της άπειρης συμμετρικής ομάδας S_∞ όλων των μεταθέσεων του $\mathbb{N}$, με την κατά σημείο σύγκλιση, υπάρχει ένας τρόπος να δούμε την $E_{S_\infty}^\infty$ που τη συνδέει με αντικείμενα της θεωρίας μοντέλων. (βλέπε ακόμα [**1**]). Για κάθε μη κενή γλώσσα $L = \{R_i\}_{i\in I}$, όπου I είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο και R_i είναι ένα n_i-θέσιο σύμβολο σχέσης, συμβολίζουμε με X_L το χώρο

$$X_L = \prod_i 2^{(\mathbb{N}^{n_i})},$$

που είναι προφανώς ομοιομορφικός με το χώρο Cantor $2^{\mathbb{N}}$. Μπορούμε να δούμε τον X_L σαν τον χώρο των αριθμήσιμων L δομών (θεωρώντας τις να έχουν σύμπαν το $\mathbb{N}$), ταυτίζοντας το $x = (x_i)_{i\in I} \in X_L$ με τη δομή

$$< \mathbb{N}, R_i >_{i\in I}$$

όπου

$$R_i(s) \iff x_i(s) = 1.$$

Η ομάδα S_∞ δρά στο X_L με τον προφανή τρόπο : $g \cdot x = y$ σημαίνει ότι η g είναι ένας ισομορφισμός της δομής που συνδέεται με το x, με τη δομή που συνδέεται με το y. Αυτή λέγεται και λογική δράση της S_∞ στον X_L. Α η σ είναι μια Πρόταση, συμβολίζουμε με $\mathrm{mod}(\sigma)$ το σύνολο όλων των $x \in X_l$ που είναι μοντέλα της σ. Επίσης με $\cong_\sigma$ συμβολίζεται ο περιορισμός της σχέσης του ισομορφισμού στο $\mathrm{mod}(\sigma)$.

Προκύπτει τώρα, ότι η $E^{\infty}_{S_\infty}$ είναι Borel ισοδύναμη με μια σχέση της μορφής $\cong_\sigma$ για κατάλληλη σ. Για παράδειγμα, αν

$$\gamma = \text{η θεωρία των γραφημάτων}$$

στη γλώσσα $L = \{R\}$, τότε

$$(\cong_\gamma) \sim_B E^{\infty}_{S_\infty}.$$

Συνεπώς, η σχέση του *ισομορφισμού γραφημάτων*, $\cong_\gamma$, είναι καθολική ανάμεσα στις σχέσεις ισοδυναμίας που εισάγονται από Borel δράσεις της S_∞.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ο χώρος του Urysohn.

1. Ιδιότητες του χώρου του Urysohn

Ο χώρος του Urysohn, είναι ένας Πολωνικός χώρος που κατασκευάστηκε από τον Urysohn στο [**7**]. Είναι καθολικός, με την έννοια ότι κάθε άλλος Πολωνικός χώρος περιέχεται ισομετρικά σ' αυτόν. Για παραπέρα μελέτη στο χώρο παραπέμπουμε στα [**5**], [**6**], [**8**] και [**9**].

Ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος M, λέμε ότι έχει την *ιδιότητα Urysohn* αν για κάθε πεπερασμένο μετρικό χώρο X και κάθε υπόχωρο $Y \subset X$, κάθε ισομετρική εμφύτευση $f : Y \to M$, μπορεί να επεκταθεί σε μια ισομετρική εμφύτευση $g : X \to M$.

Αποδεικνύουμε το παρακάτω Θεώρημα το οποίο οφείλεται στον Urysohn:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1. *Αν U_1 και U_2 είναι δυο Πολωνικοί χώροι με την ιδιότητα Urysohn, τότε είναι ισομετρικοί.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σταθεροποιούμε ακολουθίες $\{x_n\}$ και $\{y_n\}$ πυκνές στους U_1 και U_2 αντίστοιχα. Θα ορίσουμε επαγωγικά, $\{y'_n\}$ και $\{x'_n\}$ ακολουθίες στους U_1 και U_2 αντίστοιχα, ώστε η απεικόνιση

$$f : \{x_n\} \cup \{y'_n\} \to \{x'_n\} \cup \{y_n\}$$

με $f(x_n) = x'_n$ και $f(y'_n) = y_n$ να είναι ισομετρία. Αν το καταφέρουμε αυτό, τότε επειδή η $\{x_n\}$ είναι πυκνή στον U_1, η f θα επεκτείνεται σε ισομετρική εμφύτευση

$$\overline{f} : U_1 \to U_2.$$

Επειδή επιπλέον $\{y_n\} \subset \operatorname{ran}(\overline{f})$ και η $\{y_n\}$ είναι πυκνή στον U_2, έπεται ότι η $\overline{f}$ θα είναι και επί και συνεπώς ισομετρία μεταξύ των U_1 και U_2. Για τον ορισμό των $\{y'_n\}$ και $\{x'_n\}$, αν έχουμε ορίσει τα $y'_1, \ldots, y'_n$ στον U_1 και $x'_1, \ldots, x'_n$ στον U_2 ώστε η απεικόνιση

$$x_i \mapsto x'_i \quad \text{και} \quad y'_i \mapsto y_i,\ 1 \le i \ \le n \tag{7}$$

να είναι ισομετρία, τότε λόγω της ιδιότητας Urysohn του U_2, μπορούμε να βρούμε $x'_{n+1} \in U_2$ ώστε η απεικόνιση που επεκτείνει την (7) με $x_{n+1} \mapsto x'_{n+1}$ να είναι ισομετρία. Τότε και η αντίστροφή της,

$$x'_i \mapsto x_i,\ 1 \le i \le n+1 \quad \text{και} \quad y_i \mapsto y'_i,\ 1 \le i \le n \tag{8}$$

είναι επίσης ισομετρία και τώρα λόγω της ιδιότητας Urysohn του U_1, θα υπάρχει $y'_{n+1} \in U_1$ ώστε η απεικόνιση που επεκτείνει την (8) με $y_{n+1} \mapsto y'_{n+1}$ να είναι ισομετρία.

Με τον τρόπο αυτό πραγματοποιείται το επαγωγικό βήμα. □

Παρ' όλο που προς το παρόν δεν έχουμε αποδείξει την ύπαρξή του, θα καλούμε έναν Πολωνικό χώρο που έχει την ιδιότητα Urysohn, Urysohn χώρο. Από το προηγούμενο Θεώρημα είναι μοναδικός με προσέγγιση ισομετρίας και τον συμβολίζουμε με $\mathbb{U}$.

Πρίν ακόμα αποδείξουμε την ύπαρξή του, θα αποδείξουμε κάποιες ιδιότητές του που θα μας είναι χρήσιμες στα επόμενα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2. *Ο χώρος του Urysohn,* $\mathbb{U}$, *είναι καθολικός, δηλαδή κάθε άλλος Πολωνικός χώρος εμφυτεύεται ισομετρικά στον* $\mathbb{U}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι Y ένας Πολωνικός χώρος. Σταθεροποιούμε $\{x_n\}$ και $\{y_n\}$ πυκνές ακολουθίες στους $\mathbb{U}$ και Y αντίστοιχα. Η απόδειξη είναι μια πιο εύκολη εκδοχή αυτής του Θεωρήματος 3.1. Θα ορίσουμε επαγωγικά μια ακολουθία $\{y'_n\}$ στον $\mathbb{U}$, ώστε η απεικόνιση

$$f : \{y_n\} \ni y_n \mapsto y'_n \in \mathbb{U}$$

να είναι ισομετρία. Τότε η f θα επεκτείνεται σε μια ισομετρική εμφύτευση $\overline{f} : Y \to \mathbb{U}$ και η απόδειξη θα έχει τελειώσει.

Διαλέγουμε τυχαίο $y'_1 \in \mathbb{U}$, και για το επαγωγικό βήμα, αν έχουμε διαλέξει τα $y'_1, \ldots, y'_n$ ώστε η απεικόνιση

$$y_i \mapsto y'_i,\ a \leq i \leq n \tag{9}$$

να είναι ισομετρία, από την Urysohn ιδιότητα του $\mathbb{U}$, μπορούμε να βρούμε $y'_{n+1} \in \mathbb{U}$, ώστε η απεικόνιση που επεκτείνει την (9) με

$$y_{n+1} \mapsto y'_{n+1}$$

να είναι επίσης ισομετρία. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3. *Ο χώρος του Urysohn είναι* υπερομογενής, *δηλαδή κάθε ισομετρία μεταξύ πεπερασμένων υποσυνόλων του* $\mathbb{U}$, *επεκτείνεται σε ισομετρία του χώρου.*

Το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται μεταξύ άλλων και το εξής: Αν $x, y \in \mathbb{U}$, τότε υπάρχει ισομετρία $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ ώστε $f(x) = y$. Η απόδειξη είναι πάλι μια τροποποίηση αυτής του Θεωρήματος 3.1:

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 3.3. Ας είναι $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ και $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ δυό πεπερασμένοι υπόχωροι του $\mathbb{U}$, και

$$f : X \ni x_i \mapsto y_i \in Y,\ 1 \leq i \leq m \tag{10}$$

μια ισομετρία μεταξύ τους. Σταθεροποιούμε ακόμα μια ακολουθία $\{u_n\}$, πυκνή στον $\mathbb{U}$. Θα ορίσουμε επαγωγικά δυο ακολουθίες $\{u'_n\}$, $\{u''_n\}$ στον $\mathbb{U}$ έτσι ώστε η απεικόνιση που επεκτείνει την (10) με

$$u_n \mapsto u'_n \quad \text{και} \quad u''_n \mapsto u_n$$

να είναι επίσης ισομετρία. Επειδή η $\{u_n\}$ είναι πυκνή στον $\mathbb{U}$, η ισομετρία αυτή θα επεκτείνεται σε μια ισομετρική εμφύτευση $\overline{f} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$. Επειδή τώρα επίσης $\{u_n\} \subset \operatorname{ran}(\overline{f})$, η $\overline{f}$ θα είναι μια ισομετρία που επεκτείνει την f.

Για το επαγωγικό βήμα, έστω ότι έχουμε ορίσει τα $u'_1, \ldots, u'_k$ και $u''_1, \ldots, u''_k$ ώστε η απεικόνιση που επεκτείνει την (10) με

$$u_i \mapsto u'_i \quad \text{και} \quad u''_i \mapsto u_i \; 1 \leq i \leq k \tag{11}$$

να είναι ισομετρία. Από την ιδιότητα Urysohn του $\mathbb{U}$, θα υπάρχει $u'_{k+1} \in \mathbb{U}$ έτσι ώστε αν επεκτείνουμε με

$$u_{k+1} \mapsto u'_{k+1}$$

να έχουμε μια ισομετρία . Τότε η αντίστροφη,

$$\begin{aligned} y_i &\mapsto x_i, 1 \leq i \leq n \\ u'_i &\mapsto u_i, 1 \leq i \leq k+1 \\ u_i &\mapsto u''_i, 1 \leq i \leq k \end{aligned} \tag{12}$$

θα είναι επίσης ισομετρία και πάλι από την ιδιότητα Urysohn, θα υπάρχει $u''_{k+1} \in \mathbb{U}$ ώστε αν την επεκτείνουμε με

$$u_{k+1} \mapsto u''_{k+1}$$

να συνεχίσουμε να έχουμε μια ισομετρία. Σ' αυτό το σημείο ολοκληρώνεται το επαγωγικό βήμα και η απόδειξη του Θεωρήματος. □

Για το επόμενο θεώρημα, θα μας χρειαστούν τα εξής:

Λημμα 3.4. *Υποθέτουμε ότι $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και $y, z \notin X$ Στους χώρους $X \cup \{y\}$ και $X \cup \{z\}$ θεωρούμε δυο μετρικές d_1 και d_2 έτσι ώστε*

$$d_1 | X \times X = d_2 | X \times X$$

Τότε μπορούμε να επεκτείνουμε τις d_1, d_2 στον $X \cap \{y\} \cap \{z\}$ θέτοντας

$$d(y, z) = \max\{|d_1(y, x_i) - d_2(z, x_i)| : 1 \leq i \leq n\}.$$

Αποδειξη. Αρκεί ν' αποδείξουμε ότι η d ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα, δηλαδή για $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in X \cup \{y\} \cup \{z\}$

$$d(\omega_1, \omega_2) \leq d(\omega_1, \omega_3) + d(\omega_2, \omega_3) \tag{13}$$

Φυσικά, ο έλεγχος της (13) έχει νόημα μόνο στην περίπτωση που δυό τουλάχιστον από τα $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ είναι τα y και z. Αρκεί συνεπώς να ελέγξουμε ότι για κάθε x_i,

$$\begin{aligned} d(y,z) &\leq d(y,x_i) + d(x_i,z) \\ d(y,x_i) &\leq d(y,z) + d(z,x_i) \\ d(z,x_i) &\leq d(z,y) + d(y,x_i) \end{aligned} \tag{14}$$

Για την πρώτη από τις (14) παρατηρούμε ότι αν σταθεροποιήσουμε x_j ώστε

$$d(y,z) = d_1(y,x_j) - d_2(z,x_j),$$

τότε

$$\begin{aligned} d(y,z) &= d_1(y,x_j) - d_2(z,x_j) \\ &\leq d_1(y,x_j) + d_2(z,x_i) - d_2(x_i,x_j) \\ &= d_1(y,x_j) + d_2(z,x_i) - d_1(x_i,x_j) \\ &\leq d_1(y,x_i) + d_2(z,x_i) \\ &= d(y,x_i) + d_2(z,x_i). \end{aligned}$$

Η δεύτερη και η τρίτη των (14) είναι προφανείς, αφού από τον ορισμό θα έχουμε ότι

$$d(y,z) \geq |d(y,x_i) - d(z,x_i)|.$$

□

Λημμα 3.5. *Υποθέτουμε ότι (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος,*

$$x_1, \ldots, x_n \in X$$

και y ένα σημείο εκτός του X. Θέτοντας

$$Y = \{x_1, \ldots, x_n, y\}$$

υποθέτουμε ακόμα ότι έχει οριστεί μια μετρική d_2 στον Y που συμφωνεί με την d_1 στα σημεία $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Ορίζουμε τότε την απόσταση του y από ένα τυχόν σημείο $x \in X$ με

$$d(y,x) = \min\{d_2(y,x_i) + d_1(x_i,x) : a \leq i \leq n\}. \tag{15}$$

Τότε με χρήση της (15), ο χώρος $X \cup \{y\}$ δομείται σε μετρικό χώρο.

Αποδειξη. Αρκεί πάλι να δείξουμε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα (13). Εδώ έχουμε να ελέγξουμε δυο περιπτώσεις, για $x, x' \in X$:

$$\begin{aligned} d(y,x) &\leq d(y,x') + d(x',x) \\ d(x,x') &\leq d(x,y) + d(y,x') \end{aligned} \tag{16}$$

Για την πρώτη των (16), αν x_i είναι το συγκεκριμμένο στοιχείο του $\{x_1, \ldots, x_n\}$ για το οποίο
$$d(y, x') = d_2(y, x_i) + d_1(x_i, x'),$$
τότε
$$\begin{aligned} d(y, x') + d(x[, x) &= d_2(y, x_i) + d_1(x_i, x') + d_1(x', x) \\ &\geq d_2(y, x_i) + d_1(x_i, x) \\ &\geq d(y, x) \end{aligned}$$
όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από τον ορισμό (15). Για τη δεύτερη ανισότητα των (16), σταθεροποιούμε x_i, x_j ώστε
$$d(y, x) = d_2(y, x_i) + d_1(x_i, x) \tag{17}$$
και
$$d(y, x') = d_2(y, x_j) + d_1(x_j, x') \tag{18}$$
Τότε
$$\begin{aligned} d(y, x') &= d_2(y, x_j) + d_1(x_j, x') \\ &\geq d_2(x_i, x_j) - d_2(y, x_i) + d_1(x_j, x') \\ &= d_1(x_i, x_j) + d_1(x_j, x') - d_2(y, x_i) \\ &\geq d_1(x_i, x') - d_2(y, x_i) \end{aligned} \tag{19}$$
οπότε προσθέτοντας κατά μέλη τις (17) και (19) παίρνουμε
$$d(y, x) + d(y, x') \geq d_1(x_i, x) + d_1(x_i, x) + d_1(x_i, x') \geq d(x, x')$$
και το τελευταίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Είμαστε σε θέση τώρα ν' αποδείξουμε το παρακάτω κρίσιμο θεώρημα:

Θεωρημα 3.6. *Αν ο χώρος X είναι διαχωρίσιμος μετρικός και έχει την ιδιότητα Uryxohn, τότε η πλήρωση του $\overline{X}$ είναι ισομετρική με τον* $\mathbb{U}$.

Αποδειξη. Επειδή η πλήρωσή του είναι Πολωνικός χώρος, αρκεί ν' αποδείξουμε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1, ότι ο $\overline{X}$ θα έχει την ιδιότητα Urysohn. Αρκεί προφανώς ν' αποδειχτεί ότι αν $x_1, \ldots, x_n$ είναι σημεία του $\overline{X}$ και y ένα σημείο εκτός του X, ώστε το σύνολο $Y = \{x_1, \ldots, x_n, y\}$ να δομείται σε μετρικό χώρο με μια μετρική d_1 που συμφωνεί με τη μετρική d του $\overline{X}$ στα σημεία του $\overline{X}$, τότε υπάρχει $y' \in \overline{X}$ ώστε
$$d(y', x_k) = d_1(y, x_k),\ 1 \leq k \leq n.$$
Προφανώς θα χρησιμοποιήσουμε ουσιαστικά το γεγονός ότι ο X έχει την ιδιότητα Urysohn. Έτσι θα προσεγγίσουμε το y' με μια ακολουθία

$\{y^i\}$ σημείων του X που θα έχουν περίπου τις σωστές αποστάσεις από τα x_k $1 \leq k \leq n$.

Για κάθε $1 \leq k \leq n$ και $i \in \mathbb{N}$, σταθεροποιούμε ένα σημείο x_k^i στον X ώστε

$$d(x_k^i, x_k) < \frac{1}{2^i}. \tag{20}$$

Θα κατασκευάσουμε τώρα σημεία y^i, $i \in \mathbb{N}$ του X ώστε να ισχύουν οι εξής δυο σχέσεις: (Θέτουμε $d_k = d_1(x_k, y)$)

$$d_k \leq d(y^i, x_k^i) < d_k + \frac{1}{2^i} \tag{21}$$

$$d(y^i, y^{i+1}) < \frac{1}{2^{i-2}} \tag{22}$$

Η σχέση (22) εξασφαλίζει ότι η ακολουθία $\{y^i\}$ είναι Cauchy και συνεπώς θα συγκλίνει σε κάποιο σημείο y' του $\overline{X}$. Από την (21) θα έπεται ότι

$$d(y', x_k) = \lim_i d(y^i, x_k^i) = d_k$$

και μ' αυτόν τον τρόπο θα έχουμε τελειώσει.

Ας δούμε με ποιό τρόπο γίνεται το επαγωγικό βήμα στον ορισμό των y^i. Έχοντας ορίσει τα $y^1, \ldots, y^i$ στον X, ώστε να ικανοποιούνται οι (21) και (22), παρατηρούμε ότι σύμφωνα με το Λήμμα 3.5, η μετρική d_1, μπορεί να επεκταθεί στα σημεία του $\overline{X}$ με

$$d_1(y, x) = \min\{d_1(y, x_k) + d(x_k, x) : 1 \leq k \leq n\}$$

Θεωρούμε τον υπόχωρο του $X \cup \{y\}$, $\{x_1^{i+1}, \ldots, x_n^{i+1}, y\}$. Για αρκετά μεγάλα i,

$$d(y, x_k^{i+1}) = d(y, x_k) + d(x_k, x_k^{i+1})$$

και συνεπώς

$$d_k \leq d(y, x_k^{i+1}) \leq d_k + \frac{1}{2^i} \tag{23}$$

Χρησιμοποιούμε στη συνέχεια το Λήμμα 3.4 για να ορίσουμε μια μετρική στο χώρο $\{x_1^{i+1}, \ldots, x_n^{i+1}, y, y^i\}$ που επεκτείνει τις d και d_1 :

$$d(y, y^i) = \max\{|d_1(y, x_k^{i+1}) - d(y^i, x_k^{i+1})| : 1 \leq k \leq n\}$$

Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης (21) θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d_k \leq d(y^i, x_k^{i+1}) &\leq d(y^i, x_k^i) + d(x_k^i, x_k) + d(x_k, x_k^{i+1}) \\ &< d_k + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} \\ &< d_k + \frac{1}{2^{i-2}}. \end{aligned}$$

και λόγω του ορισμού της d_1, $d_k \leq d_1(y, x_k^{i+1}) < d_k + \frac{1}{2^{i+1}}$. Άρα σε κάθε περίπτωση,

$$|d_1(y, s_k^{i+1}) - d(y^i, s_k^{i+1})| < \frac{1}{2^{i_2}} \tag{24}$$

Από την ιδιότητα Urysohn του X, θα υπάρχει $y^{i+1} \in X$ ώστε

$$d(y^{i+1}, y^i) = d_1(y, y^i) \quad \text{και} \quad d(y^{i+1}, x_k^{i+1}) = d_1(y, x_k^{i+1})$$

οπότε το y^{i+1} θα ικανοποιεί τις (21) και (22), λόγω των (23) και (24). □

2. Ύπαρξη του χώρου του Urysohn

Στα επόμενα θα κατασκευάσουμε το χώρο του Urysohn ξεκινώντας από έναν τυχαίο Πολωνικό χώρο (X, d). Η κατασκευή είναι μια μικρή παραλλαγή αυτής που βρίσκεται στο [**6**] και οφείλεται στον Α. Κεχρή στο [**2**]. Έχει το προσόν ότι θα μας επιτρέψει να εμφυτεύσουμε ισομετρικά τον τυχόντα Πολωνικό χώρο (X, d) με έναν ορίσιμο τρόπο στον $\mathbb{U}$, έτσι ώστε να μπορούμε να δούμε την Effros–Borel δομή του $\mathbb{U}$, $F(\mathbb{U})$ σαν τον Πολωνικό χώρο όλων των Πολωνικών χώρων. Μ' αυτόν τον τρόπο, η σχέση της ισομετρίας Πολωνικών χώρων μπορεί να ιδωθεί σαν αναλυτική σχέση ισοδυναμίας ενός Πολωνικού χώρου.

Σταθεροποιούμε έναν Πολωνικό μετρικό χώρο (X, d) με $X \neq \emptyset$ και συμβολίζουμε με $E(X, \omega)$ το σύνολο όλων των $f : X \to \mathbb{R}$ που είναι τέτοιες ώστε

1. $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \leq f(x) + f(y)$.
2. Για κάποιο πεπερασμένο $Y \subset X$ που θα το καλούμε στήριγμα της f, ισχύει
$$f(x) = \inf\{d(x, y) + f(y) : y \in Y\}.$$

Διαισθητικά, το σύνολο $E(X, \omega)$ είναι όλα τα υποψήφια σημεία που πρέπει να προστεθούν στον X, ώστε να μπορούμε να επεκτείνουμε κατά ένα σημείο ισομετρικές εμφυτεύσεις πεπερασμένων συνόλων στο X.

Ο $E(X, \omega)$ μπορεί να δομηθεί σε μετρικό χώρο αν θέσουμε

$$d_E(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}.$$

Θα πρέπει να ελέγξουμε εδώ την τριγωνική ανισότητα: Δοθέντων f, g και $h \in E(X, \omega)$

$$\begin{aligned} d_E(f, g) + d_E(g, h) &= \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\} + \\ &\qquad \sup\{|g(x) - h(x)| : x \in X\} \\ &\geq \sup\{|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| : x \in X\} \\ &\geq \sup\{|f(x) - h(x)| : x \in X\} \\ &= d_E(f, h) \end{aligned}$$

Μπορούμε να ταυτίσουμε το τυχόν σημείο $x \in X$ με την $f_x \in E(x, \omega)$ όπου

$$f_x(y) = d(x, y).$$

Η απεικόνιση $x \mapsto f_x$ είναι ισομετρική εμφύτευση. Αρκεί γι' αυτό να δείξουμε ότι

$$d(x, y) = \sup\{|f_x(z) - f_y(z)| : z \in X\}. \tag{25}$$

Για κάθε $z \in X$,

$$|f_x(z) - f_y(z)| = |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

και από την άλλη μεριά

$$|f_x(x) - f_y(x)| = d(x, y),$$

οπότε η (25) ισχύει. Με την ταύτιση αυτή η τιμή $f(x)$ μιας f στο $E(X, \omega)$ είναι ακριβώς όπως αναμενόταν η απόσταση της f από το x :

$$f(x) = d_E(f, f_x) = d_E(f, x)$$

καθ' όσον

$$\begin{aligned} d_E(f, x) &= \sup\{|f(z) - f_x(z)| : z \in X\} \\ &= \sup\{|f(z) - d(x, z)| : z \in X\} \\ &\leq f(x) \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το 1 του ορισμού, και από την άλλη

$$|f(x) - f_x(x)| = f(x)$$

Θέτουμε επίσης

$$(\overline{E}(X, \omega), \overline{d}_E) = \text{ η πλήρωση του } (E(X, \omega), d_E)$$

και ορίζουμε επαγωγικά

$$\begin{aligned} X_0 &= X \\ X_{n+1} &= \overline{E}(X_n, \omega). \end{aligned}$$

έτσι ώστε $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots$. Θέτουμε τέλος

$$X_\infty = \cup_n X_n.$$

και παίρνουμε το επόμενο λήμμα:

ΛΗΜΜΑ 3.7. *Ο X_∞ είναι διαχωρίσιμος και έχει την ιδιότητα Urysohn.*

Απόδειξη. Για ν' αποδείξουμε ότι ο X_∞ έχει την ιδιότητα Urysohn, αρκεί για ένα πεπερασμένο υποσύνολό του $\{x_1,\ldots,x_n\}$ και $y \in X_\infty$, αν στο σύνολο $Y = \{x_1,\ldots,x_n,y\}$ έχει οριστεί μια μετρική d που συμφωνεί με τη μετρική d του X_∞ στο $\{x_1,\ldots,x_n\}$, να βρούμε $y' \in X_\infty$ ώστε

$$d(y',x_k) = d'(y,x_k)\ 1 \leq k \leq n.$$

Προφανώς μπορούμε να βρούμε $m \in \mathbb{N}$, ώστε $x_1,\ldots,x_n \in X_m$. Ορίζουμε τότε μια μετρική στο $X_m \cup \{y\}$, από το Λήμμα 3.5 με

$$d_1(y,x) = \min\{d'(y,x_k) + d(x_k,x) : 1 \leq k \leq n\}$$

και θεωρούμε την απεικόνιση $f_y : X_m \to \mathbb{R}$ με $f_y(x) = d_1(y,x)$.

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας της d_1 και του τρόπου ορισμού της θα έχουμε ότι $f_y \in E(X_m,\omega)$ και συνεπώς f_y είναι το ζητούμενο σημείο αφού

$$d(f_y,x_k) = f_y(x_k) = d_1(y,x_k).$$

Στη συνέχεια διαπιστώνουμε ότι ο X_∞ είναι διαχωρίσιμος:

Αρκεί ν' αποδείξουμε ότι για X διαχωρίσιμο, ο $E(X,\omega)$ είναι διαχωρίσιμος. Σ' αυτήν την περίπτωση, επαγωγικά κάθε X_n θα είναι διαχωρίσιμος και η ένωση ως προς $n \in \mathbb{N}$ πυκνών αριθμήσιμων υποσυνόλων του x_n θα δώσει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X_∞.

Ας είναι συνεπώς Δ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Ορίζουμε

$$\mathcal{D} = \{f \in E(X,\omega) : \mathrm{supp}(f) \subset \Delta \ \&\ \text{ για κάθε } x \in \mathrm{supp}(f),\ f(x) \in \mathbb{Q}\}.$$

Το $\mathcal{D}$ είναι προφανώς αριθμήσιμο υποσύνολο του $E(X,\omega)$. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι είναι πυκνό στον $E(X,\omega)$. Ας είναι συνεπώς $\epsilon > 0$ και $g \in E(X,\omega)$. Έστω $Y = \{y_1,\ldots,y_n\} = \mathrm{supp}(g)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι για $y_i \neq y_j$ στο $\mathrm{supp}(g)$

$$g(y_i) < g(y_j) + d(y_i,y_j)$$

διαφορετικά μπορούμε να αφαιρέσουμε το y_j από το $\mathrm{supp}(g)$. Θέτουμε

$$\epsilon_0 = \min\{d(y_i,y_j) - |g(y_i) - g(y_j)| : 1 \leq i \neq j \leq n\} > 0.$$

και $\delta < \min\{\epsilon_0/4, \epsilon/4\}$. Βρίσκουμε στη συνέχεια $x_i \in \Delta$, $1 \leq i \leq n$ με $d(x_i,y_i) < \delta$ και θέτουμε $f(x_i)$ να είναι ένας ρητός αριθμός στο διάστημα

$$[g(y_i) + \delta, \qquad g(y_i) + \min\{\epsilon_0/4, \epsilon/4\}].$$

Θα δείξουμε ότι $f \in \mathcal{D}$ και $d_E(g,f) < \epsilon$.

παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι από την επιλογή των y_i,

$$\begin{aligned} d(x_i,x_j) &< d(y_i,y_j) - 2\delta \\ &< |g(y_i) - g(y_j)| + \frac{\epsilon_0}{2} \\ &< |f(x_i) - f(x_j)| \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} f(x_i) + f(x_j) &\geq g(y_i) + g(y_j) + 2\delta \\ &\geq d(y_i, y_j) + 2\delta \\ &\geq d(x_i, x_j) \end{aligned} .$$

Συνεπώς $f \in E(X, \omega)$ και άρα $f \in \mathcal{D}$. Επιπλέον, για τυχόν $x \in X$, βρίσκουμε x_i ώστε $f(x) = f(x_i) + d(x_i, x)$ οπότε

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &\leq g(y_i) + d(t_i, x) - f(x_i) - d(x_i, x) \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + d(y_i, x_i) + d(x_i, x) - d(x_i, x) \\ &< \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

και συνεπώς $d_E(g, f) < \epsilon$. □

Από το Λήμμα αυτό, προκύπτει ότι η πλήρωση του X_∞, X^*, θα είναι ο χώρος Urysohn.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Το πρόβλημα της ισομετρίας σε Πολωνικούς χώρους.

Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1. *Η ισομετρία στους Πολωνικούς μετρικούς χώρους, $\cong_i$, είναι Borel ισοδύναμη με την καθολική σχέση ισοδυναμίας που εισάγεται από την Borel δράση μιας Πολωνικής ομάδας.*

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η κλάση των Πολωνικών χώρων, μπορεί να ταυτιστεί με τα κλειστά υποσύνολα του χώρου του Urysohn $\mathbb{U}$, και συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε μια Borel δομή στην κλάση αυτή. Για τη μια κατεύθυνση, της αναγωγής δηλαδή της ισομετρίας στην Borel δράση μιας Πολωνικής ομάδας, υποψήφια είναι η ομάδα των ισομετριών του $\mathbb{U}$, $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$. Εδώ αντιμετωπίζουμε το εξής πρόβλημα: Αν X, Y είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{U}$ και $\phi : X \to Y$ ισομετρία, τότε η ϕ δεν επεκτείνεται απαραίτητα σε μια ισομετρία $\phi' : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$. Πραγματικά, θεωρώντας τους $\mathbb{U}$ και $\mathbb{U}^*$, θα υπάρχει μια ισομετρία μεταξύ τους, η οποία είναι προφανές ότι δεν επεκτείνεται σε ισομετρία του $\mathbb{U}^*$. Το πρόβλημα αυτό, λύνεται με τον εξής τρόπο: Δοθείσης ισομετρίας

$$\phi : X \to Y$$

θα την επεκτείνουμε αρχικά σε μια ισομετρία $\phi^* : X^* \to Y^*$. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι X και Y είναι δυο Πολωνικοί χώροι και $\phi : X \to Y$ μια ισομετρική εμφύτευση. Μπορούμε να ορίσουμε τότε μια απεικόνιση

$$E(\phi, \omega) : E(X, \omega) \to E(Y, \omega).$$

με

$$E(\phi, \omega)(f)(y) = \min\{f(x) + d(\phi(x), y) : x \in \mathrm{supp}(f)\}$$

δηλαδή $E(\phi, \omega)(f)$ είναι το στοιχείο $y \in E(Y, \omega)$ με $\mathrm{supp}(g) = \phi(\mathrm{supp}(f))$ και οι τιμές της g στο στήριγμά της είναι ίδιες μ' αυτές της f. Επειδή η ϕ είναι ισομετρία, από το Λήμμα 3.5, θα έχουμε ότι $E(\phi, \omega)(f) \in E(Y, \omega)$. Επιπλέον η $E(\phi, \omega)$ είναι μια ισομετρική εμφύτευση του $E(X, \omega)$ στον $E(Y, \omega)$. Πραγματικά, αν $g, f \in E(X, \omega)$ και $x \in X$, θα υπάρχει $x_0 \in \mathrm{supp}(f)$ ώστε $f(x) = f(x_0) + d(x, x_0)$, οπότε

$$g(x) - f(x) \leq g(x_0) + d(x, x_0) - f(x_0) - d(x, x_0) \leq g(x_0) - f(x_0).$$

Όμοια μπορούμε να βρούμε $y_0 \in \mathrm{supp}(g)$ ώστε

$$f(x) - g(x) \leq f(y_0) - g(y_0)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} d_E(f,g) &= \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\} \\ &= \max\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)\}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} d_E(E(\phi,\omega)(f), E(\phi,\omega)(g)) &= \max\{|E(\phi,\omega)(f)(y) - E(\phi,\omega)(g)(y)| : \\ &\qquad y \in \mathrm{supp}(E(\phi,\omega)(f)) \cup \mathrm{supp}(E(\phi,\omega)(g))\} \\ &= \max\{|E(\phi,\omega)(f)(\phi(x)) - E(\phi,\omega)(g)(\phi(x))| : \\ &\qquad x \in \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)\} \\ &= \max\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)\} \\ &= d_E(f,g) \end{aligned}$$

Άρα η ϕ τελικά επεκτείνεται σε μια ισομετρική εμφύτευση

$$\overline{E}(\phi,\omega) : \overline{E}(X,\omega) \to \overline{E}(Y,\omega)$$

Ορίζουμε επαγωγικά

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \phi \\ \phi_{n+1} &= \overline{E}(\phi_n,\omega) \end{aligned}$$

έτσι ώστε η ϕ_{n+1} επεκτείνει κάθε φορά τη ϕ_n, και τέλος

$$\phi_\infty = \cup_n \phi_n.$$

Τότε η ϕ_∞ είναι μια ισομετρική εμφύτευση του X_∞ στον Y_∞ και συνεπώς επεκτείνεται σε μια ισομετρική εμφύτευση

$$\phi^* : X^* \to Y^*$$

όπως ακριβώς θέλαμε.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\phi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ είναι ισομετρικές εμφυτεύσεις. Αν $f \in E(X,\omega)$, τότε αν $g = E(\psi,\omega)(E(\phi,\omega)(f))$,

$$\mathrm{supp}(g) = \psi(\phi(\mathrm{supp}(f)) = \psi \circ \phi(\mathrm{supp}(f))$$

και επιπλέον αν $z = \psi \circ \phi(x) \in \mathrm{supp}(g)$, τότε

$$g(z) = E(\phi,\omega)(f()\phi(x)) = f(x).$$

Άρα,

$$E(\psi,\omega) \circ E(\phi,\omega)(f) = E(\psi \circ \phi,\omega)(f)$$

και συνεπώς τελικά

$$(\psi \circ \phi)^* = \psi^* \circ \phi^*. \tag{26}$$

Άρα αν ϕ είναι ισομετρία, τότε και η ϕ^* θα είναι ισομετρία. Η απεικόνιση

$$\mathrm{Iso}(X) \in \phi \mapsto \phi^* \in \mathrm{Iso}(X^*)$$

είναι ισομορφισμός τοπολογικών ομάδων, αφού επιπλέον της (26),

$$(\phi^{-1})^* \circ \phi^* = (\phi^{-1} \circ \phi)^* = 1_{X^*}.$$

Άλλο ένα σημείο που θα πρέπει να ελεγχθεί εδώ είναι ότι είναι συνεχής. Θα πρέπει να ελέγξουμε συνεπώς ότι αν $\phi_n, \phi \in \mathrm{Iso}(X)$ και $\phi_n \to \phi$, τότε για κάθε $f \in X^*$, $\phi_n^*(f) \to \phi^*(f)$. Το τελευταίο αρκεί να ελεγχθεί σ' ένα πυκνό υποσύνολο του X^*, κι έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f \in X_n$. Το ζητούμενο συνεπώς θα προκύψει επαγωγικά, αν για $f \in E(X, \omega,)$

$$E(\phi_n, \omega)(f) \to E(\phi, \omega)(f).$$

Έστω $\mathrm{supp}(f) = \{x_1, \dots, x_k\}$. Τότε για κάθε n,

$$\mathrm{supp}(E(\phi_n, \omega)(f)) = \{\phi_n(x_1), \dots, \phi_n(x_k)\}.$$

Αν $\epsilon > 0$, επειδή $\phi_n \to \phi$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n \geq n_0$,

$$d(\phi_n(x_i), \phi(x_i)) < \epsilon.$$

Άρα για κάθε τέτοιο n,

$$\begin{gathered} E(\phi_n, \omega)(f)(\phi_n(x_i)) - E(\phi, \omega)(f)(\phi_n(x_i)) < \epsilon \\ \text{και } E(\phi_n, \omega)(f)(\phi(x_i)) - E(\phi, \omega)(f)(\phi(x_i)) < \epsilon \end{gathered}$$

Άρα

$$\begin{gathered} d_E(E(\phi_n, \omega), E(\phi, \omega)) = \max\{|E(\phi_n), \omega)(f)(x) - E(\phi, \omega)(f)(x)| : \\ x \in \mathrm{supp}(E(\phi_n, \omega)(f)) \cup \mathrm{supp}(E(\phi, \omega)(f))\} < \epsilon \end{gathered}$$

Επομένως το σύνολο $\mathrm{Iso}(X)^* = \{\phi^* : \phi \in \mathrm{Iso}(X)\}$ είναι μια κλειστή (σαν Πολωνική, από το Λήμμα 2.12) υποομάδα της $\mathrm{Iso}(X^*)$.

Θα βρούμε στα επόμενα μια Πολωνική ομάδα G και έναν Borel G-χώρο W, τέτοια ώστε $\cong_i \leq_B E_G^W$. Όπως εξηγήσαμε προηγουμένως, θα πάρουμε $G = \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ και $W = F(\mathbb{U})$. Η ομάδα G δρά μ' έναν Borel τρόπο στο $F(\mathbb{U})$ με τον προφανή τρόπο $g \cdot F = g(F)$. Η δράση αυτή είναι Borel αφού

$$\begin{aligned} g(F) \cap U \neq \emptyset \iff & \exists k \forall n \exists m (F \cap U_m \neq \emptyset \;\& \\ & \& \; \mathrm{diam}(U_m) < 1/n \;\&\; \exists \ell (x_\ell \in U_m \;\&\; g(x_\ell) \in F_k)) \end{aligned}$$

όπου $\{U_m\}_m$ είναι μια βάση περιοχών του $\mathbb{U}$, $\{x_\ell\}_\ell$ είναι μια ακολουθία πυκνή στον $\mathbb{U}$, και $U = \cup_k F_k$ όπου F_k είναι κλειστά.

Θα χρειαστούμε τα επόμενα λήμματα:

ΛΗΜΜΑ 4.2. *Υπάρχει μια Borel απεικόνιση $f_1 : F(\mathbb{U}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$, τέτοια ώστε αν $C \in F(\mathbb{U})$, υπάρχει μια ακολουθία $\{x_n\}$ πυκνή στον C τέτοια ώστε*

$$f_1(C)(< n, m >) = d(x_n, x_m).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σταθεροποιούμε $\{U_n\}_n$ μια βάση περιοχών του $\mathbb{U}$ και ορίζουμε μια απεικόνιση $\phi_1 : F(\mathbb{U}) \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με

$$\begin{aligned}\phi_1(C, n) = \text{ο ελάχιστος } m \text{ τέτοιος ώστε } U_m \cap C \neq \emptyset\\ \operatorname{diam}(U_m) < \min\Big\{1, \frac{1}{2}\operatorname{diam}(U_n)\Big\}\\ \text{και αν } U_n \cap C \neq \emptyset \text{ τότε } \overline{U}_m \subset U_n.\end{aligned}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\phi_1(C, n) = m \iff & U_m \cap C \neq \emptyset \;\&\; \operatorname{diam}(U_m) < \min\Big\{1, \frac{1}{2}\operatorname{diam}(U_n)\Big\}\\ & \& \;(U_n \cap C \neq \emptyset \Rightarrow \overline{U}_m \subset U_n) \;\&\; \forall i < m \Big[U_m \cap C = \emptyset\\ & \vee \operatorname{diam}(U_m) \leq \min\Big\{1, \frac{1}{2}\operatorname{diam}(U_n)\Big\} \vee (U_n \cap C = \emptyset \;\&\\ & \& \;\not{\overline{U}}_m \subset U_n)\Big]\end{aligned}$$

Άρα η απεικόνιση ϕ_1 είναι Borel. Τώρα, για κάθε $n \in$ θεωρούμε την ακολουθία $n_1 = n, n_2, \ldots$ με $n_{k+1} = \phi_1(C, n_k)$. Είναι εύκολο τότε να δειχτεί ότι το μοναδικό σημείο x_n της τομής $\cap_{i \in \mathbb{N}} U_{n_i}$ είναι σημείο του C και επιπλέον η ακολουθία $\{x_n\}_n$ είναι πυκνή στον C. Ορίζουμε συνεπώς $f_1 : F(\mathbb{U}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ με $f_1(C)(< n, m >) = d(s_n, x_m)$. και τότε μπορούμε μετά από πεπερασμένα βήματα να βρούμε U_{n_k} και U_{m_k} ώστε $\operatorname{diam}(U_{n_k} \cup U_{m_k}) < a + \epsilon$ και $d(U_{n_k}, U_{m_k}) > a - \epsilon$.

$$\begin{aligned}|f_1(C)(< n, m >) - a| <\epsilon \iff & \exists s_1, s_2 \in \mathbb{N}((s_1)_0 = n \;\&\; (s_2)_0 = m \;\&\\ & \& \;\forall 1 \leq i \leq \operatorname{lh}(s_1) - 1 \;(\phi_1((s_1)_i, C) = (s_1)_{i+1})\\ & \& \;\forall 1 \leq i \leq \operatorname{lh}(s_2) - 1 \;(\phi((s_2)_i, C) = (s_2)_{i+1})\\ & \& \;\operatorname{diam}(U_{\operatorname{lh}(s_1)-1} \cup U_{\operatorname{lh}(s_2)-1}) < \epsilon\\ & \& \;d(U_{\operatorname{lh}(s_1)-1}, U_{\operatorname{lh}(s_2)-1}) > a - \epsilon.\end{aligned}$$

και ο τελευταίος υπολογισμός ολοκληρώνει την απόδειξη. □

ΛΗΜΜΑ 4.3. *Υπάρχει μια Borel απεικόνιση $f_2 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}^2} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}^4}$ ώστε αν (X, d) είναι ένας Πολωνικός χώρος, $\{x_n\}$ πυκνή ακολουθία στον X και $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$ ώστε $x(< n, m >) = d(x_n, x_m)$, τότε υπάρχει μια πυκνή ακολουθία $\{x_n^m\}_n$ στον X_m ώστε*

$$d(x_{n_1}^{m_1}, x_{n_2}^{m_2}) = f_2(x)(m_1, n_1, m_2, n_2).$$

Άρα $f_2(x)$ θα είναι μια κωδικοποίηση ενός πυκνού υποσυνόλου του X^*.

Απόδειξη. Δοθέντων των (X, d), $\{x_n\}$ και $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$, ορίζουμε επαγωγικά ως προς m

1. $x_n^0 = x_n$
2. $\{x_n^{m+1}\}_n$ να είναι το σύνολο των $f \in E(X_m, \omega)$ των οποίων το στήριγμα είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\{x_n^m\}_n$ και παίρνουν ρητές τιμές στο στήριγμά τους.

Παρατηρούμε ότι για $f, g \in E(X_m, \omega)$ και $x \in X_m$, θα υπάρχει ένα $y_0 \in \operatorname{supp}(g)$ ώστε $g(x) = g(y_0) + d(y_0, x)$ οπότε:

$$f(x) - g(x) \leq f(y_0) + d(y_0, x) - g(y_0) - d(y_0, x) = f(y_0) - g(y_0)$$

και όμοια θα υπάρχει $x_0 \in \operatorname{supp}(f)$ ώστε

$$g(x) - f(x) \leq g(x_0) - f(x_0).$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε για $m = m_1 = m_2$ ότι η σχέση

$$|f_2(x)(m, n_1, m, n_2) - a| < \epsilon$$

είναι Borel.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι

$$\begin{aligned} |f_2(x)(m, n_1, m, n_2) - a| < \epsilon \iff & \\ & \forall n \in \mathbb{N} |x_{n_1}^{m+1}(x_n^m) - x_{n_2}^{m+1}(x_n^m)| < a + \epsilon \\ & \& \; \exists n \in |x_{n_1}^{m+1}(x_n^m) - x_{n_2}^{m+1}(x_n^m)| > a - \epsilon \end{aligned}$$

και ο τελευταίος υπολογισμός ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Λημμα 4.4. *Υπάρχει μια Borel απεικόνιση $f_3 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}^4} \to F(\mathbb{U})$ τέτοια ώστε $x(< n, m >) = d(x_n, x_m)$ και $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^4} \ni y = f_2(x)$, τότε $f_3(y)$ είναι ένας κλειστός υπόχωρος του $\mathbb{U}$ ισομετρικός με τον X.*

Απόδειξη. Θα ορίσουμε μια ισομετρία μεταξύ του χώρου Urysohn που αναπαρίσταται από το y και του $\mathbb{U}$, οπότε $f_3(y) = \overline{\Phi(\{x_n^0 : n \in \mathbb{N}\})}$. Για την ισομετρία αυτή εργαζόμαστε ανάλογα με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1. Θεωρούμε ότι $\mathbb{U} = \mathbb{R}^*$. Επίσης ας είναι $\{q_n^0\}_n$ μια αρίθμηση των ρητών και $\{q_n^{m+1}\}_n$ το σύνολο των στοιχείων του $\mathbb{U}$ που έχουν σαν στήριγμα ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\{q_n^m\}_n$ και παίρνουν ρητές τιμές σ' αυτό.

Θα λέμε τάξη των στοιχείων q_n^m και x_n^m τον αριθμό m και θα τον συμβολίζουμε με ord. Ας είναι τώρα

$$\{y_n\}_n = \{x_n^m : m, n \in \mathbb{N}\}, \quad \{q_n\}_n = \{q_n^m : m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Στο k βήμα της επαγωγής, θα έχουμε ορίσει σύνολα

$$\{y_1, \ldots, y_k, q_1', \ldots, q_k'\} \subset X^* \quad \text{και} \quad \{y_1', \ldots, y_k', q_1, \ldots, q_k\} \subset \mathbb{U}$$

τέτοια ώστε η απεικόνιση

$$y_i \mapsto y_i' \quad \text{και} \quad q_i' \mapsto q_i$$

να είναι ισομετρία. Στο $k+1$ βήμα βρίσκουμε (το μοναδικό) y'_{k+1} στον $\mathbb{U}$ που έχει τάξη $\max\{\mathrm{ord}(y'_i), \mathrm{ord}(q_i) : 1 \leq i \leq k\} + 1$ ώστε να μπορεί να επεκταθεί η ισομετρία στο y_{k+1} και q'_{k+1} με τάξη

$$\max\{\mathrm{ord}(y_i), \mathrm{ord}(q'_j), 1 \leq i \leq k+1, a \leq j \leq k\}$$

ώστε να μπορεί η ισομετρία να επεκταθεί στο q_{k+1}. Με τον τρόπο αυτό, ακριβώς όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 θα έχουμε μια ισομετρία $\Phi : X^* \to \mathbb{U}$ και ορίζουμε

$$f_3(y) = \overline{\Phi(\{x_n : n \in \mathbb{N} \text{ και } \mathrm{ord}(x-n) = 0\})}$$

Προφανώς $f_3(y)$ είναι ένας χώρος ισομετρικός με τον X. Απομένει να δειχτεί ότι η f_3 είναι Borel. Αν U είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{U}$, θα πρέπει να δειχτεί ότι η σχέση $f_3(y) \cap U \neq \emptyset$ είναι Borel στο y. Παρατηρούμε ότι

$$f(y) \cap U \neq \emptyset \iff \exists k \in \mathbb{N}(\Phi(y_k) \in U_n \text{ και } \mathrm{ord}(y_k) = 0)$$

Άρα $f(y) \cap U \neq \emptyset$ αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία

$$\{y_1, \ldots, y_k, q'_1, \ldots, q'_k\}$$

στον X^* και μια ακολουθία

$$\{q_1, \ldots, q_k, y'_1, \ldots, y'_k\}$$

στον $\mathbb{U}$ ώστε για κάθε $1 \leq i < k$,

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}(q'_{i+1}) &= \max\{\mathrm{ord}(y_j), \mathrm{ord}(q'_\ell) : 1 \leq j \leq i+1, 1 \leq \ell \leq i\} + 1 \\ \mathrm{ord}(y'_{i+1}) &= \max\{\mathrm{ord}(y'_j), \mathrm{ord}(q_j) : 1 \leq j \leq i\} + 1. \end{aligned}$$

και $\mathrm{ord}(y_k) = 0$ και $q_k \in U$ και για κάθε $1 \leq i, j \leq k$

$$\begin{aligned} d(y_i, y_j) &= d(y'_i, y'_j) \\ d(y_i, q'_j) &= d(y'_i, q_j) \\ d(q_i, q_j) &= d(q'_i, q'_j) \end{aligned}$$

. Το μοναδικό πρόβλημα προς λύση εδώ, είναι ότι τόσο τα $q'_1, \ldots, q'_k$, όσο και τα $y'_1, \ldots, y'_k$ δεν κωδικοποιούνται στις αριθμήσιμες πυκνές ακολουθίες. Για το σκοπό αυτό, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε προσεγγίσεις τους.

Παρατηρούμε ότι αν $\mathrm{supp}(f) = \{z_1, \ldots, z_n\}$, $\mathrm{supp}(g) = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ και

1. $d(z_i, \omega_i) < \epsilon$
2. $|f(z_i) - g(\omega_i)| < \epsilon$

τότε $d_E(f, g) < 2\epsilon$.

Πραγματικά, για κάποιο i,

$$f(x) - g(x) \leq f(z_i) + d(z_i, x) - g(\omega_i) - d(\omega_i, x) < 2\epsilon$$

και όμοια $g(x) - f(x) < 2\epsilon$.

Άρα αρκεί επιπλέον τα $y_1', \ldots, y_k'$ και $q_1', \ldots, q_k'$ να αντικατασταθούν από προσεγγίσεις τους τάξης $\frac{1}{n2^k}$ και επιπλέον

$$d(q_k, \mathbb{U} \setminus U) > \frac{1}{n}.$$

για να ολοκληρωθεί η απόδειξη. □

Συνδυάζοντας τα Λήμματα 4.2, 4.3 και 4.4, παίρνουμε

Λημμα 4.5. *Υπάρχει μια Borel απεικόνιση $f : F(\mathbb{U}) \to F(\mathbb{U})$ τέτοια ώστε $f(\emptyset) = \emptyset$, και για $C \neq \emptyset$, $C \in F(\mathbb{U})$, υπάρχει μια ισομετρία $\phi_C : C^* \to \mathbb{U}$ με $\phi_C(C) = f(C)$.*

Αποδειξη. Απλά παίρνουμε $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, όπου f_1, f_2, f_3 είναι οι αντίστοιχες Borel απεικονίσεις των Λημμάτων 4.2, 4.3, 4.4. □

Χρησιμοποιώντας το τελευταίο αυτό Λήμμα, μπορούμε να δούμε ότι για $C, D \in F(\mathbb{U})$,

$$C \cong_i D \iff f(C) E_G^W f(D),$$

το οποίο δείχνει ότι $(\cong_i) \leq_B E_G^W$. Αυτό είναι προφανές αν κάποιο από τα C, D είναι κενό. Έτσι ας υποθέσουμε ότι $C, D \neq \emptyset$. Αν $C \cong_i D$, ας είναι $\phi : C \to D$ μια ισομετρία. Τότε $\phi^* : C^* \to D^*$ είναι μια ισομετρία με $\phi^*(C) = 0$. Τώρα $g = \phi_D \circ \phi^* \circ \phi_C^{-1} \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ και $g \cdot f(C) = f(D)$, συνεπώς $f(C) E_G^W f(D)$. Αντίστροφα, αν $f(C) E_G^W f(D)$, τότε τα $f(C)$, $f(D)$ είναι ισομετρικά, κι έτσι καθ' όσον το C είναι ισομετρικό με το $f(C)$ και το D με το $f(D)$, τα C, D είναι ισομετρικά.

Θα προσπαθήσουμε, στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου ν' αποδείξουμε ότι για κάθε Πολωνική ομάδα G και Borel G-χώρο X, ισχύει ότι $E_G^X \leq_B (\cong_i)$.

Για κάθε Πολωνική ομάδα G, θεωρούμε τη δράση της G στην $F(G)$ με αριστερή μεταφορά:

$$g \cdot C = gC$$

Αν $\{U_n\}$ είναι μια βάση του G, και U ανοιχτό του G, επειδή ο πολλαπλασιασμός είναι συνεχής στη G,

$$g \cdot C \cap U \neq \emptyset \iff \exists n \exists m (g \in U_n \;\&\; C \cap U_m \neq \emptyset \;\&\; U_n \cdot U_m \subset U).$$

Συμβολίζουμε με $E(G) = E_G^{F(G)}$, τήν αντίστοιχη σχέση ισοδυναμίας. Από το [**1**, Theorem 3.5.3] και τις παρατηρήσεις που το ακολουθούν, είναι αρκετό να δείξουμε ότι για κάθε Πολωνική ομάδα G, $E(G) \leq_B (\cong_i)$.

Σταθεροποιούμε συνεπώς μια Πολωνική ομάδα G. Από το Θεώρημα 2.10 μπορούμε να θεωρήσουμε μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική d_G στη G. Ας είναι επίσης $(\overline{G}, \overline{d}_G)$ η πλήρωση της G με την d_G.

Επειδή η d_G είναι αριστερά αναλλοίωτη μετρική, η απεικόνιση

$$G \ni h \mapsto g \cdot h \in G$$

είναι ισομετρία για οποιοδήποτε $g \in G$. Άρα η ισομετρία αυτή επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε μια ισομετρία $\tilde{g}$ της $\overline{G}$. Η απεικόνιση $G \ni g \mapsto \tilde{g} \in \mathrm{Iso}(\overline{G})$ είναι προφανώς ισομορφισμός τοπολογικών ομάδων: Αν $g_n \overset{n}{\to} g$ και $h_n \overset{n}{\to} h$ τότε και $g_n \cdot h_n^{-1} \to g \cdot h^{-1}$ και συνεπώς για κάθε $w \in G$ $g_n \cdot h_n^{-1} \cdot w \to gh^{-1}w$. Επομένως

$$\tilde{G} = \{\tilde{g} : g \in G\} \subset \mathrm{Iso}(\overline{G})$$

είναι μια κλειστή υποομάδα της $\mathrm{Iso}(\overline{G})$.

Θεωρούμε τη δράση της $\tilde{G}$ στο $F(\overline{G})$ με

$$\tilde{g} \cdot C = \tilde{g}(C).$$

Η δράση αυτή είναι Borel, αφού αν σταθεροποιήσουμε $\{G_n\}$ βάση περιοχών για τη G, $\{U_n\}$ βάση περιοχών για τον $\overline{G}$ και $G = \cap_n W_n$ όπου W_n είναι ανοιχτά στο $\overline{G}$, τότε για $U \subset \overline{G}$ ανοιχτό,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(C) \cap U \neq \emptyset &\iff g(C \cap G) \cap U \neq \emptyset \\ &\iff \forall m \exists n \exists k g \in G_n \ \&\ C \cap W_m \cap \cap U_k \neq \emptyset. \\ &\quad \& \ G_n \cdot (W_m \cap U_k) \subset U \end{aligned}$$

Επιπλέον η απεικόνιση

$$F(G) \ni C \mapsto \overline{C} \in F(\overline{G})$$

όπου $\overline{C}$ είναι η κλειστότητα του C στην $\overline{G}$ είναι Borel αφού

$$\overline{C} \cap U \neq \emptyset \iff (C \cap G_m \neq \emptyset \ \&\ G_m \subset U)$$

και αν $C_1, C_2 \in F(G)$,

$$\begin{aligned} C_1 E(G) C_2 &\iff \exists g \in G(g(C_1) = C_2) \\ &\iff \exists \tilde{g} \in \tilde{G}(\tilde{g}(\overline{C}_1) = \overline{C}_2) \\ &\iff \overline{C}_1 E_{\tilde{G}}^{F(\overline{G})} \overline{C}_2 \end{aligned}$$

Άρα $E(G) \leq_B E_{\tilde{G}}^{F(\overline{G})}$. Επομένως είναι αρκετό να δειχτεί ότι $E_{\tilde{G}}^{F(\overline{G})} \leq_B (\cong_i)$.

Γενικότερα, θα δειχτεί ότι αν X είναι ένας Πολωνικός χώρος, H μια κλειστή υποομάδα της $\mathrm{Iso}(X)$ και η H δρά στο $F(X)$ με

$$f \cdot C = f(C),$$

τότε $E_H^{F(X)} \leq_B (\cong_i)$.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα η $H^* = \{g^* : h \in H\}$ θα είναι μια κλειστή υποομάδα των ισομετριών του X^*, $\mathrm{Iso}(X^*)$. Θα χρησιμοποιήσουμε το επόμενο λήμμα:

ΛΗΜΜΑ 4.6. *Ας είναι Y ένας Πολωνικός μετρικός χώρος και $K \subset \mathrm{Iso}(Y)$ μια κλειστή υποομάδα της ομάδας των ισομετριών του. Τότε υπάρχει μια ακολουθία από κλειστά υποσύνολα $R_n \subset Y^n$, $n \geq 2$, τέτοια ώστε*

$$K = \{\phi \in \mathrm{Iso}(Y) : \phi(R_n) = R_n, \forall n \geq 2\},$$

όπου $\phi(R_n) = \{(\phi(y_1), \dots, \phi(y_n)) : (y_1, \dots, y_n) \in R_n\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σταθεροποιούμε μια πυκνή ακολουθία $\{q_i\}$ στον Y. Ας είναι

$$R_n = \overline{\{(\phi(q_1), \dots, \phi(q_n)) : \phi \in K\}}.$$

Θα δείξουμε ότι η R_n, $n \geq 2$ είναι η ζητούμενη. Αν $\psi \in K$, επειδή

$$\psi \circ \phi \in K \iff \phi \in K$$

θα έχουμε ότι $\phi(R_n) = R_n$ για $n \geq 2$. Ας είναι τώρα $\phi \in \mathrm{Iso}(Y)$ τέτοιο ώστε για κάθε $1 \leq i \leq n$, $d(\phi(q_i), \phi_n(q_i)) < \frac{1}{n}$. Τότε προφανώς $\phi_n \to \phi$ στον $\mathrm{Iso}(Y)$ και επειδή το K είναι κλειστό, έπεται $\phi \in K$. □

Θεωρούμε τη δράση της $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ στο $\prod_{n \geq 1} F(\mathbb{U}^n)$ με

$$\phi \cdot ((R_n)_n) = (\phi(R_n))_n.$$

και καλούμε $E^\infty(\mathbb{U})$ την αντίστοιχη σχέση ισοδυναμίας. Τότε

ΛΗΜΜΑ 4.7. $E_H^{R(X)} \leq_B E^\infty(\mathbb{U})$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Μπορούμε να θεωρήσουμε $\mathbb{U} = X^*$. Θεωρούμε την κλειστή υποομάδα H^* της $\mathrm{Iso}(X^*)$ και ας είναι σύμφωνα με το Λήμμα 4.6 $R_n \in F((X^*)^n)$ τέτοια ώστε

$$H^* = \{\phi \in \mathrm{Iso}(X^*) : \phi(R_n) = R_n : \forall n \geq 2\}.$$

Βλέποντας τον X σαν κλειστό υποσύνολο του X^*, θεωρούμε την Borel απεικόνιση

$$F(X) \ni C \mapsto (C, R_2, R_3, \dots) \in \prod_{n \geq 1} F((X^*)^n).$$

Η τελευταία αυτή απεικόνιση είναι μια αναγωγή της $E_H^{F(X)}$ στην $E^\infty(\mathbb{U})$. Αν $C_1, C_2 \in F(X)$ και $C_1 E_H^{F(X)} C_2$, τότε θα υπάρχει $h \in H$ ώστε $h(C_1) = C_2$. Αλλά σ' αυτήν την περίπτωση, $h^* \in H^*$ και συνεπώς $h^*(R_n) = R_n$, για $n \geq 2$. Επιπλέον, αφού h^* είναι επέκταση της h, $h^*(C_1) = C_2$. Άρα,

$$(C_1, R_2, \dots) E^\infty(\mathbb{U}) (C_2, R_2, \dots). \tag{27}$$

Αντίστροφα, αν ισχύει η (27) με $C_1, C_2 \in F(X)$, τότε θα υπάρχει $g \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ ώστε $g \cdot (C_1, R_2, \dots) = (C_2, R_2, \dots)$. Αλλά τότε για κάθε n, $g(R_n) = R_n$ και συνεπώς $g = h^* \in H^*$. Συνεπώς

$$h(C_1) = g|X(C_1) = C_2.$$

και άρα $C_1 E_H^{F(X)} C_2$. □

Είναι επομένως αρκετό να δείξουμε ότι $E^\infty(\mathbb{U}) \leq_B (\cong_i)$.

Για κάθε Πολωνικό μετρικό χώρο X, θεωρούμε τη δράση της $\mathrm{Iso}(X)$ στο $F(X)^\mathbb{N}$ με

$$\phi \cdot (C_1, C_2, \dots) = (\phi(C_1), \phi(C_2), \dots)$$

Ας είναι $E^1(X)$ η αντίστοιχη σχέση ισοδυναμίας. Θα χωρίσουμε την απόδειξη ότι $E^\infty(\mathbb{U}) \leq_B (\cong_i)$ σε δυο βήματα:

Βημα 1. Για κάθε Πολωνικό μετρικό χώρο X, $E^1(X) \leq_B (\cong_i)$

Βημα 2. Για κάποιο Πολωνικό μετρικό χώρο X, $E^\infty(\mathbb{U}) \leq_B E_1(X)$.

Θα ασχοληθούμε πρώτα με το πρώτο βήμα.

Λημμα 4.8. *Για κάθε Πολωνικό μετρικό χώρο X, $E^1(X) \leq_B (\cong_i)$.*

Αποδειξη. Ας είναι d η μετρική του X, και ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο X έχει τουλάχιστον 2 στοιχεία. Θεωρούμε την ισοδύναμη μετρική

$$\delta = \frac{d}{1+d}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο (X, δ) είναι Πολωνικός μετρικός χώρος και $\delta(x,y) < 1$ για όλα τα $x, y \in X$. Δοθείσης ακολουθίας $\vec{C} = (C_0, C_1, \dots) \in F(X)^\mathbb{N}$ θεωρούμε τον Πολωνικό μετρικό χώρο $(X_{\vec{C}}, d_{\vec{C}})$, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

Για κάθε n για το οποίο $C_n \neq \emptyset$, θεωρούμε ένα σημείο $x_n^{\vec{C}}$ εκτός του X έτσι ώστε όλ' αυτά τα σημεία να είναι διαφορετικά. Θέτουμε $X_{\vec{C}} = X \cup \{x_n^{\vec{C}}\}$. Ορίζουμε τη μετρική $d_{\vec{C}}$ ως εξής: Η $d_{\vec{C}}$ συμφωνεί με τη δ στο X. Η απόσταση μεταξύ δυο διαφορετικών $x_n^{\vec{C}}$, $x_m^{\vec{C}}$ είναι ίση με $|n-m|+1$. Τέλος, αν $u \in X$, ορίζουμε

$$d_{\vec{C}}(x_n^{\vec{C}}, u) = (n+2) + \delta(u, C_n).$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι

$$\vec{C} E^1(X) \vec{D} \iff X_{\vec{C}},\ X_{\vec{D}} \text{ είναι ισομετρικοί.}$$

Η κατεύθυνση $\Rightarrow$ είναι προφανής. Αντίστροφα ας υποθέσουμε ότι $\phi : X_{\vec{C}} \to X_{\vec{D}}$ είναι μια ισομετρία. Επειδή ο X έχει τουλάχιστον δυό σημεία και η απόστασή τους είναι μικρότερη του 1, ενώ οποιαδήποτε άλλα δυο σημεία όπου το ένα τουλάχιστον βρίσκεται εκτός του X, έχουν απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του 2, έπεται ότι τα δυό αυτά σημεία θα απεικονιστούν στον X. Επειδή επιπλέον αν $x_0 \in X$, τότε

$$\{x \in X_{\vec{C}} : d_{\vec{C}}(x, x_0) < 1\} = X$$

έπεται ότι $\phi(X) = X$ και $\psi = \phi|X$ θα είναι μια ισομετρία του X. Παρατηρούμε ότι η ψ θα είναι και d-ισομετρία, αού για κάθε $0 \leq \delta < 1$ η εξίσωση $\delta = \frac{d}{1+d}$ έχει μοναδική λύση. Επιπλέον

$$C_n \neq \emptyset \iff D_n \neq \emptyset$$

και για $C_n \neq \emptyset$, $D_n \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} \{x_n^{\vec{C}}\} &= \{x \in X_{\vec{C}} : \delta(x, X) = n+2\} \\ \{x_n^{\vec{D}}\} &= \{x \in X_{\vec{D}} : \delta(x, X) = n+2\}. \end{aligned}$$

Άρα $\phi(x_n^{\vec{C}}) = x_n^{\vec{D}}$. Τώρα θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} C_n &= \{x \in X_{\vec{C}} : \delta(x, x_n^{\vec{C}}) = n+2\} \\ D_n &= \{x \in X_{\vec{D}} : \delta(x, s_n^{\vec{D}}) = n+2\} \end{aligned}$$

και συνεπώς $\psi(C_n) = D_n$, άρα $\vec{C}E^1(X)\vec{D}$. Τέλος, παρατηρούμε ότι μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε μια Borel απεικόνιση $f : F(X)^{\mathbb{N}} \to F(\mathbb{U})$ τέτοια ώστε το $f(\vec{C})$ να είναι ισομετρικό με τον $X_{\vec{C}}$. Επομένως

$$\vec{C}E^1(X)\vec{D} \iff f(\vec{C}) \cong_i f(\vec{D}).$$

και άρα $E^1(X) \leq_B (\cong_i)$. □

Απομένει τώρα να δειχτεί ότι για κάποιον κατάλληλα διαλεγμένο Πολωνικό μετρικό χώρο X,

$$E^\infty(\mathbb{U}) \leq_B E^1(X).$$

Για τεχνικούς λόγους, οι οποίοι θα γίνουν φανεροί σε λίγο, θα αντικαταστήσουμε την $E^\infty(\mathbb{U})$ με μια μικρή παραλλαγή, $\tilde{E}^\infty(\mathbb{U})$. Θεωρούμε τη δράση της $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ στον $\prod_{n\geq 1} F(\mathbb{U}^{(3^n)})$ που δίνεται ως συνήθως με

$$\phi \cdot (C_1, C_2, \dots) = (\phi(C_1), \phi(C_2), \dots),$$

και ας είναι $\tilde{E}^\infty(\mathbb{U})$ η αντίστοιχη σχέση ισοδυναμίας. Η απεικόνιση

$$(C_1, C_2, \dots) \mapsto (\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots)$$

από το $\prod_{n\geq 1} F(\mathbb{U}^n)$ στο $\prod_{n\geq 1} F(\mathbb{U}^{3^n})$, με

$$\tilde{C}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1, x_1, \dots, x_1) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C_n\}$$

είναι προφανώς μια αναγωγή της $E^\infty(\mathbb{U})$ στην $\tilde{E}^\infty(\mathbb{U})$, κι έτσι είναι αρκετό να δείξουμε ότι για κάποιο Πολωνικό μετρικό χώρο X,

$$\tilde{E}^\infty(\mathbb{U}) \leq_B E^1(X).$$

Θεωρούμε σε κάθε $\mathbb{U}^N$, $N \geq 1$ τη μετρική

$$d_N(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} d(x_i, y_i),$$

έτσι ώστε ο $\mathbb{U}^N$ να είναι Πολωνικός μετρικός χώρος. Μπορούμε επίσης να ταυτίσουμε κάθε $\vec{x} \in \mathbb{U}^{(3^n)}$ με το $(\vec{x}, \vec{x}, \vec{x}) \in \mathbb{U}^{(3^{n+1})}$ κι αυτό είναι συμβιβαστό όπως εύκολα προκύπτει, με τον ορισμό της μετρικής, αφού

$$d_{3^{n+1}}((\vec{x}, \vec{x}, \vec{x}), (\vec{y}, \vec{y}, \vec{y})) = d_{3^n}(\vec{x}, \vec{y})$$

και συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$\mathbb{U} \subset \mathbb{U}^3 \subset \mathbb{U}^9 \subset \cdots \subset \mathbb{U}^{(3^n)} \subset \mathbb{U}^{(3^{n+1})} \subset \ldots$$

σαν μετρικοί χώροι. Θέτουμε

$$\mathbb{U}^\infty = \cup_n \mathbb{U}^{(3^n)}$$

και

$$X = \text{ η πλήρωση του } \mathbb{U}^\infty$$

και θα δείξουμε ότι

$$\tilde{E}^\infty(\mathbb{U}) \leq_B E^1(X).$$

Για κάθε ισομετρία $\phi \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$, ας είναι ϕ^N η ισομετρία στον $\mathbb{U}^N$ που δίνεται από

$$\phi^n(x_1, \ldots, x_N) = (\phi(x_1), \ldots, \phi(x_N)).$$

Προφανώς ισχύει ότι

$$\phi = \phi^1 \subset \phi^3 \subset \phi^9 \subset \ldots,$$

κι έτσι

$$\phi^\infty = \cup_n \phi^{(3^n)}$$

είναι μια ισομετρία στον $\mathbb{U}^\infty$ και συνεπώς επεκτείνεται σε μια ισομετρία $\overline{\phi}^\infty$ στον X. Θέτουμε

$$\phi^+ = (\overline{\phi}^\infty) \in \mathrm{Iso}(X),$$

και

$$\mathrm{Iso}(\mathbb{U})^+ = \{\phi^+ : \phi \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U})\}$$

. Το κύριο λήμμα τώρα, είναι το ακόλουθο:

ΛΗΜΜΑ 4.9. *Υπάρχει μια ακολουθία (D_n) από κλειστά υποσύνολα του X, τέτοια ώστε*

$$\mathrm{Iso}(\mathbb{U})^+ = \{\Phi \in \mathrm{Iso}(X) : \forall n(\Phi(D_n) = D_n)\}. \tag{28}$$

Έχοντας αποδείξει αυτό το τελευταίο, μπορούμε εύκολα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη ότι $\tilde{E}^\infty(\mathbb{U}) \leq_B E^1(X)$.

Θεωρούμε την Borel απεικόνιση

$$(C_1, C_2, C_3, \dots) \mapsto (C_1, D_1, C_2, D_2, \dots)$$

από τό $\prod_{n\geq 1} F(\mathbb{U}^{(3^n)})$ στο $F(X)^{\mathbb{N}}$. Αυτή είναι προφανώς μια Borel αναγωγή του $\tilde{E}^\infty(\mathbb{U})$ στον $E^1(X)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΛΗΜΜΑΤΟΣ 4.9. Για κάθε $N \geq 1$, βλέπουμε το $\mathbb{U}$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{U}^N$ ταυτίζοντας το $x \in \mathbb{U}$ με το $(x, \dots, x) \in \mathbb{U}^N$. Για κάθε $\phi \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$, ας είναι $\phi^N \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U}^N)$ η απεικόνιση που ορίζεται με

$$\phi^N(x_1, \dots, x_n) = (\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)).$$

Ας είναι επίσης

$$\mathrm{Iso}(\mathbb{U})^N = \{\phi^N : \phi \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U})\} \subset \mathrm{Iso}(\mathbb{U}^N).$$

Η απόδειξη του Λήμματος 4.9 θα προκύψει εύκολα από το επόμενο:

ΛΗΜΜΑ 4.10. *Για κάθε $N \geq 3$, υπάρχει μια ακολουθία από κλειστά σύνολα (K_i) στο $\mathbb{U}^N$ τέτοια ώστε*

$$\mathrm{Iso}(\mathbb{U})^N = \{\Phi \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U}^N) : \forall i(\Phi(K_i) = K_i)\}. \tag{29}$$

Απ' αυτό, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξη ως εξής: Για κάθε $n \geq 1$, σταθεροποιούμε μια ακολουθία $(K_{i,n})_{i\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί την (31) για $N = 3^n$. Ας είναι

$$\{D_n\}_n = \{\mathbb{U}^{(3^n)} : n \geq 0\} \cup \{K_{i,n} : i \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

Η ακολουθία αυτή ικανοποιεί την (28). Είναι προφανές ότι αν $\Phi = \phi^+$, όπου $\phi \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$, τότε $\Phi(D_n) = D_n$, για όλα τα n. Αντίστροφα, ας είναι $\Phi \in \mathrm{Iso}(X)$ έτσι ώστε $\Phi(D_n) = D_n$ για όλα τα n. Τότε $\Phi(\mathbb{U}^{(3^n)}) = \mathbb{U}^{(3^n)}$ για κάθε $n \geq 0$. Ειδικότερα $\Phi(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$. Θέτουμε $\phi = \Phi|\mathbb{U}$. Από το Λήμμα 4.10, για κάθε n, θα υπάρχει μια $\psi \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ ώστε $\Phi|\mathbb{U}^{(3^n)} = \psi^N$. Τότε εύκολα

$$\Phi|\mathbb{U} = \psi^n|\mathbb{U} = \psi$$

και συνεπώς $\phi = \psi$. Άρα $\Phi|\mathbb{U}^\infty = \phi^\infty$ και συνεπώς

$$\Phi = \phi^+.$$

Επειδή επιπλέον $\mathbb{U}^N$ είναι κλειστός υπόχωρος του X, έπεται ότι η ακολουθία $\{D_n\}$ είναι ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X, και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Απομένει να δώσουμε την

Αποδειξη του Λημματος 4.10. Για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\bar{p} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ από θετικούς ρητούς, ας είναι

$$K_{\bar{p}} = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{U}^N : d(x_i, x_j) \leq p_{i,j},\ \forall 1 \leq i, j \leq N\}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$\mathrm{Iso}(\mathbb{U})^N = \{\Phi \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U}^N) : \forall \bar{p}(\Phi(K_{\bar{p}}) = K_{\bar{p}})\}.$$

Καλούμε το δεξιό μέρος αυτής της εξίσωσης, G. Τότε είναι προφανές ότι $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})^N \subset G$. Επίσης είναι προφανές ότι

$$\begin{aligned} G = \{\Phi \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U}^N) : \forall (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{U}^N, \\ \text{αν } \Phi(x_1, \ldots, x_N) = (y_1, \ldots, y_N), \\ \text{τότε } d(x_i, x_j) = d(y_i, y_j), \forall 1 \leq i, j \leq N\} \end{aligned} \tag{30}$$

Ας υποθέσουμε ότι $\Phi \in G$. Επειδή το $\mathbb{U}$ έχει ταυτιστεί με το $\{(x, \ldots, x) : x \in \mathbb{U}\}$, θα ισχύει ότι $\Phi(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$. Θέτουμε $\phi = \Phi|\mathbb{U}$ και θα δείξουμε ότι $\Phi = \phi^N$. Επειδή

$$\Phi \circ (\phi^N)^{-1}|\mathbb{U} = \mathrm{id},$$

μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\phi = \mathrm{id}$ και να δείξουμε ότι $\Phi = \mathrm{id}$. Είναι προφανώς αρκετό να βρούμε ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{U}^N$, στο οποίο η Φ είναι ταυτοτική.

Ισχυρισμος (1). Το σύνολο των $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{U}^N$ για τα οποία όλα τα x_i είναι διαφορετικά και οι αποστάσεις $d(x_i, x_j)$, $1 \leq i < j \leq N$ είναι όλες διαφορετικές, είναι πυκνό στο $\mathbb{U}^N$.

Είναι προφανώς αρκετό να προσεγγίσουμε κάθε $(y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{U}^N$ στο οποίο όλα τα y_i είναι διαφορετικά, με κάποιο τέτοιο $(x_1, \ldots, x_N)$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $\mathbb{U}$, είναι αρκετό ν' αποδείξουμε το ακόλουθο:

Για κάθε πεπερασμένο μετρικό χώρο $M = \{p_1, \ldots, p_m\}$ και $\epsilon > 0$, υπάρχει ένας μετρικός χώρος $M' = \{p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m\}$ που επεκτείνει τό M, και τέτοιος ώστε $d_{M'}(p_i, q_i) < \epsilon$, για όλα τα i, και όλες οι αποστάσεις $d_{M'}(q_i, q_j)$, $1 \leq i < j \leq m$, είναι διαφορετικές.

Αυτό αποδεικνύεται με επαγωγή στο $m \geq 1$. Για $m = 1$ είναι προφανές. Υποθέτουμε την αλήθεια του για $m - 1$ και ας είναι $M =$

$\{p_1, \ldots, p_m\}$. Από την υπόθεση της επαγωγής, βρίσκουμε $q_1, \ldots, q_{m-1}$ κατάλληλα για το $\{p_1, \ldots, p_{m-1}\}$ και θέτουμε

$$M_1 = \{p_1, \ldots, p_{m-1}, q_1, \ldots, q_{m-1}\}.$$

Προφανώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p_m \neq q_1, \ldots, q_{m-1}$. Έστω

$$M_2 = \{p_1, \ldots, p_{m-1}, p_m, q_1, \ldots, q_{m-1}\}$$

και ορίζουμε μια μετρική στο M_2 που επεκτείνει τη μετρική στο M_1. Ορίζουμε για $x \in M_1$,

$$d_{M_2}(p_m, x) = \min\{d_M(p_m, p_i) + d_{M_1}(p_i, x) : 1 \leq i \leq m-1\}.$$

Αυτή είναι μια μετρική στο M_2, από το Λήμμα 3.5 και επεκτείνει συγχρόνως και τη d_M. Αριθμούμε τα σημεία του M_2 σε μια ακολουθία

$$M_2 = \{r_i : 1 \leq i \leq 2m-1\}$$

με τέτοιον τρόπο ώστε οι αριθμοί $a_i = d_{M_2}(p_m, r_i)$ να είναι σε αύξουσα ακολουθία

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2m-1}.$$

Ειδικότερα $r_1 = p_m$ και $a_1 = 0 < a_2$. Επίσης έχουμε για $1 \leq i < j \leq 2m-1$:

$$a_j - a_i = |a_i - a_j| \leq d(r_i, r_j) \leq a_i + a_j.$$

Βρίσκουμε τώρα θετικούς αριθμούς $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \cdots < \epsilon_{2m-1} < 0$ τέτοιους ώστε

1. $\epsilon_1 < \epsilon$
2. $\epsilon_1 < \min\{d(r_i, r_j) : 1 \leq i < j \leq 2m-1\}$,
3. $\epsilon_1 < \min\{a_j - a_i : 1 \leq i < j \leq 2m-1,\ a_j < a_i\}$.

Θέτουμε τώρα $a_i' = a_i + \epsilon_i$. Για $j > i$, $\epsilon_j < \epsilon_i$ και συνεπώς

$$a_j' - a_i' = a_j + \epsilon_j - (a_i + \epsilon_i) < a_j - a_i \leq d(r_i, r_j). \tag{31}$$

Επειδή επιπλέον $\epsilon_j, \epsilon_i \leq \epsilon_1 < d(r_i, r_j)$ θα έχουμε ότι

$$a_i' - a_j' = a_i + \epsilon_i < a_j < a_j + \epsilon_j = a_j'. \tag{32}$$

Αν αντίθετα $a_i = a_j$, τότε $a_i' = a_i + \epsilon_i > a_j + \epsilon_j = a_j'$. Άρα σε κάθε περίπτωση, για διαφορετικά i και j, παίρνουμε ότι $a_i' \neq a_j'$. Έτσι, για κάθε τέτοια επιλογή των ϵ_i οι αποστάσεις a_i' ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα, και είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Προφανώς (έχοντας υπεραριθμήσιμες επιλογές στη διάθεσή μας) μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε a_i' είναι διαφορετικό και από όλα τα $d_{M_2}(q_i, q_j)$, $1 \leq i < j \leq m-1$. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε το μετρικό χώρο

$$M' = \{p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m\},$$

έτσι ώστε το q_m να είναι ένα σημείο εκτός του M_2 και $d_{M'}(q_m, r_i) = a_i'$.

Προφανώς, σύμφωνα με τα προηγούμενα, όλα τα $d_{M'}(q_i, q_j)$ θα είναι διαφορετικά, για $1 \leq i < j \leq m$, και

$$d_{M'}(1_m, p_m) = d_{M'}(q_m, r_1) = a'_1 = 0 + \epsilon_1 < \epsilon.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Ισχυρισμού 1.

Έτσι είναι αρκετό να δείξουμε ότι αν $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{U}^N$ και είναι τέτοια ώστε τα x_i είναι διαφορετικά ανά δυο και όλες οι αποστάσεις $d(x_i, s_j)$, $1 \leq i < j \leq N$ είναι διαφορετικές, τότε

$$\Phi(x_1, \ldots, x_N) = (x_1, \ldots, x_N).$$

Θέτουμε

$$\Phi(x_1, \ldots, x_N) = (y_1, \ldots, y_N).$$

Από τη σχέση (30), επειδή έχουμε θεωρήσει ότι $\Phi \in G$, θα έχουμε ότι για $1 \leq i < j \leq N$

$$d(x_i, x_j) = d(y_i, y_j)$$

και συνεπώς όλα τα y_i είναι επίσης διακεκριμμένα. Ισχυριζόμαστε τώρα το εξής:

Ισχυρισμος (2). $\{x_1, \ldots, x_N\} = \{y_1, \ldots, y_N\}$.

Αν το έχουμε αυτό, είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι $y_i = x_i$, $\forall 1 \leq i \leq N$. Διαφορετικά θα υπάρχει ένα $i \neq j$ ώστε $y_i = x_j$. Επειδή $N \geq 3$, διαλέγουμε $k \notin \{i, j\}$. Τότε για το ℓ για το οποίο $y_k = x_\ell$, θα έχουμε ότι

$$d(x_i, x_k) = d(y_i, y_k) = d(x_j, x_\ell)$$

που είναι αντίφαση αφού $\{x_i, x_k\} \neq \{x_j, x_\ell\}$.

Έτσι απομένει η

Αποδειξη του Ισχυρισμου 2. Σταθεροποιούμε ένα $u \in \mathbb{U}$. Επειδή η Φ είναι ισομετρία του $\mathbb{U}^N$ και $\Phi|\mathbb{U} = \mathrm{id}$, θα έχουμε ότι

$$d_N((x_1, \ldots, x_N), (u, \ldots, u)) = d_N((y_1, \ldots, y_N), (u, \ldots, u))$$

δηλαδή,

$$\sum_{i=1}^{N} d(x_i, u) = \sum_{i=1}^{N} d(y_i, u).$$

Υποθέτοντας προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $\{x_1, \ldots, x_N\} \neq \{y_1, \ldots, y_N\}$, ας είναι

$$\begin{aligned} A &= \{x_1, \ldots, x_N\} \cap \{y_1, \ldots, y_N\}, \\ \{x'_1, \ldots, x'_t\} &= \{x_1, \ldots, x_N\} \setminus A \\ \{y'_1, \ldots, y'_t\} &= \{y_1, \ldots, y_N\} \setminus A, \end{aligned}$$

για κάποιο $t \geq 1$. Συνεπώς για όλα τα $u \in \mathbb{U}$,

$$\sum_{i=1}^{t} d(x_i', u) = \sum_{i=1}^{t} d(y_i', u).$$

Θα φτάσουμε σε άτοπο, βρίσκοντας ένα $u \in \mathbb{U}$, το οποίο αποτυγχάνει να ικανοποιήσει αυτήν την εξίσωση. Παρατηρούμε πρώτα, ότι για κάθε πεπερασμένο μετρικό χώρο $M = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $a_1, \ldots, a_\ell$ πραγματικών τέτοια ώστε

1. $|a_i - a_j| < d(p_i, p_j),\ \forall 1 \leq i \neq j \leq \ell$
2. $d(p_i, p_j) < a_i + a_j,\ \forall 1 \leq i, j \leq \ell.$

Είδαμε για παράδειγμα πώς κατασκευάστηκε μια τέτοια ακολουθία στην απόδειξη του Ισχυρισμού 2, ξεκινώντας με $a_i' = d(p_1, p_i)$ και αυξάνοντας ελάχιστα τα a_i'.

Ας είναι τώρα

$$z_1 = x_1', \ldots, z_t = x_t', z_{t+1} = y_1', \ldots, z_{2t} = y_t'$$

και θεωρούμε το σύνολο $W \subset (0, \infty)^{2t}$ που αποτελείται απ' όλα τα $(a_1, \ldots, a_{2t})$ τέτοια ώστε

1. $|a_i - a_j| < d(z_i, z_j),\ \forall 1 \leq i \neq j \leq 2t,$
2. $d(z_i, z_j) < a_i + a_j,\ \forall 1 \leq i, j \leq 2t.$

Το σύνολο αυτό είναι προφανώς ανοιχτό, και από τα προηγούμενα προκύπτει ότι είναι μη κενό. Θεωρούμε τώρα και το σύνολο

$$C = \Big\{ (a_1, \ldots, a_{2t}) \in (0, \infty)^{2t} : \sum_{i=1}^{t} a_i = \sum_{i=1}^{t} a_{t+i} \Big\}.$$

Αυτό είναι προφανώς κλειστό και δεν έχει εσωτερικό. Έτσι $W \not\subset C$. Αν $(a_i)_{1 \leq i \leq 2t} \in W \setminus C$, τότε από τον ορισμό του $\mathbb{U}$, θα υπάρχει ένα $u \in \mathbb{U}$ ώστε $d(u, z_i) = a_i$. Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^{t} d(x_i', u) \neq \sum_{i=1}^{t} d(y_i', u).$$

και το τελευταίο είναι η ζητούμενη αντίφαση. □

□

Βιβλιογραφία

[1] H. Becker and A. Kechris. *The Descriptive Set Theory of Polish Group Actions*, volume 232 of *London Math. Soc. Lecture Note Series.* Cambridge Univ. Press, 1996.

[2] S. Gao and A. Kechris. On the classification of Polish metric spaces up to isometry. Preprint, 2000.

[3] J. Clemens. PhD thesis, U.C. Berkeley, 2001.

[4] C. Rogers et al. *Analytic sets.* Academic Press, London, 1980.

[5] M. Gromov. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, volume 152 of *Progress in Math.* Birkhäuser, 1999.

[6] M. Katětov. On universal metric spaces. In Z. Frolík, editor, *Proc. Sixth Prague Topol. Symp. 1986*, Gen. Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra UI, pages 323–330. Heldermann Verlag, 1988.

[7] P. Urysohn. Sur un espace métrique universel. *Bull. sci. Math.*, 51:43–64, 74–90, 1927.

[8] V. Uspenskiĭ. On the group of isometries of the Urysohn universal metric space. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 31(1):181–182, 1990.

[9] A. Vershik. The universal Urysohn space, Gromov metric triples and random metrics on the natural numbers. *Russ. Math. Surveys*, 53(5):921–928, 1998.

Δείκτης