Διπλωματική εργασία του Αριστείδη Δημακάκου
πάνω στο πόνημα του Michael Morley
"Categoricity in power"

Επιβλέπων καθηγητής
Κωνσταντίνος Δημητρακόπουλος

Εισαγωγή. Μία θεωρία Σ, που ανήκει στον πρωτοβάθμιο κατηγορηματικό λογισμό, θα λέγεται "κατηγορική σε δύναμη κ" αν όλα τα μοντέλα πληθαρίθμου κ, που έχει η θεωρία, είναι ισόμορφα μεταξύ τους. Αυτός ο ορισμός επινοήθηκε από τους Łoś [2] και Vaught [3] το 1954. Παράλληλα έδειξαν πως μία θεωρία μπορεί να είναι κατηγορική στη δύναμη $\aleph_0$ και να μην είναι κατηγορική σε κάθε μεγαλύτερη δύναμη (π.χ. η θεωρία των πυκνά ολικά διατεταγμένων συνόλων χωρίς άκρα). Αντίστροφα, μία θεωρία μπορεί να είναι κατηγορική σε κάθε υπεραριθμήσιμη δύναμη και να μην είναι κατηγορική στην $\aleph_0$ δύναμη (π.χ. η θεωρία των αλγεβρικά κλειστών σωμάτων με χαρακτηριστική 0).

Ο Łoś έθεσε το ακόλουθο ερώτημα: Αν μία θεωρία είναι κατηγορική σε μία υπεραριθμήσιμη δύναμη, είναι αναγκαίο να είναι κατηγορική σε κάθε υπεραριθμήσιμη δύναμη; Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της εργασίας[1] είναι μια θετική απάντηση σε αυτή την ερώτηση. Στην πραγματικότητα αποδεικνύουμε ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα. Αν μία θεωρία είναι κατηγορική σε μία υπεραριθμήσιμη δύναμη, τότε κάθε υπεραριθμήσιμο μοντέλο της θεωρίας θα είναι κορεσμένο (Η ορολογία που χρησιμοποιείται στην εισαγωγή θα δοθεί στο κύριο μέρος της εργασίας). Είναι γνωστό πως μία θεωρία μπορεί να έχει (μέσω ισομορφισμού) το πολύ ένα κορεσμένο μοντέλο σε κάθε δύναμη. Μπορεί κανείς να παρατηρήσει πως τα αποτελέσματα στηρίζονται ουσιαστικά πάνω σε μια αναλογία, που εμφανίζεται στους τοπολογικούς χώρους και πιο συγκεκριμένα στους παραγόμενους από αυτούς χώρους και στο θεώρημα Cantor-Bendixson.

Η εργασία χωρίζεται σε πέντε ενότητες. Στην πρώτη ενότητα αναλύεται η ορολογία και αναφέρονται κάποια μεταμαθηματικά αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε θεωρία Σ κατασκευάζουμε μια θεωρία Σ^*, η οποία έχει ουσιαστικά τα ίδια μοντέλα με τη Σ αλλά μας βολεύει πολύ περισσότερο να δουλεύουμε μαζί της. Στη δεύτερη ενότητα ορίζουμε έναν τοπολογικό χώρο $S(A)$, που αντιστοιχεί σε κάθε υποσύστημα A ενός μοντέλου της θεωρίας Σ. Τα στοιχεία του $S(A)$ αντιστοιχούν σε ισομορφισμούς σε σχέση με το A. Μαζί με κάθε μονομορφισμό, $f : A \longrightarrow B$, σχετίζεται και μία "δυϊκή" συνεχής απεικόνιση $f^* : S(B) \longrightarrow S(A)$. Τότε υπάρχει για κάθε $S(A)$ μία φθίνουσα ακολουθία $\{S^\alpha(A)\}$ από υποχώρους και αυτό είναι ανάλογο προς (αλλά διαφορετικό από) τη συνήθη ακολουθία από παραγόμενους χώρους σε ένα τοπολογικό χώρο[2]. Η βασική διαφορά είναι πως για μας ο ορισμός του "παραγόμενου χώρου" δε θα περιλαμβάνει μόνο το $S(A)$ αλλά και όλες τις αντίστροφες εικόνες μέσω απεικονίσεων του τύπου $f^* : S(B) \longrightarrow S(A)$. Είναι γνωστό

[1] Ο σκελετός της εργασίας προέρχεται από τη διδακτορική διατριβή του Morley [1].
[2] Όπως έχει οριστεί στο [4, σελ. 126-134].

πως αυτοί οι τοπολογικοί χώροι των οποίων ο α-οστός παραγόμενος χώρος είναι ο τετριμμένος, για κάποιον α-οστό διατακτικό, έχουν κάποιες ασυνήθιστα απλές ιδιότητες. Ανάλογα, οι θεωρίες Σ, τέτοιες ώστε για κάποιο διατακτικό αριθμό α, οι χώροι τύπων $S^\alpha(A)$ γίνονται τετριμμένοι για κάθε A, το οποίο είναι υποσύστημα ενός μοντέλου του Σ, έχουν ασυνήθιστα απλές ιδιότητες. Τέτοιες θεωρίες θα τις καλούμε "ολικά υπερβατικές". Το θεώρημα 2.4, που είναι ανάλογο του θεωρήματος Cantor-Bendixson, εκφράζει πως οι ολικά υπερβατικές θεωρίες χαρακτηρίζονται από μία συγκεκριμένη συνθήκη αριθμησιμότητας. Η τρίτη ενότητα περιέχει διάφορες συνέπειες του θεώρηματος του Ramsey, που θα μας φανούν πολύ χρήσιμες. Πιο συγκεκριμένα, το θεώρημα 3.8 επισημαίνει πως μια θεωρία κατηγορική σε υπεραριθμήσιμη δύναμη είναι ολικά υπερβατική. Κάποιες ιδιότητες των μοντέλων των ολικά υπερβατικών θεωριών αναφέρονται και αποδεικνύονται στην τέταρτη ενότητα. Αυτές έχουν να κάνουν με την ύπαρξη πρώτων μοντέλων και την ύπαρξη συνόλων με αδιάκριτα στοιχεία. Τέλος, στην πέμπτη ενότητα χρησιμοποιούμε τα προηγούμενα αποτελέσματα για να απαντήσουμε στο ερώτημα του Łoś.

1. Προκαταρκτικά. Οι διατακτικοί είναι ορισμένοι έτσι ώστε κάθε διατακτικός να ισούται με το σύνολο των μικρότερων διατακτικών. Οι πληθάριθμοι είναι εκείνοι οι διατακτικοί που δεν είναι συνολοθεωρητικά ισοδύναμοι με κανένα προηγούμενο διατακτικό. Θα χρησιμοποιούμε τους ελληνικούς χαρακτήρες $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ για να συμβολίσουμε τους διατακτικούς ενώ το δ θα το χρησιμοποιούμε ως οριακό διατακτικό αριθμό. Το λ και το $\varkappa$ θα συμβολίζουν πάντα πληθαρίθμους ενώ το m και το n μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς. Το $\varkappa^+$ είναι το σύμβολο του ελαχίστου πληθαρίθμου που είναι μεγαλύτερος από το $\varkappa$ $(\varkappa^+ > \varkappa)$. Ο πληθάριθμος του συνόλου X συμβολίζεται με $\varkappa(X)$. Ένας άπειρος πληθάριθμος λέγεται "κανονικός" αν για κάθε $\beta < \varkappa$ και για κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο $[\lambda_\alpha, \alpha < \beta]$ πληθαρίθμων με την ιδιότητα $\lambda_\alpha < \varkappa$, πρέπει να ισχύει $_{\alpha<\beta}\lambda_\alpha < \varkappa$. Σε πολλές περιπτώσεις για την αποφυγή προβλημάτων με τους πεπερασμένους πληθαρίθμους θα χρησιμοποιούμε την ακόλουθη σύμβαση: Η ισότητα $\varkappa = \varkappa'$ (modulo $\aleph_0$) θα σημαίνει $\varkappa + \aleph_0 = \varkappa' + \aleph_0$.

Ένα "κατηγορηματικό σύστημα" $A =< |A|, \{R_i^A\}_{i\in I} >$ είναι ένα σύνολο $|A|$ μαζί με ένα σύνολο $\{R_i^A\}_{i\in I}$ σχέσεων (με πεπερασμένες συνιστώσες) στο $|A|$. Το $|A|$ λέγεται το "σύμπαν" του A και ο πληθάριθμος του A ορίζεται μέσω του $|A|$, $\varkappa(A) := \varkappa(|A|)$. Τέλος R_i^A είναι η i-οστή σχέση του A και I το σύνολο δεικτών του A. Αν $\tau \in \omega^I$ και κάθε R_i^A

έχει $\tau(i)$ συνιστώσες τότε το τ θα λέγεται η "ομοιότητα" του A. Μία απεικόνιση $f : |A| \longrightarrow |B|$ θα λέγεται "μονομορφισμός" αν είναι ένα προς ένα και για κάθε $i \in I$ και $a_1, \ldots, a_{\tau(i)} \in |A|$, $R_i^A(a_1, \ldots, a_{\tau(i)})$ αν και μόνο αν $R_i^B(f(a_1), \ldots, f(a_{\tau(i)}))$. Ένας μονομορφισμός, που απεικονίζει το $|A|$ επί του $|B|$, θα λέγεται "ισομορφισμός" και αν υπάρχει τέτοιος ισομορφισμός, το A θα λέγεται "ισόμορφο" με το B $(A \cong B)$. Εάν $|A| \subseteq |B|$ και η ταυτοτική απεικόνιση είναι μονομορφισμός του A στο B, τότε το A θα λέγεται "υποσύστημα" του B και θα γράφουμε $A \subseteq B$. Είναι προφανές πως για κάθε X υποσύνολο του $|A|$ $(X \subseteq |A|)$ υπάρχει ένα μοναδικό υποσύστημα του A με σύμπαν το X που θα το συμβολίζουμε με $A|X$.

Σε ορισμένες βοηθητικές κατασκευές είναι πολύ βολικό να θεωρούμε γενικευμένα κατηγορηματικά συστήματα τα οποία εκτός από πεπερασμένες σχέσεις έχουν επιπλέον ένα σύνολο σταθερών και ένα σύνολο από πεπερασμένες πράξεις. Όλοι οι προηγούμενοι ορισμοί και ιδέες μπορούν να επεκταθούν με προφανή τρόπο ώστε να περιλαμβάνουν τα γενικευμένα κατηγορηματικά συστήματα. Για παράδειγμα, ένα γενικευμένο υποσύστημα θα περιέχει όλες τις σταθερές και θα είναι κλειστό για όλες τις πράξεις του αρχικού συστήματος.

Σε κάθε ομοιότητα αντιστοιχεί μία πρωτοβάθμια γλώσσα L_τ (με ταυτότητα). Τα σύμβολα της L_τ είναι οι συνηθισμένοι λογικοί σύνδεσμοι: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, οι ποσοδείκτες: $\exists$, $\forall$, ένα σύμβολο ισότητας $=$, ένα αριθμήσιμο σύνολο από μεταβλητές: $u_0, u_1, \ldots$ και ένα κατηγορηματικό σύμβολο R_i, με $\tau(i)$ συνιστώσες, για κάθε $i \in I$. (Αντίστοιχα για τα γενικευμένα κατηγορηματικά συστήματα έχουμε γενικευμένες γλώσσες οι οποίες έχουν επιπλέον ένα σύνολο συμβόλων για τις σταθερές και ένα σύνολο συμβόλων για τις πράξεις.) Η γλώσσα L_τ θα λέγεται αριθμήσιμη όταν το σύνολο όλων των συμβόλων της είναι αριθμήσιμο. Ο αναγνώστης αυτής της εργασίας θεωρείται πως είναι ήδη εξοικειωμένος με την έννοια του όρου και της φόρμουλας σε μία τέτοια γλώσσα. Μία φόρμουλα θα λέγεται "ανοιχτή" αν δεν περιέχει ποσοδείκτες. Μία "πρόταση" είναι μία φόρμουλα χωρίς ελεύθερες μεταβλητές. Είναι άμεσο πως με τον όρο "ανοιχτή πρόταση" θα εννοούμε μία ανοιχτή φόρμουλα χωρίς μεταβλητές. Μία καθολική πρόταση είναι μία πρόταση σε prenex μορφή που δεν περιέχει υπαρξιακούς ποσοδείκτες. Αν η ψ είναι φόρμουλα της L_τ και δεν έχει άλλες ελεύθερες μεταβλητές εκτός από τις $u_0, \ldots, u_{n-1}$, το A είναι σύστημα ομοιότητας τ και $a_0, \ldots, a_{n-1} \in |A|$, τότε ο συμβολισμός $\models_A \psi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ θα δηλώνει πως τα $a_0, \ldots, a_{n-1}$ ικανοποιούν τη φόρμουλα ψ στο A (με τη συνήθη έννοια) όταν το u_m έχει αντικατασταθεί από το a_m για $m = 0 \ldots n-1$. Αν ο $t(u_1, \ldots, u_n)$ είναι όρος της

L_τ και $\models_A a_0 = t(a_1, \ldots, a_n)$, τότε θα λέμε πως το a_0 είναι η τιμή του όρου t στο A όταν το u_m έχει αντικατασταθεί από το a_m $(m \leq n)$ και θα γράφουμε $a_0 = t^A(a_1, \ldots, a_n)$. "Θεωρία" θα ονομάζουμε κάθε συνεπές σύνολο προτάσεων Σ της γλώσσας L_τ . Ένα σύστημα A, ομοιότητας τ, θα λέγεται "μοντέλο" του Σ αν για κάθε $\sigma \in \Sigma$, $\models_A \sigma$. Αν η ψ είναι μία πρόταση της L_τ, ο συμβολισμός $\Sigma \models \psi$ σημαίνει πως για κάθε μοντέλο A της θεωρίας Σ ισχύει $\models_A \psi$. "Θεωρία ενός συστήματος A" θα λέμε το σύνολο των προτάσεων που αληθεύουν στο A και θα τη συμβολίζουμε με $\mathcal{T}h(A)$. Η θεωρία Σ θα λέγεται "πλήρης" αν για κάθε πρόταση ψ της L_τ ισχύει είτε $\Sigma \models \psi$ είτε $\Sigma \models \neg\psi$. Αν η θεωρία Σ έχει ένα άπειρο μοντέλο και $\varkappa$ είναι ένας άπειρος πληθάριθμος, τότε η Σ θα λέγεται "κατηγορική σε δύναμη $\varkappa$" ή αλλιώς "$\varkappa$-κατηγορική" αν όλα τα μοντέλα της που έχουν πληθάριθμο $\varkappa$ είναι ισόμορφα μεταξύ τους. Έστω A και B συστήματα της γλώσσας L. Θα λέμε πως το A είναι "στοιχειώδες υποσύστημα" του B (ή πως το B είναι "στοιχειώδες υπερσύστημα" του A) και θα γράφουμε $A \prec B$ αν $A \subseteq B$ και για κάθε φόρμουλα ψ της L και $a_1, \ldots, a_n \in |A|$ ισχύει $\models_A \psi(a_1, \ldots, a_n) \iff \models_B \psi(a_1, \ldots, a_n)$.

Λήμμα 1.1. *Αν η θεωρία Σ είναι $\varkappa$-κατηγορική και δεν έχει πεπερασμένα μοντέλα, τότε η Σ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω A το μοναδικό μοντέλο (μέσω ισομορφισμού) της θεωρίας Σ με πληθάριθμο $\varkappa$ και B ένα άλλο μοντέλο της θεωρίας με μεγαλύτερο πληθάριθμο. Σύμφωνα με το θεώρημα Löwenheim-Skolem προς τα κάτω[3] υπάρχει στοιχειώδες υποσύστημα Γ του B που είναι μοντέλο της Σ και έχει πληθάριθμο $\varkappa$. Είναι προφανές πως αφού το Γ είναι στοιχειώδες υποσύστημα του B θα ικανοποιούν τις ίδιες προτάσεις και επειδή το Γ είναι ισομορφικό με το A (λόγω της $\varkappa$-κατηγορικότητας) θα ισχύει και για αυτά το ίδιο. Επομένως οι θεωρίες όλων των μοντέλων της Σ, με μεγαλύτερο του $\varkappa$ πληθάριθμο, ταυτίζονται και από το θεώρημα Löwenheim-Skolem προς τα επάνω[4] μπορούμε να εξασφαλίσουμε με παρόμοιο τρόπο το ανάλογο για τα μοντέλα με πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του $\varkappa$. Αφού λοιπόν, τα μοντέλα της Σ ικανοποιούν τις ίδιες προτάσεις έπεται πως η Σ είναι πλήρης θεωρία. Πράγματι, αν υποθέσουμε πως για κάποια πρόταση ψ ισχύουν ταυτόχρονα $\Sigma \not\models \psi$ και $\Sigma \not\models \neg\psi$, συμπεραίνουμε πως υπάρχουν μοντέλα A_1, A_2 της θεωρίας Σ ώστε $\models_{A_1} \neg\psi$ και $\models_{A_2} \psi$ και φτάσαμε σε άτοπο γιατί τα μοντέλα A_1, A_2 δεν ικανοποιούν τις ίδιες προτάσεις.

[3]Για απόδειξη ενδείκνυται το [5, σελ. 109]

[4]Όπως παραπάνω σελ. 67

Έστω ένα σύστημα A ομοιότητας τ και $X \subseteq |A|$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα νέο σύστημα $(A, a)_{a\in X}$ παίρνοντας κάθε στοιχείο του X ως νέα σταθερά. Θα συμβολίζουμε με $L(A)$ τη γλώσσα που αντιστοιχεί στο σύστημα $(A, a)_{a\in|A|}$. (Τα σύμβολα της $L(A)$ είναι τα σύμβολα της L μαζί με μία νέα σταθερά $\bar{a}$ για κάθε $a \in A$[5].) "Το διάγραμμα του A", που θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{D}(A)$, είναι το σύνολο των ανοιχτών προτάσεων της $L(A)$ οι οποίες είναι αληθείς στο $(A, a)_{a\in|A|}$. Αν τα A και B είναι συστήματα ομοιότητας τ, τότε το A θα λέγεται "στοιχειωδώς ισοδύναμο" με το B αν είναι μοντέλα της ίδιας πλήρους θεωρίας της γλώσσας L_τ (δηλαδή ικανοποιούν τις ίδιες προτάσεις) και θα γράφουμε $A \equiv B$. Αν $X \subseteq |A|$ και η f είναι απεικόνιση από το X στο $|B|$, τότε η f θα λέγεται "στοιχειώδης μονομορφισμός" αν για κάθε $x_0, \ldots, x_n \in X$ και κάθε φόρμουλα ψ της L_τ ισχύει $\models_A \psi(x_0, \ldots, x_n) \iff \models_B \psi(f(x_0), \ldots, f(x_n))$. Πιο συνοπτικά μπορούμε να γράψουμε, σύμφωνα με τις προηγούμενες συμβάσεις, $(A, x)_{x\in X} \equiv (B, f(x))_{x\in f(X)}$.

Έστω ένα κατηγορηματικό σύστημα $A =< |A|, \{R_i^A\}_{i\in I} >$ ομοιότητας τ. Για κάθε φόρμουλα ψ της L_τ αν m είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός ώστε οι ελεύθερες μεταβλητές της ψ να είναι μεταξύ των $u_0, \ldots, u_{m-1}$, τότε θα συμβολίζουμε με ψ^A τη σχέση στο $|A|$ με m συνιστώσες τέτοια ώστε $(a_0, \ldots, a_{m-1}) \in \psi^A \iff \models_A \psi(a_0, \ldots, a_{m-1})$. Ορίζουμε A^* να είναι το κατηγορηματικό σύστημα που έχει το ίδιο σύμπαν με το A και έχει για σχέσεις τις ερμηνείες που έχουν οι φόρμουλες της γλώσσας L_τ στο A (ψ^A), $\psi \in L_\tau$. Με τ^* θα συμβολίζουμε την ομοιότητα του A^*. Είναι άμεσο πως η γλώσσα L_{τ^*} θα περιέχει τα σύμβολα της L_τ και πως για κάθε φόρμουλα ψ της L_τ θα πρέπει να υπάρχει ένα κατηγορηματικό σύμβολο R_ψ στην L_{τ^*}. Αν Σ είναι μία θεωρία στην L_τ, ορίζουμε Σ^* να είναι το σύνολο των προτάσεων ψ της L_{τ^*} ώστε $\models_{A^*} \psi$ για κάθε μοντέλο A της θεωρίας Σ. Το επόμενο λήμμα αποδεικνύεται εύκολα από τους ορισμούς και ενδεικτικά θα δείξουμε μόνο το πρώτο και πέμπτο σκέλος.

Λήμμα 1.2. *Ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:*

1. $A \cong B$ *αν και μόνο αν* $A^* \cong B^*$.
2. *Το* A' *είναι ένα μοντέλο του* Σ^* *αν και μόνο αν υπάρχει μοντέλο* A *του* Σ *τέτοιο ώστε* $A' = A^*$.

[5] Για να αποφύγουμε τη σύγχυση θα πρέπει να γράφουμε $\bar{a}^A$. Στην πράξη όμως θα παραλείπουμε το A όταν είναι ξεκάθαρο τι εννοούμε από τα συμφραζόμενα.

3. *Αν τα A και B είναι μοντέλα του Σ, $X \subseteq |A|$ και η f είναι απεικόνιση του X στο B, τότε ισχύει $(A, x)_{x\in X} \equiv (B, f(x))_{x\in f(X)}$ αν και μόνο αν η απεικόνιση f, $f : A^*|X \longrightarrow B^*$ είναι μονομορφισμός.*
4. *Η θεωρία Σ είναι κ-κατηγορική αν και μόνο αν η θεωρία Σ^* είναι κ-κατηγορική.*
5. *Αν η Σ είναι μία θεωρία στη γλώσσα L_τ και ψ είναι μία φόρμουλα στην L_{τ^*} , που δεν έχει άλλες ελεύθερες μεταβλητές εκτός από τις $u_0, \ldots, u_{n-1}$, τότε υπάρχει ένα κατηγόρημα R με n συνιστώσες της L_{τ^*} ώστε να ισχύει $\Sigma^* \models \psi(u_0, \ldots, u_{n-1}) \longleftrightarrow R(u_0, \ldots, u_{n-1})$.*

Απόδειξη. (5.) Θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στα βήματα που κατασκευάζονται οι φόρμουλες της L_{τ^*}. Αν η φόρμουλα είναι κατηγορηματικό σύμβολο, τότε το ζητούμενο είναι τετριμμένο. Έστω πως για τις φόρμουλες ψ_1, ψ_2 υπάρχουν τα κατηγορήματα $R_{\varphi_1}, R_{\varphi_2}$ με $\varphi_1, \varphi_2 \in L_\tau$ τέτοια ώστε $\Sigma^* \models \psi_1 \longleftrightarrow R_{\varphi_1}$ και $\Sigma^* \models \psi_2 \longleftrightarrow R_{\varphi_2}$. Τότε ισχύει $\Sigma^* \models \psi_1 \vee \psi_2 \longleftrightarrow R_{\varphi_1} \vee R_{\varphi_2}$. Όμως, από τον ορισμό της θεωρίας Σ^* έχουμε πως $\forall \overrightarrow{x}(R_{\varphi_1} \vee R_{\varphi_2} \longleftrightarrow R_{\varphi_1 \vee \varphi_2}) \in \Sigma^*$, αφού οι ερμηνείες των δύο μελών της ισοδυναμίας ταυτίζονται με τη σχέση $\varphi_1^A \vee \varphi_2^A$ στο $|A|$ για κάθε A μοντέλο του Σ. Επομένως $\Sigma^* \models \psi_1 \vee \psi_2 \longleftrightarrow R_{\varphi_1 \vee \varphi_2}$. Όμοια δουλεύουμε και για τους άλλους λογικούς συνδέσμους και τους ποσοδείκτες και η απόδειξη είναι πλήρης.
(1.) ($\Rightarrow$) Έστω πως υπάρχει ισομορφισμός $f : A \longrightarrow B$. Η απεικόνιση $f : |A| \longrightarrow |B|$ παραμένει ένα προς ένα και επί είτε τα $|A|, |B|$ είναι σύμπαντα για τα συστήματα A, B είτε είναι σύμπαντα για τα συστήματα A^*, B^*. Για να δείξουμε πως $A^* \cong B^*$, από το (5.) φτάνει να δείξουμε πως για κάθε κατηγόρημα R_ψ της L_{τ^*} και $a_1, \ldots, a_n \in |A|$ ισχύει $\models_{A^*} R_\psi(a_1, \ldots, a_n) \iff \models_{B^*} R_\psi(f(a_1), \ldots, f(a_n))$. Όμως αυτό είναι ισοδύναμο με $(a_1, \ldots, a_n) \in \psi^A \iff (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in \psi^B$ ή αλλιώς $\models_A \psi(a_1, \ldots, a_n) \iff \models_B \psi(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ που ισχύει από υπόθεση. Η συνεπαγωγή ($\Leftarrow$) είναι τετριμμένη.

Είναι σημαντικό να προσέξει κανείς πως ουσιαστικά η θεωρία Σ^* είναι οι συνέπειες της θεωρίας Σ στη γλώσσα L_{τ^*}, δηλαδή είναι το σύνολο $Con(\Sigma) = \{\sigma \in L_\tau | \ \Sigma \models \sigma\}$. Έστω πως $\sigma \in Con(\Sigma)$. Τότε κάθε μοντέλο A του Σ ικανοποιεί την πρόταση σ και επομένως κάθε μοντέλο A^* (με A μοντέλο του Σ) ικανοποιεί το κατηγόρημα R_σ και επομένως $R_\sigma \in \Sigma^*$. Για το αντίστροφο θα χρησιμοποιήσουμε το 1.2.5. Αν η ψ είναι πρόταση της L_{τ^*}, τότε υπάρχει πρόταση σ της L_τ ώστε $\Sigma^* \models \psi \longleftrightarrow R_\sigma$ και ισχύει: $\psi \in \Sigma^* \iff$ κάθε μοντέλο A^* (με A μοντέλο του Σ) ικανοποιεί την ψ. Όμως, το A^* είναι μοντέλο της Σ^* και επομένως $\models_{A^*} \psi \longleftrightarrow R_\sigma$. Δηλαδή κάθε μοντέλο A^* (με A μοντέλο του Σ) ικανοποιεί το κατηγόρημα R_σ και κατά συνέπεια κάθε μοντέλο A του Σ

ικανοποιεί την πρόταση σ ή ισοδύναμα $\sigma \in Con(\Sigma)$.
Το επόμενο λήμμα θα φανεί πολύ χρήσιμο στην πορεία της εργασίας.

Λήμμα 1.3. *Έστω πως η Σ είναι μία πλήρης θεωρία στη γλώσσα L_τ . Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{N}(\Sigma^*)$ την κλάση των υποσυστημάτων των μοντέλων της θεωρίας Σ^*. Ισχύουν τα επόμενα:*

1. *Η θεωρία Σ^* είναι μία πλήρης θεωρία στη γλώσσα L_{τ^*}.*
2. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα : (a) $A \prec B$, (b) $A^* \subseteq B^*$, (c) $A^* \prec B^*$.*
3. *Αν $\{A_\alpha\}_{\alpha<\delta}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία στοιχείων της κλάσης $\mathcal{N}(\Sigma^*)$, τότε $\;_{\alpha<\delta} A_\alpha \in \mathcal{N}(\Sigma^*)$. Μάλιστα η ένωση $\;_{\alpha<\delta} A_\alpha$ είναι μοντέλο της Σ^*.*
4. *Αν $A_1, A_2 \in \mathcal{N}(\Sigma^*)$ τότε υπάρχουν $A_3 \in \mathcal{N}(\Sigma^*)$ και μονομορφισμοί $f_1 : A_1 \longrightarrow A_3$ και $f_2 : A_2 \longrightarrow A_3$.*
5. *Αν $A_0, A_1, A_2 \in \mathcal{N}(\Sigma^*)$ και $g_1 : A_0 \longrightarrow A_1$ και $g_2 : A_0 \longrightarrow A_2$ είναι μονομορφισμοί, τότε υπάρχουν $A_3 \in \mathcal{N}(\Sigma^*)$ και μονομορφισμοί $f_1 : A_1 \longrightarrow A_3$ και $f_2 : A_2 \longrightarrow A_3$ ώστε $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$.*

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[dr, "f_1"] & \\
A_0 \arrow[ur, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"'] & & A_3 \\
 & A_2 \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. (1) Αφού η θεωρία Σ είναι πλήρης, έπεται πως η θεωρία $\mathrm{Con}(\Sigma)$ θα περιέχει τις "μισές" προτάσεις της L_τ. Όμως, όπως έχουμε ξαναπεί, το Σ^* είναι οι συνέπειες του Σ στη γλώσσα L_{τ^*} και επομένως η Σ^* θα περιέχει τις "μισές" προτάσεις R_σ και από το λήμμα 1.2.5 κάθε μοντέλο της Σ^* θα ικανοποιεί τις "μισές" προτάσεις της L_{τ^*}.
(2) ($a \Rightarrow b$) Άμεσο, αφού οι σχέσεις της γλώσσας L_{τ^*} είναι οι φόρμουλες της L_τ . ($b \Rightarrow c$) Έστω μία φόρμουλα ψ της L_{τ^*}. Από το 1.2.5 υπάρχει σχέση R τέτοια ώστε $\Sigma^* \models \psi \longleftrightarrow R$. Από υπόθεση ξέρουμε πως τα $a_1, \ldots, a_n \in |A|$ ικανοποιούν τη σχέση R στο A^* αν και μόνο αν την ικανοποιούν στο B^*. Επειδή η R είναι ισοδύναμη με την ψ το ίδιο θα ισχύει και για την ψ. ($c \Rightarrow a$) Τετριμμένο.
(3) Άμεση συνέπεια του 2.
(4) Για να αποδείξουμε αυτήν την πρόταση αρκεί η ύπαρξη ενός μοντέλου της θεωρίας $\Sigma^* \cup \mathcal{D}(A_1) \cup \mathcal{D}(A_2)$ ή ισοδύναμα η συνέπεια αυτής της

θεωρίας. Ας υποθέσουμε πως η θεωρία $\Sigma^* \cup \mathcal{D}(A_1) \cup \mathcal{D}(A_2)$ είναι αντιφατική. Τότε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) στην επαυξημένη γλώσσα $L(A_1 \cup A_2)$ θα υπάρχουν προτάσεις $\varphi \in \Sigma^*$, $\varphi_1(\alpha_1) \in \mathcal{D}(A_1)$ $\varphi_2(\alpha_2) \in \mathcal{D}(A_2)$ ώστε το σύνολο $\{\varphi,\ \varphi_1(\alpha_1),\ \varphi_2(\alpha_2)\}$ να είναι αντιφατικό. Όμως αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι $\varphi \models \neg\ (\varphi_1(\alpha_1) \wedge \varphi_2(\alpha_2))$ και από το θεώρημα γενίκευσης των σταθερών έχουμε $\varphi \models \forall x \forall y\ \neg(\varphi_1(x) \wedge \varphi_2(y))$. Η συνέπεια της θεωρίας $\Sigma^* \cup \mathcal{D}(A_1)$ σημαίνει πως $\Sigma^* \models \exists x\ \varphi_1(x)$ και η συνέπεια της θεωρίας $\Sigma^* \cup \mathcal{D}(A_2)$ σημαίνει πως $\Sigma^* \models \exists y\ \varphi_2(y)$. Επομένως θα ισχύει και ότι $\Sigma^* \models \exists x \exists y\ (\varphi_1(x) \wedge \varphi_2(y))$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι $\varphi \models \forall x \forall y\ \neg(\varphi_1(x) \wedge \varphi_2(y))$ και φτάσαμε σε άτοπο.
(5) Επεκτείνουμε τη γλώσσα μας ώστε να περιέχει ως σταθερές τα στοιχεία του A_0. Η σταθερά $\bar{a}$ θα ερμηνεύεται στο μοντέλο A_0 ως το στοιχείο a, στο μοντέλο A_1 ως $g_1(a)$ και στο μοντέλο A_2 ως $g_2(a)$. Είναι προφανές πως οι μοναδικές επεκτάσεις $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ των μονομορφισμών g_1, g_2 είναι και αυτοί μονομορφισμοί στα επεκτεταμένα μοντέλα. Εφαρμόζοντας το (4) για τα επεκτεταμένα μοντέλα $A_1^* := (A_1, g_1(a))_{a \in |A_0|}$, $A_2^* := (A_2, g_2(a))_{a \in |A_0|}$ υπάρχουν $A_3^* \in \mathcal{N}(\Sigma^*)$ και δύο μονομορφισμοί $f_1 : A_1^* \longrightarrow A_3^*$ και $f_2 : A_2^* \longrightarrow A_3^*$. Τότε για κάθε $a \in A_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} f_1 \circ \bar{g}_1(\bar{a}^{A_0}) &= f_1 \circ g_1(\bar{a}^{A_0}) = f_1(g_1(\bar{a}^{A_0})) = f_1(\bar{a}^{A_1}) = \bar{a}^{A_3} \\ &= f_2(\bar{a}^{A_2}) = f_2(g_2(\bar{a}^{A_0})) = f_2 \circ g_2(\bar{a}^{A_0}) = f_2 \circ \bar{g}_2(\bar{a}^{A_0}) \end{aligned}$$

Επομένως στην επαυξημένη γλώσσα και για τα επεκτεταμένα μοντέλα έχουμε $f_1 \circ \bar{g}_1 = f_2 \circ \bar{g}_2$ και συνεπώς, στην αρχική γλώσσα, για τα αρχικά μοντέλα του λήμματος και για $A_3 = A_3^* \quad L$ ισχύει το ζητούμενο.

Μία έννοια που θα μας φανεί βολική είναι αυτή της κατηγορίας συναρτήσεων. Αν $\mathcal{T}$ είναι μία κλάση από μαθηματικά αντικείμενα[6], τότε ορίζεται μία κατηγορία $\mathcal{C}$ από τριάδες $(f : A \longrightarrow B)$ όπου $A, B \in \mathcal{T}$, η f είναι απεικόνιση από το $|A|$ στο $|B|$ και ισχύουν:
(α) η ταυτότητα $(I : A \longrightarrow A) \in \mathcal{C}$ για κάθε $A \in \mathcal{T}$ και
(β) αν $(f : A \longrightarrow B) \in \mathcal{C}$ και $(g : B \longrightarrow C) \in \mathcal{C}$, τότε
$(g \circ f : A \longrightarrow C) \in \mathcal{C}$.

[6]Ένα “μαθηματικό αντικείμενο” A είναι ένα σύνολο $|A|$ μαζί με μία δομή. Στην παρούσα εργασία το “μαθηματικό αντικείμενο” θα είναι είτε κατηγορηματικό σύστημα είτε τοπολογικός χώρος.

2. Βαθμός υπερβατικότητας. Πρόκειται να ασχοληθούμε με στοιχειώδεις μονομορφισμούς μεταξύ υποσυστημάτων μιας πλήρους θεωρίας Σ. Είναι άμεσο από το 1.2.3 πως μπορούμε να θεωρούμε τη Σ^* αντί της Σ και να επωφεληθούμε από τις ιδιότητες που έχει η Σ^*. Από εδώ και στο εξής θα υιοθετήσουμε την ακόλουθη σύμβαση: Με T θα συμβολίζουμε πάντα μία πλήρη θεωρία σε μία αριθμήσιμη γλώσσα L. Η T θα έχει ένα άπειρο μοντέλο και θα υπάρχει θεωρία Σ ώστε $T = \Sigma^*$. Θα συμβολίζουμε την κλάση των υποσυστημάτων των μοντέλων της T με $\mathcal{N}(T)$. Αν $A \in \mathcal{N}(T)$, προκύπτει από το 1.2.5 πως η θεωρία $T(A) = T \cup \mathcal{D}(A)$ είναι πλήρης στη γλώσσα $L(A)$. Το σύνολο με φόρμουλες από τη γλώσσα $L(A)$, που εκτός της u_0 δεν έχουν άλλη ελεύθερη μεταβλητή, θα το συμβολίζουμε με $F(A)$. Ένα maximal συνεπές σύνολο από φόρμουλες του $F(A)$ θα λέγεται "τύπος" και το σύνολο των τύπων θα συμβολίζεται με $S(A)$. Το $S(A)$ είναι και τοπολογικός χώρος με βάση: $U_\psi = \{p \in S(A) | \psi \in p\}$ $(\psi \in F(A))$. Είναι προφανές πως η βάση του $S(A)$ έχει πληθάριθμο $\varkappa(A)$ (modulo $\aleph_0$).

Το χώρο $S(A)$ μπορούμε να τον θεωρούμε ως σύνολο τρόπων επέκτασης της $T(A)$ σε μία πλήρη θεωρία μιας γλώσσας που έχει μία επιπλέον σταθερά από την $L(A)$. Έστω $A, B \in \mathcal{N}(T)$, $A \subseteq B$, $b \in B$ και $\bar{b}$ να είναι μία σταθερά στην $L(B)$ της οποίας η ερμηνεία είναι το b. Θα συμβολίζουμε με $p_{b,B}$ το μοναδικό τύπο $p \in S(B)$ που περιέχει τη φόρμουλα $u_0 = \bar{b}$.[7] Ορίζουμε $p_{b,B,A} = p_{b,B} \cap F(A)$. Δηλαδή, ο τύπος $p_{b,B,A}$ προκύπτει από τον $p_{b,B}$ κρατώντας τις φόρμουλες που ανήκουν στο $F(A)$ και είναι εναργές πως $p_{b,B,A} \in S(A)$. Αν $q \in S(A)$, θα λέμε πως το b ικανοποιεί τον τύπο q στο B αν $q = p_{b,B,A}$. Είναι άμεσο πως κάθε στοιχείο του B ικανοποιεί ένα τύπο από το $S(A)$. Από το θεώρημα πληρότητας συμπεραίνουμε πως κάθε τύπος $p \in S(A)$ ικανοποιείται σε κάποια επέκταση του A. Έστω πως $B_1, B_2 \in \mathcal{N}(T)$, $B_1, B_2 \supseteq A$, $b_1 \in B_1, b_2 \in B_2$ τότε η απεικόνιση $f : A \cup \{b_1\} \longrightarrow A \cup \{b_2\}$ η οποία είναι ταυτοτική στο A και απεικονίζει το b_1 στο b_2 είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν τα b_1, b_2 ικανοποιούν τον ίδιο τύπο του $S(A)$. Επομένως, το $S(A)$ είναι το σύνολο των "ισομορφισμών σε σχέση με το A".

Λήμμα 2.1. *Αν $A \in \mathcal{N}(T)$, τότε υπάρχει ένα μοντέλο B του T με $B \supseteq A$ ώστε κάθε $p \in S(A)$ να ικανοποιείται στο B.*

Απόδειξη. Έστω $\{p_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ μία καλά διατεταγμένη λίστα από τύπους του $S(A)$. Ισχυριζόμαστε πως υπάρχει μία αύξουσα αλυσίδα $\{B_\alpha, \alpha < \gamma\}$

[7] Ο τύπος ορίζεται μοναδικά, αφού πρέπει να περιέχει όλες τις φόρμουλες με μια το πολύ ελεύθερη μεταβλητή που ικανοποιούνται από το b στο σύστημα B.

από μοντέλα του T ώστε κάθε $B_\alpha \supseteq A$ και κάθε p_β με $\beta < \alpha$ ικανοποιείται στο B_α. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στο α. Ας υποθέσουμε πως η ακολουθία υπάρχει για κάθε $\beta < \alpha$. Αν ο α είναι οριακός διατακτικός, θέτουμε $B_\alpha = \quad_{\beta<\alpha} B_\beta$ και το αποτέλεσμα είναι προφανές από το 1.3.3. Ας υποθέσουμε πως $\alpha = \beta + 1$. Από τον ορισμό του τύπου είναι άμεσο πως το σύνολο $T \cup \mathcal{D}(A) \cup \{\psi(x) |\ \psi \in p_\alpha\}$ είναι συνεπές και επομένως από το θεώρημα πληρότητας έχουμε πως υπάρχει ένα μοντέλο C του T ώστε $|A| \subseteq |C|$ και ο τύπος p_α να ικανοποιείται στο C. Από το 1.3.5, υπάρχει μοντέλο D του T και μονομορφισμοί $f_1 : C \longrightarrow D$ και $f_2 : B_\beta \longrightarrow D$ τέτοιοι ώστε να ταυτίζονται στο A. Αν ταυτίσουμε το B_β με το $f_2(B_\beta)$, τότε μπορούμε να ορίσουμε το D ως το ζητούμενο B_α.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{C} \arrow[dr, "f_1"] & \\
\mathrm{A} \arrow[ur, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & & \mathrm{D} \\
 & B_\beta \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Έστω πως $A, B \in \mathcal{N}(T)$ και πως η απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ είναι μονομορφισμός. Η f επάγει ένα μονομορφισμό $f : F(A) \longrightarrow F(B)$ που ορίζεται ως εξής: Η $f(\psi)$ είναι η φόρμουλα που παίρνουμε αν αντικαταστήσουμε (για κάθε $a \in A$) με $\overline{f(a)}$ κάθε εμφάνιση του $\overline{a}$ στην ψ. Στη συνέχεια η f επάγει μία απεικόνιση $f^* : S(B) \longrightarrow S(A)$ ως εξής: $f^*(p) = f^{-1}(p)$. Η f^* είναι μια απεικόνιση μεταξύ συνόλων τύπων. Παίρνει έναν τύπο p από το $S(B)$ και αν μία φόρμουλα ψ, που περιέχεται στον τύπο p, έχει παραμέτρους μόνο από το $f(A)$ ($f(A) \subseteq B$) τότε το $f^*(p)$ θα περιέχει τη φόρμουλα $f^{-1}(\psi)$. Αυτές ακριβώς θα είναι και οι φόρμουλες που θα περιέχει ο $f^*(p)$. Ισχύουν ακόμα οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$p \in f^{*-1}(U_\psi) \Longleftrightarrow f^*(p) \in U_\psi \Longleftrightarrow f^{-1}(p) \in U_\psi$$

$$\Longleftrightarrow \psi \in f^{-1}(p) \Longleftrightarrow f(\psi) \in p \Longleftrightarrow p \in U_{f(\psi)}$$

Δηλαδή δείξαμε πως $f^{*-1}(U_\psi) = U_{f(\psi)}$ και κατά συνέπεια η απεικόνιση f^* είναι τοπολογικά συνεχής αφού η αντίστροφη εικόνα ενός τυχαίου βασικού συνόλου είναι ανοιχτό σύνολο.
Τέλος, η f^* είναι επιμορφισμός στο $S(A)$. Αν $q \in S(A)$, τότε υπάρχει κάποιος $p \in S(B)$ ώστε $p \supseteq f(q)$. Είναι προφανές ότι $f^*(p) = q$. Στην

ειδική περίπτωση που $B \supseteq A$, $\imath_{AB} : A \longrightarrow B$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση και $p \in S(B)$, τότε $\imath^*_{AB}(p) = p \cap F(A)$. Αξίζει να σημειωθεί πως αφού μία τυχαία φόρμουλα ψ περιέχει πεπερασμένο πλήθος σταθερών, για κάθε U_ψ που ανήκει στη βάση του $S(A)$, θα υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο B ώστε $B \subseteq A$ και το U_ψ να είναι η αντίστροφη εικόνα, μέσω της $\imath^*_{BA}$ ενός μέλους της βάσης του $S(B)$.
Έστω $\mathcal{I}(T) = \{S(A) | A \in \mathcal{N}(T)\}$ και $\mathcal{C}(T) = \{f^* : \ S(B) \ \longrightarrow \ S(A) |$ $A, B \in \mathcal{N}(T)$ *και* f^* *μονομορφισμός*$\}$. Τότε το σύνολο $\mathcal{C}(T)$ είναι μία κατηγορία των συνεχών επιμορφισμών με κλάση αντικείμενο την $\mathcal{I}(T)$.

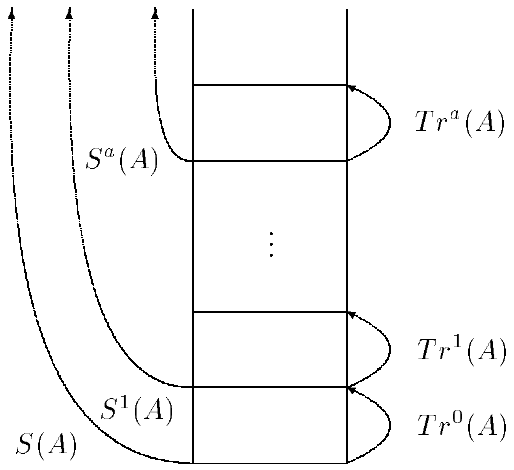
Ο επόμενος ορισμός είναι μία γενίκευση του συνήθους ορισμού για παραγόμενους χώρους σε έναν ορισμό που περιλαμβάνει μία κλάση χώρων και μία κατηγορία απεικονίσεων μεταξύ των. Αν και θα ασχοληθούμε αποκλειστικά και μόνο με την κατηγορία $\mathcal{C}(T)$, θα γίνει άμεσα κατανοητό πως ο ορισμός 2.1. καθώς και πολλά από τα ακόλουθα αποτελέσματα και αποδείξεις έχουν ισχύ και σε πολλές άλλες κατηγορίες συνεχών επιμορφισμών μεταξύ συμπαγών χώρων.

Ορισμός 2.1. *Για κάθε διατακτικό α και κάθε $S(A) \in \mathcal{I}(T)$ ορίζονται επαγωγικώς οι υπόχωροι $S^\alpha(A)$ και $Tr^\alpha(A)$ ως εξής:*

1. $S^\alpha(A) = S(A) - \quad {}_{\beta<\alpha} Tr^\beta(A)$
2. $p \in Tr^\alpha(A)$ *αν : (i)* $p \in S^\alpha(A)$ *και (ii) για κάθε απεικόνιση* $(f^* : S(B) \longrightarrow S(A)) \in \mathcal{C}(T)$, *το σύνολο* $f^{*-1}(p) \cap S^\alpha(B)$ *είναι ένα σύνολο από μεμονωμένα στοιχεία στο* $S^\alpha(B)$.

Ο τύπος $p \in S(A)$ θα λέγεται "αλγεβρικός" αν $p \in Tr^0(A)$ και "υπερβατικός τάξης α" (για $\alpha > 0$) αν $p \in Tr^\alpha(A)$ [8]. Στο επόμενο σχήμα γίνεται άμεσα αντιληπτή η διαμέριση του $S(A)$ από τα σύνολα $Tr^\alpha(A)$.

[8] Οι όροι αλγεβρικός και υπερβατικός προέρχονται από τη θεωρία των αλγεβρικά κλειστών σωμάτων χαρακτηριστικής 0 και ο λόγος θα γίνει κατανοητός από ένα παράδειγμα που θα εξετάσουμε στη συνέχεια.



Λήμμα 2.2. *Ο τοπολογικός χώρος $S(A)$ είναι συμπαγής και Hausdorff.*

Απόδειξη. Για τη συμπάγεια φτάνει να δείξουμε πως για μια τυχαία οικογένεια βασικών ανοιχτών U_ψ με $\psi \in K$ που αποτελεί κάλυμμα για το $S(A)$ υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Θεωρούμε το σύνολο $M = \{\neg\psi |\ \psi \in K\}$. Αν το M είναι συνεπές, τότε μπορεί να επεκταθεί σε τύπο (ενδεχομένως να υπάρχουν πολλές επεκτάσεις) και προφανώς δεν θα υπάρχει U_ψ με $\psi \in K$ που να περιέχει τον τύπο αυτό και έτσι φτάσαμε σε άτοπο. Επομένως, το M είναι αντιφατικό και υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο K' του K ώστε το σύνολο $\{\neg\psi |\ \psi \in K'\}$ να είναι αντιφατικό. Είναι άμεσο πως η οικογένεια U_ψ με $\psi \in K'$ είναι το ζητούμενο υποκάλυμμα του $S(A)$, αφού κάθε τύπος θα περιέχει αναγκαστικά είτε το ψ είτε το $\neg\psi$ και επειδή το K' είναι αντιφατικό κανένας τύπος δεν πρόκειται να περιέχει όλες τις αρνήσεις των $\psi \in K'$. Θα δείξουμε τώρα πως ο $S(A)$ είναι και Hausdorff. Έστω $p, q \in S(A)$ και $p \neq q$. Τότε θα υπάρχει τουλάχιστον μία φόρμουλα ψ ώστε $\psi \in p$ και $\neg\psi \in q$. Προφανώς ισχύουν $p \in U_\psi$, $q \in U_{\neg\psi}$ και $U_\psi \cap U_{\neg\psi} = \emptyset$. Άρα ο $S(A)$ είναι Hausdorff.

Πρόταση 2.1. *Έστω G ένας συμπαγής χώρος, H ένας χώρος Hausdorff, $f : G \longrightarrow H$ ένας συνεχής επιμορφισμός και p ένα οριακό σημείο του H. Τότε το σύνολο $f^{-1}(p)$ περιέχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο του G.*

Απόδειξη. Αν το $f^{-1}(p)$ είναι ένα σύνολο μεμονωμένων σημείων, τότε το $G - f^{-1}(p)$ θα είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς G και κατά συνέπεια συμπαγές σύνολο. Όμως η εικόνα ενός συμπαγούς συνόλου μέσω συνεχούς απεικόνισης είναι συμπαγές και επομένως κλειστό σύνολο. Δηλαδή το $f(G - f^{-1}(p)) = H - \{p\}$ είναι κλειστό και έτσι το p δεν είναι οριακό σημείο του H.

Θεώρημα 2.1. *Ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:*
(α) Το $S^{\alpha}(A)$ είναι κλειστός και κατά συνέπεια (σύμφωνα με τοπολογικό λήμμα) συμπαγής υπόχωρος του $S(A)$.
(β) Αν $(f^* : S(B) \longrightarrow S(A)) \in \mathcal{C}(T)$, τότε (i) $f^*(S^{\alpha}(B)) = S^{\alpha}(A)$ και (ii) αν ο τύπος $p \in S^{\alpha}(A)$, τότε $p \in Tr^{\alpha}(A)$ αν και μόνο αν ${f^*}^{-1}(p) \cap S^{\alpha}(B) \subseteq Tr^{\alpha}(B)$.

Απόδειξη. (α) Η απόδειξη είναι με επαγωγή στο α. Έστω $\alpha = \beta + 1$, τότε ισχύει $S^{\alpha}(A) = S^{\beta}(A) - Tr^{\beta}(A)$. Το σύνολο $Tr^{\beta}(A)$ αποτελείται από μεμονωμένα στοιχεία και από επαγωγική υπόθεση το $S^{\beta}(A)$ είναι κλειστό. Επομένως και το $S^{\alpha}(A)$ είναι κλειστό.
Ας υποθέσουμε πως α=δ είναι οριακός διατακτικός. Τότε το $S^{\delta}(A)$ είναι κλειστό ως τομή κλειστών συνόλων $S^{\delta}(A) = \ _{\beta<\delta}S^{\beta}(A)$.
(β) Με την παρατήρηση πως $Tr^{\alpha}(A) = S^{\alpha}(A) - S^{\alpha+1}(A)$ και με την υπόθεση πως ισχύει το (i), το (ii) αποδεικνύεται ως εξής: Αν $p \in S^{\alpha}(A)$, τότε έχουμε πως :

$$p \in Tr^{\alpha}(A) \iff p \notin S^{\alpha+1}(A) \iff$$
$$\nexists q \in S^{\alpha+1}(B) : \ f^*(q) = p \iff \nexists q \in S^{\alpha+1}(B) : q \in {f^*}^{-1}(p)$$
$$\iff {f^*}^{-1}(p) \cap S^{\alpha}(B) \subseteq S^{\alpha}(B) - S^{\alpha+1}(B) = Tr^{\alpha}(B)$$

Η παρατήρηση χρησιμοποιήθηκε στην πρώτη και τελευταία ισοδυναμία ενώ το (i) στη δεύτερη.
Η απόδειξη του (β)(i) θα γίνει με επαγωγή στο α. Έστω πως ισχύει για κάθε $\beta < \alpha$. Πρώτα θα δείξουμε πως $f^*(S^{\alpha}(B)) \subseteq S^{\alpha}(A)$ ή ισοδύναμα πως για κάθε $\beta < \alpha$ αν $q \in S^{\alpha}(B)$, τότε $f^*(q) = p \notin Tr^{\beta}(A)$. Επειδή $q \notin Tr^{\beta}(B)$, από τον ορισμό θα υπάρχει $(g^* : S(C) \longrightarrow S(B)) \in \mathcal{C}(T)$ τέτοιο ώστε το σύνολο ${g^*}^{-1}(q) \cap S^{\beta}(C)$ να περιέχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο r. Τότε $(f^* \circ g^* : S(C) \longrightarrow S(A)) \in \mathcal{C}(T)$ [9] και $r \in (f^* \circ g^*)^{-1}(p)$, δηλαδή $p \notin Tr^{\beta}(A)$.
Τέλος, για την απόδειξη πως $f^*(S^{\alpha}(B)) \supseteq S^{\alpha}(A)$, αρκεί να δειχθεί πως για κάθε $p \in S^{\alpha}(A)$ ισχύει ${f^*}^{-1}(p) \cap S^{\alpha}(B) \neq \emptyset$. Ας υποθέσουμε το αντίθετο για κάποιο $p \in S^{\alpha}(A)$. Επειδή η f^* είναι επιμορφισμός έπεται πως μπορούμε να διαλέξουμε το μεγαλύτερο β (προφανώς $\beta < \alpha$) ώστε

[9] Χρησιμοποιούμε την προφανή ισότητα $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$

$f^{*-1}(p) \cap S^{\beta}(B) \neq \emptyset$. Τότε θα ισχύει $f^{*-1}(p) \cap S^{\beta}(B) \subseteq Tr^{\beta}(B)$, αφού $f^{*-1}(p) \cap S^{\gamma}(B) = \emptyset$ για κάθε $\gamma > \beta$. Επειδή $p \notin Tr^{\beta}(A)$, θα υπάρχει $(g^* : S(C) \longrightarrow S(A)) \in \mathcal{C}(T)$ ώστε το σύνολο $g^{*-1}(p) \cap S^{\beta}(C)$ να περιέχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο r του $S^{\beta}(C)$. Από το λήμμα 1.3.5 έχουμε πως υπάρχει $D \in \mathcal{N}(T)$ και μονομορφισμοί $h_1 : B \longrightarrow D$ και $h_2 : C \longrightarrow D$ ώστε $h_1 \circ f = h_2 \circ g$. Από την επαγωγική υπόθεση, ο επιμορφισμός h_2^* απεικονίζει το $S^{\beta}(D)$ επί του $S^{\beta}(C)$. Από την πρόταση 2.1 το σύνολο $h_2^{*-1}(r)$ περιέχει ένα οριακό σημείο s του $S^{\beta}(D)$. Πάλι από την επαγωγική υπόθεση ισχύει $h_1^*(s) \in S^{\beta}(B)$ και από την παρατήρηση πως $h_1 \circ f = h_2 \circ g \Longrightarrow f^* \circ h_1^* = g^* \circ h_2^*$ παίρνουμε πως $h_1^*(s) \in f^{*-1}(p)$ (ξέρουμε ήδη πως $h_2^*(s) \in g^{*-1}(p)$). Επομένως $h_1^*(s) \in S^{\beta}(B) \cap f^{*-1}(p)$ και από τον ορισμό έχουμε πως $h_1^*(s) \notin Tr^{\beta}(B)$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός πως $f^{*-1}(p) \cap S^{\beta}(B) \subseteq Tr^{\beta}(B)$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{B} \arrow[dr, "h_1"] & \\ \mathrm{A} \arrow[ur, "\mathrm{f}"] \arrow[dr, "\mathrm{g}"'] & & \mathrm{D} \\ & \mathrm{C} \arrow[ur, "h_2"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{S(B)} \arrow[dr, "f^*"] & \\ \mathrm{S(D)} \arrow[ur, "h_1^*"] \arrow[dr, "h_2^*"'] & & \mathrm{S(A)} \\ & \mathrm{S(C)} \arrow[ur, "g^*"'] & \end{tikzcd}$$

Θεώρημα 2.2. *(α) Αν* $p \in Tr^{\alpha}(A)$, *τότε υπάρχει ένας φυσικός αριθμός* n *ώστε αν* $(f^* : S(B) \longrightarrow S(A)) \in \mathcal{C}(T)$, *το σύνολο* $f^{*-1}(p) \cap S^{\alpha}(B)$ *να έχει πληθάριθμο* $\leq n$. *Αν* n *είναι ο ελάχιστος φυσικός με αυτή την ιδιότητα, θα τον ονομάζουμε "βαθμό" του* p.
(β) Αν $p \in Tr^{\alpha}(A)$ *και* $(f^* : S(B) \longrightarrow S(A)) \in \mathcal{C}(T)$, *τότε ισχύει βαθμός* $p = \quad {}_{q}$ *βαθμός* $q \ \ (q \in f^{*-1}(p) \cap Tr^{\alpha}(B))$.

Απόδειξη. (α) Ας υποθέσουμε το αντίθετο για κάποιο $p \in Tr^{\alpha}(A)$. Τότε θα υπάρχει, για κάθε φυσικό αριθμό n, $B_n \in \mathcal{N}(T)$ και μονομορφισμός $f_n : A \longrightarrow B_n$ τέτοιος ώστε το σύνολο $f_n^{*-1}(p) \cap S^{\alpha}(B_n)$ να έχει πληθάριθμο μεγαλύτερο του n. Με επαναλαμβανόμενες εφαρμογές του λήμματος 1.3.5 στα B_n μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ακολουθία $A \subseteq A_1 \subseteq A_2 \ldots$ τέτοια ώστε το σύνολο $\imath^{*-1}_{AA_n}(p) \cap S^{\alpha}(A_n)$ να έχει πληθάριθμο μεγαλύτερο του n.

$$\begin{tikzcd}
 & B_{n+1} \arrow[dr, "h_{n+1}"] & \\
\mathrm{A} \arrow[ur, "f_{n+1}"] \arrow[dr, "\imath_{AA_n}"'] & & \mathrm{D} \\
 & A_n \arrow[ur, "g_{n+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & S(B_{n+1}) \arrow[dr, "f^{*}_{n+1}"] & \\
\mathrm{S(D)} \arrow[ur, "h^{*}_{n+1}"] \arrow[dr, "g^{*}_{n+1}"'] & & \mathrm{S(A)} \\
 & S(A_n) \arrow[ur, "\imath^{*}_{AA_n}"'] &
\end{tikzcd}$$

Μέσω της h_{n+1} η ιδιότητα του B_{n+1} μεταφέρεται στο D. Δηλαδή το σύνολο $(h_{n+1} \circ f_{n+1})^{*-1}(p) \cap S^{\alpha}(D) = h^{*-1}_{n+1}(f^{*-1}_{n+1}(p)) \cap S^{\alpha}(D)$ έχει πληθάριθμο μεγαλύτερο του n. Επομένως αν θεωρήσουμε το D ως επέκταση του A_n μπορούμε να το ταυτίσουμε με το επιθυμητό A_{n+1}. Ορίζουμε $A^{'} = \ _{n\in\omega}A_n$. Τότε το σύνολο $\imath^{*-1}_{AA^{'}}(p) \cap S^{\alpha}(A^{'})$ είναι άπειρο και συμπαγές. Η συμπάγεια προκύπτει γιατί το σύνολο $\imath^{*-1}_{AA^{'}}(p)$ είναι κλειστό ως αντίστροφη εικόνα κλειστού (Τα μονοσύνολα είναι κλειστά στους χώρους Hausdorff) μέσω συνεχούς απεικόνισης και όπως δείξαμε το $S^{\alpha}(A^{'})$ είναι συμπαγές. Κατά συνέπεια, η τομή τους θα είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $S^{\alpha}(A^{'})$ και επομένως και η τομή θα είναι συμπαγές σύνολο. Όμως κάθε άπειρο και συμπαγές σύνολο έχει οριακό σημείο και αυτό συνεπάγεται πως $p \notin Tr^{\alpha}(A)$ το οποίο με τη σειρά του αντιφάσκει με την αρχική υπόθεση.

(β) Για κάθε $q \in Tr^{\alpha}(B) \cap f^{*-1}(p)$ υπάρχει κάποιο $C_q \in \mathcal{N}(T)$ και ένας μονομορφισμός $g_q : B \longrightarrow C_q$ τέτοιος ώστε το σύνολο $g^{*-1}_q(q) \cap S^{\alpha}(C_q)$ να έχει πληθάριθμο το βαθμό του q. Όμοια, υπάρχει κάποιο $C_p \in \mathcal{N}(T)$ και ένας μονομορφισμός $g_p : A \longrightarrow C_p$ ώστε το σύνολο $g^{*-1}_p(p) \cap S^{\alpha}(C_p)$ να έχει πληθάριθμο το βαθμό του p. Χρησιμοποιώντας επαγωγικά το λήμμα 1.3.5, συμπεραίνουμε πως υπάρχει $C \in \mathcal{N}(T)$ και μονομορφισμός $g : B \longrightarrow C$ τέτοιος ώστε το $g^{*-1}(q) \cap S^{\alpha}(C)$ να έχει πληθάριθμο το βαθμό του q (για κάθε $q \in f^{*-1}(p) \cap Tr^{\alpha}(B)$ και το $(f^{*} \circ g^{*})^{-1}(p) \cap S^{\alpha}(C)$

να έχει πληθάριθμο το βαθμο του p. (Στην πραγματικότητα χρησιμοποιούμε το λήμμα 1.3.5 σε δύο στάδια: Στην αρχή, μία φορά, συνδυάζουμε τα συστήματα A, B, C_p για να βρούμε ένα μοντέλο που είναι "επέκταση" του A και έχει τις επιθυμητές ιδιότητες για τον τύπο p και στη συνέχεια θα συνδυάσουμε την επέκταση του A, το B και το C_q για κάθε τύπο q του $Tr^{\alpha}(B) \cap f^{*-1}(p)$ για να βρούμε το ζητούμενο μοντέλο.) Από την ακόλουθη ισότητα

$$(f^{*} \circ g^{*})^{-1}(p) \cap S^{\alpha}(C) = \quad {}_{q} g^{*-1}(q) \cap S^{\alpha}(C) \quad (q \in f^{*-1}(p) \cap S^{\alpha}(B))$$

το ζητούμενο είναι προφανές.

Είναι άμεσο πόρισμα του θεωρήματος που δείξαμε πως αν $p \in Tr^{\alpha}(A)$, τότε για κάθε μονομορφισμό $f : A \longrightarrow B$ αν μελετήσουμε τον τύπο p στο "μεγαλύτερο" υποσύστημα, θα δούμε πως έχει πεπερασμένο πλήθος επεκτάσεων στο $Tr^{\alpha}(B)$.

Πόρισμα 2.1. *Αν $p \in Tr^{\alpha}(A)$, τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύστημα $F \subseteq A$ τέτοιο ώστε $\imath^{*}_{FA}(p) \in Tr^{\alpha}(F)$.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό 2.1 αν θεωρήσουμε την ταυτοτική απεικόνιση $(\imath^{*}_{AA} : S(A) \longrightarrow S(A)) \in \mathcal{C}(T)$ συμπεραίνουμε πως υπάρχει περιοχή U του $S(A)$ ώστε $S^{\alpha}(A) \cap U = \{p\}$. Όπως έχουμε αναφέρει προηγουμένως, καθώς η περιοχή U προσδιορίζεται από μία φόρμουλα, υπάρχει πεπερασμένο υποσύστημα $F \subseteq A$ τέτοιο ώστε το $S(F)$ έχει περιοχή V με $U = \imath^{*-1}_{FA}(V)$. Ας υποθέσουμε πως δεν ισχύει το πόρισμα. Τότε από τον ορισμό 2.1, έχουμε πως θα υπάρχει μονομορφισμός $f : F \longrightarrow B$ ώστε να υπάρχει οριακό σημείο στο σύνολο $f^{*-1}(\imath^{*}_{FA}(p)) \cap S^{\alpha}(B)$. Για άλλη μια φορά θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 1.3.5 και ο άλλος αρχικός μονομορφισμός θα είναι προφανώς ο $\imath_{FA}$. Θα υπάρχουν, λοιπόν, ένα σύνολο D και δύο μονομορφισμοί $h_1 : B \longrightarrow D$ και $h_2 : A \longrightarrow D$ ώστε $h_2 \circ \imath_{FA} = h_1 \circ f$. Από τα παραπάνω θα υπάρχει οριακό σημείο στο $h_1^{*-1}(f^{*-1}(\imath^{*}_{FA}(p))) \cap S^{\alpha}(D) = h_2^{*-1}(\imath^{*-1}_{FA}(\imath^{*}_{FA}(p))) \cap S^{\alpha}(D) = h_2^{*-1}(p) \cap S^{\alpha}(D)$ και φτάσαμε σε άτοπο, γιατί από την υπόθεση ξέρουμε πως $p \in Tr^{\alpha}(A)$.

Λήμμα 2.3. *Ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:*
(α) Ας υποθέσουμε πως $A, B \in \mathcal{N}(T)$ και $S^{\alpha}(A) = \emptyset$ (ή $Tr^{\alpha}(A) = \emptyset$), τότε $S^{\alpha}(B) = \emptyset$ (ή $Tr^{\alpha}(B) = \emptyset$).
(β) Υπάρχει ένας ελάχιστος διατακτικός $\alpha_T < (2^{\aleph_0})^{+}$ τέτοιος ώστε για κάθε $A \in \mathcal{N}(T)$ και για κάθε $\beta > \alpha_T$ να ισχύει $S^{\alpha_T}(A) = S^{\beta}(A)$.
(γ) Αν $S^{\alpha_T}(A) = \emptyset$ για κάποιο $A \in \mathcal{N}(T)$, τότε ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός α_T δεν μπορεί να είναι οριακός.

Απόδειξη.
(α) Άμεσο αποτέλεσμα από το λήμμα 1.3.4 και θεώρημα 2.1.β.
(β) Από το πόρισμα 2.1 συμπεραίνουμε πως το σύνολο $Tr^{\alpha}(A)$ είναι κενό αν είναι κενό για κάθε πεπερασμένο σύστημα $B \in \mathcal{N}(T)$. Παρατηρούμε πως αν $Tr^{\alpha}(A) = \emptyset$ για κάθε $A \in \mathcal{N}(T)$ (από το (α) αρκεί η ύπαρξη ενός τέτοιου A), τότε $Tr^{\alpha+\rho}(A) = \emptyset$ για κάθε $A \in \mathcal{N}(T)$ και για κάθε διατακτικό αριθμό ρ. Η απόδειξη είναι μια απλή επαγωγή στο ρ. Για $\rho = 1$ έστω πως ισχύει $Tr^{\alpha+1}(A) \neq \emptyset$ και $p \in Tr^{\alpha+1}(A)$. Τότε υπάρχει μονομορφισμός $f : A \longrightarrow B$ ώστε το σύνολο $f^{*-1}(p) \cap S^{\alpha}(B)$ να περιέχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο. Όμως, από υπόθεση, $Tr^{\alpha}(B) = \emptyset$ το οποίο σημαίνει πως $S^{\alpha}(B) = S^{\alpha+1}(B)$ και φτάσαμε σε άτοπο. Επειδή για A πεπερασμένο $\varkappa(S(A)) \leq 2^{\aleph_0}$, η αρχή του περιστεριώνα μας δίνει το ζητούμενο. Πράγματι, αν υποθέσουμε πως $\alpha_T > 2^{\aleph_0}$ τότε πρέπει (όπως δείξαμε προηγουμένως) κάθε κλάση $Tr^{\gamma}(A)$ ($\gamma = 1 \ldots \alpha_T$) να περιέχει τουλάχιστον έναν τύπο και οι τύποι είναι το πολύ $2^{\aleph_0}$. Επομένως, τουλάχιστον ένας τύπος θα αντιστοιχεί σε δύο κλάσεις και αυτό είναι άτοπο.
(γ) Έστω πως ισχύει $S^{\alpha_T}(A) = \quad_{\beta<\alpha_T} S^{\beta}(A) = \emptyset$. Όμως το σύνολο $S^{\alpha_T}(A)$ είναι τομή φθίνουσας ακολουθίας μη κενών συμπαγών συνόλων. Από την τοπολογία ξέρουμε πως τέτοια τομή δε μπορεί να είναι κενή και καταλήξαμε σε άτοπο.

Μία θεωρία T θα λέγεται "ολικά υπερβατική" αν $S^{\alpha_T}(A) = \emptyset$ για κάποιο (και επομένως για κάθε) $A \in \mathcal{N}(T)$.

Θεώρημα 2.3. *Αν η θεωρία T είναι ολικά υπερβατική, τότε $\varkappa(S(A)) = \varkappa(A)$ (modulo $\aleph_0$) για κάθε $A \in \mathcal{N}(T)$.*

Απόδειξη. Για κάθε $p \in Tr^{\alpha}(A)$ μπορούμε να διαλέξουμε μία περιοχή $U(p)$ της βάσης του $S(A)$ τέτοια ώστε $U(p) \cap S^{\alpha}(A) = \{p\}$. Είναι προφανές πως για $p' \neq p$ θα ισχύει $U(p') \neq U(p)$. Επειδή η θεωρία T είναι ολικά υπερβατική, έπεται πως κάθε τύπος $p \in S^{\alpha}(A)$ είναι υπερβατικός σε κάποια τάξη. Επομένως η αντιστοιχία του p με την περιοχή $U(p)$ επάγει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ του $S(A)$ και και ενός υποσυνόλου της βάσης του $S(A)$. Επομένως $\varkappa(S(A)) \leq \varkappa(A) + \aleph_0$. Από την άλλη πλευρά, η φόρμουλα $u_0 = \bar{a}$ καθορίζει για κάθε $a \in A$ ένα μοναδικό τύπο του $S(A)$ και επομένως $\varkappa(S(A)) \geq \varkappa(A) + \aleph_0$.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια το επόμενο θεώρημα όχι μόνο είναι ανάλογο με το θεώρημα Cantor-Bendixson, αλλά και οι αποδείξεις των δύο θεωρημάτων έχουν πολλές ομοιότητες.

Θεώρημα 2.4. *Η θεωρία T είναι ολικά υπερβατική αν και μόνο αν κάθε σύνολο $S(A)$ είναι αριθμήσιμο για κάθε αριθμήσιμο $A \in \mathcal{N}(T)$.*

Απόδειξη. Αν η θεωρία T είναι ολικά υπερβατική, τότε από το προηγούμενο θεώρημα, το σύνολο $S(A)$ θα είναι αριθμήσιμο για κάθε αριθμήσιμο σύστημα $A \in \mathcal{N}(T)$.

Ας υποθέσουμε πως το αντίστροφο δεν ισχύει και η T δεν είναι ολικά υπερβατική θεωρία. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{N}(T)$, $S^{\alpha_T}(A) \neq \emptyset$. Μάλιστα θα υπάρχει κάποιο $A \in \mathcal{N}(T)$ ώστε το σύνολο $S^{\alpha_T}(A)$ να περιέχει παραπάνω από ένα στοιχείο γιατί αλλιώς κάθε $p \in S^{\alpha_T}(A)$ θα είναι υπερβατικό τάξης α_T και αυτό είναι άτοπο, αφού από τον ορισμό δεν υπάρχουν υπερβατικά στοιχεία τάξης α_T. Πράγματι, αν υποθέσουμε πως για κάθε $B \in \mathcal{N}(T)$ το $S^{\alpha_T}(B)$ είναι μονοσύνολο (όπως έχουμε δείξει παραπάνω δεν μπορεί να είναι το κενό), τότε για κάθε $(f^* : S(B) \longrightarrow S(A)) \in \mathcal{C}(T)$, το σύνολο $f^{*-1}(p) \cap S^{\alpha}(B)$ θα είναι μονοσύνολο, δεν θα περιέχει οριακό σημείο και κατά συνέπεια ο τύπος p θα ανήκει στο $Tr^{\alpha_T}(A)$ και φτάσαμε σε άτοπο. Επομένως, υπάρχει σύστημα $A_1 \in \mathcal{N}(T)$ τέτοιο ώστε ο χώρος $S^{\alpha_T}(A_1)$ να αποτελείται από δύο ξένα μη κενά σύνολα (ανοιχτά και κλειστά) U_0 και U_1. Επειδή οι δύο τουλάχιστον τύποι του $S^{\alpha_T}(A_1)$ διαφέρουν, θα υπάρχει φόρμουλα ψ ώστε ο ένας τύπος να περιέχει την ψ και ο άλλος την άρνησή της. Δηλαδή τα U_0 και U_1 είναι στην ουσία τα U_ψ και $U_{\neg\psi}$.

Όπως έχουμε πει και προηγουμένως αυτά τα δύο σύνολα καθορίζονται από πεπερασμένα υποσύνολα του A_1. Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε το A_1 πεπερασμένο. Θα πρέπει να υπάρχει κάποιο $B \in \mathcal{N}(T)$ τέτοιο ώστε $B \supseteq A_1$ και το σύνολο $\imath^{*-1}_{A_1B}(U_0) \cap S^{\alpha_T}(B)$ να έχει περισσότερα από ένα στοιχεία γιατί αλλιώς κάθε $p \in U_0$ θα ήταν υπερβατικό τάξης α_T. Όμοια δουλεύουμε με το U_1. Από το λήμμα 1.3.5 μπορούμε να βρούμε σύνολο A_2 τέτοιο ώστε $A_2 \supseteq A_1$ και τα σύνολα $\imath^{*-1}_{A_1A_2}(U_0) \cap S^{\alpha_T}(A_2)$, $\imath^{*-1}_{A_1A_2}(U_1) \cap S^{\alpha_T}(A_2)$ να έχουν περισσότερα από ένα στοιχεία. Επομένως, μπορούμε να αναλύσουμε το $S^{\alpha_T}(A_2)$ σε τέσσερα μη κενά ξένα σύνολα : U_{00}, U_{01}, U_{10}, U_{11} τέτοια ώστε $\imath^{*-1}_{A_1A_2}(U_j) \cap S^{\alpha_T}(A_2) = U_{j0} \cup U_{j1}$ (j=0,1). Όπως και πριν μπορούμε να υποθέσουμε πως το A_2 είναι πεπερασμένο.

Προχωρούμε επαγωγικά και βρίσκουμε μία αύξουσα ακολουθία συστημάτων $\{A_n |\, n < \omega\}$ τέτοια ώστε κάθε $A_n \in \mathcal{N}(T)$ είναι πεπερασμένο και το σύνολο $S^{\alpha_T}(A_n)$ μπορεί να αναλυθεί σε 2^n ξένα μη κενά σύνολα $U_{j_0,\dots,j_{n-1}}$ με $(j_k = 0,1)$ και

$$\imath^{*-1}_{A_nA_{n+1}}(U_{j_0,\dots,j_{n-1}}) \cap S^{\alpha_T}(A_{n+1}) = U_{j_0,\dots,j_{n-1},0} \cup U_{j_0,\dots,j_{n-1},1}.$$

Αν $A = \cup_n A_n$ και $t \in 2^\omega$ ορίζουμε $V_t = \quad {}_n\, \imath^{*-1}_{A_nA}(U_{t(0),\dots,t(n-1)}) \cap S^{\alpha_T}(A)$. Το σύνολο V_t είναι μη κενό ως τομή φθίνουσας ακολουθίας συμπαγών συνόλων και είναι προφανές πως για $t_1 \neq t_2$ ισχύει $V_{t_1} \neq V_{t_2}$. Επομένως, το σύνολο $S^{\alpha_T}(A)$ έχει πληθάριθμο τουλάχιστον 2^ω, ενώ το A είναι αριθμήσιμο και φτάσαμε σε άτοπο.

Στη συνέχεια θα ακολουθήσει ένα παράδειγμα για να φανούν καλύτερα το νόημα και οι ιδέες των ορισμών που δώσαμε καθώς και των θεωρημάτων που είδαμε. Εξακολουθεί να ισχύει η σύμβαση $T = \Sigma^*$ και ο βασικός στόχος είναι να περιγράψουμε το σύνολο $S(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{N}(T)$. Για να προχωρήσουμε είναι χρήσιμο να ξέρουμε πότε ένα συνεπές σύνολο από φόρμουλες του συνόλου $F(A)$ ανήκει σε έναν μοναδικό τύπο $p \in S(A)$. Πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ικανή συνθήκη:

Ένα συνεπές σύνολο από φόρμουλες, $Q \subseteq F(A)$, περιέχεται σε ένα μοναδικό τύπο $p \in S(A)$ αν για κάθε μοντέλο B του T, $B \supseteq A$, και $b, b' \in B$ που ικανοποιούν κάθε φόρμουλα του Q, υπάρχει ένας αυτομορφισμός του B που αντιστοιχεί το b στο b' και αφήνει το A αναλλοίωτο.

Πράγματι, αν υποθέσουμε πως οι p, p' είναι τύποι του $S(A)$ που περιέχουν το Q, τότε ξέρουμε από το λήμμα 2.1 πως υπάρχει μοντέλο B του T με $B \supseteq A$, και στοιχεία $b, b' \in B$ που ικανοποιούν τους p, p' αντίστοιχα και επομένως κάθε φόρμουλα του Q. Η συνθήκη μας λέει πως υπάρχει ένας αυτομορφισμός του B που αντιστοιχεί το b στο b' και αφήνει το A αναλλοίωτο. Επομένως, τα b, b' ικανοποιούν τους ίδιους τύπους του $S(A)$ και κατά συνέπεια $p = p'$.

Παράδειγμα. Έστω Σ η θεωρία των αλγεβρικά κλειστών σωμάτων με χαρακτηριστική 0. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, αυτή η θεωρία είναι κατηγορική σε κάθε υπεραριθμήσιμη δύναμη αλλά δεν είναι κατηγορική στην $\aleph_0$. Έστωσαν $A \in \mathcal{N}(T)$ και $\Delta(A)$ το σώμα που παράγεται από το A. Ας υποθέσουμε πως $Q(u_0)$ είναι ένα πολυώνυμο με συντελεστές από το $\Delta(A)$ και είναι ανάγωγο επί του $\Delta(A)$. Από την παραπάνω συνθήκη, η φόρμουλα $Q(u_0) = 0$ ορίζει ένα μοναδικό τύπο του $S(A)$ και επειδή αυτός ο τύπος καθορίζεται από μία φόρμουλα είναι προφανές πως θα είναι μεμονωμένο σημείο του $S(A)$. Έστω P το σύνολο από φόρμουλες της μορφής $R(u_0) \neq 0$, όπου το $R(u_0)$ είναι πολυώνυμο με συντελεστές από το $\Delta(A)$. Τότε όλες οι φόρμουλες του P ικανοποιούνται από τα υπερβατικά στοιχεία (με τη συνήθη αλγεβρική έννοια) του σώματος $\Delta(A)$. Επομένως, από τη συνθήκη και τα θεωρήματα Steinitz, το P περιέχεται σε ένα μοναδικό τύπο p του $S(A)$. Είναι προφανές πως δεν υπάρχουν άλλα στοιχεία του $S(A)$. Επειδή το $S(A)$ είναι άπειρο και συμπαγές πρέπει να έχει ένα οριακό σημείο το οποίο δεν μπορεί να είναι άλλο από το p. Επομένως το $S(A)$ αποτελείται από : (1) μεμονωμένα σημεία που αντιστοιχούν σε διακριτά στοιχεία του $\Delta(A)$ και σε αλγεβρικές επεκτάσεις του $\Delta(A)$ και (2) ένα μοναδικό οριακό σημείο που αντιστοιχεί στις υπερβατικές επεκτάσεις του $\Delta(A)$. Αν $B \supseteq A$, τότε κάθε αλγεβρικό στοιχείο του $\Delta(A)$ είναι κατά μείζονα λόγο αλγεβρικό στοιχείο του $\Delta(B)$. Επομένως, αν ο τύπος $q \in S(A)$ είναι μεμονωμένο σημείο, τότε το σύνολο $i^{*-1}_{AB}(q)$ είναι ένα σύνολο από μεμονωμένα σημεία και κατα συνέπεια $q \in Tr^0(A)$. Για κάθε $A \in \mathcal{N}(T)$, το σύνολο $S^1(A)$ είναι μονοσύνολο και επομένως $S^1(A) = Tr^1(A)$. Είναι άμεσο από τους ορισμούς πως η θεωρία T είναι ολικά υπερβατική και πως $\alpha_T = 2$.

3. Αποτελέσματα από το θεώρημα του Ramsey [6]. Σε αυτή την ενότητα καταγράφουμε κάποια αποτελέσματα που απορρέουν από το θεώρημα του Ramsey και θα μας φανούν χρήσιμα για τη συνέχεια.

Θεώρημα 3.1. *(*Ramsey*). Έστω Y ένα άπειρο σύνολο και $Y^{(n)}$ το το σύνολο των υποσυνόλων του Y που έχουν ακριβώς n στοιχεία. Αν $Y^{(n)} = C_1 \cup \cdots \cup C_m$ είναι μια διαμέριση του $Y^{(n)}$ σε πεπερασμένο αριθμό συνόλων, που είναι ξένα μεταξύ τους, τότε υπάρχει $j \leq m$ και ένα άπειρο σύνολο $Y_1 \subseteq Y$ τέτοιο ώστε $Y_1^{(n)} \subseteq C_j$.*

Αρκετό μέρος από αυτή την ενότητα σχετίζεται με τα αποτελέσματα των Ehrenfeucht και Mostowski [7], Ehrenfeucht [8], [9]. Πιο συγκεκριμένα, τα θεωρήματα 3.2, 3.4 και 3.5 που ακολουθούν είναι παραλλαγές αποτελεσμάτων του [7].

Θεώρημα 3.2. *Έστω Σ μία θεωρία (στη γλώσσα L) που έχει ένα άπειρο μοντέλο και $(X,<)$ ένα τυχαίο ολικά διατεταγμένο σύνολο. Τότε υπάρχει ένα μοντέλο A της θεωρίας Σ, τέτοιο ώστε $|A| \supseteq X$ και για κάθε $n \in \omega$, $x_0 < \cdots < x_{n-1}$ και $x_0^{'} < \cdots < x_{n-1}^{'}$ που περιέχονται στο X και ψ φόρμουλα που δεν έχει άλλες ελεύθερες μεταβλητές εκτός από τις $u_0, \ldots, u_{n-1}$, να ισχύει $A \models \psi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \longleftrightarrow \psi(x_0^{'}, \ldots, x_{n-1}^{'})$.*

Απόδειξη. Αρχικά προσθέτουμε στη γλώσσα L μία σταθερά $\bar{x}$ για κάθε $x \in X$ και στη θεωρία Σ προσθέτουμε την πρόταση $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ (I) για κάθε ζευγάρι x_1, x_2 από διαφορετικά στοιχεία του X. Τέλος, για κάθε $n \in \omega$, $x_0 < \cdots < x_{n-1}$ και $x_0^{'} < \cdots < x_{n-1}^{'}$ από το X και κάθε ψ φόρμουλα, που δεν έχει άλλες ελεύθερες μεταβλητές εκτός από τις $u_0, \ldots, u_{n-1}$, προσθέτουμε στη θεωρία Σ προτάσεις που έχουν τη μορφή $\psi(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_{n-1}) \longleftrightarrow \psi(\bar{x}_0^{'}, \ldots, \bar{x}_{n-1}^{'})$ (II). Το επεκτεταμένο σύνολο προτάσεων το ονομάζουμε $\bar{\Sigma}$. Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δειχθεί η συνέπεια του $\bar{\Sigma}$. Ας υποθέσουμε λοιπόν πως το $\bar{\Sigma}$ είναι αντιφατικό. Τότε θα υπάρχει ένα αντιφατικό σύνολο $\Sigma_1 \subseteq \bar{\Sigma}$ τέτοιο ώστε να περιέχει το Σ και πεπερασμένο το πλήθος προτάσεις των μορφών (I) και (II). Έστω πως οι προτάσεις της μορφής (II) που ανήκουν στο Σ_1 είναι οι ακόλουθες :

$$\psi_1[\bar{x}]_1 \longleftrightarrow \psi_1[\bar{x}]_1^{'}, \ldots, \psi_m[\bar{x}]_m \longleftrightarrow \psi_m[\bar{x}]_m^{'}$$

Με το σύμβολο $[\bar{x}]_j$ εννοούμε την ακολουθία από σταθερές $\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_{n_j-1}$. Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση κατά την οποία κάθε $[\bar{x}]_j$ αποτελείται ακριβώς από n στοιχεία. Έστω A ένα άπειρο μοντέλο του Σ και "$<^*$" μία γραμμική διάταξη του $|A|$ (η οποία δεν αποτελεί απαραίτητα την ερμηνεία κάποιου συμβόλου της γλώσσας L). Αν $[\alpha]$ και $[\alpha]'$ είναι διατεταγμένες n-άδες του $|A|$ μέσω της διάταξης "$<^*$ " ορίζουμε την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας:

$$[\alpha] \approx [\alpha]' \quad \alpha\nu\nu \quad A \models \mathop{}\limits_{j \leq m} \psi_j[\alpha] \longleftrightarrow \psi_j[\alpha]'.$$

Αυτή η σχέση διαμερίζει το $|A|^{(n)}$ σε το πολύ 2^m κλάσεις ισοδυναμίας. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Ramsey, βρίσκουμε ένα άπειρο υποσύνολο $Y \subseteq |A|$ τέτοιο ώστε το $Y^{(n)}$ να είναι υποσύνολο μιας κλάσης ισοδυναμίας. Επομένως, αν οι n-άδες $[\alpha], [\alpha]'$ προέρχονται από το Y, τότε $[\alpha] \approx [\alpha]'$. Επειδή το Σ_1 περιέχει μόνο πεπερασμένο το πλήθος προτάσεις που έχουν τη μορφή (I) ή (II), θα περιέχει μόνο πεπερασμένο το πλήθος νέες σταθερές που αντιστοιχούν σε ένα υποσύνολο X_1 του X. Μπορούμε να διαλέξουμε ένα πεπερασμένο υποσύνολο Y_1 του Y, τέτοιο ώστε να είναι ισόμορφο (ως προς τη διάταξη) με το X_1. Είναι προφανές πως το σύστημα $(A, \alpha)_{\alpha \in Y_1}$ είναι ένα μοντέλο του Σ_1, γεγονός το οποίο μας οδηγεί σε άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει πως το Σ_1 είναι αντιφατικό. Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση κατά την οποία τα στοιχεία $[\bar{x}]_j$ δεν έχουν τον ίδιο αριθμό σταθερών. Έστω N ο αριθμός που αντιστοιχεί στον μεγαλύτερο (πεπερασμένο) πληθάριθμο των $[\bar{x}]_j$ $(j \leq m)$. Τότε αντιστοιχούμε σε κάθε $\varkappa$-άδα με $\varkappa \leq N$ μία N-άδα που διατηρεί τα πρώτα $\varkappa$ στοιχεία σταθερά. Το γενικό αποτέλεσμα απορρέει από το πρώτο μέρος της απόδειξης.

Το επόμενο θεώρημα μας λέει πως μπορούμε να απαλλαγούμε από τους υπαρξιακούς ποσοδείκτες με τη χρήση νέων συναρτησιακών συμβόλων (των λεγόμενων "συναρτήσεων Skolem"). Η απόδειξη υπάρχει στο [10].

Θεώρημα 3.3. *Έστω Σ μία θεωρία σε μία αριθμήσιμη γλώσσα L. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη επέκταση $L^{\#}$ της γλώσσας L καθώς και θεωρία $\Sigma^{\#}$ της γλώσσας $L^{\#}$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:*
(1) Κάθε πρόταση $\sigma \in \Sigma^{\#}$ είναι καθολική πρόταση.
(2) Για κάθε πρόταση $\psi \in L$ ισχύει $\Sigma^{\#} \models \psi$ αν και μόνο αν $\Sigma \models \psi$.

Είναι άμεσο πως αν το A είναι μοντέλο της θεωρίας $\Sigma^{\#}$, τότε το μοντέλο $A \quad L$ (ο περιορισμός του A στις σχέσεις που αντιστοιχούν σε σύμβολα της γλώσσας L) είναι μοντέλο του Σ.
Έστω πως το A είναι μοντέλο του $\Sigma^{\#}$ και $X \subset |A|$. Το σύνολο των στοιχείων του $|A|$ για τα οποία υπάρχει όρος $t(u_1, \ldots, u_n) \in L^{\#}$ και $x_1, \ldots, x_n \in X$ ώστε να έχουν τη μορφή $\alpha = t^A(x_1, \ldots, x_n)$ αποτελούν σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα το σύμπαν ενός μοντέλου του $\Sigma^{\#}$ που θα συμβολίζουμε με $M(X, A)$.

Θεώρημα 3.4. *Αν Σ είναι μία θεωρία στη γλώσσα L που έχει άπειρο μοντέλο και $(X,<)$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο, τότε υπάρχει μοντέλο A της $\Sigma^{\#}$ τέτοιο ώστε αν:*
(i) $t_0(u_0,\ldots,u_{n_0}),\ldots,t_m(u_0,\ldots,u_{n_m})$ είναι όροι της γλώσσας $L^{\#}$,
(ii) τα x_{jk},x'_{jk} (με $j\leq m,k\leq n_j$) είναι στοιχεία του X και η απεικόνιση που αντιστοιχεί το x_{jk} στο x'_{jk} είναι ισομορφισμός ως προς τη διάταξη και
(iii) η ψ είναι μία φόρμουλα της $L^{\#}$ που δεν έχει άλλες ελεύθερες μεταβλητές εκτός από τις $u_0,\ldots,u_m$
να ισχύει στο A η ακόλουθη ισοδυναμία:

$$A\models\psi(t_0^A(x_{00},\ldots,x_{0n_0}),\ldots,t_m^A(x_{m0},\ldots,x_{mn_m}))$$
$$\longleftrightarrow\psi(t_0^A(x'_{00},\ldots,x'_{0n_0}),\ldots,t_m^A(x'_{m0},\ldots,x'_{mn_m}))$$

Απόδειξη. Απλή εφαρμογή του θεωρήματος 3.2 στη θεωρία $\Sigma^{\#}$.

Θεώρημα 3.5. *Έστω Σ μία θεωρία με ένα άπειρο μοντέλο και $(X,<)$ ένα τυχαίο ολικά διατεταγμένο σύνολο. Τότε υπάρχει ένα μοντέλο B της Σ τέτοιο ώστε $|B|\supseteq X$ και κάθε ενδομορφισμός ή αυτομορφισμός (ως προς τη διάταξη) του $(X,<)$ μπορεί να επεκταθεί σε ένα ενδομορφισμό ή αυτομορφισμό αντίστοιχα του B.*

Απόδειξη. Επεκτείνουμε τη θεωρία Σ στη $\Sigma^{\#}$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα 3.4 προκειμένου να πάρουμε ένα μοντέλο A της $\Sigma^{\#}$ του οποίου το σύμπαν να περιέχει το X. Ορίζουμε $B=M(X,A)\quad L$. Αν $f:X\longrightarrow X$ είναι ένας ενδομορφισμός ή αυτομορφισμός του $(X,<)$, ορίζουμε $\bar{f}:B\longrightarrow B$ ως εξής : $\bar{f}(t^A(x_0,\ldots,x_n)):=t^A(f(x_0),\ldots,f(x_n))$. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.4, η απεικόνιση $\bar{f}$ είναι καλά ορισμένη και είναι μονομορφισμός.

$$A\models t_0^A(x_0,\ldots,x_{n_0})=t_1^A(x_0,\ldots,x_{n_1})\longleftrightarrow$$
$$t_0^A(f(x_0),\ldots,f(x_{n_0}))=t_1^A(f(x_0),\ldots,f(x_{n_1}))$$

Αν μάλιστα η απεικόνιση f είναι επιμορφισμός, είναι άμεσο πως και η $\bar{f}$ θα είναι επιμορφισμός.

Τα προηγούμενα δύο θεωρήματα έχουν μεγαλύτερη ισχύ αν επεκτείνουμε τη θεωρία Σ στη $\Sigma^{*\#}$ αντί στη $\Sigma^{\#}$. Με τη χρήση του λήμματος 1.2.3 μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 3.6. *Για φόρμουλες ψ της γλώσσας L το θεώρημα 3.4 εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε το "$A\models$" με το "$M(X,A)\models$".*

Έστω A ένα μοντέλο του Σ, $X \subseteq |A|$ και $\alpha, \alpha' \in A$. Θα λέμε πως "το α είναι στοιχειωδώς ισοδύναμο με το α' επί του X σε σχέση με το A" αν η απεικόνιση που έχει πεδίο ορισμού το $X \cup \{\alpha\}$, πεδίο τιμών το $X \cup \{\alpha'\}$, είναι ταυτοτική στο X και αντιστοιχεί το α στο α' είναι στοιχειώδης μονομορφισμός.

Θεώρημα 3.7. *Εστω Σ μία θεωρία σε μία αριθμήσιμη γλώσσα L. Αν η Σ έχει ένα άπειρο μοντέλο, τότε για κάθε άπειρο πληθάριθμο $\varkappa$ υπάρχει ένα μοντέλο A της Σ τέτοιο ώστε $\varkappa(A) = \varkappa$ και για κάθε αριθμήσιμο $X \subseteq |A|$, το A να περιέχει μόνο αριθμήσιμο πλήθος κλάσεων στοιχειώδους ισοδυναμίας επί του X.*

Απόδειξη. Έστω $(X_\varkappa, <)$ ένα γραμμικά διατεταγμένο σύνολο με πληθάριθμο $\varkappa$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 3.4 στη θεωρία $\Sigma^{*\#}$ για να πάρουμε το επιθυμητό μοντέλο B και ορίζουμε $A = M(X_\varkappa, B)\quad L$. Έστω πως το Y είναι ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του $|A|$. Τότε ισχύει $Y \subseteq M(X_0, A)$ για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $X_0 \subseteq X_\varkappa$. Για κάθε $\alpha \in |A|$ υπάρχει ένας όρος $t(u_0, \ldots, u_n)$ στη γλώσσα $L^{*\#}$ και στοιχεία $x_0, \ldots, x_n \in X_\varkappa$ τέτοια ώστε $\alpha = t^A(x_0, \ldots, x_n)$. Από το θεώρημα 3.6, μία στοιχειώδης κλάση ισοδυναμίας ορίζεται από τον όρο $t(u_0, \ldots, u_n)$ και τους διάφορους δυνατούς συνδυασμούς διατάξεων των $x_0, \ldots, x_n$ και X_0. Η γλώσσα $L^{*\#}$ είναι αριθμήσιμη και κατά συνέπεια έχει αριθμήσιμο το πλήθος όρους. Το σύνολο X_0 είναι αριθμήσιμο και υπάρχουν αριθμήσιμοι το πλήθος τρόποι να παρεμβάλουμε ένα πεπερασμένο σύνολο μέσα του. Επομένως το A έχει αριθμήσιμο το πλήθος ισοδυναμίες επί του Y.

Θεώρημα 3.8. *Αν η θεωρία T είναι κατηγορική σε κάποιον πληθάριθμο $\varkappa > \aleph_0$, τότε η T είναι ολικά υπερβατική.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πως η T δεν είναι ολικά υπερβατική θεωρία. Τότε από το θεώρημα 2.4 υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύστημα $C \in \mathcal{N}(T)$ με $\varkappa(S(C)) > \aleph_0$. Έτσι, μπορούμε με τη βοήθεια του λήμματος 2.1 να βρούμε ένα μοντέλο B της T τέτοιο ώστε $\varkappa(B) = \varkappa$, $B \supseteq C$ και ένα υπεραριθμήσιμο πλήθος από στοιχεία του $S(C)$ να ικανοποιούνται στο B. Είναι προφανές πως αυτό το μοντέλο δεν μπορεί να είναι ισομορφικό με το μοντέλο που αποδείξαμε την ύπαρξή του στο προηγούμενο θεώρημα.

Μία θεωρία μπορεί να είναι κατηγορική στον πληθάριθμο $\aleph_0$ αλλά να μην είναι ολικά υπερβατική. Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε τη θεωρία των πυκνά γραμμικά διατεταγμένων συνόλων χωρίς άκρα. Έστω A ένα διατεταγμένο σύνολο με τις παραπάνω ιδιότητες και με διατακτικό τύπο αυτόν των ρητών αριθμών. Μπορεί να δειχθεί εύκολα πως κάθε διακεκριμένη τομή Dedekind στο A αντιστοιχεί σε διακεκριμένο στοιχείο του $S(A)$ και επομένως $\kappa(S(A)) = 2^{\aleph_0}$. Από το θεώρημα 2.4, η θεωρία δεν μπορεί να είναι ολικά υπερβατική. Το επόμενο θεώρημα 3.9 είναι μια γενίκευση αυτού του επιχειρήματος.

Έστω πως το A είναι μοντέλο του T και R σχέση στο A με n συνιστώσες, $X \subseteq |A|$ και S_n η ομάδα μεταθέσεων στο $(0, \ldots, n-1)$. Ακολουθώντας τον Ehrenfeucht [8] ορίζουμε πως η σχέση R είναι "συνεκτική επί του X" αν για κάθε ακολουθία από n διακεκριμένα στοιχεία $x_0, \ldots, x_{n-1}$ του X υπάρχει μετάθεση $s \in S_n$ τέτοια ώστε $\models_A R(x_{s(0)}, \ldots, x_{s(n-1)})$. Η R θα λέγεται "αντισυμμετρική επί του X" αν για κάθε ακολουθία από n διακεκριμένα στοιχεία $x_0, \ldots, x_{n-1}$ του X υπάρχει μετάθεση $s \in S_n$ τέτοια ώστε $\models_A \neg R(x_{s(0)}, \ldots, x_{s(n-1)})$.

Θεώρημα 3.9. *Αν T είναι μία ολικά υπερβατική θεωρία και A ένα μοντέλο της T, τότε καμία σχέση του A δεν είναι συνεκτική και αντισυμμετρική επί ενός απείρου συνόλου $X \subseteq |A|$.*

Απόδειξη. Έστω πως υπάρχει μία σχέση R στο μοντέλο A της T με n συνιστώσες που είναι ταυτόχρονα συνεκτική και αντισυμμετρική επί ενός απείρου συνόλου $X \subseteq |A|$. Θεωρούμε μία τυχαία διάταξη στο X και ορίζουμε πως δύο διατεταγμένες n-άδες του X είναι ισοδύναμες και συμβολίζουμε με:

$$(x_0, \ldots, x_{n-1}) \approx (x_0^{'}, \ldots, x_{n-1}^{'}) \textit{ αν και μόνο αν } :$$
$$A \models \bigwedge_{s \in S_n} R(x_{s(0)}, \ldots, x_{s(n-1)}) \longleftrightarrow R(x_{s(0)}^{'}, \ldots, x_{s(n-1)}^{'})$$

Η σχέση "$\approx$" διαμερίζει τις διατεταγμένες n-άδες του X σε ένα πεπερασμένο αριθμό κλάσεων ισοδυναμίας Από το θεώρημα του Ramsey μπορούμε να βρούμε ένα άπειρο $Y \subseteq X$ τέτοιο ώστε κάθε διατεταγμένη n-άδα του Y να ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας. Δηλαδή, μπορούμε να δούμε την ομάδα S_n ως ένωση δύο ξένων υποσυνόλων της S_n^+ και S_n^- έτσι ώστε για κάθε ακολουθία $y_0 < \cdots < y_{n-1} \in Y$ να ισχύει:

$$(I) \qquad A \models \bigwedge_{s \in S_n^+} R(y_{s(0)}, \ldots, y_{s(n-1)}) \wedge \bigwedge_{s \in S_n^-} \neg R(y_{s(0)}^{'}, \ldots, y_{s(n-1)}^{'}).$$

Επειδή η σχέση R είναι συνεκτική και αντισυμμετρική επί του Y, κανένα από τα σύνολα S_n^+ και S_n^- δεν μπορεί να είναι κενό. Επομένως, υπάρχουν $s_1 \in S_n^+$, $s_2 \in S_n^-$ και ένας κύκλος $(m-1, m)$ τέτοιος ώστε $s_1 = s_2 \cdot (m-1, m)$.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα πληρότητας μπορούμε εύκολα να δείξουμε πως η ύπαρξη του Y συνεπάγεται πως για ένα τυχαίο διατακτικό αριθμό γ υπάρχει ένα μοντέλο B της T που περιέχει ένα διατεταγμένο σύνολο Y με διατακτικό γ ώστε κάθε ακολουθία $y_0 < \cdots < y_{n-1} \in Y$ να ικανοποιεί τη σχέση (I). Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε πως το Y έχει το διατακτικό των πραγματικών αριθμών και $Z \subseteq Y$ να είναι ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο. Ισχυριζόμαστε πως διακεκριμένα στοιχεία του Y ικανοποιούν διακεκριμένα στοιχεία του $S(Z)$. Έστω $y < y^{'} \in Y$. Διαλέγουμε $n-1$ στοιχεία του Z, $z_0, \ldots, z_{m-1}, z_{m+1}, \ldots, z_{n-1}$ τέτοια ώστε

$$z_0 < \cdots < z_{m-2} < y < z_{m-1} < y^{'} < z_{m+1} < \cdots < z_{n-1}.$$

Επομένως, το στοιχείο $(z_0, \ldots, z_{m-1}, y^{'}, z_{m+1}, \ldots, z_{n-1})$ μετά από μετάθεση με την s_1 θα ικανοποιεί την R. Αντίθετα, αν μεταθέσουμε με την s_1 το στοιχείο $(z_0, \ldots, z_{m-1}, y, z_{m+1}, \ldots, z_{n-1})$ δε θα ικανοποιείται η R, αφού η κανονική διάταξη του στοιχείου αυτού πρόκειται να μετατεθεί με την s_2. Συνεπώς, $\varkappa(S(Z)) = 2^{\aleph_0}$ και η T δεν μπορεί να είναι ολικά υπερβατική.

4. Μοντέλα ολικά υπερβατικών θεωριών. Ένας βολικός χαρακτηρισμός των μοντέλων της θεωρίας T δίνεται από το επόμενο λήμμα:

Λήμμα 4.1. *Το σύστημα $A \in \mathcal{N}(T)$ είναι μοντέλο της θεωρίας T αν και μόνο αν τα στοιχεία του $S(A)$ που ικανοποιούνται στο A αποτελούν πυκνό υποσύνολο του $S(A)$.*

Απόδειξη. Από το λήμμα 2.1, υπάρχει σύστημα $B \supseteq A$ τέτοιο ώστε το B να είναι μοντέλο της θεωρίας T και να ικανοποιεί κάθε στοιχείο του χώρου $S(A)$. Από το κριτήριο του Tarski, το A είναι μοντέλο της T αν και μόνο αν για κάθε φόρμουλα του $F(A)$ που ικανοποιείται από κάποιο στοιχείο του $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ που να την ικανοποιεί. Όμως, κάθε φόρμουλα ψ του $F(A)$ που είναι συνεπής με την $T(A)$ ικανοποιείται στο B. Επομένως, μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το A μοντέλο της T είναι να ικανοποιεί κάθε φόρμουλα ψ του $F(A)$ που είναι συνεπής με τη θεωρία $T(A)$ ή ισοδύναμα να ικανοποιεί κάποιο στοιχείο κάθε σύνολου της μορφής U_ψ. Επειδή τα σύνολα U_ψ ($\psi \in F(A)$) αποτελούν βάση για το $S(A)$, ισχύει το ζητούμενο.

Λήμμα 4.2. *Αν η θεωρία T είναι ολικά υπερβατική, τότε για κάθε $A \in \mathcal{N}(T)$ τα μεμονωμένα σημεία είναι πυκνά στο χώρο $S(A)$ και μάλιστα αν το σύνολο U είναι ανοιχτή περιοχή του $S(A)$ και $p \in U$ είναι ένα στοιχείο με τη μικρότερη υπερβατική τάξη μεταξύ των στοιχείων του U, τότε ο τύπος p είναι μεμονωμένο στοιχείο του $S(A)$.*

Απόδειξη. Έστω πως ο τύπος $p \in U$ έχει τη μικρότερη υπερβατική τάξη (έστω α) μεταξύ των στοιχείων του U. Από τον ορισμό ξέρουμε πως υπάρχει περιοχή V του p τέτοια ώστε $V \cap S^\alpha(A) = \{p\}$. Όμως, $U \cap S^\alpha(A) = U$ και κατά συνέπεια $V \cap U \cap S^\alpha(A) = V \cap U = \{p\}$ και επομένως το p είναι μεμονωμένο.

Έστω πως $A, B \in \mathcal{N}(T)$, $B \supseteq A$ και το B είναι μοντέλο της T. Το B θα λέγεται "πρώτο επί του A" αν για κάθε μοντέλο B' της T και μονομορφισμό $f : A \longrightarrow B'$ υπάρχει μονομορφισμός $g : B \longrightarrow B'$ τέτοιος ώστε $f = g$ επί του A.

Θεώρημα 4.1. *Έστω πως η T είναι μία θεωρία τέτοια ώστε για κάθε $A \in \mathcal{N}(T)$ τα μεμονωμένα σημεία να είναι πυκνά στο $S(A)$, τότε για κάθε $A \in \mathcal{N}(T)$ υπάρχει μοντέλο της T που είναι πρώτο επί του A.*

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{N}(T)$ και $\varkappa = \varkappa(A) + \aleph_0$. Τότε ο χώρος $S(A)$ έχει το πολύ $\varkappa$ μεμονωμένα σημεία, αφού $\varkappa$ είναι ο πληθάριθμος των βασικών συνόλων U_ψ. Έστω $\{p_\alpha | \; \alpha < \varkappa\}$ να είναι μία αρίθμηση (είναι πιθανό

να υπάρχουν επαναλήψεις) των μεμονωμένων σημείων του $S(A)$. Διαλέγουμε μία αύξουσα ακολουθία $\{A_\alpha |\ \alpha < \varkappa\}$ στοιχείων του $\mathcal{N}(T)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες : (1) $A_0 = A$, (2) $A_\delta = \bigcup_{\beta<\delta} A_\beta$, (3) $A_{\alpha+1} = A_\alpha$ αν το A_α ικανοποιεί τον τύπο p_α και (4) αν το A_α δεν ικανοποιεί τον τύπο p_α, τότε το σύνολο $A_{\alpha+1} - A_\alpha$ αποτελείται από ένα στοιχείο a_α που ικανοποιεί κάποιον μεμονωμένο τύπο $q \in S(A_\alpha)$ τέτοιον ώστε $q \supseteq p_\alpha$. Αν το C είναι μοντέλο της θεωρίας T και $f_0 : A \longrightarrow C$ είναι μονομορφισμός, τότε υπάρχει μία ακολουθία μονομορφισμών $\{(f_\alpha : A_\alpha \longrightarrow C) |\ \alpha < \varkappa\}$ τέτοια ώστε για $\alpha' > \alpha$ έχουμε πως ο μονομορφισμός $f_{\alpha'}$ επεκτείνει τον f_α . Αυτό αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή. Η επαγωγή είναι τετριμμένη στις περιπτώσεις (1),(2) και (3). Για την περίπτωση (4), ας θεωρήσουμε το μονομορφισμό $f_\alpha : A_\alpha \longrightarrow C$ και το στοιχείο $a_\alpha \in A_{\alpha+1} - A_\alpha$ που ικανοποιεί το μεμονωμένο τύπο $q \in S(A_\alpha)$. Τότε το σύνολο $f_\alpha^{*-1}(q)$ είναι ανοιχτό σύνολο του $S(C)$ ως αντίστροφη εικόνα ανοιχτού και από την υπόθεση περιέχει ένα μεμονωμένο στοιχείο q'. Από το λήμμα 4.1 υπάρχει $c \in C$ που ικανοποιεί το q'. Ορίζουμε $f_{\alpha+1}(a_\alpha) = c$ και η επέκταση είναι πια προφανής.
Το σύστημα $A_\varkappa = \bigcup_{\alpha<\varkappa} A_\alpha$ ικανοποιεί κάθε μεμονωμένο σημείο του χώρου $S(A)$ και κάθε μονομορφισμός από το A σε ένα μοντέλο της θεωρίας T μπορεί να επεκταθεί σε ένα μονομορφισμό με πεδίο ορισμού το $A_\varkappa$. Μπορούμε τώρα να απαριθμήσουμε τα μεμονωμένα στοιχεία του $S(A_\varkappa)$ και να επαναλάβουμε την προηγούμενη διαδικασία, ώστε να πάρουμε ένα σύστημα $A_{\varkappa\cdot 2}$ που να ικανοποιεί κάθε μεμονωμένο στοιχείο του $S(A_\varkappa)$ και κάθε μονομορφισμός από το $A_\varkappa$ σε ένα μοντέλο της θεωρίας T να μπορεί να επεκταθεί σε ένα μονομορφισμό με πεδίο ορισμού το $A_{\varkappa\cdot 2}$. Επαναλαμβάνοντας ω φορές τη διαδικασία παίρνουμε:

$$A_{\varkappa\cdot\omega} = \bigcup_{n\in\omega} A_{\varkappa\cdot n}$$

Είναι πλέον άμεσο πως κάθε μονομορφισμός από το A σε ένα μοντέλο της θεωρίας T μπορεί να επεκταθεί σε ένα μονομορφισμό με πεδίο ορισμού το $A_{\varkappa\cdot\omega}$ και το $A_{\varkappa\cdot\omega}$ ικανοποιεί κάθε μεμονωμένο στοιχείο του $S(A_{\varkappa\cdot n})$ για κάθε $n \in \omega$. 'Ομως, κάθε φόρμουλα $\psi \in F(A_{\varkappa\cdot\omega})$ ανήκει επίσης στο $F(A_{\varkappa\cdot n})$ για κάποιο πεπερασμένο n και επομένως η περιοχή U_ψ του $S(A_{\varkappa\cdot\omega})$ είναι η αντίστροφη εικόνα της αντίστοιχης περιοχής του $S(A_{\varkappa\cdot n})$. Επομένως, το $A_{\varkappa\cdot\omega}$ ικανοποιεί κάθε μεμονωμένο στοιχείο του $S(A_{\varkappa\cdot\omega})$ και από το λήμμα 4.1 είναι μοντέλο της θεωρίας T.

Για το επόμενο θεώρημα θα χρειαστούμε κάποια αποτελέσματα σχετικά με αύξουσες ακολουθίες συστημάτων και τα συνοψίζουμε όλα μαζί στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.3. *Ας υποθέσουμε πως η θεωρία T είναι ολικά υπερβατική.*
(α) Αν $\{A_\alpha |\ \alpha < \gamma\}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία από στοιχεία του $\mathcal{N}(T)$, $A = \bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha$ και $\{p_\alpha |\ \alpha < \gamma\}$ είναι μία ακολουθία τέτοια ώστε $p_\alpha \in S(A_\alpha)$ και $\imath^*_{A_\alpha A_\beta}(p_\beta) = p_\alpha$ $(\alpha \leq \beta < \gamma)$ τότε:
(i) Υπάρχει $\alpha_0 < \gamma$ τέτοιος ώστε για κάθε α, αν $(\alpha_0 \leq \alpha < \gamma)$ τότε η υπερβατική τάξη και ο βαθμός του p_α να είναι ίσοι με την υπερβατική τάξη και το βαθμό του p_{α_0}.
(ii) Υπάρχει μοναδικός τύπος $p \in S(A)$ τέτοιος ώστε

$$p \in \bigcap_{\alpha<\gamma} \imath^{*-1}_{A_\alpha A}(p_\alpha)$$

Ο τύπος αυτός θα έχει υπερβατική τάξη και βαθμό ίσους με του p_{α_0}.
(β) Αν $\{A_\alpha |\ \alpha < \gamma\}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία από στοιχεία του $\mathcal{N}(T)$ και p είναι ένα μεμονωμένο στοιχείο του $S(A_0)$, τότε υπάρχει ακολουθία $\{p_\alpha |\ \alpha < \gamma\}$ από τύπους ώστε $p_\alpha \in S(A_\alpha)$ $(\alpha < \gamma)$, $p_0 = p$, $\imath^*_{A_\alpha A_\beta}(p_\beta) = p_\alpha$ $(\alpha < \beta < \gamma)$ και κάθε τύπος p_α είναι μεμονωμένο στοιχείο του $S(A_\alpha)$.

Απόδειξη. (α) Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Αν $\gamma = \beta + 1$ τότε $A = A_\beta$ και το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο. Ας υποθέσουμε λοιπόν πως ο γ είναι ένας οριακός διατακτικός αριθμός. Από τον ορισμό της υπερβατικής τάξης είναι άμεσο πως αν $\beta \geq \alpha$, τότε η υπερβατική τάξη του p_β είναι μικρότερη ή ίση από αυτήν του p_α. Επειδή δε μπορεί να υπάρχει μία φθίνουσα άπειρη αλυσίδα από διατακτικούς αριθμούς, έχουμε πως από ένα διατακτικό αριθμό α_1 και μετά η υπερβατική τάξη θα παραμένει σταθερή. Με παρόμοιο επιχείρημα, από ένα διατακτικό αριθμό α_2 και μετά ο βαθμός θα παραμένει σταθερός και επιλέγουμε $\alpha_0 = max\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Ας υποθέσουμε πως ο τύπος p_{α_0} έχει υπερβατική τάξη ν και βαθμό n. Από το θεώρημα 2.1 έχουμε πως η τομή $\bigcap_{\alpha<\gamma} \imath^{*-1}_{A_\alpha A}(p_\alpha)$ δεν μπορεί να περιέχει κανένα τύπο με υπερβατική τάξη μεγαλύτερη του ν και το σύνολο $\imath^{*-1}_{A_{\alpha_0} A}(p_{\alpha_0}) \cap S^\nu(A)$ δεν μπορεί να είναι το κενό. Όμως, από το θεώρημα 2.2.β, $\imath^{*-1}_{A_{\alpha_0} A_\alpha}(p_{\alpha_0}) \cap S^\nu(A_\alpha) = \{p_\alpha\}$ για κάθε $\alpha \geq \alpha_0$ και χρησιμοποιώντας την παρατήρηση πως $\imath^{*-1}_{A_{\alpha_0} A} = \imath^{*-1}_{A_\alpha A} \circ \imath^{*-1}_{A_{\alpha_0} A_\alpha}$ έχουμε:

$$\bigcap_{\alpha<\gamma} \imath^{*-1}_{A_\alpha A}(p_\alpha) \cap S^\nu(A) = \imath^{*-1}_{A_{\alpha_0} A}(p_{\alpha_0}) \cap S^\nu(A)$$

Ισχυριζόμαστε πως η τομή $\bigcap_{\alpha<\gamma} \imath^{*-1}_{A_\alpha A}(p_\alpha)$ μπορεί να περιέχει μόνο ένα στοιχείο. Αν υποθέσουμε πως περιέχει δύο διακεκριμένους τύπους p_1 και p_2, τότε θα υπάρχει μία φόρμουλα $\psi \in F(A)$ τέτοια ώστε $\psi \in p_1$ και $\neg\psi \in p_2$. Υπάρχει, όμως, κάποιος διατακτικός $\alpha < \gamma$ τέτοιος ώστε $\psi \in F(A_\alpha)$ και επομένως θα ισχύουν ταυτόχρονα $\psi \in p_\alpha$ και $\neg\psi \in p_\alpha$

που είναι αντίφαση. Από το θεώρημα 2.2, ο μοναδικός τύπος $p \in S(A)$ πρέπει να έχει βαθμό ίδιο με αυτόν του τύπου p_{α_0} και η απόδειξη του (α) είναι πλήρης.
(β) Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε πως για δ οριακό διατακτικό αριθμό ισχύει $A_\delta = \ _{\alpha<\delta} A_\alpha$. Επομένως, αν δεν υπάρχει στην ακολουθία το στοιχείο A_δ για κάποιον οριακό διατακτικό αριθμό δ, θα παρεμβάλουμε στην ακολουθία το στοιχείο $\ _{\alpha<\delta} A_\alpha$. Ας θεωρήσουμε την ακολουθία $\{p_\alpha |\ \alpha < \gamma\}$ τέτοια ώστε για κάθε α έχουμε $p_\alpha \in S(A)$ και ο τύπος p_α έχει την ελάχιστη υπερβατική τάξη ανάμεσα στα στοιχεία του $\ _{\beta<\alpha} \imath^{*-1}_{A_\beta A_\alpha}(p_\beta)$. Θα δείξουμε με επαγωγή πως μια τέτοια ακολουθία υπάρχει και πως ικανοποιεί όλες τις ζητούμενες ιδιότητες. Θα προχωρήσουμε πάλι με επαγωγή και έστω πως το ζητούμενο ισχύει για κάθε $\beta < \alpha$. Αν $\alpha = \beta + 1$, τότε από το λήμμα 4.2 έπεται πως κάθε στοιχείο του συνόλου $\imath^{*-1}_{A_\beta A_\alpha}(p_\beta)$ (είναι ανοιχτό σύνολο ως αντίστροφη εικόνα ανοιχτού συνόλου μέσω συνεχούς απεικόνισης) με ελάχιστη υπερβατική τάξη είναι μεμονωμένο. Αν $\alpha = \delta$, τότε από το (α) και την αποδειξή του έχουμε πως η ακόλουθη τομή

$$\ _{\beta<\delta} \imath^{*-1}_{A_\beta A_\delta}(p_\beta) = \imath^{*-1}_{A_{\alpha_0} A_\delta}(p_{\alpha_0}) \cap S^\nu(A_\delta)$$

περιέχει μόνο έναν τύπο p_δ. Ο τύπος p_{α_0} είναι μεμονωμένο στοιχείο του $S(A_{\alpha_0})$ και επομένως το σύνολο $\imath^{*-1}_{A_{\alpha_0} A_\delta}(p_{\alpha_0})$ είναι ανοιχτό στο χώρο $S(A_\delta)$. Επομένως, για να δείξουμε πως ο τύπος p_δ είναι μεμονωμένο στοιχείο του $S(A_\delta)$ αρκεί να ισχύει $\imath^{*-1}_{A_{\alpha_0} A_\delta}(p_{\alpha_0}) \cap S^\nu(A_\delta) = \imath^{*-1}_{A_{\alpha_0} A_\delta}(p_{\alpha_0})$. Ας υποθέσουμε πως αυτή η ισότητα δεν ισχύει. Τότε υπάρχει ένας τύπος $p' \in \imath^{*-1}_{A_{\alpha_0} A_\delta}(p_{\alpha_0})$ με υπερβατική τάξη μικρότερη του ν. Από την απόδειξη του (α) θα υπάρχει β, $\alpha_0 \leq \beta < \delta$ ώστε $\imath^*_{A_\beta A_\delta}(p') \neq \imath^*_{A_\beta A_\delta}(p_\delta) = p_\beta$. Επειδή ο τύπος p_β έχει υπερβατική τάξη και βαθμό ίσους με αυτούς του p_{α_0} και $\imath^*_{A_\beta A_\delta}(p') \in \imath^{*-1}_{A_{\alpha_0} A_\beta}(p_{\alpha_0})$[10], παίρνουμε από το θεώρημα 2.2 πως η υπερβατική τάξη του τύπου $\imath^*_{A_\beta A_\delta}(p')$ είναι μικρότερη από του p_{α_0} που όπως αναφέραμε προηγουμένως είναι ίση με αυτή του p_β . Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την επαγωγική υπόθεση πως ο τύπος p_β έχει τη μικρότερη τάξη ανάμεσα στα στοιχεία του $\ _{\varepsilon<\beta} \imath^{*-1}_{A_\varepsilon A_\beta}(p_\varepsilon)$.

Θεώρημα 4.2. *Αν η T είναι ολικά υπερβατική θεωρία και $\{A_\alpha |\ \alpha < \gamma\}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία από στοιχεία της κλάσης $\mathcal{N}(T)$ τέτοια ώστε για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό $\delta < \gamma$, $A_\delta = \ _{\alpha<\delta} A_\alpha$, τότε υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία $\{B_\alpha |\ \alpha < \gamma\}$ μοντέλων της θεωρίας T*

[10]Χρησιμοποιούμε το ότι $\imath^*_{A_{\alpha_0} A_\beta} \circ \imath^*_{A_\beta A_\delta} = \imath^*_{A_{\alpha_0} A_\delta}$

τέτοια ώστε το μοντέλο B_α να είναι πρώτο επί του A_α για κάθε $\alpha < \gamma$ και για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό $\delta < \gamma$ να ισχύει $B_\delta = \quad {}_{\alpha<\delta} B_\alpha$.

Απόδειξη. Έστω $A = \quad {}_{\alpha<\gamma} A_\alpha$. Θα δείξουμε με επαγωγή πως υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία από συστήματα $\{C_\alpha |\ \alpha < \gamma\}$ και από μοντέλα $\{B_\alpha |\ \alpha < \gamma\}$ της θεωρίας T τέτοια ώστε να ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες: (i) $C_\alpha = A \cup B_\alpha$, (ii) $B_\alpha \supseteq A_\alpha$, (iii) $B_\delta = \quad {}_{\beta<\delta} B_\beta$ (για οριακούς διατακτικούς), (iv) αν D είναι μοντέλο της θεωρίας T, $\alpha = \beta + 1$, $\alpha' \geq \alpha$ και $f : A_{\alpha'} \cup B_\beta \longrightarrow D$ είναι μονομορφισμός, τότε υπάρχει μονομορφισμός $g : A_{\alpha'} \cup B_\alpha \longrightarrow D$ και $g \supseteq f$. Τότε η ακολουθία $\{B_\alpha |\ \alpha < \gamma\}$ θα ικανοποιεί το θεώρημα.
Ας υποθέσουμε πως η ακολουθία $\{C_\alpha |\ \alpha < \gamma\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις (i)–(iv). Αν ο α είναι οριακός ($\alpha = \delta$), τότε θέτουμε $C_\delta = \quad {}_{\beta<\delta} C_\beta$ και $B_\delta = \quad {}_{\beta<\delta} B_\beta$.
Αν $\alpha = \beta + 1$ προχωρούμε όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 4.1. Έστω $\{p_\nu |\ \nu < \varkappa\}$ να είναι μία λίστα των μεμονωμένων στοιχείων του χώρου $S(A_\alpha \cup B_\beta)$. Από το λήμμα 4.3 μπορούμε να βρούμε μία ακολουθία από στοιχεία $\{p_{0,\eta} |\ \alpha \leq \eta < \gamma\}$ ώστε $p_{0,\alpha} = p_0$, $p_{0,\eta}$ να είναι μεμονωμένο σημείο του χώρου $S(A_\eta \cup B_\beta)$ και αν $\eta' > \eta$ να ισχύει $p_{0,\eta'} \supseteq p_{0,\eta}$. Ορίζουμε $q_0 = \quad {}_{\eta<\gamma} p_{0,\eta}$. Αν υπάρχει στοιχείο του C_β που να ικανοποιεί τον τύπο q_0, τότε το ονομάζουμε α_0. Αλλιώς βρίσκουμε ένα στοιχείο που ικανοποιεί τον τύπο q_0 το προσθέτουμε στο σύνολο C_β και το ονομάζουμε α_0. Όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 4.1 θα επαναλάβουμε αυτήν τη διαδικασία $\varkappa \cdot \omega$ φορές και θα βρούμε μία ακολουθία $\{\alpha_\nu |\ \nu < \varkappa \cdot \omega\}$ τέτοια ώστε η ένωση $A_\alpha \cup B_\beta \cup \{\alpha_\nu |\ \nu < \varkappa \cdot \omega\}$ να είναι μοντέλο της θεωρίας T και για κάθε α' ($\alpha \leq \alpha' < \gamma$) το στοιχείο α_ν να αληθεύει έναν τύπο του $S(A_{\alpha'} \cup B_\beta \cup \{\alpha_{\nu'} |\ \nu' < \nu\})$. Αυτό συνεπάγεται (όπως και στο θεώρημα 4.1) ότι η ισχύει η συνθήκη (iv) για το α. Θέτουμε $C_\alpha = C_\beta \cup \{\alpha_\nu |\ \nu < \varkappa \cdot \omega\}$ και $B_\alpha = B_\beta \cup \{\alpha_\nu |\ \nu < \varkappa \cdot \omega\}$. Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (iv) και απλή επαγωγή μπορούμε να δείξουμε πως κάθε μονομορφισμός με πεδίο ορισμού το A_α και πεδίο τιμών ένα μοντέλο του T μπορεί να επεκταθεί σε ένα μονομορφισμό με πεδίο τιμών το B_α, πεδίο τιμών το ίδιο μοντέλο και επομένως το B_α είναι πρώτο επί του A_α.

Έστω $A, B \in \mathcal{N}(T)$, $A \subseteq B$ και $X \subseteq |B| - |A|$. Θα λέμε πως το σύνολο X αποτελείται από "αδιάκριτα" στοιχεία επί του A αν κάθε ένα προς ένα απεικόνιση με πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το σύνολο $|A| \cup X$ και της οποίας ο περιορισμός στο $|A|$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση είναι μονομορφισμός. Δηλαδή για κάθε ανοιχτή φόρμουλα της γλώσσας L, για κάθε $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in A$ και για δύο σύνολα με διαφορετικά στοιχεία

$x_1, \ldots, x_n$ και $x_1^{'}, \ldots, x_n^{'} \in X$ αληθεύει η $\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_1, \ldots, x_n)$ αν και μόνο αν αληθεύει η $\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_1^{'}, \ldots, x_n^{'})$.

Θεώρημα 4.3. *Ας υποθέσουμε πως η θεωρία T είναι ολικά υπερβατική, $A, B \in \mathcal{N}(T)$, $A \subseteq B$ και $\varkappa(A) < \varkappa(B) = \varkappa$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*
(i) Αν ο $\varkappa$ είναι κανονικός υπεραριθμήσιμος πληθάριθμος, τότε υπάρχει σύνολο $X \subseteq |B| - |A|$ τέτοιο ώστε $\varkappa(X) = \varkappa$ και το X να αποτελείται από αδιάκριτα στοιχεία επί του A.
(ii)Αν ο πληθάριθμος $\varkappa$ είναι υπεραριθμήσιμος αλλά όχι κανονικός, τότε για κάθε $\lambda < \varkappa$ υπάρχει ένα σύνολο $X \subseteq |B| - |A|$ τέτοιο ώστε $\varkappa(X) > \lambda$ και το X να αποτελείται από αδιάκριτα στοιχεία επί του A.

Απόδειξη. Επειδή για κάθε άπειρο πληθάριθμο λ, ο επόμενός του (λ^+) είναι κανονικός έπεται πως το (ii) προκύπτει άμεσα από το (i) διαλέγοντας κάποιο σύστημα C ώστε $A \subseteq C \subseteq B$ και ο πληθάριθμος $\varkappa(C)$ να είναι κανονικός.
Έστω πως ο πληθάριθμος $\varkappa$ είναι κανονικός, $C \in \mathcal{N}(T)$, $\varkappa(C) < \varkappa$, και $A \subseteq C \subseteq B$. Από το θεώρημα 2.3 έχουμε πως $\varkappa(S(C)) < \varkappa$ και από την κανονικότητα του $\varkappa$ προκύπτει πως υπάρχει κάποιος τύπος $p \in S(C)$ που ικανοποιείται από $\varkappa$ διαφορετικά στοιχεία του B. Από το σύνολο των ζευγαριών (C, p) που ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες διαλέγουμε ένα ζευγάρι (C_0, p_0) τέτοιο ώστε ο τύπος p_0 να έχει τη μικρότερη υπερβατική τάξη ν και ο βαθμός του p_0 να είναι ο ελάχιστος, έστω n, ανάμεσα στους τύπους που έχουν υπερβατική τάξη ν.
Έστω $C^{'} \in \mathcal{N}(T)$, $\varkappa(C^{'}) < \varkappa$, και $C_0 \subseteq C^{'} \subseteq B$. Τότε το σύνολο $\imath^{*-1}_{C_0 C^{'}}(p_0)$ έχει πληθάριθμο μικρότερο του $\varkappa$ και επομένως πρέπει να περιέχει κάποιον τύπο $p^{'}$ ο οποίος ικανοποιείται από $\varkappa$ στοιχεία του B. Επειδή ν είναι η ελάχιστη υπερβατική τάξη αυτών των στοιχείων, η υπερβατική τάξη του $p^{'}$ είναι μεγαλύτερη ή ίση του ν. Όμως από το θεώρημα 2.1 η η υπερβατική τάξη του $p^{'}$ είναι μικρότερη ή ίση αυτής του p_0, δηλαδή του ν. Με παρόμοιο επιχείρημα δείχνουμε πως οι τύποι $p_0, p^{'}$ έχουν τον ίδιο βαθμό. Από το θεώρημα 2.2 υπάρχει μοναδικός τέτοιος τύπος στο σύνολο $\imath^{*-1}_{C_0 C^{'}}(p_0)$. Επομένως, το σύνολο $\imath^{*-1}_{C_0 C^{'}}(p_0)$ περιέχει μόνο έναν τύπο που ικανοποιείται από $\varkappa$ στοιχεία, έχει υπερβατική τάξη ν και βαθμό n.

Δείχνουμε με επαγωγή πως υπάρχει ένα σύνολο X με $\varkappa$ διαφορετικά στοιχεία $\{x_\alpha | \, \alpha < \varkappa\} \subseteq |B| - |C_0|$ τέτοιο ώστε αν $C_\alpha = C_0 \cup \{x_\beta | \, \beta < \alpha\}$ και $p_\alpha \in S(C_\alpha)$ ο τύπος που ικανοποιείται από το x_α, τότε ο p_α να είναι ο μοναδικός τύπος με τάξη ν και βαθμό n στο σύνολο $\imath^{*-1}_{C_0 C_\alpha}(p_0)$. Αν υποθέσουμε πως έχουμε κατασκευάσει το σύνολο $\{x_\beta | \, \beta < \alpha\}$, τότε από την ανάλυση που είδαμε λίγο πιο πριν υπάρχουν $\varkappa$ στοιχεία του B

που ικανοποιούν τον τύπο p_α και διαλέγουμε το στοιχείο x_α να είναι ένα από αυτά. Βλέπουμε μάλιστα πως $\beta < \alpha$ συνεπάγεται $\imath^*_{C_0 C_\alpha}(p_\alpha) = p_\beta$ και επομένως το στοιχείο x_α ικανοποιεί τον τύπο p_β για κάθε $\beta \leq a$.

Ας υποθέσουμε πως $\beta_1 < \cdots < \beta_m$ και $\beta_1^{'} < \cdots < \beta_m^{'}$. Θα συμβολίσουμε με D_m και $D_m^{'}$ τα συστήματα που έχουν για σύμπαντα τα σύνολα $|C_0| \cup \{x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_m}\}$ και $|C_0| \cup \{x_{\beta_1^{'}}, \ldots, x_{\beta_m^{'}}\}$ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε με επαγωγή πως η απεικόνιση $f_m : D_m \longrightarrow D_m^{'}$ η οποία είναι ταυτοτική επί του $|C_0|$ και αντιστοιχεί το x_{β_i} στο $x_{\beta_i^{'}}$ για $(i \leq m)$ είναι ισομορφισμός. Έστω πως η απεικόνιση $f_{m-1} : D_{m-1} \longrightarrow D_{m-1}^{'}$ είναι ισομορφισμός, ο q είναι τύπος του $S(D_{m-1})$ που ικανοποιείται από το στοιχείο x_{β_m} και ο $q^{'}$ είναι τύπος του $S(D_{m-1}^{'})$ που ικανοποιείται από το στοιχείο $x_{\beta_m^{'}}$. Για την απόδειξη του ότι η απεικόνιση f_m είναι ισομορφισμός αρκεί να δείξουμε πως $f_{m-1}^*(q^{'}) = q$. Επειδή το στοιχείο x_{β_m} ικανοποιεί έναν τύπο του $S(C_0)$ (έστω p_0) υπερβατικής τάξης ν και βαθμού n, έναν τύπο του $S(C_{\beta_m})$ (έστω p_{β_m}) υπερβατικής τάξης ν και βαθμού n και $C_0 \subseteq D_{m-1} \subseteq C_{\beta_m}$ έπεται από τα θεωρήματα 2.1 και 2.2 πως και ο τύπος q είναι υπερβατικής τάξης ν και βαθμού n. Όπως έχει αποδειχθεί προηγουμένως υπάρχει ένας μοναδικός τύπος υπερβατικής τάξης ν και βαθμού n στο σύνολο $\imath^{*-1}_{C_0 D_{m-1}}(p_0)$ και δεν μπορεί να είναι άλλος από τον q. Όμοια, δείχνουμε πως ο $q^{'}$ είναι ο μοναδικός τύπος υπερβατικής τάξης ν και βαθμού n του συνόλου $\imath^{*-1}_{C_0 D_{m-1}^{'}}(p_0)$. Επειδή η απεικόνιση είναι ταυτοτική επί του $|C_0|$ έπεται πως

$$f_{m-1}^*(\imath^{*-1}_{C_0 D_{m-1}^{'}}(p_0)) = \imath^{*-1}_{C_0 D_{m-1}}(p_0)$$

και κατά συνέπεια, $f_{m-1}^*(q^{'}) = q$ και η απεικόνιση f_m είναι ισομορφισμός. Τέλος, ισχυριζόμαστε πως το σύνολο X αποτελείται από αδιάκριτα στοιχεία επί του C_0 και το ίδιο θα ισχύει κατά μείζονα λόγο για το σύστημα A. Έστω μία ανοιχτή φόρμουλα ψ της γλώσσας L, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in C_0$ και ακολουθίες διακεκριμένων στοιχείων $(x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_r})$ και $(\chi_{\beta_1^{'}}, \ldots, \chi_{\beta_r^{'}})$ του X. Πρέπει, λοιπόν, να δείξουμε πως αληθεύει η $\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_r}) \longleftrightarrow \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_{\beta_1^{'}}, \ldots, x_{\beta_r^{'}})$. Ήδη έχουμε δείξει την περίπτωση κατά την οποία $\beta_1 < \cdots < \beta_r$ και $\beta_1^{'} < \cdots < \beta_r^{'}$. Όμως, από το θεώρημα 3.9 η $\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_r})$ δεν εξαρτάται από την διάταξη των β_i. Στην ουσία, εφαρμόζουμε το θεώρημα 3.9 στη θεωρία $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ η οποία είναι επέκταση της θεωρίας T και από το θεώρημα 2.4, αφού η T είναι ολικά υπερβατική, τότε θα είναι και η θεωρία $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

5. Κορεσμένα μοντέλα και κατηγορικότητα. Ας υποθέσουμε πως το B είναι ένα άπειρο σύστημα της κλάσης $\mathcal{N}(T)$. Το σύστημα B θα λέγεται "κορεσμένο" αν για κάθε $A \subseteq B$ με $\varkappa(A) < \varkappa(B)$, κάθε τύπος του $S(A)$ ικανοποιείται στο B.

Από το λήμμα 4.1 είναι άμεσο πως αν το $B \in \mathcal{N}(T)$ είναι κορεσμένο, τότε είναι μοντέλο της θεωρίας T. Για τα κορεσμένα μοντέλα μπορεί κανείς να κοιτάξει το [11] όπου αποδείχθηκε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.1. *Αν τα A και B είναι κορεσμένα μοντέλα της θεωρίας T και έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, τότε είναι ισόμορφα.*

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος είναι πως μία ικανή συνθήκη για την $\varkappa$-κατηγορικότητα της θεωρίας T είναι κάθε μοντέλο με πληθάριθμο $\varkappa$ να είναι κορεσμένο. Έστω $B \in \mathcal{N}(T)$ ένα υπεραριθμήσιμο σύστημα. Το B θα λέγεται "κορεσμένο επί των αριθμήσιμων υποσυστημάτων" αν για κάθε αριθμήσιμο υποσύστημα $A \subseteq B$, το B ικανοποιεί κάθε τύπο του $S(A)$.

Θεώρημα 5.2. *Αν η θεωρία T είναι ολικά υπερβατική και $\varkappa > \aleph_0$, τότε υπάρχει ένα μοντέλο της T με πληθάριθμο $\varkappa$ το οποίο είναι κορεσμένο επί των αριθμήσιμων υποσυστημάτων.*

Απόδειξη. Έστω B_0 ένα τυχαίο μοντέλο της θεωρίας T με πληθάριθμο $\varkappa$. Σύμφωνα με το θεώρημα 2.3 ο πληθάριθμος του χώρου $S(B_0)$ θα είναι $\varkappa$. Κατά συνέπεια, υπάρχει ένα μοντέλο $B_1 \supseteq B_0$ της θεωρίας T, τέτοιο ώστε να έχει πληθάριθμο $\varkappa$ και κάθε τύπος του $S(B_0)$ να ικανοποιείται στο B_1. Προχωρώντας επαγωγικά, βλέπουμε πως υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία $\{B_\alpha | \; \alpha < \omega_1\}$ από μοντέλα της θεωρίας T με πληθάριθμο $\varkappa$, τέτοια ώστε κάθε τύπος του χώρου $S(B_\alpha)$ να ικανοποιείται στο μοντέλο $B_{\alpha+1}$ για κάθε $\alpha < \omega_1$. Τότε το $B = \;{}_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$ είναι ένα μοντέλο της θεωρίας T με πληθάριθμο $\varkappa$ και είναι κορεσμένο επί των αριθμήσιμων υποσυστημάτων. Αν υποθέσουμε πως A είναι ένα αριθμήσιμο υποσύστημα του B, τότε θα υπάρχει $\alpha < \omega_1$ ώστε $A \subseteq B_\alpha$ και αφού κάθε τύπος $p \in S(A)$ θα ικανοποιείται στο μοντέλο $B_{\alpha+1}$, κατά μείζονα λόγο θα ικανοποιείται στο μοντέλο B.

Λήμμα 5.1. *Έστω πως η θεωρία T είναι ολικά υπερβατική και B είναι ένα υπεραριθμήσιμο μοντέλο της T, που δεν είναι κορεσμένο. Τότε υπάρχει ένα αριθμήσιμο μοντέλο $A \subseteq B$ της T και ένα υποσύστημα $A' \subseteq A$ τέτοια ώστε :*

(i) υπάρχει ένα άπειρο σύνολο $Y \subseteq |A| - |A'|$ που αποτελείται από αδιάκριτα στοιχεία επί του A' και
(ii) υπάρχει ένας τύπος $q \in S(A')$ ο οποίος δεν ικανοποιείται στο A.

Απόδειξη. Αφού το B δεν είναι κορεσμένο, θα υπάρχει κάποιο σύστημα $C \subseteq B$, με $\varkappa(C) < \varkappa(B)$ και ένας τύπος $p \in S(C)$ ο οποίος δεν θα ικανοποιείται στο C. Από το θεώρημα 4.3 υπάρχει ένα άπειρο αριθμήσιμο σύνολο Y του οποίου τα στοιχεία είναι αδιάκριτα επί του C και περιέχονται στο σύνολο $|B| - |C|$. Από το θεώρημα των Löwenheim-Skolem υπάρχει ένα αριθμήσιμο υπομοντέλο A_0 του B τέτοιο ώστε $A_0 \supseteq Y$. Για κάθε $\alpha \in A_0$ θα συμβολίζουμε με p_α τον τύπο του $S(C)$ που ικανοποιείται από το α. Είναι προφανές πως για κάθε α ισχύει $p_\alpha \neq p$, αφού κανένα στοιχείο του $|B|$ δεν ικανοποιεί τον τύπο p. Επομένως, υπάρχει για κάθε $\alpha \in A_0$ μία φόρμουλα $\psi_\alpha \in F(C)$ τέτοια ώστε $\psi_\alpha \in p_\alpha$ και $\neg\psi_\alpha \in p$. Επειδή η φόρμουλα ψ_α περιέχει μόνο πεπερασμένο αριθμό συμβόλων, μπορούμε να βρούμε ένα πεπερασμένο σύστημα $C_\alpha \subseteq C$ τέτοιο ώστε $\psi_\alpha \in F(C_\alpha)$. Έστω $A_1' = {}_{\alpha\in A_0} C_\alpha$. (Είναι προφανές πως το σύμπαν του A_1' είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων.) Τότε δεν υπάρχει $\alpha \in A_0$ που να ικανοποιεί τον τύπο $\imath^*_{A_1'C}(p)$ του χώρου $S(A_1')$. (Από τον τρόπο που κατασκευάσαμε το A_1', έχουμε πως ο τύπος $\imath^*_{A_1'C}(p)$ θα περιέχει τις αρνήσεις των ψ_α.) Έστω A_1 ένα αριθμήσιμο υπομοντέλο του B τέτοιο ώστε $A_1 \supseteq A_0 \cup A_1'$. Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία μπορούμε να βρούμε μία ακολουθία από αριθμήσιμα μοντέλα $A_0 \subseteq \dots A_n \subseteq \dots$ και μία ακολουθία από συστήματα $A_0' \subseteq \dots A_n' \subseteq \dots$ τέτοιες ώστε $A_n' \subseteq A_n \cap C$ και κανένα $\alpha \in A_n$ δεν ικανοποιεί τον τύπο $\imath^*_{A_{n+1}C}(p)$ του χώρου $S(A_{n+1}')$. Ορίζουμε $A = {}_{n\in\omega} A_n$ και $A' = {}_{n\in\omega} A_n'$. Τότε το σύνολο $Y \subseteq |A| - |A'|$ είναι ένα σύνολο από αδιάκριτα στοιχεία επί του A' και κανένα $\alpha \in A$ δεν ικανοποιεί τον τύπο $\imath^*_{A'C}(p)$ του χώρου $S(A')$.

Θεώρημα 5.3. *Έστω πως η θεωρία T είναι ολικά υπερβατική και πως έχει ένα υπεραριθμήσιμο μοντέλο το οποίο δεν είναι κορεσμένο. Τότε για κάθε $\varkappa > \aleph_0$, η T έχει ένα μοντέλο με πληθάριθμο $\varkappa$ το οποίο δεν είναι κορεσμένο επί των αριθμησίμων υποσυστημάτων.*

Απόδειξη. Έστωσαν A, A' και Y όπως στο λήμμα 5.1 και $q \in S(A')$ τύπος που δεν ικανοποιείται στο A. Από το θεώρημα πληρότητας υπάρχει ένα σύστημα $A_\varkappa \in \mathcal{N}(T)$ τέτοιο ώστε $A_\varkappa \supseteq A' \cup Y$ και το σύνολο $|A_\varkappa| - |A'|$ να είναι ένα σύνολο από αδιάκριτα στοιχεία επί του A'. (Μπορούμε να δείξουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου $A_\varkappa$ κατασκευάζοντας ένα κατάλληλο σύνολο προτάσεων Σ με πληθάριθμο $\varkappa$ και η ύπαρξη του $A' \cup Y$

αποδεικνύει πως κάθε πεπερασμένο σύνολο του Σ και επομένως και το ίδιο το Σ είναι συνεπές. Η κατασκευή του Σ μοιάζει με την κατασκευή που κάναμε στην απόδειξη του θεωρήματος 3.2.) Έστω $\{y_\alpha | \ \alpha < \varkappa\}$ μία καλή διάταξη του $|A_\varkappa| - |A'|$ και $A_\alpha = A' \cup \{y_\beta | \ \beta < \alpha\}$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 4.2 για να πάρουμε μία αύξουσα ακολουθία μοντέλων $\{B_\alpha | \ \alpha < \varkappa\}$ της θεωρίας T, τέτοια ώστε το B_α να είναι πρώτο επί του A_α και για κάθε οριακό διατακτικό $\delta < \varkappa$ να ισχύει $B_\delta = \ _{\alpha<\delta} B_\alpha$.

Ισχυριζόμαστε πως ο τύπος q δεν ικανοποιείται σε κανένα B_α. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στο α. Για $\alpha < \omega$ η ύπαρξη του μοντέλου $A \supseteq A' \cup Y$, που δεν ικανοποιεί τον τύπο q, συνεπάγεται πως το B_α δεν ικανοποιεί τον τύπο q. Πράγματι, το σύμπαν του A είναι αριθμήσιμο και μπορούμε να βρούμε μονομορφισμό από το A_α στο A. Όμως, το μοντέλο B_α είναι πρώτο επί του A_α και έτσι έχουμε ένα μονομορφισμό από το B_α στο A. Επειδή το A δεν ικανοποιεί τον τύπο q είναι άμεσο πως ούτε και το B_α θα τον ικανοποιεί. Για $\alpha = \delta$ οριακό διατακτικό έχουμε από την επαγωγική υπόθεση πως κανένα B_β με $\beta < \delta$ δεν ικανοποιεί τον τύπο q και επομένως ούτε και η ένωση τους $B_\delta = \ _{\beta<\delta} B_\beta$ τον ικανοποιεί. Τέλος, αν $\alpha = \beta + 1 > \omega$, τότε επειδή το σύνολο $|A_\varkappa| - |A'|$ αποτελείται από αδιάκριτα επί του A', θα υπάρχει ισομορφισμός από το A_α στο A_β και ο περιορισμός του στο A' θα είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Επομένως, πάλι με ανάλογα επιχειρήματα, θα υπάρχει μονομορφισμός από το B_α στο B_β και ο περιορισμός του στο A' θα είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Από την επαγωγική υπόθεση το B_β δεν ικανοποιεί τον τύπο q και επομένως ούτε και το B_α θα τον ικανοποιεί. Αποδείξαμε, λοιπόν, πως το μοντέλο $B_\varkappa = \ _{\alpha<\varkappa} B_\alpha$ έχει πληθάριθμο $\varkappa$ και δεν ικανοποιεί τον τύπο q.

Θεώρημα 5.4. *Αν η θεωρία T είναι κατηγορική σε κάποια υπεραριθμήσιμη δύναμη , τότε κάθε υπεραριθμήσιμο μοντέλο της T είναι κορεσμένο.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα 3.8, η θεωρία T είναι ολικά υπερβατική και σύμφωνα με το θεώρημα 5.2, υπάρχει ένα μοντέλο της T με πληθάριθμο $\varkappa$ που είναι κορεσμένο επί των αριθμήσιμων υποσυστημάτων. Αν η θεωρία T είχε ένα υπεραριθμήσιμο μοντέλο που δεν ήταν κορεσμένο, τότε από το θεώρημα 5.3, θα είχε ένα μοντέλο με πληθάριθμο $\varkappa$ το οποίο δε θα ήταν κορεσμένο επί των αριθμησίμων υποσυστημάτων και T δε θα ήταν κατηγορική στον πληθάριθμο $\varkappa$.

Από το θεώρημα που μόλις δείξαμε και από το θεώρημα 5.1 παίρνουμε άμεσα την απάντηση στο ερώτημα του Łoś.

Θεώρημα 5.5. *Αν η θεωρία T είναι κατηγορική σε κάποια υπεραριθμήσιμη δύναμη, τότε είναι κατηγορική σε κάθε υπεραριθμήσιμη δύναμη.*

References

1. M. Morley, Categoricity in power, Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965), 514–538.
2. J. Loś, On the categoricity in power of elementary deductive systems, Colloq. Math. 3 (1954), 58–62.
3. R. Vaught, Applications of the Löwenheim-Skolem-Tarski theorem to problems of completeness and decidability, Indag. Math. 16 (1954), 467–472.
4. E. Kamke, Theory of sets, Dover, New York, 1950.
5. C. Chang and H. Keisler, Model Theory, North-Holland Publishing Company, 1977.
6. F.P. Ramsey, On a problem of formal logic, Proc. London Math. Soc. (2) 30 (1929), 291-310.
7. A. Ehrenfeucht and A. Mostowski, Models of axiomatic theories admitting automorphisms, Fund. Math. 43 (1956), 50-68.
8. A. Ehrenfeucht, On theories categorical in power, Fund. Math. 44 (1957), 241-248.
9. A. Ehrenfeucht, Theories having at least continum many non-isomorphic models in each power, Abstract 550-23, Notices Amer, Math. Soc. 5 (1958), 680-681.
10. D. Hilbert and P. Bernays, Grundlagen der Mathematik, Vol. 2, Julius Springer, Berlin, 1939.
11. M. Morley and R. Vaught, Homogeneous universal models, Math. Scand. 11 (1962) 37-57