Το Θεωρημα του Whitney
(Απο τα γραφηματα στα μητροειδη)

Γρηγόριος Γ. Γαλιατσάτος
Α.Μ. 200502
μΠλ∀

Διπλωματική Έργασία
Επιβλέπων: Επίκουρος Καθηγητής Δημήτριος Μ. Θηλυκός

Λογικη και Θεωρια Αλγοριθμων και Υπολογισμου
Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

8 Ιουλίου 2008

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ευχαριστίες

Αυτή η διπλωματική εργασία είναι αποτέλεσμα σκληρής δουλειάς εκ΄ μέρους μου. Πολλές ήταν οι νύχτες που δεν μπορούσα να κοιμηθώ επειδή με απασχολούσε ένα κομμάτι μίας απόδειξης. Αλλά όπως έλεγαν και οι αρχαίοι μας πρόγονοι, όποιος εργάζεται και προσπαθεί τελικά ανταμείβεται.

Το αρχικό μου συναίσθημα όταν ξεκίνησα την διπλωματική ήταν φόβος, ο φόβος του αγνώστου. Για να ξεπεράσει όμως κάποιος τον φόβο του πρέπει να κάνει αυτό που φοβάται. Έτσι και εγώ αυτό έκανα. Καθώς αποκτούσα εμπειρία πάνω στο θέμα, ο φόβος άρχισε να ελαττώνεται, μέχρι που τελικά την θέση του πήρε ο ενθουσιασμός της ανακάλυψης και η σιγουριά της γνώσης. Και επειδή τελικά το συναίσθημα που μένει όταν τα καταφέρεις σε κάτι είναι η ηρεμία και η χαρά, χαρούμενος πλέον δηλώνω ότι ήταν τιμή μου να φοιτήσω στο Μ.Π.Λ.Α.

Θα ήθελα ιδιαιτέρως να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Δημήτριο Θηλυκό που με εισήγαγε στην ερευνητική μεθοδολογία. Τον ευχαριστώ για την ενθάρρυνση, την φιλική του διάθεση, τα θετικά του σχόλια, την υπομονή του(ειδικά στα τελευταία στάδια της διπλωματικής!) και τέλος για την βεβαιότητά του για την έκβαση αυτής της εργασίας προς το καλύτερο.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Κολλιόπουλο και κ. Ράπτη που δέχτηκαν να συμμετάσχουν στην συμβουλευτική επιτροπή. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Μοσχοβάκη, κ. Δημητρακόπουλο, κ. Κουτσουπιά καθώς και όλους τους καθηγητές που μου έδωσαν την ευκαιρία να παρακολουθήσω τα μαθήματά τους στο Μ.Π.Λ.Α.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου που με στήριξαν οικονομικά, και όλους όσους με στήριξαν συναισθηματικά στην διεκπεραίωση της διπλωματικής μου εργασιάς.

Γαλιατσάτος Γρηγόρης,
18/6/08,
Αθήνα

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή

Σε αυτή τη διπλωματική αποδεικνύουμε το θεώρημα του 2–ισομορφισμού γραφημάτων του Whitney, καθώς και δύο θεωρήματα που προέκυψαν σαν συνέπεια του. Το θεώρημα 2–ισομορφισμού το απέδειξε ο Αμερικανός Μαθηματικός Hassler Whitney [2] στο [5]. Οι αποδείξεις των θεωρημάτων που προέκυψαν από το θεώρημα 2–ισομορφισμού, γίνονται με χρήση μητροειδών. Η θεωρία μητροειδών είναι ένας σύγχρονος κλάδος της συνδυαστικής. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο ίδιος ο Whitney έθεσε τα θεμέλια της θεωρίας μητροειδών στο [6]. Η αρχική απόδειξη που έκανε ο Whitney στο θεώρημά του είναι μεγάλη και περίπλοκη. Στο [9], ο K.Truemper έδωσε μία πιο μικρή απόδειξη χρησιμοποιώντας μία δομή γραφημάτων που είχε οριστεί στο [15], για τα 2–συνεκτικά γραφήματα που δεν είναι 3–συνεκτικά. Στη διπλωματική διερευνήσαμε την νεότερη απόδειξη, όπως αυτή επαναδιατυπώθηκε μέσω μητροειδών από τον J. Oxley στο [8]. Στο ίδιο βιβλίο, βρίσκονται οι αποδείξεις των θεωρημάτων τοπολογικής ισομορφίας και μοναδικότητας δυϊσμού. Επισημαίνουμε ότι πολλές από τις προτάσεις που αποδείχθηκαν στην διπλωματική ήταν ασκήσεις του [8]. Μία αποκλειστικά τοπολογική απόδειξη για το θεώρημα τοπολογικού ισομορφισμού υπάρχει στο [12].

Στο κεφάλαιο 3 στο (3.1) δίνονται κάποιες διευκρινίσεις και ορισμοί. Αργότερα στο ίδιο κεφάλαιο δίνουμε κάποιους βασικούς ορισμούς της συνδυαστικής αλλά καί τοπολογικής θεωρίας γραφημάτων [1]. Ορίζουμε τί είναι γράφημα, πολυγράφημα, απλό γράφημα. Εισάγουμε την έννοια των παράλληλων ακμών και των θηλιών στα πολυγραφήματα. Περιγράφουμε πράξεις στα γραφήματα όπως η ένωση και σύνδεση, η σύνθλιψη ακμών, η ένωση–διάσπαση κορυφής και η στρέψη κορυφών. Ορίζουμε τί είναι υπογράφημα ενός γραφήματος, βαθμός και αστέρι κορυφής, τί είναι δέντρο και δάσος, πότε δύο γραφήματα είναι ισόμορφα και πότε 2–ισόμορφα μεταξύ τους. Περιγράφουμε κάποια ειδικά γραφήματα όπως η κλίκα, ο κύκλος και το μονοπάτι. Ορίζουμε τί είναι συνεκτικότητα γραφήματος. Διατυπώνουμε το θεώρημα του Menger και αποδεικνύουμε μερικούς εναλλακτικούς ορισμούς της 2–συνεκτικότητας.

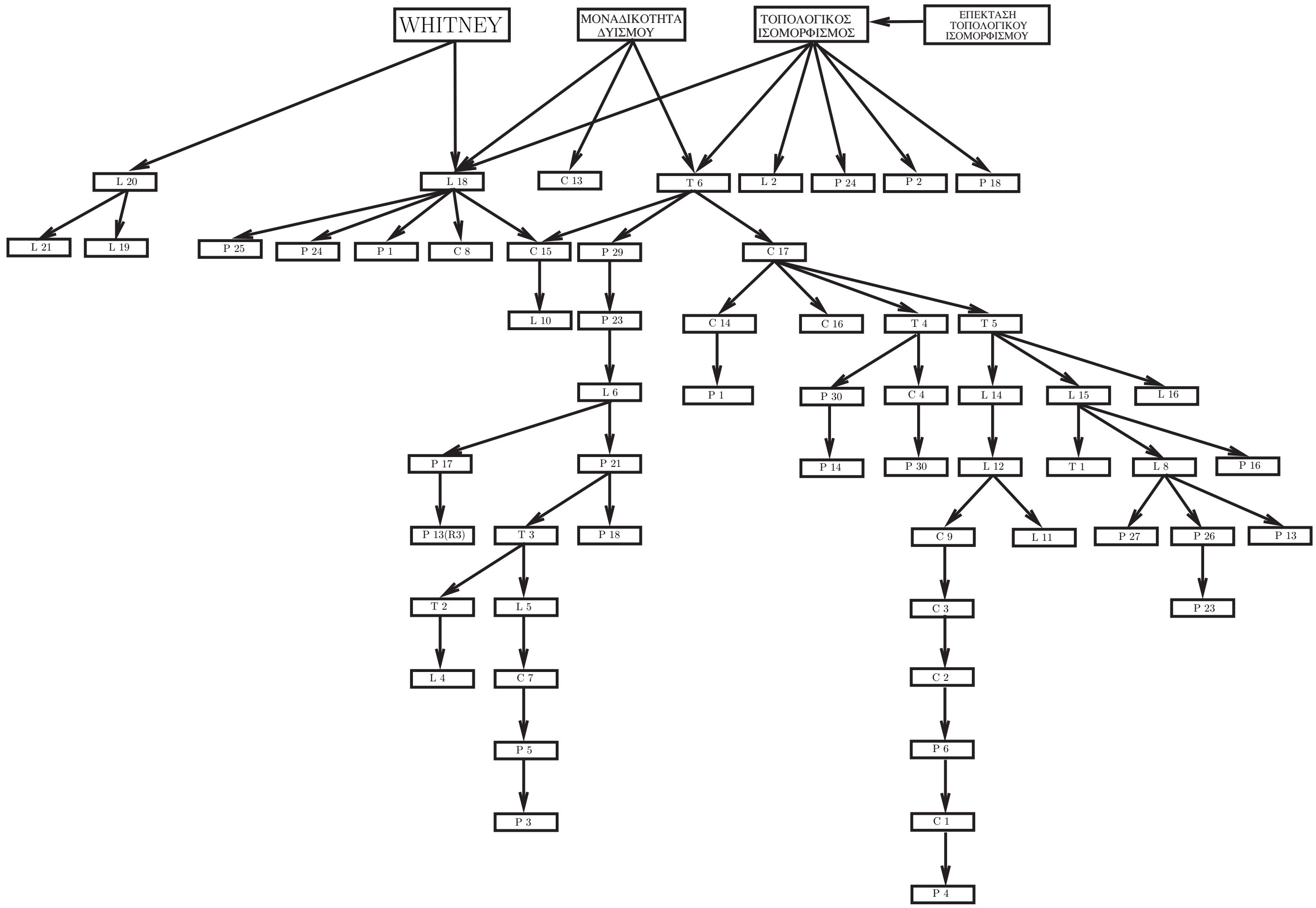
Η απόδειξη του θεωρήματος τοπολογικού ισομορφισμού απαιτεί στοιχειώδεις γνώσεις τοπολογίας, γι΄ αυτό κάνουμε μία μικρή εισαγωγή στην τοπολογική θεωρία γραφημάτων. Εισάγουμε την έννοια του ενεπίπεδου και επίπεδου γραφήματος, του γεωμετρικού δυϊκού γραφήματος καθώς και την έννοια της ασθενής και ισχυρής τοπολογικής ισομορφίας μεταξύ ενεπίπεδων γραφημάτων. Στο τέλος του (3.2), ορίζουμε τι είναι το συνδυαστικό δυϊκό γράφημα. Και για τα δύο αποτελέσματα του θεωρήματος 2–ισομορφισμού, θα χρειαστεί περαιτέρω να κάνουμε εισαγωγή στην θεωρία μητροειδών.

Η θεωρία των μητροειδών είναι ένας κλάδος της συνδυαστικής, ο οποίος γενικεύει την έννοια της ανεξαρτησίας. Η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσματικών χώρων γενικεύεται με την θεωρία μητροειδών. Ένα μητροειδές, όπως θα ορίσουμε και αργότερα είναι ένα διατεγμένο ζεύγος $(E, \mathcal{I})$, όπου το E είναι το εδαφικό του σύνολο και το $\mathcal{I}$ είναι το σύνολο των ανεξάρτητων συνόλων του. Το κλειδί στην σχέση μεταξύ θεωρίας γραφημάτων και θεωρίας μητροειδών είναι ότι τα γραφήματα μπορούν να θεωρηθούν σαν συνδυαστικές δομές οι οποίες ενσωματώνουν την έννοια της ανεξαρτησίας.

Στο (3.3) συνεχίζουμε με μία εισαγωγή στην θεωρία μητροειδών [8]. Σε αυτό το κεφάλαιο δίνουμε τον ορισμό του μητροειδούς και ορίζουμε τί είναι ανεξάρτητα σύνολα και κυκλώματα. Αποδεικνύουμε και θεμελιώνουμε μαθηματικά ότι τα σύνολα κυκλωμάτων προσδιορίζουν πλήρως ένα μητροειδές και έπειτα χρησιμοποιούμε αυτό το αποτέλεσμα για να δείξουμε ότι κάθε γράφημα έχει κάποιο μητροειδές που να το περιγράφει, το κυκλικό του μητροειδές. Ορίζουμε παράλληλα τα ομοιόμορφα μητροειδή $U_{r,n}, r \leqslant n, r, n \in \mathbb{N}$. Εισάγουμε την έννοια ισομορφισμού μητροειδούς, βάσης μητροειδούς, περιορισμένου μητροειδούς, τις συναρτήσεις τάξης και κλειστότητας ενός μητροειδούς, παραγόμενα και υπερεπίπεδα σύνολα μητροειδούς. Βρίσκουμε την σχέση που υπάρχει μεταξύ αυτών των εννοιών και βλέπουμε έπειτα τι αντιπροσωπευούν στα γραφήματα. Στα ανεξάρτητα σύνολα, κυκλώματα κ.τ.λ. του δυϊκού ενός μητροειδούς βάζουμε το πρόθεμα «συν»(συν–ανεξάρτητα σύνολα, συν–κυκλώματα κ.τ.λ.). Εισάγουμε την έννοια του δυϊκού μητροειδούς. Συνεχίζοντας, ορίζουμε τί είναι παράλληλα και σειραϊκά σύνολα ενός μητροειδούς. Περιγράφουμε τί είναι η σύνθλιψη ακμής μητροειδούς. Ορίζουμε την Tutte και την κάθετη συνεκτικότητα όπως επίσης και την περιφέρεια $g(M)$ ενός μητροειδούς M. Τελικά αποδεικνύουμε ότι ένα μητροειδές έχει την ίδια Tutte συνεκτικότητα με το δυϊκό του.

Ο στόχος του κεφαλαίου 4 είναι η απόδειξη ενός βασικού θεωρήματος που χρειάζεται για την απόδειξη των θεωρημάτων τοπολογικού ισομορφισμού και συνδυαστικών δυϊκών. Στο (4.1) βρίσκουμε ποια μητροειδή έχουν άπειρη Tutte συνεκτικότητα. Στο (4.2) αποδεικνύουμε έναν τύπο που συσχετίζει την Tutte συνεκτικότητα με την κάθετη συνεκτικότητα και την περιφέρεια του. Στο (4.3) ανακαλύπτουμε ποια είναι η σχέση μεταξύ της κάθετης και γραφοθεωρητικής συνεκτικότητας για όλα τα συνεκτικά γραφήματα εκτός του K_3. Στο (4.4) βρίσκουμε ποια είναι η κλάση των ομοιόμορφων μητροειδών που δεν είναι γραφικά. Θα ορίσουμε αργότερα ότι ένα μητροειδές είναι γραφικό αν είναι ισόμορφο με κάποιο κυκλικό μητροειδές. Τέλος στο (4.5) αποδεικνύουμε το βασικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου 4.

Στο κεφάλαιο 5 γίνονται οι βασικές αποδείξεις αυτής της διατριβής. Στο (5.1) αποδεικνύεται το θεώρημα του Whitney. Το θεώρημα του Whitney λέει ότι δύο γραφήματα είναι 2–ισόμορφα αν και μόνο αν υπάρχει ισομορφισμός ο οποίος διατηρεί τους κύκλους τους. Στα (5.2)–(5.3) διατυπώνονται και αποδεικνύονται τα θεωρήματα που προκύπτουν από το θεώρημα του Whitney. Το πρώτο αποτέλεσμα που εξάγεται είναι το θεώρημα τοπολογικού ισομορφισμού για 3–συνεκτικά επίπεδα γραφήματα όπου αποδεικνύεται η μοναδικότητα εμβάπτισης στο επίπεδο κάθε 3–συνεκτικού απλού επίπεδου γραφήματος. Ένα αποτέλεσμα που μας προέκυψε εδώ είναι η επέκτασή του θεωρήματος αυτού σε 3–συνεκτικά επίπεδα γραφή-



Σχήμα 2.1: Δέντρο αποδείξεων. T=θεώρημα, P=Πρόταση, C=Πόρισμα, L=Λήμμα.

ματα χωρίς θηλιές. Το δεύτερο αποτέλεσμα που προκύπτει από το θεώρημα του Whitney είναι το θεώρημα μοναδικότητας συνδυαστικών δυϊκών γραφημάτων στα απλά 3–συνεκτικα επίπεδα γραφήματα.

Στο τέλος της εισαγωγής, προσθέτουμε το δέντρο που προκύπτει από τις αποδείξεις των θεωρημάτων.

Κεφάλαιο 3

Γενικοί ορισμοί

3.1 Βασικές έννοιες

Ορισμός 1. Έστω $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι. Τότε η αντιστοιχία $f : X \to Y$ είναι ομοιομορφισμός μεταξύ των X και Y αν f είναι αντιστοιχία και αν f, f^{-1} συνεχείς.

Ορισμός 2. Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}^2, D$, ομοιομορφικό με το σύνολο

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1, x, y \in \mathbb{R}\}$$

ονομάζεται *δίσκος* του $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 3. Μία καμπύλη *Jordan* στο επίπεδο είναι μία καμπύλη με αρχή και τέλος η οποία δεν τέμνει τον εαυτό της. Η καμπύλη θα λέγεται *κλειστή* αν το τέλος της ταυτίζεται με την αρχή της.

Για την αποφυγή σύγχισης και για ευκολία, όταν γράφουμε $\theta(X)$, όπου $\theta : A \to B$ συνάρτηση και $X \subseteq A$, θα εννοούμε την εικόνα του X μέσω της θ, δηλαδή

$$\theta(X) = \{\theta(x) \mid x \in X\}.$$

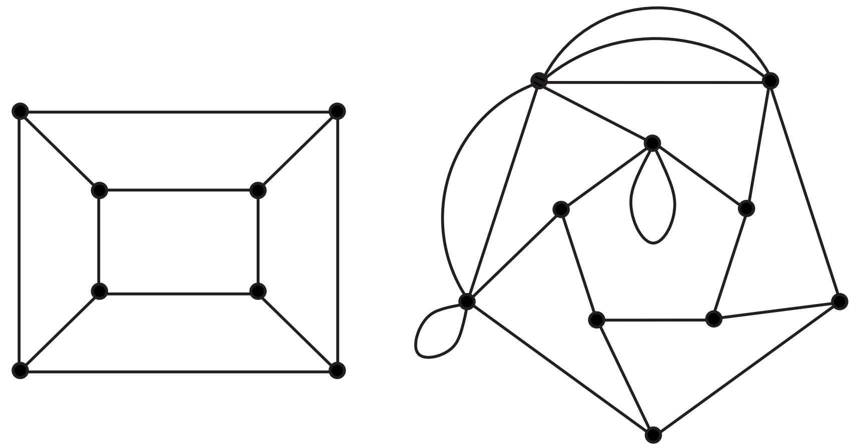
Ορισμός 4. Έστω $\theta : E_1 \to E_2$ συνάρτηση και έστω $X \subseteq E_1$. Ο *περιορισμός* $\theta|X : X \to \theta(X)$ της θ στο X είναι μία συνάρτηση η οποία για κάθε $x \in X,\ \theta|X(x) = \theta(x)$ ενώ για $x \in E_1 - X$ δεν ορίζεται.

Ορισμός 5. Έστω $f : A \to B,\ g : A' \to B'$ συναρτήσεις με $A \cap A' = \emptyset$. Ορίζουμε την *ένωση* των f και g, $h : A \cup A' \to B \cup B'$ να είναι η συνάρτηση που για κάθε x στο A παίρνει την τιμή της f και για κάθε x στο A' παίρνει την τιμή της g.

3.2 Εισαγωγή στα γραφήματα

3.2.1 Γράφημα–πολυγράφημα

Ορισμός 6. Καλούμε *γράφημα* κάθε ζεύγος $G = (V, E)$ όπου το V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και το E είναι ένα σύνολο που περιέχει υποσύνολα του V, μεγέθους ακριβώς 2. Τα



Σχήμα 3.1: Γράφημα και πολυγράφημα.

στοιχεία του V θα τα λέμε *κορυφές* του G και τα στοιχεία του E *ακμές* του G. Για κάθε ακμή $e = \{u, v\}$ καλούμε τις κορυφές u, v *άκρα* της e. Αν μία κορυφή δεν αποτελεί άκρο καμίας ακμής, τότε αυτή είναι μία *απομονωμένη* κορυφή στο G.

Μία επέκταση του ορισμού του γραφήματος είναι το *πολυγράφημα*, το οποίο διαφέρει από ένα γράφημα στο ότι επιτρέπουμε τα στοιχεία του E να έχουν μέγεθος το πολύ 2 και διαφορετικές ακμές να έχουν τα ίδια άκρα. Μία ακμή μεγέθους 1 θα την λέμε *θηλιά* του G ενώ δύο ακμές e, f με τα ίδια άκρα θα λέγονται *παράλληλες*. Αν από ένα πολυγράφημα G αφαιρέσουμε τις θηλιές και αντικαταστήσουμε κάθε σύνολο παράλληλων ακμών με μία ακμή, τότε παίρνουμε ένα γράφημα, το *απλό* γράφημα του G. Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής όταν αναφερόμαστε σε γραφήματα θα εννοούμε πολυγραφήματα και θα αναφερόμαστε στα μη–πολυγραφήματα σαν απλά γραφήματα.

3.2.2 Ένωση–σύνδεση γραφημάτων

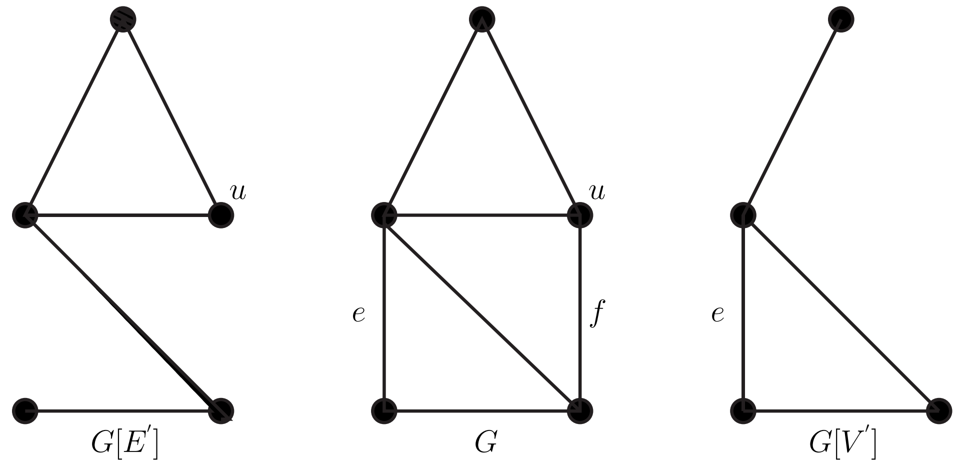
Ορισμός 7. Έστω $G = (V(G), E(G))$ και $H = (V(H), E(H))$ γραφήματα. Τότε ορίζουμε η *ένωση* των G και H να είναι το γράφημα

$$G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H)).$$

Αν $V(G) \cap V(H) = \emptyset$, τότε τα G και H λέγονται *διακεκριμένα*, ή *ξένα* μεταξύ τους και μιλάμε για διακεκριμένη ένωση τους.

Ορισμός 8. Έστω $G = (V(G), E(G))$ και $H = (V(H), E(H))$ γραφήματα με $V(G) \cap V(H) = \emptyset$. Τότε ορίζουμε την *σύνδεση* των G, H να είναι το γράφημα

$$G * H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \cup \{\{u, v\} \mid u \in V(G),\ v \in V(H)\}).$$



Σχήμα 3.2: Γράφημα G και παραγόμενα και εναγόμενα υπογραφήματά του, $G[E^{'}], G[V^{'}]$ όπου $E^{'} = E(G) - \{e, f\}, V^{'} = V(G) - u$.

3.2.3 Βαθμός κορυφής

Ορισμός 9. Έστω $G = (V(G), E(G))$ γράφημα και έστω $u \in V(G)$. Σαν *βαθμό* της κορυφής u στο G, $deg_G(u)$, ορίζουμε να είναι το πλήθος των εξερχόμενων ακμών της u.

3.2.4 Υπογραφήματα

Ορισμός 10. Ένα γράφημα H ονομάζεται *υπογράφημα* του G αν $V(H) \subseteq V(G)$ και $E(H) \subseteq E(G)$. Αν τώρα $V^{'} \subseteq V(G)$, τότε $G[V^{'}]$ θα συμβολίζει το γράφημα με σύνολο κορυφών το $V^{'}$ και σύνολο ακμών τις ακμές που όλα τα άκρα τους ανήκουν στο $V^{'}$. Το $G[V^{'}]$ ονομάζεται *εναγόμενο* υπογράφημα του G. Αν $E^{'} \subseteq E(G)$, τότε $G[E^{'}]$ θα συμβολίζει το γράφημα με σύνολο ακμών το $E^{'}$ και σύνολο κορυφών τις κορυφές που αποτελούν άκρο κάποιας ακμής του $E(G)$. Το $G[E^{'}]$ ονομάζεται *παραγόμενο* υπογράφημα του G.

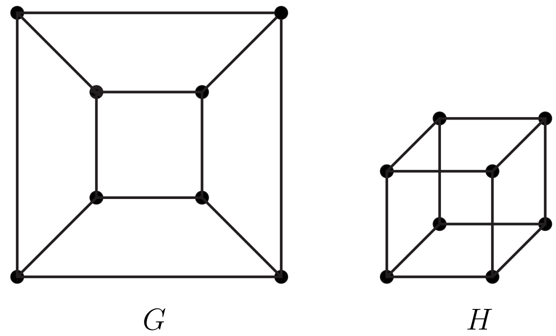
Εναλλακτικά, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $G \backslash X$, όπου X υποσύνολο του συνόλου των ακμών του G, αν θέλουμε να γράψουμε το $G[E(G) - X]$, και θα το ονομάζουμε η *αφαίρεση* του X από το G.

3.2.5 Ισομορφισμός γραφημάτων

Ορισμός 11. Έστω G, H γράφηματα. Θα λέμε ότι το G είναι *ισόμορφο* με το H ανν υπάρχουν αντιστοιχίες $\psi : V(G) \to V(H),\ \theta : E(G) \to E(H)$ τ.ω.

$$(\forall u \in V(G))(\forall e \in E(G))(u \in e \Leftrightarrow \psi(u) \in \theta(e))$$

Για δεδομένη αντιστοιχία $\theta : E(G) \to E(H)$, θα λέμε ότι τα G, H είναι *θ–ισόμορφα* ανν υπάρχει αντιστοιχία $\psi : V(G) \to V(H)$ τ.ω. ψ, θ να ενάγουν ισομορφισμό μεταξύ G και H. Θα συμβολίζουμε με $G \cong_\theta H$.



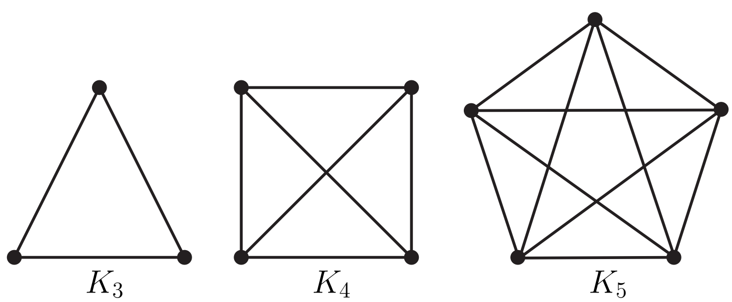
Σχήμα 3.3: Τα γραφήματα G, H είναι ισόμορφα.

3.2.6 Ειδικά γραφήματα

Ορισμός 12. Ορίζουμε για κάθε $r \geqslant 0$ το γράφημα

$$K_r = (\{u_1, u_2, ..., u_r\}, \{\{u_i, u_j\} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant r\}).$$

Το K_r ονομάζεται *κλίκα* μεγέθους r.



Σχήμα 3.4: Οι κλίκες K_3,K_4 και K_5.

Το παρακάτω λήμμα το δίνουμε χωρίς απόδειξη:

Λήμμα 1. *$K_n = K_r * K_q$ για κάθε θετικούς ακέραιους r, q με $r + q = n$.*

Ορισμός 13. Ορίζουμε για κάθε $r \geqslant 1$ το γράφημα

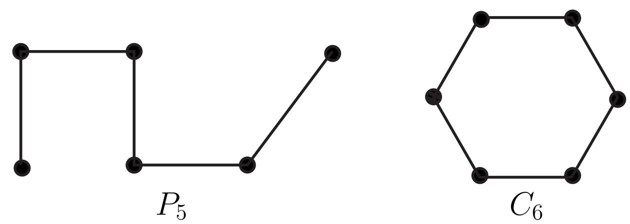
$$P_r = (\{u_1, u_2, .., u_r\}, \{\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}, ..., \{u_{r-1}, u_r\}\}).$$

Το P_r ονομάζεται *μονοπάτι* μεγέθους r. Οι κορυφές u_1 και u_r ονομάζονται *άκρα* του P_r ενώ οι υπόλοιπες *εσωτερικές κορυφές* του. Σε ένα γράφημα, δύο μονοπάτια του με κοινά άκρα ονομάζονται *εσωτερικώς διακεκριμένα* αν δεν έχουν κοινές εσωτερικές κορυφές.

Ορισμός 14. Ορίζουμε για κάθε $r \geqslant 3$ το γράφημα

$$C_r = (\{u_1, u_2, .., u_r\}, \{\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}, ..., \{u_{r-1}, u_r\}, \{u_r, u_1\}\}).$$

Το C_r ονομάζεται *κύκλος* μεγέθους r. Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής τους κύκλους θα τους εξετάζουμε σαν σύνολα ακμών, αδιαφορώντας για την διάταξή τους.



Σχήμα 3.5: Το μονοπάτι P_5 και ο κύκλος C_6.

3.2.7 Συνεκτικότητα

Ορισμός 15. Ένα γράφημα G ονομάζεται *συνεκτικό* αν για κάθε ζεύγος κορυφών του u, v υπάρχει ένα μονοπάτι που να τις συνδέει, διαφορετικά είναι *μη–συνεκτικό*. Τα συνεκτικά μέρη ενός μη–συνεκτικού γραφήματος ονομάζονται *συνεκτικές συνιστώσες* του G.

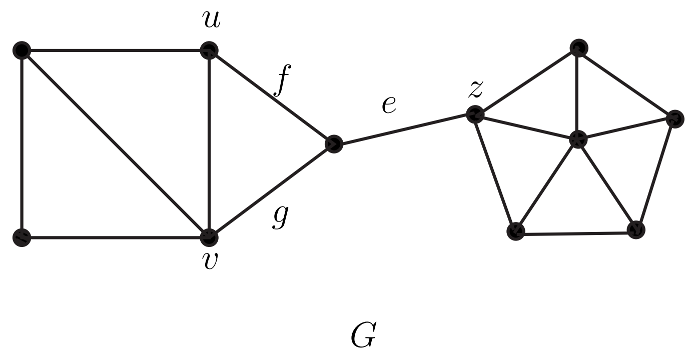
Ορισμός 16. Έστω G γράφημα. Ένας k*–διαχωριστής* του G ορίζεται να είναι ένα υποσύνολο του V μεγέθους k του οποίου η αφαίρεση δίνει ένα γράφημα μη–συνεκτικό.

Ορισμός 17. Έστω $G = (V, E)$ γράφημα. Ένα υποσύνολο X του συνόλου των ακμών του G ονομάζεται *τομή ακμών* του G ανν το $G[E-X]$ έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το G. Αν το μέγεθος του X είναι 1, τότε θα ονομάζεται *ισθμός*. Μία ελαχιστική τομή ακμών θα την ονομάζουμε *δεσμό*.

Ορισμός 18. Έστω $G = (V, E)$ γράφημα. Ένα υποσύνολο ακμών X στο G θα ονομάζεται *σειραϊκή κλάση ακμών* αν κάθε δύο ακμές στο X είναι δεσμός στο G.

Ορισμός 19. Έστω G γράφημα με $\geqslant n+1$ κορυφές. Το G ορίζεται να είναι n*–συνεκτικό* ανν κάθε διαχωριστής του έχει τουλάχιστον n κορυφές. Τα 2–συνεκτικά γραφήματα λέγονται και *τεμάχια*. Ορίζουμε την *συνεκτικότητα* του G, $\kappa(G)$ να είναι το μέγεθος ενός ελάχιστου διαχωριστή του.

Θεώρημα 1. *(Θεώρημα του Menger) Έστω G γράφημα με $\geqslant n+1$ κορυφές. Τότε το G είναι n–συνεκτικό ανν για κάθε ζεύγος κορυφών u, v υπάρχουν n εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια $P_1, P_2, ..., P_n$ από την u στην v.*



Σχήμα 3.6: Ένα συνεκτικό γράφημα G με $\{u, v\}, \{z\}$ να είναι 2 και 1–διαχωριστές του αντίστοιχα. Οι ακμές f, g βρίσκονται σε σειρά ενώ η ακμή e είναι ισθμός.

Η απόδειξη του θεωρήματος δεν δίνεται, αλλά μπορεί κανείς να το ανατρέξει στο [11], ή σε κάποιο βιβλίο θεωρίας γραφημάτων.

Ορισμός 20. Έστω γράφημα G χωρίς θηλιές, και έστω u μία κορυφή του. Τότε το σύνολο των εξερχόμενων ακμών X_u από την u θα το λέμε *αστέρι* της u.

Πρόταση 1. *Έστω G συνεκτικό γράφημα χωρίς θηλιές και απομονωμένες κορυφές με $\geqslant 3$ κορυφές. Τότε το G είναι 2-συνεκτικό ανν για κάθε δύο ακμές του υπάρχει ένας κύκλος που να τις περιέχει.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω G 2–συνεκτικό και έστω δύο ακμές e και f με άκρα u_1, v_1 και u_2, v_2 αντίστοιχα. Διακρίνουμε περιπτώσεις για το αν οι e και f έχουν κοινές κορυφές:

i) Αν $u_1 = u_2$, τότε από Θεώρημα Menger υπάρχει μονοπάτι από την v_1 στην v_2 που να μην περνάει από την u_1. Τότε όμως συνδέοντας αυτά τα δύο μονοπάτια παράγεται ένας κύκλος που περιέχει τις e και f.

ii) Οι e και f δεν έχουν κάποιο κοινό άκρο. Έστω P_1 ένα μονοπάτι με άκρα τις ακμές e και f. Τότε από θ.Menger υπάρχει εσωτερικά διακεκριμένο μονοπάτι από το P_1. Συνδέοντας αυτό το μονοπάτι με το P_1 πέρνουμε τον ζητούμενο κύκλο.

Συνεπώς για κάθε δύο ακμές του G υπάρχει ένας κύκλος που τις περιέχει.

($\Leftarrow$) Έστω ότι κάθε δύο ακμές του G υπάρχει ένας κύκλος που τις περιέχει και έστω G όχι 2–συνεκτικό. Το G πρέπει να είναι συνεκτικό. Έστω u 1–διαχωριστής του G. Έστω G_1, G_2 συνεκτικές συνιστώσες του $G - u$. Έστω κορυφές w, z που να ανήκουν στις G_1 και G_2 αντίστοιχα. Έστω ότι οι w, z αποτελούν άκρα των e και f αντίστοιχα. Τότε υπάρχει κύκλος που περιέχει τις e και f στο G. Άρα υπάρχουν δύο εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια στο G, τα οποία πρέπει να περνούν από την u. Άτοπο. Συνεπώς G 2–συνεκτικό. $\square$

Πρόταση 2. *Έστω G συνεκτικό γράφημα χωρίς θηλιές με $\geqslant 3$ κορυφές. Τότε το G είναι 2–συνεκτικό ανν κάθε αστέρι είναι ένας δεσμός του G.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω G 2–συνεκτικό. Έστω $u \in V(G)$ μία κορυφή του G και έστω X_u το αστέρι της u. Έστω προς άτοπο ότι X_u όχι δεσμός. Τότε υπάρχει $Y_u \subsetneq X_u$ για το οποίο $X_u - Y_u$ είναι δεσμός Τότε η αφαίρεση του $X_u - Y_u$ από το G ανεβάζει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών κατά 1. Τότε u είναι ένας 1–διαχωριστής του γραφήματος, άτοπο γιατί το G είναι 2–συνεκτικό, άρα δεν έχει 1–διαχωριστές. Άρα κάθε αστέρι είναι ένας δεσμός.
($\Leftarrow$) Έστω ότι κάθε X_u, $u \in V(G)$ είναι αστέρι. Έστω προς άτοπο ότι G όχι 2–συνεκτικό. Τότε το G έχει έναν 1–διαχωριστή, έστω την u_0. Έστω ότι το γράφημα $G - u_0$ έχει τα G_1 και G_2 σαν συνεκτικές συνιστώσες. Τότε το σύνολο των ακμών Y που συνδέουν την u_0 με το G_2 αποτελούν έναν δεσμό του G, γνήσιο υποσύνολο της X_{u_0}. Άρα άτοπο γιατί X_{u_0} ελαχιστική, άρα G 2–συνεκτικό. □

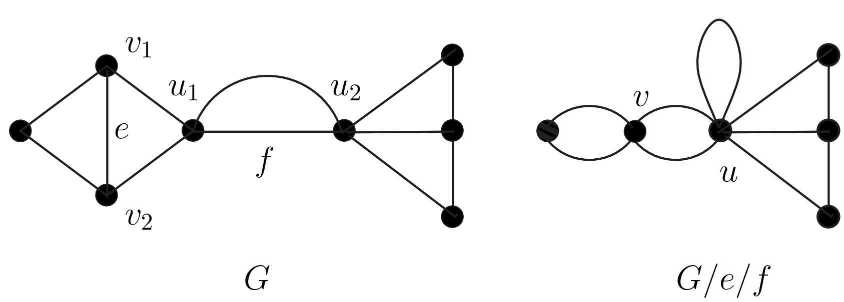
3.2.8 Δάση–δέντρα

Ορισμός 21. Ένα γράφημα G λέγεται *δάσος* ανν δεν περιέχει κύκλους. Αν επιπλέον το G είναι συνεκτικό τότε λέγεται *δέντρο.*

Λήμμα 2. *Ένα δέντρο T με $|V(T)| \geqslant 2$ έχει τουλάχιστον δύο κορυφές βαθμού 1.*

3.2.9 Σύνθλιψη ακμών

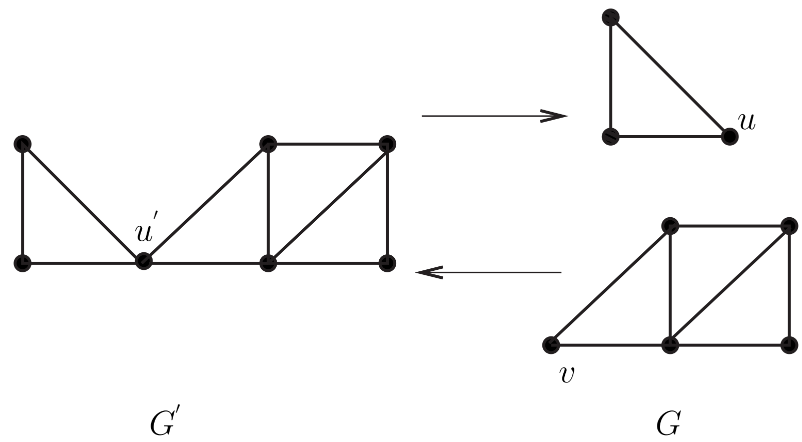
Ορισμός 22. Έστω G γράφημα και έστω $e \subseteq E(G)$. Τότε η *σύνθλιψη* του e από το G, και συμβολίζεται με G/e, ορίζεται να είναι το γράφημα που θα προκύψει αν αφαιρέσουμε την e και ενώσουμε τα άκρα της, u, v, σε μία κορυφή u', διατηρώντας τις διαφορετικές μεταξύ τους ακμές. Αν υπάρχει παράλληλη ακμή με την e, τότε αυτή γίνεται θηλιά γύρω από την κορυφή u' στο G/e. Αν έχουμε κάποιο σύνολο $T \subseteq E(G)$, τότε ορίζουμε το G/T να είναι η *σύνθλιψη* του T από το G. Εδώ να κάνουμε την παρατήρηση ότι στο [14] έχει αποδειχθεί ότι η σειρά που κάνουμε σύνθλιψη στις ακμές δεν παίζει κανένα ρόλο.



Σχήμα 3.7: Σύνθλιψη του G στο $G/e/f$.

3.2.10 Ένωση–διάσπαση κορυφών

Ορισμός 23. Έστω G ένα μη–συνεκτικό γράφημα και έστω u, v δύο κορυφές του που ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες. Τότε, *ενώνουμε* τις u και v στην $u^{'}$. Η αντίστροφη διαδικασία ονομάζεται *διάσπαση* κορυφής και μπορεί να γίνει μόνο σε έναν 1–διαχωριστή του G.



Σχήμα 3.8: Ένωση και διάσπαση κορυφών.

3.2.11 Στρέψη

Ορισμός 24. Έστω G γράφημα και έστω ότι αυτό παράγεται από δύο ξένα μεταξύ τους γραφήματα G_1 και G_2, ενώνοντας την κορυφές u_1, u_2 στην u και τις v_1, v_2 στην v στο G. Ένα γράφημα $G^{'}$ ονομάζεται *στρέψη* του G γύρω από τις $\{u, v\}$ αν ενώσουμε τις u_1, v_2 με τις v_1, u_2 αντίστοιχα. Τα γραφήματα G_1 και G_2 ονομάζονται *τμήματα* της στρέψης.

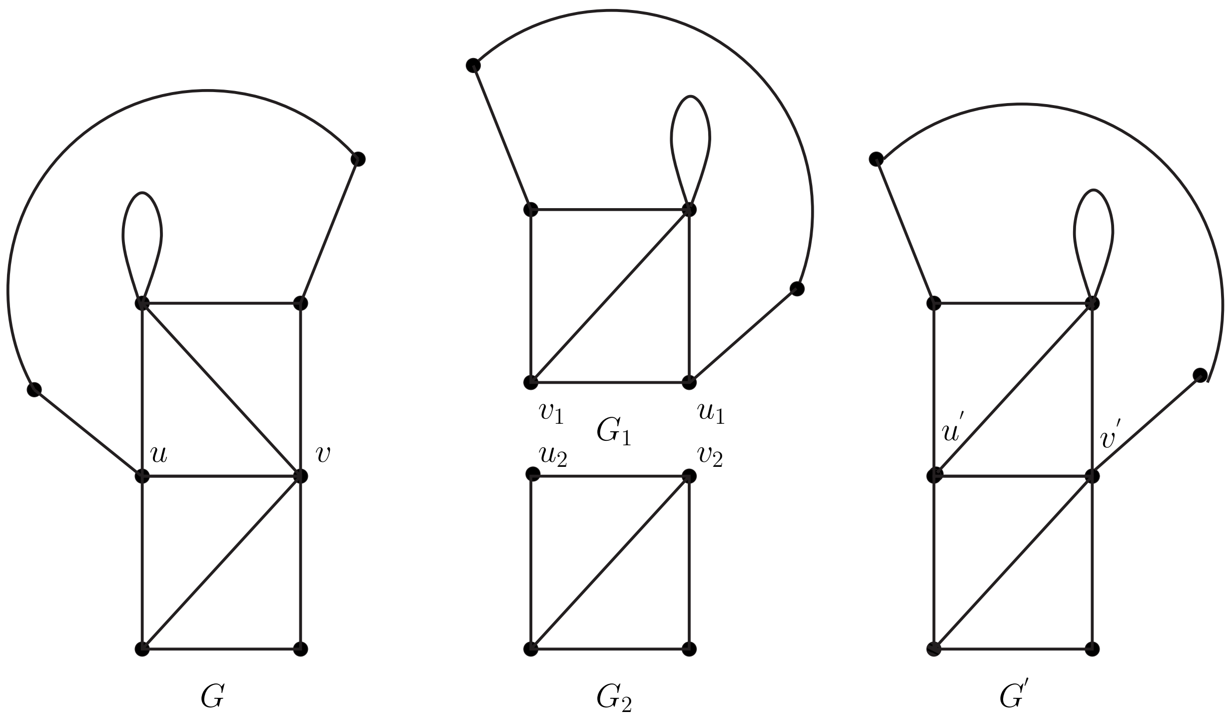
3.2.12 2–Ισομορφισμός γραφημάτων

Ορισμός 25. Έστω G, H γράφηματα. Θα λέμε ότι το G είναι 2–ισόμορφο με το H ανν το H μπορεί να μετασχηματιστεί στο G μέσω ενώσεων, διασπάσεων και στρέψεων κορυφών. Είναι εμφανές ότι η σχέση 2–ισομορφισμού είναι σχέση ισοδυναμίας.

Η παρακάτω δομή στα γραφήματα οφείλεται στο [15]:

3.2.13 Γενικευμένοι κύκλοι

Ορισμός 26. Έστω G συνεκτικό γράφημα. Τότε θα λέμε ότι το G είναι ένας *γενικευμένος κύκλος* με μέρη $G_1, G_2, ..., G_k, k \geqslant 2$ αν ισχύουν οι εξής 3 ιδιότητες:



Σχήμα 3.9: Στρέψη του G γύρω από το $\{u, v\}$.

i) Κάθε G_i είναι ένα συνεκτικό υπογράφημα του G, με μη κενό σύνολο ακμών και αν $k = 2$ τότε $|V(G_1)|, |V(G_2)| \geqslant 3$.

ii) Τα σύνολα ακμών των $G_1, G_2, ..., G_k$ διαμερίζουν το σύνολο ακμών του G, και κάθε G_i έχει ακριβώς δύο κορυφές κοινές με το $\bigcup_{j \neq i} G_j$, ονομαζόμενες και *κορυφές επαφής*.

iii) Αν κάθε G_i αντικατασταθεί από μία ακμή που έχει άκρα τις κορυφές επαφής του, τότε το νέο γράφημα που θα προκύψει θα είναι κύκλος.

3.2.14 Ενεπίπεδα Γραφήματα

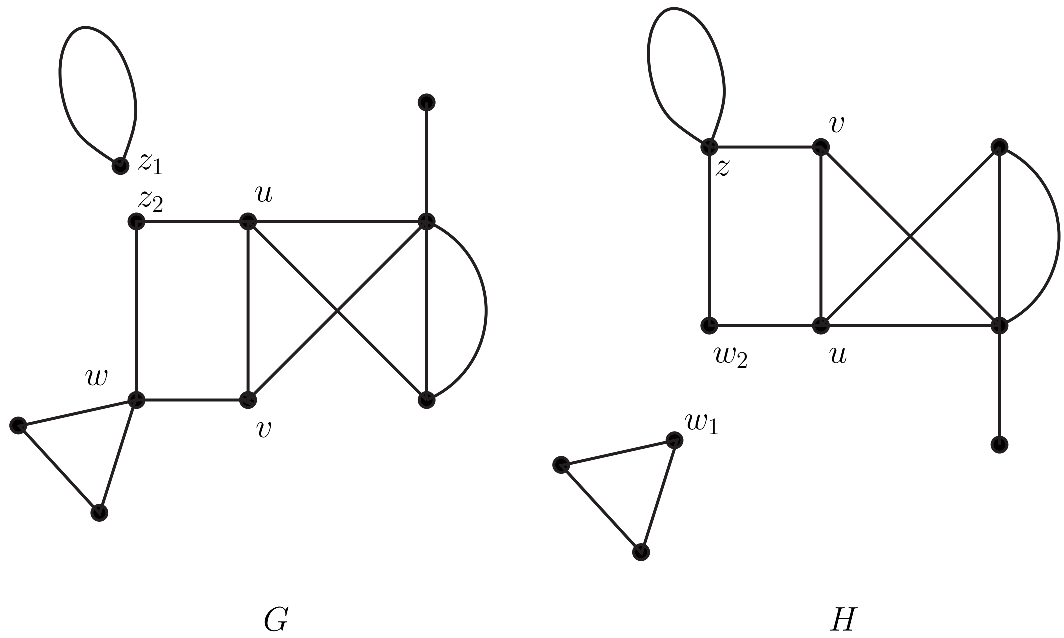
Ορισμός 27. Ένα *ενεπίπεδο γράφημα* είναι ένα ζεύγος $\Gamma = (V, E)$ από πεπερασμένα σύνολα που ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

i) Κάθε στοιχείο v του V είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}^2$ και το ονομάζουμε *κορυφή* του Γ.

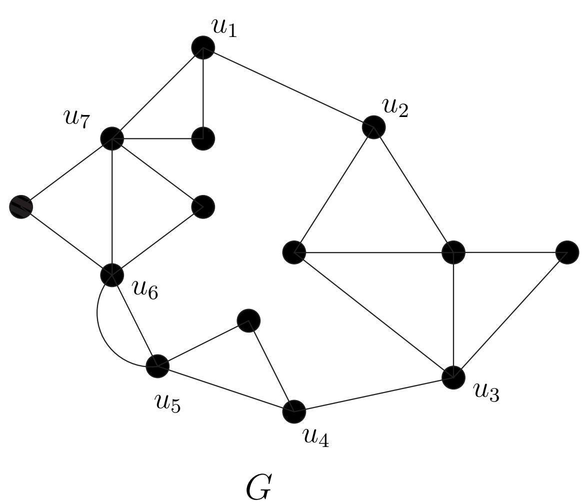
ii) Κάθε στοιχείο e του E είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, ομοιομορφικό με το σύνολο

$$\{(x, y) \mid x + y = 1, x, y > 0\}$$

και το ονομάζουμε *ακμή* του Γ.



Σχήμα 3.10: Το H είναι 2–ισόμορφο με το G.



Σχήμα 3.11: Το G έχει αναπαράσταση γενικευμένου κύκλου με 7 μέρη. Οι κορυφές $u_i, i = 1, 7$ είναι οι κορυφές επαφής του.

iii) Διαφορετικές ακμές έχουν διαφορετικά σύνολα άκρων και έχουν κενή τομή.

iv) $V \cap (\bigcup_{e \in E} e) = \emptyset$.

Ορίζουμε $\widetilde{\Gamma} = V \cup (\bigcup_{e \in E} e), V(\Gamma) = V, E(\Gamma) = E$. Παρατηρούμε ότι το $\mathbb{R}^2 - \widetilde{\Gamma}$ είναι ανοιχτό.

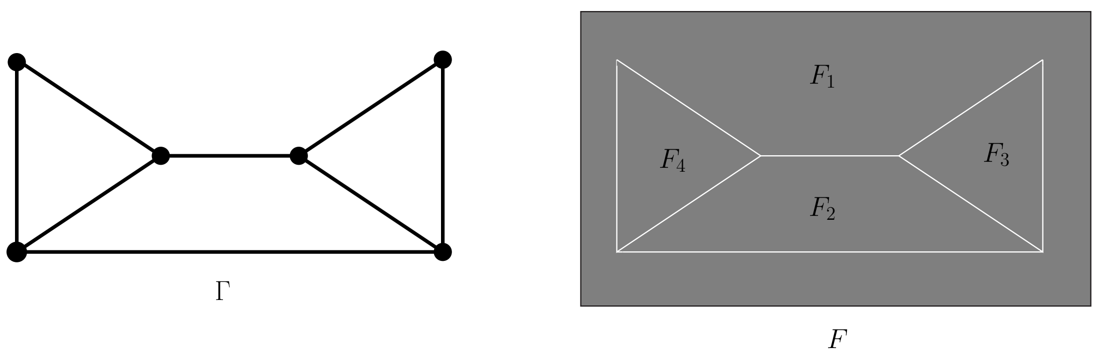
Ορισμός 28. Έστω $\Gamma = (V, E)$ ενεπίπεδο γράφημα και έστω $\Gamma^{'} = (V^{'}, E^{'})$ με $V^{'} \subseteq V, E^{'} \subseteq E$. Τότε το $\Gamma^{'}$ είναι ένα *ενεπίπεδο υπογράφημα* του Γ.

Ορισμός 29. Έστω $\Gamma = (V, E)$ ενεπίπεδο γράφημα. Τότε οι συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{R}^2$ ονομάζονται όψεις του Γ. Σαν $F(\Gamma)$ συμβολίζουμε το σύνολο των όψεων του Γ.

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας δίσκος D που περιέχει το $\widetilde{\Gamma}$. Επίσης υπάρχει ακριβώς μία όψη η οποία είναι υπερσύνολο του συμπληρώματος του D. Αυτή η όψη καλείται *εξωτερική*. Όλες οι άλλες όψεις καλούνται *εσωτερικές*.

Ορισμός 30. Έστω $\Gamma = (V, E)$ ενεπίπεδο γράφημα. Τότε οι συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{R}^2$ ονομάζονται όψεις του Γ. Σαν $F(\Gamma)$ συμβολίζουμε το σύνολο των όψεων του Γ.

Στο [4] αποδεικνύεται ότι ένα γράφημα είναι εμβαπτίσιμο στο επίπεδο ανν είναι εμβαπτίσιμο στην σφαίρα. Γενικά είναι βολικό να μελετάμε γραφήματα στην σφαίρα καθώς γραφήματα εμβαπτισμένα στην σφαίρα δεν έχουν εξωτερική όψη.



Σχήμα 3.12: Ένα ενεπίπεδο γράφημα Γ με τις όψεις του F.

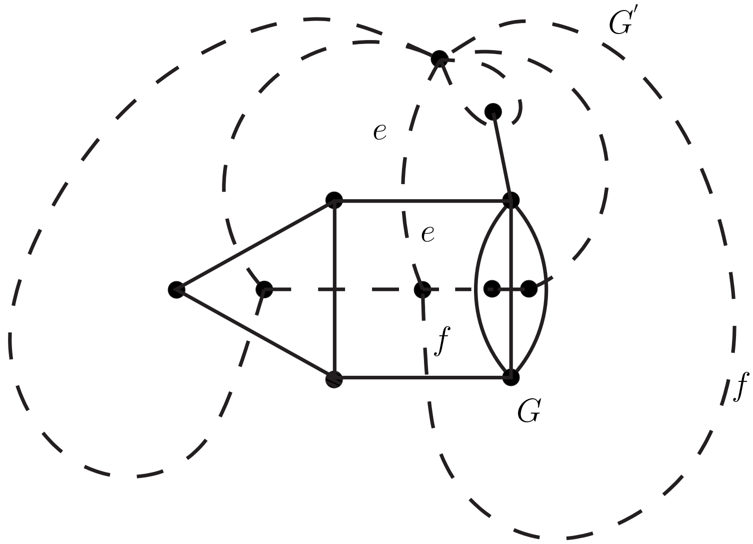
Ορισμός 31. Έστω γράφημα G και Γ ενεπίπεδο γράφημα. Τότε το Γ είναι μία *ενεπίπεδη εμβάπτιση* του G ανν υπάρχουν αντιστοιχίες $\psi : V(G) \to V(\Gamma), \theta : E(G) \to E(\Gamma)$ μεταξύ των κορυφών και των ακμών τους τ.ω. για κάθε κορυφή u και ακμή e του G

$$u \text{ είναι άκρο της } e \text{ ανν } \psi(u) \text{ ανήκει στο σύνορο της } \theta(e)$$

Ορισμός 32. Ένα γράφημα G είναι *επίπεδο* ανν έχει κάποια ενεπίπεδη εμβάπτιση.

3.2.15 Γεωμετρικό δυϊκό γράφημα

Ορισμός 33. Έστω ενεπίπεδο γράφημα Γ. Κατασκευάζουμε ένα νέο γράφημα $\Gamma^{'}$ αντιστοιχίζοντας κάθε όψη του Γ σε μία κορυφή του $\Gamma^{'}$ και για κάθε ακμή κοινή στα σύνορα δύο όψεων του Γ συνδέουμε με ακμή τις αντίστοιχες δύο κορυφές στο $\Gamma^{'}$. Το ενεπίπεδο γράφημα $\Gamma^{'}$ ονομάζεται *γεωμετρικό δυϊκό γράφημα* του Γ ή απλώς *γεωμετρικό δυϊκό* του Γ.



Σχήμα 3.13: Το $G^{'}$ είναι ένα γεωμετρικό δυϊκό του G. Οι ακμές e και f εναλλάσονται από σειραϊκές στο G σε παράλληλες στο $G^{'}$.

Παρατηρούμε στο Σχήμα 3.13 ότι οι παράλληλες κλάσεις ακμών G είναι σειραϊκές στο $G^{'}$ και αντιστρόφως.

Ορισμός 34. Έστω W_1 και W_2 δύο περιηγήσεις ενός γραφήματος G. Θα λέμε ότι οι W_1, W_2 είναι *συμμετρικές* αν η μία μπορεί να προκύψει από την άλλη μετά από ολίσθηση ή αντιστροφή. Προφανώς η σχέση συμμετρίας τους είναι σχέση ισοδυναμίας. Κάθε κλάση ισοδυναμίας αυτής της σχέσης την καλούμε ***κυκλική παράθεση*** και την συμβολίζουμε επιλέγοντας ένα οποιοδήποτε μέλος της.

Λήμμα 3. *Όλες οι όψεις ενός 2–συνεκτικού επίπεδου γραφήματος G είναι κύκλοι.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι οι κορυφές της κυκλικής παράθεσης μίας όψης απαντώνται μόνο μία φορά ανν η όψη αυτή είναι κύκλος ή μονοπάτι. Επειδή το G είναι 2–συνεκτικό όμως, καμία όψη δεν μπορεί να είναι μονοπάτι. Έστω λοιπόν όψη F, κυκλική παράθεση $\pi(F)$ και έστω ότι η κορυφή u απαντάται δύο φορές στην $\pi(F)$. Τότε η u είναι ένας 1–διαχωριστής του γραφήματος, άτοπο. Συνεπώς F κύκλος. □

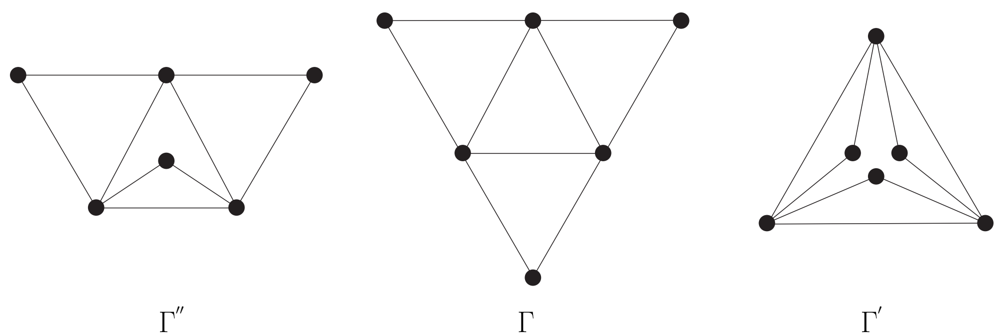
3.2.16 Ασθενή–ισχυρή τοπολογική ισομορφία

Ορισμός 35. Έστω ενεπίπεδα γραφήματα Γ και Γ'. Θα λέμε ότι τα Γ και Γ' είναι *ασθενώς τοπολογικώς ισόμορφα* και θα συμβολίζουμε με $\Gamma \cong_{\alpha\tau\pi} \Gamma'$ ανν υπάρχουν αντιστοιχίες $\theta : E(\Gamma) \to E(\Gamma'), \sigma : F(\Gamma) \to F(\Gamma')$ τ.ω. για κάθε σύνολο ακμών X και για κάθε όψη F του Γ

$$X \text{ είναι σύνορο της } F \text{ ανν } \theta(X) \text{ είναι σύνορο της } \sigma(F)$$

Ορισμός 36. Έστω ενεπίπεδα γραφήματα Γ και Γ'. Θα λέμε ότι τα Γ και Γ' είναι *τοπολογικώς ισόμορφα* και θα συμβολίζουμε με $\Gamma \cong_{\tau\pi} \Gamma'$ ανν είναι ισόμορφα μέσω μίας αντιστοιχίας $\rho : V(\Gamma) \to V(\Gamma')$ και επιπλέον υπάρχει αντιστοιχία $\sigma : F(\Gamma) \to F(\Gamma')$ μεταξύ των όψεων τους τ.ω. για κάθε $f \in F(\Gamma)$,

$$\rho(\pi(f)) = \pi(\sigma(f)).$$



Σχήμα 3.14: Τα ενεπίπεδα γραφήματα Γ και Γ' είναι τοπολογικώς ισόμορφα ενώ τα Γ και Γ'' δεν είναι.

3.2.17 Συνδυαστικό δυϊκό γραφήματος

Ορισμός 37. Έστω $G = (V, E)$, $G' = (V, E')$ γραφήματα. Τότε το G' είναι ένα *συνδυαστικό δυϊκό γράφημα* του G ανν υπάρχει αντιστοιχία $\psi : E \to E'$ τ.ω. για κάθε $X \subseteq E$:

$$X \text{ κύκλος στο } G \Leftrightarrow \psi(X) \text{ δεσμός στο } G'.$$

3.3 Εισαγωγή στα μητροειδή

3.3.1 Ανεξάρτητα σύνολα–κυκλώματα

Ορισμός 38. Ένα *μητροειδές* $M = (E, \mathcal{I})$ είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος το οποίο αποτελείται από το σύνολο E, ονομαζόμενο και ως *εδαφικό σύνολο* και από το σύνολο $\mathcal{I}$, το οποίο αποτελείται από υποσύνολα του E, τα οποία καλούμε *ανεξάρτητα*. Το $\mathcal{I} = \mathcal{I}(M)$ ικανοποιεί τις εξής 3 ιδιότητες:

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) $I \in \mathcal{I} \wedge I' \subseteq \mathcal{I} \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$

(I3) $(I_1 \wedge I_2 \in \mathcal{I}) \wedge (|I_1| < |I_2|) \Rightarrow (\exists e \in I_2 - I_1)(I_1 \cup e \in \mathcal{I})$

Ορισμός 39. Όλα τα υποσύνολα του E οποία δεν είναι ανεξάρτητα στο M θα τα λέμε *εξαρτημένα*. Ένα ελαχιστικό εξαρτημένο σύνολο στο M θα το ονομάζουμε *κύκλωμα* και θα συμβολίζουμε ως $C(M)$ το σύνολο όλων των κυκλωμάτων του M.

Πρόταση 3. *Το $C(M)$ ικανοποιεί τις εξής 3 ιδιότητες*

$(C1)$ $\emptyset \notin \mathcal{C}(M)$

$(C2)$ $(C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M)) \wedge (C_1 \subseteq C_2) \Rightarrow C_1 = C_2$

$(C3)$ $(C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M), C_1 \neq C_2) \wedge (e \in C_1 \cap C_2) \Rightarrow (\exists C_3 \in \mathcal{C}(M))(C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e)$

Απόδειξη. $(C1)$ Ένα σύνολο είναι ανεξάρτητο ανν δεν είναι εξαρτημένο. Συνεπώς,

$$\emptyset \in \mathcal{I} \Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{C}(M).$$

$(C2)$ Αν $C_1 \subsetneq C_2$ τότε το C_2 δεν είναι ελαχιστικό εξαρτημένο σύνολο, αφού το C_1 παίρνει τη θέση του.

$(C3)$ Προς άτοπο, έστω ότι δεν υπάρχει C_3 με την ζητούμενη ιδιότητα. Τότε

$$(C_1 \cup C_2) - e \in \mathcal{I}.$$

Έχουμε

$$C_1 \neq C_2 \Rightarrow C_1 \nsubseteq C_2 \Rightarrow C_1 - C_2 \neq \emptyset$$

από ιδιότητα (C2).
Τώρα C_1 είναι ελαχιστικό εξαρτημένο σύνολο άρα $C_1 - f \in \mathcal{I}(M)$. Επιλέγουμε ένα υποσύνολο I του $C_1 \cup C_2$ που είναι μεγιστικό με την ιδιότητα ότι $I \in \mathcal{I}$ και $I \supseteq C_1 - f$. Τότε πρέπει $f \notin \mathcal{I}$, γιατί αν δεν ίσχυε αυτό, τότε θα είχαμε $f \in \mathcal{I} \Rightarrow I \supseteq C_1 \Rightarrow I$ είναι εξαρτημένο. Άρα πρέπει $f \notin \mathcal{I}$.

Τώρα, $\exists g \in C_2 : g \notin I$, γιατί αλλιώς $I \supsetneq C_2$, άτοπο όπως πριν. Επίσης

$$f \in C_1 - C_2 \Rightarrow f \notin C_2.$$

Άρα $f \neq g$.
Έχουμε λοιπόν

$$|I| \leqslant |(C_1 - C_2) - \{f, g\}| = |(C_1 - C_2)| - 2 < |(C_1 - C_2)| - 1 = |(C_1 - C_2) - e|.$$

Άρα $|I| < |(C_1 - C_2) - e|$. Αλλά και $I, (C_1 \cup C_2) - e \in \mathcal{I}(M)$. Άρα, από το (I3) ,

$$(\exists w \in ((C_1 \cup C_2) - e - I))(I \cup w \in \mathcal{I}(M)).$$

Αλλά $I \cup w \supseteq C_1 - f$. Αυτό φέρνει σε αντίφαση την επιλογή που κάναμε για το I ως μεγιστικό σύνολο. Άρα άτοπο άρα

$$(\exists C_3 \in \mathcal{C}(M))(C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e)$$

Συνεπώς αποδείξαμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 4. *Έστω E σύνολο και $\mathcal{C} \subseteq 2^E$ τ.ω. να ικανοποιεί τις ιδιότητες $(C1)$–$(C3)$. Έστω ότι $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ δεν περιέχει στοιχεία του $\mathcal{C}$. Τότε το $(E, \mathcal{I})$ είναι μητροειδές με $\mathcal{C}$ το σύνολο των κυκλωμάτων του.*

Απόδειξη. Αρχικά, θ.δ.ο. το $\mathcal{I}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (I1)–(I3). Αυτό επαρκεί για να είναι μητροειδές το $(E, \mathcal{I})$.

(I1) Το κενό δεν ανήκει στο $\mathcal{C}$ από $(C1)$, άρα το κενό δεν περιέχει στοιχείο του $\mathcal{C}$, άρα $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I2) Έστω $I \in \mathcal{I}$, και έστω $I' \subseteq I$. Τότε από τον ορισμό, το I δεν περιέχει κανένα στοιχείο του $\mathcal{C}$, άρα και το I' δεν περιέχει κανένα στοιχείο του $\mathcal{C}$. Άρα $I' \in \mathcal{I}$.

(I3) Έστω $I_1,\ I_2 \in \mathcal{I},\ |I_1| < |I_2|$ και έστω προς άτοπο ότι

$$(\forall e \in I_2 - I_1)(I_1 \cup e \notin \mathcal{I}).$$

Φυσικά, υπάρχει $I_3 \in \mathcal{I},\ I_3 \subseteq I_1 \cup I_2$ τ.ω. $|I_3| > |I_1|$. Έστω I_3 τ.ω. $|I_1 - I_3|$ ελαχιστικό. Έστω ότι $|I_1 - I_3| = \emptyset$. Τότε $I_1 \subseteq I_3$ και επειδή $|I_3| > |I_1|$, έπεται ότι $I_1 \subsetneq I_3$ και άρα

$$\exists e \in I_3 - I_1.$$

Αλλά

$$I_3 - I_1 \subseteq I_2 \cup I_1 - I_1 = I_2 - I_1 \Rightarrow (\exists e \in I_2 - I_1)(I_1 \cup e \in \mathcal{I})$$

άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι το (I3) δεν δουλεύει για τα I_1, I_2. Συνεπώς $|I_1 - I_3| \neq \emptyset$ και έστω $e \in I_1 - I_3$.
Ορίζουμε για κάθε $f \in I_3 - I_1$,

$$T_f = (I_3 \cup e) - f.$$

Επίσης, $f \in I_3 - I_1 \Rightarrow f \notin I_1$. Τότε $T_f \subseteq I_1 \cup I_2$ και $|I_1 - T_f| < |I_1 - I_3|$. Το τελευταίο ισχύει γιατί

$$I_1 - T_f = I_1 - ((I_3 \cup e) - f) \overset{f \notin I_1}{=} I_1 - I_3 - e \subsetneq I_1 - I_3$$

Έστω λοιπόν $T_f \in \mathcal{I}$. Τότε $|I_1 - T_f| < |I_1 - I_3|$ και άρα I_3 όχι ελαχιστικό. Άρα $T_f \notin \mathcal{I}$. Συνεπώς υπάρχει $C_f \subseteq T_f$ με $C_f \in \mathcal{C}$. Τελικά $f \notin C_f$ γιατί

$$C_f \subseteq T_f \subseteq I_3 \cup e - f \Rightarrow f \notin C_f$$

και $e \in C_f$ γιατί αλλιώς $C_3 \subseteq I_3$, το οποίο δεν ισχύει.
Έστω τώρα κάποιο $g \in I_3 - I_1$. Τότε, έστω $C_g \cap (I_3 - I_1) = \emptyset$. Τότε

$$C_g \subseteq ((I_1 \cap I_3) \cup e) - g \subseteq I_1$$

άτοπο γιατί $I_1 \in \mathcal{I}$.
Άρα υπάρχει $h \in C_g \cap (I_3 - I_1)$. Άρα $h \in (I_3 - I_1)$ και συνεπώς από πιο πάνω πάλι, υπάρχει C_h τ.ω. $h \notin C_h$ και $e \in C_h$. Όμως $e \in C_g$ και άρα $e \in C_g \cap C_h$, άρα από $(C3)$ ιδιότητα, ισχύει ότι υπάρχει σύνολο $C \in \mathcal{C}$ τ.ω. $C \subseteq C_g \cup C_h - e$. Αλλά $C_g,\ C_h \subseteq I_3 \cup e$, άρα $C \subseteq I_3$, άρα άτοπο.
Συνεπώς η ιδιότητα (I3) δουλεύει για το $\mathcal{I}$.

Άρα $M = (E, \mathcal{I})$ μητροειδές. Μένει ν.δ.ο. $\mathcal{C} = \mathcal{C}(M)$.

Αρχικά από προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι το $\mathcal{C}(M)$ ικανοποιεί τις (C_1)–(C_3). Άρα $\mathcal{C}(M) \subseteq \mathcal{C}$. Συνεπώς μένει ν.δ.ο. δεν ισχύει $\mathcal{C}(M) \subsetneq \mathcal{C}$. Έστω προς άτοπο ότι ισχύει, δηλαδή έστω ότι υπάρχει $C \in \mathcal{C}$ τ.ω. $C \notin \mathcal{C}(M)$. Τότε C είναι είτε ανεξάρτητο είτε εξαρτημένο μη–ελαχιστικό. Αν το C είναι ανεξάρτητο, τότε αυτό παραβαίνει τον ορισμό του $\mathcal{I}(M)$, όπως ορίστηκε πιο πάνω. Άρα το C είναι εξαρτημένο μη–ελαχιστικό. Τότε όμως υπάρχει γνήσιο υποσύνολο X του C τ.ω. $C - X \in \mathcal{C}(M)$. Τότε όμως πρέπει $C - X \in \mathcal{C}$, και άρα το C παραβαίνει την ιδιότητα $(C2)$ του $\mathcal{C}$. Συνεπώς άτοπο.

Συνεπώς $\mathcal{C} = \mathcal{C}(M)$ και άρα $M = (E, \mathcal{I})$ είναι μητροειδές με $\mathcal{C}$ το σύνολο των κυκλωμάτων του. □

Πόρισμα 1. *Έστω E σύνολο και $\mathcal{C} \subseteq 2^E$. Τότε το $\mathcal{C}$ είναι το σύνολο κυκλωμάτων ενός μητροειδούς για το E ανν το $\mathcal{C}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες $(C1)$–$(C3)$.*

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ Το $\mathcal{C}$ είναι το σύνολο κυκλωμάτων ενός μητροειδούς στο E, άρα από Πρόταση 3 ικανοποιεί τις ιδιότητες $(C_1) - (C_3)$.
$(\Leftarrow)$ Το $\mathcal{C}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες $(C_1) - (C_3)$, άρα από Πρόταση 4 είναι το σύνολο κυκλωμάτων ενός μητροειδούς στο E. □

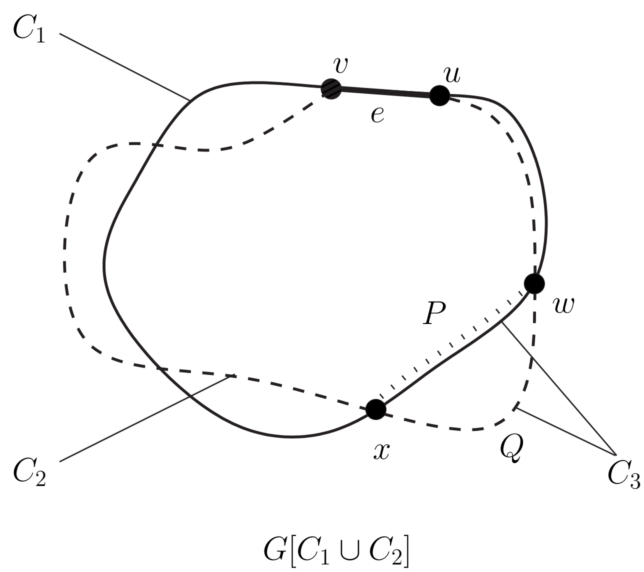
Πρόταση 5. *Έστω $M = (E, \mathcal{I})$ μητροειδές και έστω $I \in \mathcal{I}$ στο M. Έστω $e \in E(M)$ τ.ω. $I \cup e$ εξαρτημένο. Τότε το $I \cup e$ περιέχει ένα μοναδικό κύκλωμα $C \subseteq I \cup e$. Περαιτέρω, $e \in C$.*

Απόδειξη. Το $I \cup e$ είναι εξαρτημένο. Μπορούμε να αφαιρέσουμε από το $I \cup e$ όσα στοιχεία $y \in I \cup e$ χρειάζονται ώστε να γίνει ελαχιστικά εξαρτημένο. Τότε το σύνολο C που θα προκύψει, είναι κύκλωμα. Έστω λοιπόν προς άτοπο ότι $(\exists C' \in \mathcal{C}(M),\ C' \neq C)$. Τότε από ιδιότητα (C3) $\exists C'' \subseteq C \cup C' - e, C'' \in \mathcal{C}(M)$. Τότε όμως $C'' \subseteq C \cup C' - e \subseteq I \cup e - e = I$. Άρα $C'' \subseteq I \Rightarrow$ άτοπο. Συνεπώς υπάρχει μοναδικό κύκλωμα C τ.ω. $C \subseteq I \cup e$. Έστω τώρα ότι $e \notin C$. Τότε $C \subseteq I \Rightarrow$ άτοπο. Άρα $e \in C$. □

3.3.2 Κυκλικά–ομοιόμορφα μητροειδή

Πρόταση 6. *Έστω $G = (V, E)$ γράφημα και έστω $\mathcal{C}(G) \subseteq 2^E$ το σύνολο των κύκλων του. Τότε το $\mathcal{C}(G)$ είναι το σύνολο κυκλωμάτων ενός μητροειδούς. Το μητροειδές αυτό θα το συμβολίζουμε με $M(G)$ και θα το αποκαλούμε κυκλικό ή πολυγωνικό μητροειδές του G.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{C}(G)$ ικανοποιεί τις $(C1) - (C3)$:
$(C1)$: Ο μικρότερος δυνατός κύκλος που μπορεί να έχει ένα γράφημα είναι θηλιά, και αυτή έχει μία ακμή. Συνεπώς όλοι οι κύκλοι είναι μη–κενά σύνολα, άρα $\emptyset \notin \mathcal{C}(G)$.
$(C2)$: Έστω $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(G)$ και $C_1 \subseteq C_2$. Προς άτοπο έστω ότι $C_1 \subsetneq C_2$. Τότε έστω $e \in C_2 - C_1$. Τότε $C_2 - e$ δεν περιέχει κύκλους, συνεπώς άτοπο. Άρα $C_1 = C_2$.
$(C3)$: Έστω $C_1 \neq C_2 \in \mathcal{C}(G)$ και $e \in C_1 \cap C_2$. Έστω ότι $e = (u, v)$. Έστω P, Q μονοπάτια από το u στο v που καλύπτουν όλες τις ακμές του $C_1 - e$ και $C_2 - e$ αντίστοιχα. Ξεκινώντας από την u, διασχίζουμε το P μέχρι να βρούμε την πρώτη κορυφή w για την οποία η επόμενη κορυφή ανήκει στο P αλλά όχι στο Q. Αυτή η κορυφή υπάρχει, γιατί αλλιώς $C_1 = C_2$, και άρα άτοπο.



Σχήμα 3.15: Πρόταση 6.

Συνεχίζοντας από την w, διασχίζουμε το μονοπάτι του Q, μέχρι να φτάσουμε σε μία κορυφή x, στην οποία το Q συναντά ξανά το P. Αυτή η κορυφή υπάρχει γιατί και τα δύο μονοπάτια καταλήγουν στην v. Για να κατασκευάσουμε τον κύκλο C_3, αρκεί να ενώσουμε το μονοπάτι P από την w εώς την x με το μονοπάτι Q από την x ως την w. Άρα υπάρχει κύκλος C_3 που περιέχεται στο $(C_1 \cup C_2) - e$. Συνεπώς $\mathcal{C}(G)$ είναι το σύνολο κυκλωμάτων ενός μητροειδούς, του $M(G)$. $\square$

Πόρισμα 2. *Έστω G γράφημα και έστω $X \subseteq E$. Τότε,*

$$X \in \mathcal{I}(M(G)) \Leftrightarrow G[X] \text{ δάσος.}$$

Απόδειξη. Έστω $G[X]$ δάσος. Τότε καμία συνιστώσα του $G[X]$ δεν περιέχει κάποιον κύκλο. Άρα $X \in \mathcal{I}(M(G))$. Αντιστρόφως, έστω $X \in \mathcal{I}(M(G))$. Αν $G[X]$ όχι δάσος, τότε περιέχει κάποιο κύκλο/ους σε κάποια συνιστώσα του. Τότε X εξαρτημένο, άρα άτοπο. □

Τώρα, γνωρίζουμε ότι ένα παραγόμενο δάσος σε ένα γράφημα G είναι ένα δάσος με μεγιστικό αριθμό ακμών. Αυτό, σε συνδυασμό με το προηγούμενο Πόρισμα μας δίνει το εξής Πόρισμα:

Πόρισμα 3. *Έστω G γράφημα και έστω $X \subseteq E$. Τότε,*

$$X \in \mathcal{B}(M(G)) \Leftrightarrow G[X] \text{ παραγόμενο δάσος του } G.$$

Πρόταση 7. *Έστω ακέραιοι $m, n \geqslant 0$, $m \leqslant n$ και έστω σύνολο E με n στοιχεία. Τότε το σύνολο $U_{m,n} = (E, \mathcal{I}_{m,n})$, με $\mathcal{I}_{m,n} = \{I \subseteq E \mid |I| \leqslant m\}$ είναι ένα μητροειδές με $\mathcal{I}_{m,n}$ να είναι το σύνολο των ανεξάρτητων συνόλων του. Το $U_{m,n}$ θα το ονομάζουμε ομοιόμορφο μητροειδές, τάξεως m με n στοιχεία.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{I}_{m,n}$ ικανοποιεί τις 3 ιδιότητες (I1–I3). Έχουμε ότι η (I1) ισχύει προφανώς. Για την (I2), αν $I' \subseteq I$ τότε $|I'| \leqslant |I| \leqslant m$ και συνεπώς $|I'| \leqslant m$, άρα $I' \in \mathcal{I}_{m,n}$. Για την (I3), έστω προς άτοπο ότι

$$(\exists I_1,\ I_2 \in \mathcal{I}_{m,n}, |I_1| < |I_2|)(\forall e \in I_2 - I_1)(I_1 \cup e \notin \mathcal{I}_{m,n})$$

Τότε

$$|I_1 \cup e| \leqslant |I_2| \leqslant m$$

και άρα

$$I_1 \cup e \in \mathcal{I}_{m,n}$$

άτοπο. Άρα $U_{m,n}$ είναι μητροειδές. □

Πόρισμα 4. $\mathcal{C}_{m,n} = \mathcal{C}(U_{m,n}) = \{C \subseteq E \mid |C| = m+1\}$

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει κύκλωμα C τ.ω. $|C| \geqslant m+2$ ή $|C| \leqslant m$. Αν ισχύει το δεύτερο, τότε C είναι ανεξάρτητο, οπότε αναγκαστικά πρέπει $|C| \geqslant m+2$. Τότε όμως, για $e \in C$ έχουμε ότι $C - e$ ανεξάρτητο και $|C - e| \geqslant m+1$, άρα άτοπο. Άρα

$$\mathcal{C}_{m,n} = \{C \subseteq E \mid |C| = m+1\}.$$

□

3.3.3 Ισομορφισμοί μητροειδών

Ορισμός 40. Έστω $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ και $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ μητροειδή. Ορίζουμε τα M_1 και M_2 να είναι ισόμορφα και συμβολίζουμε με $M_1 \cong M_2$, αν υπάρχει συνάρτηση $\theta : E_1 \to E_2$ 1–1 και επί, τέτοια ώστε

$$(\forall X \subseteq E_1)(X \text{ ανεξάρτητο στο } M_1 \Leftrightarrow \theta(X) \text{ ανεξάρτητο στο } M_2).$$

Εναλλακτικά, όταν γνωρίζουμε την αντιστοιχία του ισομορφισμού, έστω αυτή θ, θα συμβολίζουμε $M_1 \cong_\theta M_2$.

Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι ο ισομορφισμός θ διατηρεί και τα κυκλώματα:

Πρόταση 8. *Έστω $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ και $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$. Τότε*

$$M_1 \cong M_2 \text{μέσω της } \theta : E_1 \to E_2 \Leftrightarrow (\forall X \subseteq E_1)(X \text{ κύκλωμα στο } M_1 \Leftrightarrow \theta(X) \text{ κύκλωμα στο } M_2).$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Για την θ ισχύει:

$$(\forall X \subseteq E_1)(X \text{ ανεξάρτητο στο } M_1 \Leftrightarrow \theta(X) \text{ ανεξάρτητο στο } M_2).$$

i) Έστω Q κύκλωμα του M_1. Τότε αν $\theta(X)$ όχι κύκλωμα, τότε $\theta(X)$ μπορεί να είναι ανεξάρτητο ή εξαρτημένο. Ανεξάρτητο δεν μπορεί να είναι εξ' ορισμού, άρα είναι εξαρτημένο, μή – κύκλωμα. Αλλά τότε αφού $\theta(X)$ εξαρτημένο $\Rightarrow \theta(X) - f$ εξαρτημένο, αλλά $\theta^{-1}(\theta(X) - f) = X - \theta^{-1}(f)$ είναι ανεξάρτητο. Τότε άτοπο γιατί πρέπει $\theta(X) - f$ ανεξάρτητο. Άρα $\theta(X)$ κύκλωμα του M_2.

ii) Έστω $\theta(X)$ κύκλωμα του M_2. Τότε έστω ότι X όχι κύκλωμα του M_1. Τότε X είναι ανεξάρτητο, ή εξαρτημένο μή κύκλωμα. Αν είναι ανεξάρτητο, τότε άτοπο εξ' ορισμού, αλλιώς, αν είναι εξαρτημένο και μή κύκλωμα, τότε αν $y \in X$ τότε $X - y$ εξαρτημένο και άρα το $\theta(X - y) = \theta(X) - \theta(y)$ περιέχει κάποιο κύκλωμα. Άρα το $\theta(X)$ όχι κύκλωμα, άρα άτοπο. Συνεπώς X κύκλωμα του M_1.

($\Leftarrow$) Ισχύει ότι $(\forall X \subseteq E_1)(X$ κύκλωμα στο $M_1 \Leftrightarrow \theta(X)$ κύκλωμα στο $M_2)$.

i) Έστω ότι X ανεξάρτητο στο M_1. Τότε αν $\theta(X)$ όχι ανεξάρτητο, τότε $\exists \theta(C) \subseteq \theta(X)$, με $\theta(C)$ κύκλωμα του M_2. Τότε όμως ο θ δίνει ότι $C \subseteq X$ είναι κύκλωμα του M_1, άρα από ιδιότητα (I2) του $\mathcal{I}$, άτοπο.

ii) Έστω ότι $\theta(X)$ ανεξάρτητο στο M_2. Τότε αν X όχι ανεξάρτητο, τότε $\exists C \subseteq X$, με C κύκλωμα του M_1. Τότε όμως ο θ δίνει ότι $\theta(C) \subseteq \theta(X)$ είναι κύκλωμα του M_2, άρα από ιδιότητα (I2) του $\mathcal{I}$, άτοπο. □

Πρόταση 9. *(Ανακλαστικότητα) Έστω μητροειδές M και έστω $I : E(M) \to E(M)$ ταυτοτική συνάρτηση από το $E(M)$ στο $E(M)$. Τότε $M \cong_I M$.*

Απόδειξη. Έχουμε κατευθείαν από τον ορισμό της ταυτοτικής συνάρτησης ότι
$(\forall X \subseteq E)((X$ κύκλωμα στο $M) \Leftrightarrow (I(X)$ κύκλωμα στο M)). Άρα $\cong$ ανακλαστική. □

Πρόταση 10. *(Συμμετρικότητα) Έστω μητροειδή M_1, M_2 και έστω αντιστοιχία $\psi : E(M_1) \to E(M_2)$ τ.ω. $M_1 \cong_\psi M_2$. Τότε $M_2 \cong_{\psi^{-1}} M_1$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι $M_1 \cong_\psi M_2 \Leftrightarrow (\forall X \subseteq E_1)((X$ κύκλωμα στο $M_1) \Leftrightarrow \psi(X)$ κύκλωμα στο $M_2))$ $(*)$. Τώρα επειδή είναι αντιστοιχία, η ψ έχει μοναδική αντίστροφη, την ψ^{-1}. Έστω $Y \subseteq E_2$. Τότε $Y = \psi(X), X \in E_1 \Rightarrow \psi^{-1}(Y) = X$. Τότε όμως, από $(*)$, έχουμε $Y(= \psi(X))$ κύκλωμα του $M_2 \Leftrightarrow \psi^{-1}(Y)(= X)$ κύκλωμα του M_1. Άρα $M_2 \cong_{\psi^{-1}} M_1$, και συνέπως ισχύει η συμμετρικότητα. □

Πρόταση 11. *(Μεταβατικότητα) Έστω μητροειδή M_1, M_2, M_3 και έστω αντιστοιχίες $\psi_1 : E(M_1) \to E(M_2)$, $\psi_2 : E(M_2) \to E(M_3)$. Τότε αν $M_1 \cong_{\psi_1} M_2$ και $M_2 \cong_{\psi_2} M_3$, τότε $M_1 \cong_{\psi_2 \circ \psi_1} M_3$.*

Απόδειξη. Έχουμε:

$$M_1 \cong_{\psi_1} M_2 \Leftrightarrow (\forall X \subseteq E_1)(X \text{ κύκλωμα του } M_1 \Leftrightarrow \psi_1(X) \text{ κύκλωμα του } M_2)$$

$$M_2 \cong_{\psi_2} M_3 \Leftrightarrow (\forall Y \subseteq E_2)(Y \text{ κύκλωμα του } M_2 \Leftrightarrow \psi_2(Y) \text{ κύκλωμα του } M_3)$$

Έχουμε ότι η $\psi_3 \circ \psi_2 : E_1 \to E_3$ είναι 1–1 και επί. Επίσης:

$$X \text{ κύκλωμα του } M_1 \Leftrightarrow \psi_1(X) \text{ κύκλωμα του } M_2 \Leftrightarrow \psi_2(\psi_1(X)) \text{ κύκλωμα του } M_3$$

Άρα

$$X \text{ κύκλωμα του } M_1 \Leftrightarrow \psi_2(\psi_1(X)) \text{ κύκλωμα του } M_3.$$

Συμπεραίνουμε ότι $M_1 \cong_{\psi_2 \circ \psi_1} M_3$. □

Πόρισμα 5. *Η σχέση $\cong$ ισομορφισμού μητροειδών είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει απευθείας από Προτάσεις 9, 10 και 11. □

Ορισμός 41. Ένα μητροειδές M θα ονομάζεται *γραφικό* αν είναι ισόμορφο με κάποιο κυκλικό μητροειδές.

3.3.4 Βάσεις μητροειδών

Ορισμός 42. Μία *βάση* ενός μητροειδούς M ορίζεται να είναι ένα μεγιστικό ανεξάρτητο σύνολο. Σαν $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των βάσεων του M.

Πόρισμα 6. $\mathcal{B}_{m,n} = \mathcal{B}(U_{m,n}) = \{B \subseteq E \mid |B| = m\}$

Απόδειξη. Προκύπτει από το γεγονός ότι μία βάση είναι ένα μεγιστικό ανεξάρτητο σύνολο, και στα ομοιόμορφα μητροειδή τα μέγιστα ανεξάρτητα σύνολα είναι όλα τα υποσύνολα του E μεγέθους m. □

Πόρισμα 7. *Έστω B βάση ενός μητροειδούς M και έστω $e \in E(M) - B$. Τότε,*

$$(\exists_1 C \in \mathcal{C}(M))(C \subseteq B \cup e)$$

όπου $\exists_1 C$ σημαίνει ότι υπάρχει μοναδικό C. Περαιτέρω, $e \in C$.

Απόδειξη. Το B είναι βάση άρα $B \cup e$ είναι εξαρτημένο (Αφού B μεγιστικό ανεξάρτητο σύνολο). Άρα από Πρόταση 5, το $B \cup e$ περιέχει ένα μοναδικό κύκλωμα C. Περαιτέρω, $e \in C$. □

Θεώρημα 2. *Έστω E σύνολο και $\mathcal{B}$ η συλλογή όλων των υποσυνόλων του E που ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες :*

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(B2) $(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B})(x \in B_1 - B_2 \Rightarrow (\exists y \in B_2 - B_1)((B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}))$

Έστω ότι $\mathcal{I}$ είναι το σύνολο των συνόλων που είναι υποσύνολα κάποιων στοιχείων του $\mathcal{B}$. Τότε το $(E, \mathcal{I})$ ορίζει ένα μητροειδές, με το $\mathcal{B}$ σαν το σύνολο των βάσεών του.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathcal{I} = \{X \mid X \subseteq B, B \in \mathcal{B}\}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (I1), (I2), και (I3):

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$. Έχουμε από (B1) ότι $\mathcal{B} \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{I}$.

(I2) $I \in \mathcal{I} \wedge I' \subseteq \mathcal{I} \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$. Αφού $I \in \mathcal{I} \Rightarrow I \subseteq B$ για κάποιο $B \in \mathcal{B}$. Τότε όμως $I' \subseteq I \Rightarrow I' \subseteq B$. Άρα $I' \in \mathcal{I}$.

(I3) $(I_1 \wedge I_2 \in \mathcal{I}) \wedge (|I_1| < |I_2|) \Rightarrow (\exists e \in I_2 - I_1)(I_1 \cup e \in \mathcal{I})$: Για να το δείξουμε αυτό χρειαζόμαστε πρώτα να αποδείξουμε το εξής Λήμμα:

Λήμμα 4. *Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ τότε $|B_1| = |B_2|$.*

Απόδειξη. Δουλεύουμε με απαγωγή σε άτοπο:
Έστω $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, τ.ω. $|B_1| > |B_2|$(χωρίς περιορισμό γενικότητας), και τέτοια ώστε $|B_1 - B_2| =$ ελαχιστικό. Έστω ότι $B_1 - B_2 = \emptyset$. Τότε θα έπρεπε $B_2 \supseteq B_1$ άρα και $|B_2| \geqslant |B_1|$, άτοπο λόγω της αρχικής υποθέσεως. Άρα τότε από (B2),

$$(\exists y \in B_2 - B_1)((B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B})$$

Τότε

$$|(B_1 - x) \cup y| = |B_1| > |B_2|$$

αλλά τότε βλέπουμε ότι

$$|B_1 - B_2| > |(B_1 - x) \cup y - B_2|$$

αντίφαση ως προς την επιλογή των B_1 και B_2 ως ελαχιστικά. $\square$

Επιστρέφοντας στην απόδειξη του Θεωρήματος 1, για να αποδείξουμε το (I3), δουλεύουμε με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι το (I3) δεν ισχύει για το $\mathcal{I}$. Τότε η άρνηση του (I3) δίνει:

$$(\exists I_1, I_2 \in \mathcal{I}, |I_1| < |I_2|)(\forall e \in I_2 - I_1)(I_1 \cup e \notin \mathcal{I}).$$

Εξ' ορισμού, έχουμε

$$(\exists B_1, B_2 \in \mathcal{B})(I_i \subseteq B_i),\ i = 1, 2.$$

Επιλέγουμε ένα τέτοιο ζεύγος ώστε η ποσότητα $|B_2 - (I_2 \cup B_1)|$ να είναι ελάχιστη.
Τώρα, έχουμε ότι

$$I_2 - B_1 \subseteq I_2 - I_1 (1).$$

Αλλά από επιλογή I_1 και I_2 έχουμε

$$(\forall e \in I_2 - I_1)(I_1 \cup e \notin \mathcal{I})$$

άρα για το B_1 έχουμε

$$(\forall e \in I_2 - I_1)(e \notin B_1 \Rightarrow (\forall e \in I_2 - I_1)(e \in I_2 - B_1) \Rightarrow I_2 - B_1 \supseteq I_2 - I_1 (2).$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $I_2 - B_1 = I_2 - I_1$.
Θα δείξουμε ότι :

A) $B_2 - (I_2 \cup B_1) = \emptyset$.

B) $B_1 - (I_1 \cup B_2) = \emptyset$.

A) $B_2 - (I_2 \cup B_1) = \emptyset$. Προς άτοπο, έστω ότι $B_2 - (I_2 \cup B_1) \neq \emptyset$. Τότε

$$\exists x \in B_2 - (I_2 \cup B_1).$$

Αλλά $B_2 - I_2 \cup B_1 \subseteq B_2 - B_1$. Άρα $x \in B_2 - B_1$. Από ιδιότητα (B2):

$$(\exists y \in B_1 - B_2)((B_2 - x) \cup y \in \mathcal{B}).$$

Ορίζουμε $B_2^{'} = (B_2 - x) \cup y$. Έχουμε ότι $x \in B_2 - (I_2 \cup B_1)$ και ότι $y \in B_1 - B_2$, άρα $y \in B_1 \cup I_2$. Άρα το $B_2^{'} - (I_2 \cup B_1)$ έχει ένα στοιχείο λιγότερο από το $B_2 - (I_2 \cup B_1)$. Άρα

$$|B_2^{'} - (I_2 \cup B_1)| < |B_2 - (I_2 \cup B_1)|.$$

Τώρα,

$$B_2 - x \supseteq I_2 \Rightarrow (B_2 - x) \cup y \supseteq I_2$$

άρα έχουμε αντίφαση στην επιλογή του B_2 ως ελαχιστικό. Άρα

$$B_2 - (I_2 \cup B_1) = \emptyset.$$

Τώρα, $B_2 - (I_2 \cup B_1) = \emptyset \Rightarrow B_2 \subseteq I_2 \cup B_1$. Έχουμε

$$x \in B_2 - B_1 \Rightarrow x \in I_2 \cup B_1 - B_1 \Rightarrow x \in I_2 - B_1.$$

Άρα $B_2 - B_1 \subseteq I_2 - B_1$. Αλλά $B_2 \supseteq I_2 \Rightarrow B_2 - B_1 \supseteq I_2 - B_1$. Συνεπώς

$$B_2 - B_1 = I_2 - B_1 = I_2 - I_1.$$

B) $B_1 - (I_1 \cup B_2) = \emptyset$. Προς άτοπο πάλι, έστω ότι $\exists x \in B_1 - (I_1 \cup B_2)$. Τότε

$$x \in B_1 - (I_1 \cup B_2) \subseteq B_1 - B_2.$$

Άρα από (B2),

$$x \in B_1 - B_2 \Rightarrow \exists y \in B_2 - B_1 : (B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}.$$

Τώρα, $x \in B_1 - (I_1 \cup B_2) \Rightarrow x \notin I_1$. Άρα $I_1 \subseteq B_1 - x \Rightarrow I_1 \cup y \subseteq (B_1 - x) \cup y \Rightarrow I_1 \cup y \in \mathcal{I}$. Τελικά $y \in B_2 - B_1 = I_2 - I_1$ από A), αντίφαση στην αρχική υπόθεση.

Συνεπώς, $B_1 - (I_1 \cup B_2) = \emptyset$. Με παρόμοιο τρόπο όπως και πιο πάνω, προκύπτει ότι $B_1 - B_2 = I_1 - B_2 \subseteq I_1 - I_2$. Άρα $B_1 - B_2 \subseteq I_1 - I_2$. Από το προηγούμενο Λήμμα,

$$|B_1| = |B_2|$$

όμως τότε

$$|B_1| = |B_1 - B_2| + |B_1 \cap B_2|$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} |B_2| &= |B_2 - B_1| + |B_1 \cap B_2| \\ &\Rightarrow |B_1 - B_2| + |B_1 \cap B_2| = |B_2 - B_1| + |B_1 \cap B_2| \\ &\Rightarrow |B_1 - B_2| = |B_2 - B_1|. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν

$$|I_1 - I_2| \geqslant |B_1 - B_2| = |B_2 - B_1| = |I_2 - I_1|.$$

Άρα

$$|I_1 - I_2| \geqslant |I_2 - I_1|.$$

Τώρα έχουμε

$$|I_1| = |I_1 - I_2| + |I_1 \cap I_2| \geqslant |I_2 - I_1| + |I_1 \cap I_2| = |I_2|.$$

Άρα

$$|I_1| \geqslant |I_2|$$

το οποίο αντιβαίνει την αρχική υπόθεση.

Άρα τελικά ισχύει η ιδιότητα (I3) για το σύνολο $\mathcal{I}$, άρα το $(E, \mathcal{I})$ ορίζει ένα μητροειδές. $\square$

Λήμμα 5. *Το σύνολο των βάσεων B ενός μητροειδούς M ικανοποιεί την εξής ιδιότητα:*
*(B2)** $(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B})(x \in B_2 - B_1 \Rightarrow (\exists y \in B_1 - B_2)((B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}))$

Απόδειξη. Από Πόρισμα 7, το $B_1 \cup x$ περιέχει μοναδικό κύκλωμα C. Περαιτέρω, $x \in C$. Επειδή τώρα B_2 **ανεξάρτητο** και C **εξαρτημένο** έπεται ότι $C - B_2 \neq \emptyset$, γιατί αλλιώς αν $C - B_2 = \emptyset$, άτοπο γιατί B_2 βάση, άρα δεν περιέχει κανένα κύκλωμα. Έστω τώρα $y \in C - B_2$. Έχουμε $x \in B_2 - B_1 \Rightarrow x \in B_2$. Τώρα έχουμε

$$C - B_2 \subseteq B_1 \cup x - B_2 \overset{x \in B_2}{\subseteq} B_1 - B_2$$

Άρα $y \in C - B_2 \Rightarrow y \in B_1 - B_2$. Αφού τώρα $C \subseteq B_1 \cup x$ και $y \in C$, έπεται και ότι $(B_1 - y) \cup x \not\supseteq C$. Λόγω μοναδικότητας του C, έπεται επίσης ότι $(B_1 - y) \cup x$ είναι ανεξάρτητο. Περαιτέρω $|(B_1 - y) \cup x| = |B_1|$. Άρα τελικά $(B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}(M)$ και ισχύει η ιδιότητα. $\square$

3.3.5 Περιορισμοί μητροειδών

Πρόταση 12. *Έστω M μητροειδές και έστω $X \subseteq E$. Έστω $\mathcal{I}|X = \{I \subseteq X \mid I \in \mathcal{I}\}$. Τότε το ζεύγος $(X, \mathcal{I}|X)$ ορίζει ένα μητροειδές. Το μητροειδές αυτό καλείται και « Περιορισμός του M στο X » ή « Διαγραφή του $E - X$ από το M » και θα το συμβολίζουμε με $M|X$ ή $M \backslash E - X$ αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το $(X, \mathcal{I}|X)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (I1)-(I3):

(I1) Προφανώς $\emptyset \in \mathcal{I}|X$

(I2) Έστω $I' \subseteq I \in \mathcal{I}|X$. Τότε $I' \subseteq I \subseteq X \Rightarrow I' \subseteq X \wedge I' \in \mathcal{I} \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$.

(I3) $(I_1 \wedge I_2 \in \mathcal{I}|X) \wedge (|I_1| < |I_2|) \Rightarrow (\exists e \in I_2 - I_1)(I_1 \cup e \in \mathcal{I}|X)$. Τότε

$$I_1, I_2 \in \mathcal{I}|X \Rightarrow \exists (e \in I_2 - I_1)(I_1 \cup e \in \mathcal{I}).$$

Αρκεί λοιπόν $I_1 \cup e \subseteq X$. Έχουμε ότι $e \in X$, άρα $I_1 \cup e \subseteq X$, άρα $I_1 \cup e \in \mathcal{I}|X$.

Συνεπώς το $(X, \mathcal{I}|X)$ ορίζει μητροειδές. $\square$

Πόρισμα 8. *Έστω $M_1 \cong_\theta M_2$ και έστω $X \subseteq E(M_1)$. Τότε $M_1|X \cong_{\theta|X} M_2|\theta(X)$.*

Απόδειξη. Έστω $Y \subseteq X$ ανεξάρτητο στο $M_1|X$. Αυτό είναι τότε ισοδύναμα ανεξάρτητο στο M_1, και άρα ισοδύναμα $\theta(Y) \subseteq \theta(X)$ ανεξάρτητο στο M_2, και αφού $Y \subseteq X$ έπεται ότι $\theta(Y) = \theta(Y)|X$ και άρα $\theta(Y)|X$ είναι ισοδύναμα ανεξάρτητο στο $M_2|\theta(X)$. Συνεπώς για κάθε υποσύνολο X του E: $M_1|X \cong_{\theta|X} M_2|\theta(X)$. $\square$

3.3.6 Συναρτήσεις τάξης–κλειστότητας

Ορισμός 43. Έστω $M = (E, \mathcal{I})$ μητροειδές και έστω $X \subseteq E$. Ορίζουμε σαν $r(X)$ να είναι το μέγεθος μίας οποιασδήποτε βάσης στο $M|X$. Η ποσότητα $r(X)$ είναι μία συνάρτηση $r = r_M : 2^E \to \mathbb{N} - \{0\}$.

Λόγω του Λήμματος 4, όλες οι βάσεις σε ένα μητροειδές έχουν το ίδιο μέγεθος. Συνεπώς ο ορισμός της r_M όπως δώθηκε έχει νόημα.

Πρόταση 13. *Η r_M ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

(R1) $X \subseteq E \Rightarrow 0 \leqslant r(X) \leqslant |X|$

(R2) $X \subseteq Y \subseteq E \Rightarrow r(X) \leqslant r(Y)$

(R3) $(\forall X, Y \subseteq E)(r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leqslant r(X) + r(Y))$

Απόδειξη. (R1) Προφανώς, μία βάση του $M|X$ έχει μέγεθος το πολύ όσο και το μέγεθος του X.

(R2) $X \subseteq Y \subseteq E$. Έστω B_X βάση του $M|X$. Έχουμε $r(X) = |B_X|$. Προφανώς B_X είναι ανεξάρτητο σύνολο στο $M|Y$. Αν B_X είναι μεγιστικό, τότε είναι βάση στο $M|Y$, και άρα $r(X) = r(Y)$. Αν B_X όχι μεγιστικό, τότε $\exists B_Y \supsetneq B_X$ τ.ω. $r(Y) = |B_Y| > |B_X| = r(X)$ και άρα $r(Y) > r(X)$. Άρα

$$r(X) \leqslant r(Y).$$

(R3) Έστω $B_{X\cap Y}$ βάση του $M|X\cap Y$. Τότε $B_{X\cap Y}$ είναι ανεξάρτητο σύνολο στο $M|X\cup Y$. Τότε όμως $B_{X\cap Y} \subseteq B_{X\cup Y} = B$, όπου $B_{X\cup Y}$ είναι βάση του $M|X \cup Y$. Τώρα $B \cap X$ και $B \cap Y$ είναι ανεξάρτητα σύνολα στα $M|X$ και $M|Y$. Άρα

$$r(X) \geqslant |B \cap X|, r(Y) \geqslant |B \cap Y|.$$

Έχουμε λοιπόν

$$r(X) + r(Y) \geqslant |B \cap X| + |B \cap Y| = |B \cap (X \cup Y)| + |B \cap (X \cap Y)|.$$

Όμως

$$B \cap (X \cup Y) = B_{X\cup Y}$$

και

$$B \cap (X \cap Y) = B_{X\cap Y}$$

άρα

$$r(X) + r(Y) \geqslant |B_{X\cup Y}| + |B_{X\cap Y}| = r(X \cup Y) + r(X \cap Y)$$

άρα

$$r(X) + r(Y) \geqslant r(X \cup Y) + r(X \cap Y).$$

Συνεπώς αποδείξαμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 9. *Έστω $M(G)$ κυκλικό μητροειδές του G στο E, $\omega : \mathbb{G} \to \mathbb{Z}^+$ συνάρτηση του αριθμού των συνεκτικών συνιστωσών των γραφημάτων, όπου $\mathbb{G}$ είναι το σύνολο των συνόλων των γραφημάτων και έστω X υποσύνολο του E. Τότε*

$$r(X) = |V(G[X])| - \omega(G[X])$$

Απόδειξη. Ο αριθμός των ακμών ενός παραγόμενου δάσους είναι $|V(G)| - \omega(G)$, άρα από Πόρισμα 3 το μέγεθος μίας βάσης του $M(G)$ είναι $|V(G)| - \omega(G)$, άρα

$$r(M(G)) = |V(G)| - \omega(G).$$

Έστω τώρα $X \subseteq E$. Τότε λογικά προκύπτει πως το μέγεθος μίας βάσης στο $M(G)|X = M(G[X])$ είναι $|V(G[X])| - \omega(G[X])$, συνεπώς

$$r(X) = |V(G[X])| - \omega(G[X]).$$

Άρα τελείωσε η απόδειξη. □

Πρόταση 14. *Έστω M μητροειδές και έστω $X \subseteq E$. Τότε*

i) $r(X) = |X| \Leftrightarrow X$ *ανεξάρτητο.*

ii) $r(X) = |X| - 1 \Leftrightarrow X$ *κύκλωμα.*

Απόδειξη. Από ορισμό της συνάρτησης τάξης, $r_M(Y) =$ «Μέγεθος κάποιας βάσης στο $M|Y$».

i) ($\Leftarrow$) Έστω X ανεξάρτητο. Τότε X είναι βάση στο $M|X$, και μάλιστα μοναδική. Συνεπώς

$$r_M(X) = |X|.$$

($\Rightarrow$) Έστω ότι $r(X) = |X|$. Τότε το μέγεθος κάποιας βάσης στο $M|X$ είναι όσο και το μέγεθος του X. Αλλά επειδή το X είναι το μοναδικό σύνολο στο M που έχει μέγεθος $|X|$, έπεται και από τον ορισμό της συνάρτησης τάξης ότι X είναι βάση στο $M|X \Rightarrow X$ είναι ανεξάρτητο στο M.

ii) ($\Leftarrow$)Έστω X κύκλωμα. Προς άτοπο, έστω ότι $r(X) \neq |X| - 1$. Τότε

α) $r(X) \geqslant |X|$ ή

β) $r(X) \leqslant |X| - 2$

α) $r(X) \geqslant |X|$. Από (R2), έπεται και ότι $r(X) = |X|$. Άρα από i), X ανεξάρτητο, άρα άτοπο.

β) $r(X) \leqslant |X|-2$, τότε έστω ότι $r(X) = y \leqslant |X|-2$. Επειδή $r(X) \leqslant |X|-2$, αυτό σημαίνει ότι X δεν είναι βάση του $M|X$. Άρα $\exists Y \subsetneq X$ τ.ω. Y- βάση και $r(Y) \leqslant r(X) = y$. Τότε όμως $r(Y) = |Y|$, από i) και

$$\begin{aligned} |Y| \leqslant r(X) = y = |X|-2 \;&\Rightarrow\; |X| \geqslant |Y|+2 \\ &\Rightarrow\; (\exists x_1, ..., x_\lambda, \lambda \geqslant 2)(x_1, ..., x_\lambda \in (X-Y) \end{aligned}$$

Αλλά τότε $X^{'} = Y \cup x_i, i = 1, ..., \lambda$ είναι κύκλωμα και $X^{'} \subsetneq X$, αφού $|X^{'}| \leqslant |X|-1$. Άρα X δεν είναι ελαχιστικό εξαρτημένο σύνολο, όπως απαιτεί ο ορισμός του κυκλώματος Μητροειδούς. Συνεπώς άτοπο. Συνεπώς $r(X) = |X|-1$.

($\Rightarrow$) Έστω ότι $r(X) = |X|-1$ και έστω προς άτοπο πως X όχι κύκλωμα. Τότε X είναι είτε ανεξάρτητο είτε εξαρτημένο και όχι κύκλωμα στο M. Αν X ανεξάρτητο, τότε $r(X) = |X|$, από i), άτοπο. Άρα X εξαρτημένο και όχι κύκλωμα. Τώρα, έχουμε πως το $r_M(X)$ είναι το μέγεθος κάποιας βάσης στο $M|X$, και αφού $r_M(X) < |X|$, έπεται ότι X όχι βάση στο $M|X$. Άρα $r_M(X) = |X^{'}|$, για κάποιο γνήσιο υποσύνολο του X, $X^{'}$. Όμως τώρα $|X^{'}| = |X|-1$, και άρα το $X^{'}$ έχει ακριβώς ένα στοιχείο λιγότερο από το X, έστω e αυτό. Έπεται ότι $X^{'} \cup e = X$
Αφού λοιπόν $X^{'}$ είναι μεγιστικό ανεξάρτητο σύνολο του $M|X$, έπεται και ότι X είναι κύκλωμα του $M|X$, άρα και X είναι κύκλωμα του M. Άτοπο. Συνεπώς, το X είναι κύκλωμα.

□

Πρόταση 15. *Έστω $T \subseteq E$. Τότε, για όλα τα υποσύνολα X του $E-T$, $r_{M\backslash T}(X) = r_M(X)$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\mathcal{I}\backslash T = \{I \subseteq E-T \mid I \in \mathcal{I}\}.$$

Έστω $X \subseteq E-T$. Τότε ισχύει ότι

$$X \in \mathcal{I}\backslash T \Leftrightarrow X \in \mathcal{I}.$$

Τότε αν $X \in \mathcal{I}\backslash T$ τότε

$$r_{M\backslash T}(X) = |X| = r_M(X)$$

από Πρόταση 14.
Αν τώρα $X \notin \mathcal{I}\backslash T$, τότε $\exists X^{'} \subsetneq X, X^{'} \in \mathcal{I}\backslash T : r_{M\backslash T}(X^{'}) = |X^{'}| = r_M(X^{'})$.
Άρα

$$r_{M\backslash T}(X) = r_M(X)$$

συνεπώς ισχύει το ζητούμενο □

Πρόταση 16. *Έστω μητροειδή $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$, $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$. Τότε αν $r_{M_1} = r_{M_2}$ τότε $M_1 = M_2$.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι $r_{M_1} = r_{M_2}$ και $M_1 \neq M_2$. Τότε πρέπει $\mathcal{I}_1 \neq \mathcal{I}_2$. Έστω χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $\exists I \in \mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1$. Τότε $r_{M_2}(I) = |I|$ και $r_{M_1}(I) < |I|$, από Πρόταση 14. Άρα $r_{M_1}(I) \neq r_{M_2}(I)$ και άρα $r_{M_1} \neq r_{M_2}$. Άτοπο ως προς την αρχική υπόθεση. Άρα $M_1 = M_2$ □

Ορισμός 44. (Συνάρτηση κλειστότητας μητροειδούς). Σαν *συνάρτηση κλειστότητας* ενός μητροειδούς M ορίζουμε, και συμβολίζουμε με $cl = cl_M : 2^E \to 2^E$, την συνάρτηση με τύπο $cl_M(X) = \{x \in E : r(X \cup x) = r(X)\}$.

3.3.7 Παραγόμενα σύνολα–υπερεπίπεδα

Ορισμός 45. Έστω X κάποιο υποσύνολο του E. Τότε, αν $cl(X) = E(M)$ καλούμε το X *παραγόμενο σύνολο* και αν $X = cl(X) \wedge r(X) = r(E) - 1$ τότε καλούμε το X *υπερεπίπεδο.*

Πρόταση 17. *X παραγόμενο $\Leftrightarrow r(X) = r(E(M))$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Το X είναι παραγόμενο, άρα $cl(X) = E(M)$. Έστω ότι $y_1, ..., y_l$ είναι μία απαρίθμηση των στοιχείων του $E - X$. Τότε θ.δ.ο

$$(\forall k \leqslant l)(r(X \cup \bigcup_{i=1}^{k} y_i) \leqslant r(X))$$

γιατί τότε αν $k = l$, τότε

$$r(X \cup \bigcup_{i=1}^{l} y_i) = r(X \cup (E - X)) = r(E) \leqslant r(X).$$

Αλλά τότε από ιδιότητα $(R2)$ θα πρέπει $r(X) = r(E)$. Ο τρόπος με τον οποίο θα δουλέψουμε είναι με επαγωγή:
Βάση επαγωγής: $k = 1$: Τότε $r(X \cup y_1) = r(X)$, αφού X είναι παραγόμενο. Άρα και $r(X \cup y_1) \leqslant r(X)$.
Επαγωγική Υπόθεση: Για $k = n \leqslant l - 1$ υποθέτουμε πως $r(X \cup \bigcup_{i=1}^{n} y_i) \leqslant r(X)$.
Επαγωγικό Βήμα: Θ.δ.ο. για $n + 1 \leqslant l : r(X \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} y_i) \leqslant r(X)$.
Έχουμε

$$\begin{aligned} r(X \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} y_i) &= r(X \cup X \cup y_1 \cup ... \cup y_{n+1}) \\ &= r((X \cup \bigcup_{i=1}^{n} y_i) \cup (X \cup y_{n+1})) \\ &\leqslant r(X \cup \bigcup_{i=1}^{n} y_i) + r(X \cup y_{n+1}) - \\ &\quad r((X \cup \bigcup_{i=1}^{n} y_i) \cap (X \cup y_{n+1})) \end{aligned}$$

από (R3). Αλλά

$$(X \cup \bigcup_{i=1}^{n} y_i) \cap (X \cup y_{n+1}) = X$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} r(X \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} y_i) &\leqslant r(X \cup \bigcup_{i=1}^{n} y_i) + r(X \cup y_{n+1}) - r(X) \\ &\overset{\text{Επ. Υπόθεση}}{\leqslant} r(X) + r(X \cup y_{n+1}) - r(X) \\ &= r(X \cup y_{n+1}) \\ &= r(X) \end{aligned}$$

αφού X παραγόμενο.
Άρα

$$(\forall k \leqslant l)(r(X \cup \bigcup_{i=1}^{k} y_i) \leqslant r(X)).$$

Συνεπώς όπως δείξαμε πιο πάνω, το ζητούμενο έπεται.
($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $r(X) = r(E(M))$. Τότε πρέπει $cl(X) = E(M)$, δηλαδή

$$(\forall x \in E)(r(X \cup x) = r(X))$$

για να είναι το X παραγόμενο. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

i) $x \in X$. Τότε $r(X \cup x) = r(X)$, προφανώς.

ii) $x \in E - X$. Τότε

$$X \cup x \subseteq E \overset{(R2)}{\Rightarrow} r(X \cup x) \leqslant r(E) = r(X) \Rightarrow r(X \cup x) \leqslant r(X)$$

Αλλά

$$X \subseteq X \cup x \Rightarrow r(X) \leqslant r(X \cup x)$$

Συνεπώς

$$r(X \cup x) = r(X)$$

και άρα δείξαμε το ζητούμενο.

Άρα $cl(X) = E(M)$. □

Πρόταση 18. *X βάση $\Leftrightarrow$ X ελαχιστικό παραγόμενο σύνολο.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) X βάση $\Rightarrow r(X) = r(E) \Rightarrow X$ παραγόμενο σύνολο.
Έστω τώρα προς άτοπο, ότι X όχι ελαχιστικό παραγόμενο σύνολο. Τότε $\exists Y \subsetneq X$ παραγόμενο. Τότε $|Y| < |X|$ και $r(Y) = r(E)$. Τότε όμως Y και X είναι ανεξάρτητα σύνολα στο M, άρα $r(Y) = |Y|$ και $r(X) = |X|$. Τελικά

$$r(Y) = |Y| < |X| = r(E) = r(Y) \Rightarrow r(Y) < r(Y),$$

άτοπο. Άρα το X είναι ελαχιστικό παραγόμενο σύνολο.

($\Leftarrow$) Έστω X ελαχιστικό παραγόμενο σύνολο. Έστω πως X όχι βάση. Τότε X είτε είναι ανεξάρτητο μη βάση, ή είναι εξαρτημένο. Αν ισχύει το πρώτο, έπεται $r(X) = r(E)$ αφού $r(E)$ είναι το μέγεθος μίας βάσης στο M, εξ' ορισμού. Άρα άτοπο. Άρα αναγκαστικά X εξαρτημένο. Τότε όμως $\exists X' \subsetneq X$. τ.ω. $X' \in \mathcal{B}$, γιατί αλλιώς $r(X) < r(E)$. Όμως τότε, από την ($\Rightarrow$) κατεύθυνση, έπεται ότι X' είναι ελαχιστικά παραγόμενο σύνολο και $X' \subsetneq X$. Άρα X όχι ελαχιστικό. Άρα άτοπο. Συνεπώς X βάση. □

Πρόταση 19. *X μεγιστικό μη - παραγόμενο σύνολο $\Leftrightarrow$ X υπερεπίπεδο.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι X όχι υπερεπίπεδο. Τότε $r(X) \neq r(E) - 1$ ή $X \subsetneq cl(X)$, εξ' ορισμού. Αλλά X μεγιστικό μη–παραγόμενο, συνεπώς $(\forall x \in E - X)(X \cup x)$ παραγόμενο, δηλαδή $r(X \cup x) = r(E)$.

Επίσης, πρέπει $E - X \neq \emptyset$, γιατί αλλιώς $X = E$ και $(\exists B \subseteq X)(B \in \mathcal{B})$. Τότε, από Πρόταση 18, B είναι ελαχιστικό παραγόμενο σύνολο, συνεπώς και X είναι παραγόμενο, άτοπο. Άρα $r(X) \leqslant r(E) - 1$. Αν τώρα $r(X) = r(E) - 2$, τότε για $x \in E - X$ έχουμε $r(X \cup x) = r(E) - 1 < r(E) = r(X \cup x)$. Άρα άτοπο, συνεπώς $r(X) = r(E) - 1$.
Έστω τώρα $X \subsetneq cl(X)$. Τότε

$$(\exists y \in E - X)(r(X \cup y) = r(X) = r(E) - 1).$$

Συνεπώς $X \cup y$ είναι μη - παραγόμενο σύνολο μεγέθους μεγαλύτερου του X. Αλλά X είναι μεγιστικό, άρα άτοπο. Συνεπώς $X = cl(X)$. Τελικά, αφού $X = cl(X)$ και $r(X) = r(E) - 1$ έπεται ότι X υπερεπίπεδο.

($\Leftarrow$) Έστω X υπερεπίπεδο. Τότε $X = cl_M(X)$ και $r(X) = r(E) - 1$. Τότε X είναι μη-παραγόμενο και όχι μεγιστικό, ή είναι παραγόμενο. Αν είναι παραγόμενο τότε $r(X) = r(E)$, άτοπο. Άρα αναγκαστικά X είναι μη – παραγόμενο και όχι μεγιστικό. Τότε όμως υπάρχει $e \in E - X$, με $X \cup e$ μη - παραγόμενο. Τότε $r(X \cup e) < r(E)$. Τότε όμως $r(X \cup e) \geqslant r(X)$. Αν $r(X \cup e) = r(X)$, τότε πρέπει $X \cup e \subseteq cl(X)$ και συνεπώς άτοπο. Άρα

$$r(X \cup e) \geqslant r(X) + 1 \Rightarrow r(X) \leqslant r(X \cup e) - 1 \Rightarrow r(E) - 1 \leqslant r(X \cup e) - 1 \Rightarrow r(E) \leqslant r(X \cup e)$$

Τώρα όμως, επειδή $X \cup e \subseteq E$, από (R2) έπεται ότι $r(X \cup e) \leqslant r(E)$. Άρα $r(X \cup e) = r(E)$, άρα $X \cup e$ παραγόμενο. Άρα X μεγιστικό μη–παραγόμενο. Συνεπώς άτοπο. Άρα X μεγιστικό μη – παραγόμενο σύνολο. □

Πρόταση 20. *Έστω G γράφημα. Τότε $H \subseteq E$ είναι υπερεπίπεδο του $M(G)$ ανν $E(G) - H$ είναι ένας δεσμός.*

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Έστω ότι $E(G) - H$ είναι ένας δεσμός του G. Τότε μία ακμή e του G με $e \notin H$, ενώνει δύο συνεκτικές συνιστώσες G_1, G_2 του $G[H]$. Επίσης, κάθε άλλη ακμή του $E(G) - H$ ενώνει τα G_1 και G_2(γιατί αλλιώς $E(G) - H$ όχι ελαχιστικό). Τώρα, το $G[H \cup e]$ έχει τον ίδιο αριθμό συνεκτικών συνιστωσών με το G, και άρα $r(H \cup e) = |V(G)| - \omega(G) = r(M(G))$, συνεπώς από Πρόταση 17, το $H \cup e$ είναι παραγόμενο σύνολο του $M(G)$. Άρα το H είναι μεγιστικό μή - παραγόμενο σύνολο, άρα από Πρόταση 19, το H είναι υπερεπίπεδο.

($\Rightarrow$) Έστω H υπερεπίπεδο. Τότε εξ' ορισμού $r(H) = r(M(G)) - 1 = |V(G)| - \omega(G) - 1$, από Πόρισμα 9. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός ακμών ενός μεγιστικού δάσους στο $G[H]$ είναι $|V(G)| - \omega(G) - 1$. Αλλά, από Πόρισμα 9

$$r(H) = |V(G[H])| - \omega(G[H]) \overset{|V(G[H])|=|V(G)|}{=} |V(G)| - (\omega(G) + 1) \Rightarrow \omega(G[H]) = \omega(G) + 1$$

και άρα $G[H]$ έχει $\omega(G) + 1$ συνεκτικές συνιστώσες. Τότε όμως κάθε $e \in E(G) - H$ πρέπει να συνδέει μόνο δύο συνεκτικές συνιστώσες του $G[H]$, γιατί αλλιώς το $G[H]$ έχει $\geqslant \omega(G) + 2$ συν. Τότε όμως το $E(G) - H$ είναι μία τομή ακμών. Μένει ν.δ.ο. $E(G) - H$ είναι ελαχιστική. Έστω ότι δεν είναι. Τότε $\exists Y \subsetneq E(G) - H$ τ.ω. $E(G) - H - Y$ δεσμός Τότε, $H \cup Y \supsetneq H$ και $r(H \cup Y) = r(M(G)) - 1$, άρα $H \cup Y$ είναι μη – παραγόμενο σύνολο, γνήσιο υπερσύνολο του H, άτοπο γιατί H είναι υπερεπίπεδο άρα H είναι μεγιστικό μη – παραγόμενο σύνολο, από Πρόταση 19. Άρα τελικά $E(G) - H$ είναι δεσμός □

3.3.8 Δυϊκά μητροειδή

Θεώρημα 3. *Έστω μητροειδές M και έστω $\mathcal{B}^*(M) = \{E(M) - B \mid B \in \mathcal{B}(M)\}$. Τότε το $\mathcal{B}^*(M)$ είναι το σύνολο βάσεων ενός μητροειδούς στο $E(M)$. Αυτό το μητροειδές θα το καλούμε «Δυϊκό Μητροειδές του M» και θα το συμβολίζουμε με M^*, με σύνολο βάσεων $\mathcal{B}(M^*) = \mathcal{B}^*(M)$.*

Απόδειξη. Επικαλούμενοι το Θεώρημα 2, αρκεί το $\mathcal{B}^*(M)$ να ικανοποιεί τις ιδιότητες (B1) και (B2).

(B1) $\mathcal{B}^*(M) \neq \emptyset$ Έχουμε $\mathcal{B}(M) = \{B \mid B \in \mathcal{B}(M)\} \neq \emptyset$ από $(B1)$ για το M. Άρα $\exists B \in \mathcal{B}(M)$. Τότε όμως $E - B \in \mathcal{B}^*(M)$, εξ' ορισμού. Άρα $\mathcal{B}^*(M) \neq \emptyset$.

(B2) $(\forall B_1^*, B_2^* \in \mathcal{B}^*(M))(x \in B_1^* - B_2^* \Rightarrow (\exists y \in B_2^* - B_1^*)((B_1^* - x) \cup y \in \mathcal{B}^*(M)))$
Έστω τώρα $B_1^*, B_2^* \in \mathcal{B}^*(M)$ και $x \in B_1^* - B_2^*$. Ορίζουμε $B_i = E - B_i^*, i = 1, 2$.

Τότε

$$\begin{aligned} B_1^* - B_2^* &= (E - B_1) - (E - B_2) \\ &= \{z \mid z \in E - B_1 \wedge z \notin E - B_2\} \\ &= \{z \mid z \notin B_1 \wedge z \in B_2\} \\ &= \{z \mid z \in B_2 - B_1\} = B_2 - B_1 \end{aligned}$$

Αφού λοιπόν $x \in B_2 - B_1$, τότε από ιδιότητα (B2), έχουμε

$$(\exists y \in B_1 - B_2)((B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}(M)).$$

Όμως $B_1 - B_2 = B_2^* - B_1^*$, άρα $y \in B_2^* - B_1^*$. Τότε όμως $E(M) - (B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}^*(M)$. Για συντομία θέτουμε $X = (B_1 - y) \cup x$. Έχουμε

$$\begin{aligned} E(M) - X &= \{z \mid z \in E \wedge z \notin X\} \\ &= \{z \mid z \in E \wedge z \notin (B_1 - y) \cup x\} \\ &= \{z \mid (z \in E \wedge z \notin B_1 \wedge z \neq x) \vee z = y\} \\ &= \{z \mid z \in ((E - B_1) - x) \vee z = y\} \\ &= \{z \mid z \in ((E - B_1) - x) \cup y\} \\ &= ((E - B_1) - x) \cup y \\ &= (B_1^* - x) \cup y \in \mathcal{B}^*(M) \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$(\exists y \in B_1^* - B_2^*)((B_1^* - x) \cup y \in \mathcal{B}^*(M).$$

Άρα $\mathcal{B}^*(M)$ ικανοποιεί ιδιότητες (B1) και (B2), άρα από Θεώρημα 2, έπεται ότι $\mathcal{B}^*(M)$ ορίζει είναι το σύνολο βάσεων ενός μητροειδούς.

Τις βάσεις, ανεξάρτητα σύνολα, κυκλώματα, υπερεπίπεδα και παραγόμενα σύνολα του δυϊκού ενός μητροειδούς M, θα τα ονομάζουμε *συν–βάσεις*, *συν–κυκλώματα*, κ.τ.λ. του M. Επιπλέον, σαν $r^* = r_{M^*}$ θα συμβολίζουμε την συνάρτηση τάξης του M^*. □

Πόρισμα 10. *Αν M^* είναι το δυϊκό του M, τότε $(M^*)^* = M$.*

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}((M^*)^*) &= \mathcal{B}^*(M^*) \\ &= \{E - B \mid B \in \mathcal{B}(M^*)\} \\ &= \{E - (E - B') \mid B' \in \mathcal{B}(M)\} \\ &= \{B' \mid B' \in \mathcal{B}(M)\} = \mathcal{B}(M). \end{aligned}$$

Άρα $(M^*)^* = M$ □

Πόρισμα 11. $U^*_{m,n} = U_{n-m,n}$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(U^*_{m,n}) &= \{E - B \mid B \in B(U_{m,n})\} \\
&= \{E - B \mid |B| = m\} \\
&= \{B \mid |B| = n - m\} \\
&= \mathcal{B}(U_{n-m,n})
\end{aligned}$$

Το ζητούμενο έπεται. □

Πρόταση 21. *X συν–ανεξάρτητο $\Leftrightarrow E - X$ παραγόμενο.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω X συν–ανεξάρτητο. Θ.δ.ο. $E - X$ είναι παραγόμενο.
Έχουμε X συν–ανεξάρτητο $\Rightarrow \exists B$ συν–βάση : $X \subseteq B$. Τότε $E - X \supseteq E - B$.
Αλλά B συν–βάση $\Rightarrow E - B$ βάση, από ορισμό του δυϊκού μητροειδούς. Από Πρόταση 18, έπεται ότι $E - B$ είναι ελαχιστικό παραγόμενο σύνολο. Άρα από Πρόταση 17: $r(E - B) = r(E)$. Τώρα,

$$\begin{aligned}
E - B \subseteq E - X \subseteq E \quad &\overset{(R2)}{\Rightarrow} \quad r(E - B) \leqslant r(E - X) \leqslant r(E) \\
&\overset{r(E)=r(E-B)}{\Rightarrow} \quad r(E) \leqslant r(E - X) \leqslant r(E) \\
&\Rightarrow \quad r(E - X) = r(E)
\end{aligned}$$

Άρα $E - X$ παραγόμενο από Πρόταση 17.
($\Leftarrow$) Έστω $E - X$ παραγόμενο. Τότε το $E - X$ περιέχει μία βάση B, επειδή ένα σύνολο είναι ελαχιστικά παραγόμενο ανν βάση, από Πρόταση 18. Τότε όμως από ορισμό του δυϊκού μητροειδούς, το $E - B$ είναι μία συν–βάση του M. Τότε όμως $E - B \supseteq X$, και άρα X συν–ανεξάρτητο. □

Πρόταση 22. *X συν–κύκλωμα $\Leftrightarrow E - X$ υπερεπίπεδο.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$X \in \mathcal{C}^*(M) \Leftrightarrow (X \notin \mathcal{I}^*(M)) \wedge (\forall y \in X,\ X - y \in \mathcal{I}^*(M)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \notin (E - X),\ r((E - X) \cup y) = r(E))$$

από Πρόταση 21. Συνεπώς $(E - X) \cup y$ παραγόμενο από Πρόταση 17.

Επίσης, πάλι από την Πρόταση 21, X συν–εξαρτημένο στο M ανν $E - X$ όχι παραγόμενο στο M. Άρα έπεται ότι $E - X$ όχι παραγόμενο στο M και $\forall y \notin (E - X)$, $(E - X) \cup y$ παραγόμενο, άρα $E - X$ είναι ελαχιστικά παραγόμενο στο M. Από Πρόταση 19, έπεται ότι $E - X$ υπερεπίπεδο. Συνεπώς X συν–κύκλωμα $\Leftrightarrow X$ υπερεπίπεδο. □

Λήμμα 6. *Έστω I, $I^* \subseteq E(M)$ τέτοια ώστε $I \cap I^* = \emptyset$ και I ανεξάρτητο, I^* συν–ανεξάρτητο. Τότε υπάρχει βάση B και συν–βάση B^* στο M τέτοιες ώστε $I \subseteq B$, $I^* \subseteq B^*$ και $B \cap B^* = \emptyset$.*

Απόδειξη. Στο περιορισμένο μητροειδές $M|E - I^*$, το I διατηρεί την ιδιότητα του ως ανεξάρτητο, γιατί $I \subseteq E - I^*$. Άρα υπάρχει μία βάση B στο $E - I^*$ τ.ω. $r(B) = r(E - I^*)$. Τώρα το I^* είναι συν - ανεξάρτητο στο M, άρα από Πρόταση 21, $E - I^*$ είναι παραγόμενο. Περαιτέρω, η Πρόταση 17 μας δίνει ότι $r(E - I^*) = r(E) \Rightarrow r(B) = r(E)$, άρα το B είναι βάση του M. Άρα B βάση του $M \Rightarrow E - B$ συν–βάση του M, από ορισμό δυϊκού μητροειδούς. Αλλά $I \subseteq B$ και $I^* \subseteq E - B^*$ και $B \cap (E - B) = \emptyset$, συνεπώς τα σύνολα B και $E - B$ είναι οι ζητούμενη βάση και συν–βάση για το M. □

Πρόταση 23. *Για όλα τα υποσύνολα X του E, ενός μητροειδούς M, ισχύει ότι*

$$r^*(X) = |X| - r(M) + r(E - X)$$

Απόδειξη. Έστω B^*_X βάση του $M^*|X$ και έστω B_{E-X} βάση του $M|E - X$. Τότε $r^*(X) = |B^*_X|$ και $r(E - X) = |B_{E-X}|$. Τώρα από Λήμμα 6, επειδή B_{E-X} και B^*_X είναι ανεξ. και συν–ανεξ. αντίστοιχα στο M και $B_{E-X} \cap B^*_X = \emptyset$, έπεται ότι υπάρχει $B \in \mathcal{B}(M)$ και $B^* \in \mathcal{B}^*(M)$ τ.ω. $B \cap B^* = \emptyset$ και $B_{E-X} \subseteq B$, $B^*_X \subseteq B^*$. Τότε όμως $B \cap (E - X) = B_{E-X}$ και $B^* \cap X = B^*_X$ (1) από ορισμό του $\mathcal{I}|Y = \{I \subseteq Y \mid I \in \mathcal{I}\}$. Άρα

$$B = (B \cap (E - X)) \uplus (B \cap X) \overset{(1)}{=} (B_{E-X}) \uplus (B \cap X).$$

όπου $\uplus$ είναι ο τελεστής ξένης ένωσης δύο συνόλων.

Συνεπώς $|B| = |B_{E-X}| + |B \cap X| \Rightarrow |B \cap X| = |B| - |B_{E-X}|$ (2). Έχουμε τώρα ότι

$$\begin{aligned} |X| &= |X \cap B| + |X \cap B^*| \\ &\overset{(2)}{=} |B| - |B_{E-X}| + |X \cap B^*| \\ &\overset{(1)}{=} |B| - |B_{E-X}| + |B^*_X| \\ &= r(E) - r(E - X) + r^*(X) \end{aligned}$$

Άρα

$$r^*(X) = |X| - r(E) + r(E - X)$$

και συνεπώς η απόδειξη έχει τελειώσει. □

Πρόταση 24. *Έστω $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$, $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ ισόμορφα μητροειδή μέσω της αντιστοιχίας $\theta : E_1 \to E_2$. Τότε $M^*_1 \cong M^*_2$ μέσω της θ.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι ένα υποσύνολο X του E_1 είναι ανεξάρτητο στο M_1 ανν το $\theta(X)$ είναι ανεξάρτητο στο M_2.

Έστω τώρα $X \subseteq E_1$, ανεξάρτητο στο M_1^*. Τότε

$$\begin{aligned}
X \in \mathcal{I}(M_1^*) &\overset{\Pi\rho.\,21}{\Leftrightarrow} && E_1 - X \text{ συν–παραγόμενο στο } M_1^* \\
&\Leftrightarrow && E_1 - X \text{ παραγόμενο στο } M_1 \\
&\overset{\Pi\rho.\,17}{\Leftrightarrow} && r_{M_1}(E_1 - X) = r_{M_1}(E_1) \text{ στο } M_1 \\
&\Leftrightarrow && r_{M_2}(E_2 - \theta(X)) = r_{M_2}(E_2) \text{ στο } M_2 \\
&\overset{\Pi\rho.\,17}{\Leftrightarrow} && E_2 - \theta(X) \text{ παραγόμενο στο } M_2 \\
&\Leftrightarrow && E_2 - \theta(X) \text{ συν–παραγόμενο στο } M_2^* \\
&\overset{\Pi\rho.\,21}{\Leftrightarrow} && \theta(X) \in \mathcal{I}(M_2^*)
\end{aligned}$$

Συνεπώς $M_1^* \cong M_2^*$ μέσω της θ. □

3.3.9 Παράλληλα–σειραϊκά σύνολα

Ορισμός 46. Έστω M μητροειδές στο σύνολο E και έστω $X \subseteq E$. Τότε:

i) Το X είναι *παράλληλο* αν κάθε δύο στοιχεία του αποτελούν κύκλωμα του M.

ii) Το X είναι *σειραϊκό* αν κάθε δύο στοιχεία του αποτελούν συν-κύκλωμα του M.

Από αυτόν τον ορισμό, συμπεραίνουμε πως ένα παράλληλο σύνολο ενός μητροειδούς είναι σειραϊκό στο δυϊκό του και αντιστρόφως. Επίσης μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι τα παράλληλα και σειραϊκά σύνολα σε ένα κυκλικό μητροειδές είναι οι αντίστοιχες παράλληλες και σειραϊκές κλάσεις ακμών του γραφήματος που το ορίζει.

Πρόταση 25. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για κάποιο υποσύνολο X του συνόλου των ακμών ενός γραφήματος G:*

i) X κύκλωμα του $M^*(G)$.

ii) X συν–κύκλωμα του $M(G)$.

iii) X δεσμός του G.

Απόδειξη. iii) $\Leftrightarrow$ ii) Έστω X ένας δεσμός του G. Τότε από Πρόταση 20, το $E - X$ είναι ισοδύναμα υπερεπίπεδο του $M(G)$, και από Πρόταση 22, το X είναι ισοδύναμα συν–κύκλωμα του $M(G)$.
ii) $\Leftrightarrow$ i) Έστω X συν–κύκλωμα του $M(G)$. Τότε από ορισμό του δυϊκού του $M(G)$, το X είναι ισοδύναμα κύκλωμα του $M^*(G)$. □

Το παρακάτω λήμμα αποδεικνύει ότι κάθε γεωμετρικό δυϊκό γράφημα είναι και συνδυαστικό:

Λήμμα 7. *Αν G^* είναι γεωμετρικό δυϊκό ενός επίπεδου γραφήματος G, τότε*

$$M(G^*) \cong M^*(G).$$

Απόδειξη. Έστω G_0 μία ενεπίπεδη εμβάπτιση του G και έστω G^* γεωμετρικό δυϊκό της G_0. Υπάρχει αντιστοιχία α μεταξύ των ακμών των G_0 και G^*. Θα δείξουμε ότι

$$M(G_0) \cong_\alpha M^*(G^*)$$

και έπειτα από Πρόταση 24

$$M^*(G_0) \cong_\alpha M(G^*).$$

Αφού $G_0 \cong G$ μετά έπεται το ζητούμενο. Συνεπώς από Πρόταση 25, θα δείξουμε ότι:

$$C \text{ κύκλος του } G_0 \Leftrightarrow \alpha(C) \text{ δεσμός του } G^*.$$

Έστω C κύκλος του G_0. Τότε ο C είναι μία κλειστή καμπύλη Jordan στο επίπεδο και κάθε ακμή του $\alpha(C)$ έχει ένα άκρο μέσα στην C και ένα άκρο έξω από την C. Συνεπώς το $\alpha(C)$ είναι τομή ακμών του G^*. Έστω τώρα X δεσμός του G^*. Θ.δ.ο. $a^{-1}(X)$ περιέχει κάποιο κύκλο C. Τότε από πάνω, πρέπει $\alpha(C) = X$. Αν τώρα C είναι κύκλος και $\alpha(C)$ όχι δεσμός, τότε $\alpha(C) - B$ είναι δεσμός για κάποιο υποσύνολο B του $\alpha(C)$. Τότε όμως το C περιέχει κάποιον κύκλο μικρότερου μεγέθους, άρα άτοπο. Συνεπώς αρκεί ν.δ.ο. αν X δεσμός τότε $\alpha^{-1}(X)$ περιέχει κάποιον κύκλο.

Το $G^* - X$ αποτελείται από τις συνεκτικές συνιστώσες G_1^*, G_2^*. Διακρίνουμε περιπτώσεις στο μέγεθος του X:

i) $|X| = 1$. Τότε εμφανώς το X είναι ισθμός, συνεπώς το $\alpha^{-1}(X)$ είναι θηλιά.

ii) $|X| > 1$. Έστω F μία όψη του G^* στην οποία ανήκει κάποια ακμή x της X, και έστω F' το σύνορό της. Το x δεν είναι ισθμός στο G^*, άρα δεν μπορεί να είναι ούτε ισθμός στο $G^*[F']$. Συνεπώς υπάρχει κύκλος C_x στο F' ο οποίος περιέχει την x.
Έστω ότι τα άκρα της x είναι οι u, v. Αφού X δεσμός, οι u, v ανήκουν στην ίδια συνιστώσα του $G^*[(E - X) \cup x]$ αλλά σε διαφορετική του $G^*[E - X]$. Έστω τώρα ότι $|X \cap C_x| = 1$. Τότε $X \cap C_x = x$ και υπάρχει μονοπάτι από την u στη v στο $C_x - x$, άτοπο γιατί $G^* - X$ μη–συνεκτικό. Συνεπώς

$$|X \cap C_x| \geqslant 2.$$

Τώρα κάθε όψη του G^* αντιστοιχεί σε μία κορυφή του G_0, άρα κάθε κορυφή του $G_0[\alpha^{-1}(X)]$ έχει $\geqslant 2$ ακμές. Τότε από Λήμμα 2, υπάρχει κύκλος που περιέχεται στο $\alpha^{-1}(X)$. Άρα

$$M(G_0) \cong_\alpha M^*(G^*)$$

και έπεται το ζητούμενο. □

Πόρισμα 12. *$M(G) \cong_\psi M^*(G^{'})$, όπου $G^{'}$ συνδυαστικό δυϊκό γράφημα του G με ψ αντιστοιχία που ορίζει την σχέση τους.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\mathcal{C}(G)$ είναι το σύνολο των κύκλων του G σαν σύνολα ακμών. Έχουμε

$$X \in \mathcal{C}(M(G)) \Leftrightarrow X \in \mathcal{C}(G) \Leftrightarrow \psi(X) \text{ δεσμός στο } G^{'} \Leftrightarrow$$

$$\overset{\text{Πρόταση } 25}{\Leftrightarrow} \psi(X) \in \mathcal{C}^*(G^{'}) \overset{\text{Πρόταση } 25}{\Leftrightarrow} \psi(X) \in \mathcal{C}(M^*(G^{'}))$$

Συνεπώς

$$X \in \mathcal{C}(M(G)) \Leftrightarrow \psi(X) \in \mathcal{C}(M^*(G^{'}))$$

και άρα $M(G) \cong_\psi M^*(G^{'})$ □

Πόρισμα 13. *Αν το $G^{'}$ είναι ένα συνδυαστικό δυϊκό του G, τότε ο G είναι ένα συνδυαστικό δυϊκό του $G^{'}$.*

Απόδειξη. Από Πρόταση 24, $M(G) \cong_\psi M^*(G^{'}) \Rightarrow M^*(G) \cong_\psi M(G^{'})$. Άρα G συνδυαστικό δυϊκό του $G^{'}$. □

3.3.10 Σύνθλιψη μητροειδών

Ορισμός 47. Έστω μητροειδές M και έστω X κάποιο υποσύνολο του E. Ορίζουμε σαν $M/X = (M^* \backslash X)^*$ να είναι η *σύνθλιψη* του X από το M.

Πρόταση 26. *Αν $T \subseteq E$, τότε για κάθε $X \subseteq E - T$, $r_{M/T}(X) = r_M(X \cup T) - r_M(T)$*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
r_{M/T}(X) &= r_{(M^* \backslash T)^*}(X) \\
&\overset{\text{Προτ. } 23}{=} |X| + r_{M^* \backslash T}(E - T - X) - r_{M^* \backslash T}(E - T) \\
&\overset{\text{Προτ. } 15}{=} |X| + r^*(E - (T \cup X)) - r^*(E - T) \\
&\overset{\text{Προτ. } 23}{=} |X| + (|E - (T \cup X)| + r_M(E - (E - T \cup X)) - \\
&\quad r_M(E)) - (|E - T| + r_M(T) - r_M(E)) \\
&= |X| + |E| - |T| - |X| + r_M(T \cup X) - \\
&\quad r_M(E) - |E| + |T| - r_M(T) + r_M(E) \\
&= r_M(T \cup X) - r_M(T)
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 27. *Αν T_1, T_2 είναι ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του E, τότε $(M/T_1)/T_2 = M/(T_1 \cup T_2) = (M/T_2)/T_1$*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $r_{(M/T_1)/T_2} = r_{M/(T_1\cup T_2)} = r_{(M/T_2)/T_1}$, γιατί τότε από Πρόταση 16 έχουμε τελειώσει. Έστω $X \subseteq E$. Έχουμε

$$\begin{aligned} r_{(M/T_1)/T_2}(X) &\overset{\Pi\rho o\tau\ 26}{=} r_{M/T_1}(X\cup T_2) - r_{M/T_1}(T_2) \\ &\overset{\Pi\rho o\tau\ 26}{=} r_M(X\cup T_2\cup T_1) - r_M(T_1) - r_M(T_2\cup T_1) + r_M(T_1) \\ &= r_M(X\cup T_2\cup T_1) - r_M(T_2\cup T_1) \\ &= r_{M/(T_1\cup T_2)}(X) \end{aligned}$$

Για τον ίδιο λόγο,

$$r_{(M/T_2)/T_1}(X) = r_{M/T_2}(X\cup T_1) - r_{M/T_2}(T_1) = r_{M/(T_1\cup T_2)}(X)$$

Συνεπώς, $r_{(M/T_1)/T_2} = r_{M/(T_1\cup T_2)} = r_{(M/T_2)/T_1}$, και έκτοτε έχουμε τελειώσει. □

Λήμμα 8. *Έστω $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \subseteq E(M)$. Τότε αν $X_1 \supseteq Y_1$ και $X_2 \supseteq Y_2$, τότε*

$$r(X_1) + r(X_2) - r(X_1\cup X_2) \geqslant r(Y_1) + r(Y_2) - r(Y_1\cup Y_2)$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$r(X_1) + r(X_2) - r(X_1\cup X_2) \geqslant r(Y_1) + r(Y_2) - r(Y_1\cup Y_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (r(X_1) - r(Y_1)) + (r(X_2) - r(Y_2)) \geqslant r(X_1\cup X_2) - r(Y_1\cup Y_2)$$

Τώρα από Πρόταση 26 έχουμε

$$r(X_1) - r(Y_1) = r_{M/Y_1}(X_1 - Y_1)$$

$$r(X_2) - r(Y_2) = r_{M/Y_2}(X_2 - Y_2)$$

και

$$r(X_1\cup X_2) - r(Y_1\cup Y_2) = r_{M/(Y_1\cup Y_2)}(X_1\cup X_2 - (Y_1\cup Y_2)).$$

Άρα αρκεί ν.δ.ο.

$$r_{M/Y_1}(X_1 - Y_1) + r_{M/Y_2}(X_2 - Y_2) \geqslant r_{M/(Y_1\cup Y_2)}(X_1\cup X_2 - (Y_1\cup Y_2)).$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} r_{(M/Y_1)/(Y_2-Y_1)}((X_1-Y_1)-(Y_2-Y_1)) &\overset{\Pi\rho o\tau.\ 26}{=} r_{M/Y_1}(((X_1-Y_1)-(Y_2-Y_1))\cup(Y_2-Y_1)) - \\ & \quad\; r_{M/Y_1}(Y_2-Y_1) \\ &= r_{M/Y_1}(X_1-Y_1) - r_{M/Y_1}(Y_2-Y_1) \\ &\leqslant r_{M/Y_1}(X_1-Y_1) \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$r_{(M/Y_2)/(Y_1-Y_2)}((X_2-Y_2)-(Y_1-Y_2)) \leqslant r_{M/Y_2}(X_2-Y_2)$$

Τώρα έχουμε από Πρόταση 27 ότι

$$\begin{aligned} r_{(M/Y_1)/(Y_2-Y_1)}((X_1-Y_1)-(Y_2-Y_1)) &\overset{Y_1\cap(Y_2-Y_1)=\emptyset}{=} r_{M/(Y_1\cup Y_2)}((X_1-Y_1)-(Y_2-Y_1)) \\ &= r_{M/(Y_1\cup Y_2)}(X_1-Y_1-Y_2) \\ &= r_{M/(Y_1\cup Y_2)}(X_1-(Y_1\cup Y_2)) \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$r_{(M/Y_2)/(Y_1-Y_2)}((X_2-Y_2)-(Y_1-Y_2)) = r_{M/(Y_1\cup Y_2)}(X_2-(Y_1\cup Y_2))$$

Τώρα

$$\begin{aligned} r_{M/(Y_1\cup Y_2)}((X_1-(Y_2\cup Y_1)) + r_{M/(Y_1\cup Y_2)}(X_2-(Y_1\cup Y_2)) &\overset{\Pi\rho o\tau.\ 13}{\geqslant} r_{M/(Y_1\cup Y_2)}((X_1\cup X_2-(Y_2\cup Y_1)) + \\ & \quad\ r_{M/(Y_1\cup Y_2)}(X_2\cap X_1-(Y_1\cup Y_2)) \\ &\geqslant r_{M/(Y_1\cup Y_2)}((X_1\cup X_2-(Y_2\cup Y_1)) \end{aligned}$$

Άρα και

$$r_{M/Y_1}(X_1-Y_1) + r_{M/Y_2}(X_2-Y_2) \geqslant r_{M/(Y_1\cup Y_2)}(X_1\cup X_2-(Y_1\cup Y_2))$$

συνεπώς η απόδειξη έχει τελειώσει. □

3.3.11 Συνεκτικότητα μητροειδών

Ορισμός 48. Έστω μητροειδές M. Το M είναι *συνεκτικό* αν για κάθε δύο στοιχεία του $E(M)$, υπάρχει ένα κύκλωμα που τα περιέχει.

Πόρισμα 14. *Έστω γράφημα G και έστω $M(G)$ το κυκλικό μητροειδές του. Τότε*

$$M(G) \text{ συνεκτικό} \Leftrightarrow G \text{ 2–συνεκτικό.}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται κατευθείαν με επίκληση της Πρότασης 1. □

Μία απευθείας γενίκευση της συνεκτικότητας των μητροειδών είναι η παρακάτω:

Ορισμός 49. Έστω μητροειδές M με εδαφικό σύνολο E και έστω $k>0$ ακέραιος. Τότε θα ονομάζουμε την διαμέριση (X,Y) του E *Tutte k–διαχωρισμό* (ή απλά *k–διαχωρισμό*) ανν

$$\min\{|X|,|Y|\} \geqslant k$$

$$r(X)+r(Y)-r(M) \leqslant k-1$$

Ορίζουμε την *Tutte συνεκτικότητα* $\lambda(M)$ ενός μητροειδούς να είναι το ελάχιστο k για το οποίο το M είναι *Tutte* k–διαχωρίσιμο, αν αυτό υπάρχει, αλλιώς θέτουμε $\lambda(M) = \infty$. Αν $\lambda(M) \geqslant 2$, τότε το M είναι n*–συνεκτικό* για $2 \leqslant n \leqslant \lambda(M)$, αλλιώς αν $\lambda(M) = 1$ τότε το M είναι *μη συνεκτικό*.

Παρακάτω ορίζουμε ένα άλλο είδος συνεκτικότητας:

Ορισμός 50. Έστω μητροειδές M με εδαφικό σύνολο E και έστω $k > 0$ ακέραιος. Τότε θα ονομάζουμε την διαμέριση (X, Y) του E *κάθετο* k*–διαχωρισμό* ανν

$$\min\{r(X), r(Y)\} \geqslant k$$

$$r(X) + r(Y) - r(M) \leqslant k - 1$$

Όπως και με την Tutte, έτσι και η *κάθετη συνεκτικότητα* $\kappa(M)$ ορίζεται να είναι το ελάχιστο k για το οποίο το M είναι κάθετα k–διαχωρίσιμο, αν αυτό υπάρχει. Αν δεν υπάρχει, τότε θέτουμε $\kappa(M) = r(M)$. Τέλος, λέμε ότι το M είναι *κάθετως* n*–συνεκτικό* αν $2 \leqslant n \leqslant \kappa(M)$.

Παρατηρούμε ότι αν $\min\{r(X), r(Y)\} \geqslant k \geqslant 1$, τότε $\min\{|X|, |Y|\} \geqslant k$. Αυτό αμέσως συνεπάγεται ότι η κάθετη συνεκτικότητα είναι πιο ισχυρή από την Tutte.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα αποδείξουμε ότι η κάθετη συνεκτικότητα ταυτίζεται με την γραφοθεωρητική, για συνεκτικά γραφήματα.

Ορισμός 51. Έστω M μητροειδές. Ορίζουμε ως *περιφέρεια* του M και συμβολίζουμε με $g(M)$, το μέγεθος του μικρότερου κυκλώματος στο M. Δηλαδή,

$$g(M) = \min\{|C| / C \in \mathcal{C}(M)\}$$

Στα γραφήματα ο ορισμός της περιφέρειας εξειδικεύεται στο μέγεθος του μικρότερου κύκλου, και συμβολίζεται με $g(G)$ για συντομία, όπου G είναι γράφημα.

Λήμμα 9. *Έστω M μητροειδές και έστω ότι $g(M) \geqslant k+1$ και ότι το M είναι k–διαχωρίσιμο, για κάποιον θετικό ακέραιο k. Τότε το M είναι καθέτως k διαχωρίσιμο.*

Απόδειξη. Έστω ένας k–διαχωρισμός (X, Y). Αρχικά, έστω X, Y ανεξάρτητα. Τότε πρέπει $r(X) = |X| \geqslant k,\ r(Y) = |Y| \geqslant k$ άρα $\min\{r(X), r(Y)\} \geqslant k$. Αν πάλι κάποιο από τα X, Y είναι εξαρτημένο, έστω χ.π.γ το X, τότε υπάρχει κύκλωμα C που περιέχεται στο X. Τότε όμως

$$r(C) = |C| - 1 \overset{g(M) \geqslant k+1}{\Rightarrow} r(C) \geqslant k$$

Αλλά $r(C) \leqslant r(X)$, άρα $k \leqslant r(X)$. Συνεπώς, και πάλι έπεται ότι $\min\{r(X), r(Y)\} \geqslant k$, άρα το (X, Y) είναι ένας κάθετος k–διαχωρισμός για το M. □

Πρόταση 28. *M είναι κάθετως διαχωρίσιμο για κάποιον θετικό ακέραιο k ανν το M έχει δύο συν–κυκλώματα C_1^*, C_2^* με $C_1^* \cap C_2^* = \emptyset$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω M κάθετως διαχωρίσιμο. Τότε υπάρχει διαμέριση (X, Y) για κάποιο θετικό k τέτοια ώστε

$$\min\{r(X), r(Y)\} \geqslant k$$
$$r(X) + r(Y) - r(M) \leqslant k - 1$$

Έστω ότι το X δεν περιέχει κανένα συν–κύκλωμα C^*. Τότε, από ορισμό, το X είναι συν–ανεξάρτητο και άρα $r^*(X) = |X|(*)$ από Πρόταση 14. Από Πρόταση 6 επίσης

$$r^*(X) = |X| - r(E) + r(Y) \overset{(*)}{\Rightarrow} r(Y) = r(E)$$

Συνεπώς $r(X) \leqslant r(Y)$ και άρα $\min\{r(X), r(Y)\} = r(X) \geqslant k$. Συνεπώς έχουμε

$$r(X) + r(Y) - r(E) \leqslant k - 1 \Rightarrow r(X) + 1 \leqslant k \leqslant r(X)$$

άρα (X, Y) δεν είναι κάθετος διαχωρισμός του M για κανένα k, άρα άτοπο. Συνεπώς το X περιέχει ένα συν–κύκλωμα C_1^*. Για τον ίδιο λόγο, πρέπει και το Y να περιέχει ένα συν–κύκλωμα C_2^*. Άρα υπάρχουν δύο συν–κυκλώματα C_1^*, C_2^* στο M, και αφού $C_1^* \subseteq X$ και $C_2^* \subseteq Y(= E - X)$, έπεται ότι $C_1^* \cap C_2^* = \emptyset$. Άρα αποδείξαμε την πρώτη κατεύθυνση.
($\Leftarrow$) Έστω ότι υπάρχουν C_1^*, C_2^* συν–κυκλώματα με $C_1^* \cap C_2^* = \emptyset$. Τότε έστω $X = C_1^*$ και $Y = E - C_1^*$. Τότε, από Πρόταση 22,

$$C_1^* \text{ συν–κύκλωμα} \Leftrightarrow E - C_1^* \text{ υπερεπίπεδο},$$

συνεπώς $r(Y) = r(E) - 1$, εξ' ορισμού.

Τώρα, επειδή $Y \supseteq C_2^*$, έπεται ότι Y συν-εξαρτημένο στο M και άρα από Πρόταση 14

$$r^*(Y) < |Y| \ (*).$$

Επίσης, έχουμε

$$r^*(Y) = |Y| - r(E) + r(X) \overset{(*)}{\Rightarrow} r^*(Y) > r^*(Y) - r(E) + r(X) \Rightarrow r(X) \leqslant r(E) - 1$$

Άρα $r(X) \leqslant r(Y)$ και

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) - r(E) &= r(X) - 1 \\ &\leqslant r(E) - 2 \\ &\leqslant k - 1 \end{aligned}$$

Άρα

$$r(E) - 1 \leqslant k \leqslant r(X) \leqslant r(Y) = r(E) - 1$$

άρα $k = r(E) - 1$ και ισχύει ότι (X, Y) είναι ένας κάθετος διαχωρισμός για το M. Συνεπώς η απόδειξη τελείωσε. □

Πρόταση 29. *Έστω M μητροειδές. Τότε $\lambda(M) = \lambda(M^*)$.*

Απόδειξη. Έστω $(X, E-X)$ μία διαμέριση του E. Τότε, κάνοντας την χρήση του τύπου για την r^*, έχουμε

$$\begin{aligned} r^*(X) = |X| - r(E) + r(E-X) &\Leftrightarrow r^*(X) - |X| = -r(E) + r(E-X) \\ &\Leftrightarrow r(X) + r^*(X) - |X| = r(X) - r(E) + r(E-X) \end{aligned}$$

Μία δεύτερη εφαρμογή του τύπου στην $(r^*)^* = r$ μας δίνει

$$\begin{aligned} r(X) = |X| - r^*(E) + r^*(E-X) &\Leftrightarrow r(X) - |X| = -r^*(E) + r^*(E-X) \\ &\Leftrightarrow r^*(X) + r(X) - |X| = r^*(X) - r^*(E) + r^*(E-X) \end{aligned}$$

Συνεπώς προκύπτει ότι

$$r(X) - r(E) + r(E-X) = r^*(X) - r^*(E) + r^*(E-X)$$

Αν λοιπόν $\min\{|X|, |E-X|\} \geqslant k$, τότε

$$r(X) - r(E) + r(E-X) \leqslant k-1 \Leftrightarrow r^*(X) - r^*(E) + r^*(E-X) \leqslant k-1$$

Συνεπώς τα M και M^* έχουν τους ίδιους διαχωριστές, συνεπώς $\lambda(M) = \lambda(M^*)$. □

Λήμμα 10. *Έστω M_1, M_2 μητροειδή στα σύνολα E_1 και E_2 αντίστοιχα. Έστω ότι $M_1 \cong M_2$ μέσω της αντιστοιχίας $\theta : E_1 \to E_2$ και έστω $X,\ T \subseteq E_1,\ X \subseteq T$. Τότε*

$$X \in \mathcal{B}(M_1|T) \Leftrightarrow \theta(X) \in \mathcal{B}(M_2|\theta(T))$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι $X \in \mathcal{B}(M_1|T)$ και $\theta(X) \notin \mathcal{B}(M_2|\theta(T))$. Τότε $\theta(X) \in \mathcal{I}(M_2)$ γιατί $X \in \mathcal{I}(M_1)$. Τότε όμως υπάρχει

$$\theta(Y) \subseteq \theta(T) : \theta(Y) \supsetneq \theta(X),\ \theta(Y) \in \mathcal{B}(M_2|\theta(T)).$$

Τότε όμως $\theta^{-1}(\theta(Y)) = Y \supsetneq X,\ T \supseteq Y$ και άρα $Y \in \mathcal{I}(M_1|T)$, άτοπο γιατί X μεγιστικό ανεξάρτητο υποσύνολο του T.

Η συμμετρία της πάνω απόδειξης μας δίνει και την αντίθετη κατεύθυνση. Συνεπώς αποδείξαμε το Λήμμα. □

Πόρισμα 15. *Έστω $M_1 = (\mathcal{I}_1, E_1)$ και $M_2 = (\mathcal{I}_2, E_2)$ μητροειδή. Τότε $M_1 \cong M_2 \Rightarrow M_1, M_2$ έχουν την ίδια συνεκτικότητα.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι M_1 έχει έναν k–διαχωρισμό ανν M_2 έχει έναν k-διαχωρισμό.
($\Rightarrow$) Έστω $(T, E_1 - T)$ ένας k–διαχωρισμός του M_1. Τότε

$$\min\{|T|, |E_1 - T|\} \geqslant k$$

$$r_1(T) + r_1(E_1 - T) - r_1(E_1) \leqslant k - 1$$

Αλλά $M_1 \cong M_2$ και τότε $\exists \theta : E_1 \to E_2$, αντιστοιχία τέτοια ώστε για κάθε υποσύνολο X του E_1 να ισχύει

$$X \in \mathcal{I}(M_1) \Leftrightarrow \theta(X) \in \mathcal{I}(M_2)$$

Άρα $|T| = |\theta(T)|$, $|E_1 - T| = |\theta(E_1 - T)| = |E_2 - \theta(T)|$. Συνεπώς $\min\{|T|, |E_1 - T|\} \geqslant k$. Συνεχίζοντας την απόδειξη, το T περιέχει κάποια βάση X του $M_1|T$ ανν το $\theta(T)$ περιέχει κάποια βάση $\theta(X)$ του $M_2|\theta(T)$, από Λήμμα 10, και άρα $r_1(T) = r_1(X)$ και $r_2(\theta(T)) = r_2(\theta(X))$. Άρα αφού $|X| = |\theta(X)|$

$$r_1(T) = r_1(X) = |X| = |\theta(X)| = r_2(\theta(X)) = r_2(\theta(T)) \Rightarrow r_1(T) = r_2(\theta(T))$$

Ο ίδιος συλλογισμός για το $E_1 - T$ οδηγεί στο ότι $r_1(E_1 - T) = r_2(E_2 - \theta(T))$.
Συνεπώς $r_2(\theta(T)) + r_2(E_2 - \theta(T)) - r_2(E_2) \leqslant k - 1$, άρα M_2 είναι k–διαχωρίσιμο.
Λόγω συμμετρίας της απόδειξης και προς την αντίθετη κατεύθυνση, έπεται το ζητούμενο. $\square$

Κεφάλαιο 4

Προπαρασκευαστικά θεωρήματα

4.1 Μητροειδή με άπειρη συνεκτικότητα

Πρόταση 30. *Έστω ένα n–συνεκτικό μητροειδές M και έστω ότι $|E(M)| \geqslant 2(n-1)$. Τότε όλα τα κυκλώματα και συν–κυκλώματα έχουν τουλάχιστον n στοιχεία.*

Απόδειξη. Προς άτοπο, έστω ότι υπάρχει κάποιο $X \subseteq E$, για το οποίο $X \in \mathcal{C}(M)$ ή $X \in \mathcal{C}^*(M)$ και $|X| = j < n$. Θα δείξουμε ότι τότε το $(X, E-X)$ είναι ένας j–διαχωρισμός του M.
Αρχικά έχουμε

$$|E - X| \geqslant 2(n-1) - j = 2n - 2 - j > 2n - 2 - n = n - 2$$

Άρα $|E - X| \geqslant n - 2 + 1 = n - 1$. Αλλά $j < n \Rightarrow j \leqslant n - 1 \Rightarrow |E - X| \geqslant j$. Συνεπώς

$$\min\{|X|, |E - X|\} \geqslant j$$

Μένει να δείξουμε ότι $r(X) + r(E - X) - r(E) \leqslant j - 1$:

i) Έστω ότι $X \in \mathcal{C}(M)$. Τότε $r(X) = |X| - 1 = j - 1$ από Πρόταση 14. Επίσης έχουμε ότι

$$r(E) \geqslant r(E - X) \Rightarrow r(E - X) - r(E) \leqslant 0$$

Άρα

$$r(X) + r(E - X) - r(E) = j - 1 + r(E - X) - r(E) \leqslant j - 1$$

Άρα το $(X, E - X)$ είναι ένας $j < n$ διαχωρισμός, άρα άτοπο. Συνεπώς, όλα τα κυκλώματα έχουν $\geqslant n$ στοιχεία.

ii) Έστω ότι $X \in \mathcal{C}^*(M)$. Τότε $X \in \mathcal{C}(M^*)$. Με την ίδια λογική πιο πάνω, δουλεύοντας στο δυϊκό μητροειδές M^* με την συνάρτηση r^*, προκύπτει ότι

$$r^*(X) + r^*(E - X) - r^*(E) = j - 1 + r^*(E - X) - r^*(E) \leqslant j - 1$$

Συνεπώς, όλα τα κυκλώματα του M^* έχουν $\geqslant n$ στοιχεία, το οποίο φυσικά σημαίνει ότι όλα τα συν–κυκλώματα του M έχουν $\geqslant n$ στοιχεία.

Συνεπώς, η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Παρότι η παρακάτω πρόταση έχει αποδειχθεί στα [13] και [7], εμείς επιλέξαμε τον δικό μας τρόπο να το αποδείξουμε.

Πρόταση 31. *Έστω M μητροειδές. Τότε*

$$\lambda(M) = \infty \Leftrightarrow M = U_{r,n},\ n = 2r-1, 2r, 2r+1$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι $\lambda(M) = \infty$. Θ.δ.ο. $M = U_{r,n},\ n = 2r-1, 2r, 2r+1$
Έστω k τέτοιο ώστε $2(k-1) \leqslant n \leqslant 2k$. Τότε, από Πρόταση 30, όλα τα κυκλώματα του M έχουν τουλάχιστον k στοιχεία. Άρα για κάθε σύνολο $I \subseteq E$ με $|I| \leqslant k-1 = r$, πρέπει $I \in \mathcal{I}$. Έχουμε ότι $k = r+1$ και $2r \leqslant n \leqslant 2r+1$. Θα δείξουμε ότι αν $n = 2r, 2r+1$ τότε $M = U_{r,n}$.

i) $n = 2r$. Τότε έστω πως $M \neq U_{r,2r}$. Τότε υπάρχει κάποιο I υποσύνολο του E για το οποίο $|I| > r$ και I βάση. Τότε $r(I) = r(M)$. Έστω $I^{'} \subseteq I$ με $|I^{'}| = r$. Τότε $I^{'} \in \mathcal{I}$. Τότε
$$r(I^{'}) < r(M) \Rightarrow r(I^{'}) \leqslant r(M) - 1,$$
άρα
$$r(I^{'}) + r(E - I^{'}) - r(M) \leqslant r(M) - 1 + r(E - I^{'}) - r(M) = r(E - I^{'}) - 1 \leqslant \lambda - 1,$$
άρα
$$r(E - I^{'}) \leqslant \lambda,$$
αλλά
$$|I^{'}| = r \Rightarrow |E - I^{'}| = r \leqslant |I^{'}|,$$
άρα θέλουμε και $\lambda \leqslant |E - I^{'}|$. Αυτό σημαίνει ότι $r(E - I^{'}) \leqslant |E - I^{'}|$, άρα $\lambda(M)$ πεπερασμένο. Άτοπο, άρα κάθε υποσύνολο του E μεγαλύτερο σε μέγεθος από το r, είναι εξαρτημένο. Πριν όμως αποδείξαμε πως κάθε υποσύνολο του E μικρότερο ίσο σε μέγεθος με το r είναι ανεξάρτητο. Άρα ένα υποσύνολο του E είναι ανεξάρτητο ανν είναι μικρότερο ίσο με το r. Αυτό όμως σημαίνει ακριβώς ότι $M = U_{r,2r}$.

ii) $n = 2r+1$. Πάλι προς άτοπο, έστω ότι $M \neq U_{r,2r+1}$. Τότε όπως και πιο πάνω, υπάρχει κάποιο I υποσύνολο του E για το οποίο $|I| > r$ και I βάση. Τότε έστω ότι $|I| \geqslant r+2$. Τότε υπάρχει $I^{'} \subsetneq I$ το οποίο είναι ανεξάρτητο και $|I| - 1 = r(M) - 1 = |I^{'}| \geqslant r+1$. Τότε όμως $|E - I^{'}| < |I^{'}|$. Κάνοντας ακριβώς τις ίδιες πράξεις με πιο πάνω, έπεται ότι $M = U_{r,2r+1}$.
Σαν τελευταία περίπτωση, έστω πως $|I| = r+1$. Τότε επειδή $M \neq U_{r,2r+1}$, αν $I^{'} \subseteq E$ με $|I^{'}| = r+1$ πρέπει $I^{'} \notin \mathcal{I}$. Τότε
$$r(I^{'}) \leqslant |I^{'}| - 1 = r = r(M) - 1.$$

Τότε $|E - I^{'}| < |I^{'}|$ και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} r(I^{'}) + r(E - I^{'}) - r(M) &\leqslant r(M) - 1 + r(E - I^{'}) - r(M) \\ &= r(E - I^{'}) - 1 \\ &\leqslant \lambda - 1 \end{aligned}$$

άρα

$$r(E - I^{'}) \leqslant \lambda \leqslant |E - I^{'}|.$$

άρα $\lambda(M)$ πεπερασμένο, άρα άτοπο. Άρα κάθε υποσύνολο μεγέθους $r+1$ είναι ανεξάρτητο, άρα $M = U_{r+1,2(r+1)-1}$ (γιατί $r(M) = r+1$ και $n = 2r+1 = 2(r+1)-1$). Συνεπώς το ζητούμενο έπεται.

($\Leftarrow$) Έστω μία τυχούσα διαμέριση $(X, E - X) = (X, Y)$ του E. Έστω ότι $|X| = x$ και $|Y| = y$, ενώ ισχύει ότι $x + y = n$, αφού $(|X| + |E - X| = |E|)$. Έστω χ.π.γ. ότι $x \geqslant y$. Για να είναι το (X, Y) ένας λ διαχωρισμός του M, πρέπει

$$\min\{|X|, |Y|\} = y \geqslant \lambda$$

$$r(X) + r(Y) - r(M) \leqslant \lambda - 1.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

i) $n = 2r, 2r+1, 2r-1$: Τότε επειδή $x \geqslant y$, έπεται ότι $x \geqslant r$ και $y \leqslant r$. Τότε

$$r(X) + r(Y) - r(M) = r + y - r \leqslant \lambda - 1$$

$$\Rightarrow y + 1 \leqslant \lambda \leqslant y$$

Άρα για καμία διαμέριση και για κανένα λ δεν υπάρχει λ διαχωριστής του $U_{r,n}$. Συνεπώς αν $n = 2r, 2r+1, 2r-1$ έπεται ότι $\lambda(U_{r,n}) = \infty$.

ii) $n \leqslant 2r - 2$: Τότε $2r \geqslant n + 2 \Leftrightarrow r \geqslant \frac{n}{2} + 1$. Αν $n = 2k$ τότε $r \geqslant k + 1$, αν πάλι $n = 2k + 1$, τότε $r \geqslant \frac{2k+1}{2} + 1 = k + \frac{3}{2}$, άρα $r \geqslant k + 2$, αφού r ακέραιος. Τώρα αν $n = 2k$ τότε $r \geqslant k + 1 \Rightarrow r - 1 \geqslant k$ και αφού $x \geqslant k$, μπορούμε να επιλέξουμε $x = r - 1$. Αν πάλι $n = 2k + 1$ τότε $r \geqslant k + 2 \Rightarrow r - 1 \geqslant k + 1$ και αφού $x \geqslant k + 1$, τότε μπορούμε πάλι να επιλέξουμε $x = r - 1$. Άρα θεωρούμε $x = r - 1$. Τότε $y = n - r + 1$. Τότε

$$r(X) + r(Y) - r(E) = r - 1 + y - r = y - 1 \leqslant \lambda - 1 \Rightarrow y \leqslant \lambda \leqslant y$$

Άρα αν $\lambda = y = n - r + 1$, τότε το (X, Y) είναι ένας λ διαχωρισμός του M και άρα $\lambda(U_{r,n}) \leqslant n - r + 1$ για $n \leqslant 2r - 2$.

iii) $n \geqslant 2r+2$: Τότε $2r \leqslant n-2 \Rightarrow r \leqslant \frac{n}{2}-1$. Αν $n=2k$ ή $n=2k+1$ προκύπτει ότι $r \leqslant k-1 \Rightarrow k \geqslant r+1$. Επειδή $y \leqslant k$ μπορούμε να επιλέξουμε $y=r+1$. Τότε $x=n-r-1 \geqslant r+1 > r$ και έκτοτε

$$r(X)+r(Y)-r(M)=r+r-r \leqslant \lambda-1 \Rightarrow r+1 \leqslant \lambda \leqslant y=r+1$$

Άρα το (X,Y) είναι ένας $r+1$ διαχωριστής του M και άρα $\lambda(U_{r,n}) \leqslant r+1$ για $n \geqslant 2r+2$.

Τελικά αποδείξαμε το ζητούμενο. □

4.2 Ένας τύπος για την Tutte συνεκτικότητα

Θεώρημα 4. *Έστω M μητροειδές και έστω ότι για κάθε ομοιόμορφο μητροειδές $U_{r,n}$ με $n \geqslant 2r-1$, $M \ncong U_{r,n}$. Τότε*

$$\lambda(M)=\min\{\kappa(M), g(M)\}$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι $M \ncong U_{r,n}$ για $n \geqslant 2r-1$. Άρα, αν $M \cong U_{r,n}$ τότε πρέπει $n \leqslant 2r-2$. Αλλά τότε $\lambda(M) < \infty$ από Πρόταση 31. Αν πάλι $M \ncong U_{r,n}$, τότε πρέπει πάλι $\lambda(M) < \infty$ από Πρόταση 31. Έστω λοιπόν ότι $\lambda(M)=k$ για κάποιο θετικό ακέραιο k. Τότε υπάρχει k διαχωρισμός του E, $(X, E-X)=(X,Y)$. Τότε όμως

$$\min\{|X|,|Y|\} \geqslant k$$

$$|E(M)|=|X|+|E-X|=|X|+|Y| \geqslant 2k \geqslant 2(k-1)$$

Άρα επειδή $\lambda(M)=\infty$ και από Πρόταση 30, έπεται ότι

$$girth(M)=g(M)=\min\{|C| : C \text{ κύκλωμα}\} \geqslant k$$

Θα διακρίνουμε περιπτώσεις για το $g(M)$:
i) $g(M) \geqslant k+1$. Τότε από πιο πάνω Λήμμα, έπεται ότι το M είναι καθέτως k–διαχωρίσιμο. Συνεπώς πρέπει $\kappa(M) \leqslant \lambda(M)$. Όμως εξ' ορισμού, όλοι οι κάθετοι διαχωρισμοί ενός μητροειδούς είναι και διαχωρισμοί κατά Tutte. Αυτό σημαίνει ότι $\kappa(M) \geqslant \lambda(M)$. Συνεπώς, $\lambda(M)=\kappa(M)=k$ και άρα

$$\lambda(M)=\min\{\kappa(M), g(M)\}.$$

ii) $g(M)=\lambda(M)=k$ Θα διακρίνουμε άλλες 2 υποπεριπτώσεις:
A) Το M έχει δύο συν–κυκλώματα X,Y για τα οποία $X \cap Y=\emptyset$. Τότε υπάρχει (X,Y) κάθετος j–διαχωρισμός, από Πρόταση 28. Εξ' ορισμού λοιπόν,

$$(\kappa(M) \geqslant \lambda(M)) \wedge (g(M)=k) \Rightarrow \lambda(M)=\min\{\kappa(M), g(M)\}.$$

B) Έστω τώρα ότι το M δεν έχει δύο συν–κυκλώματα ξένα μεταξύ τους. Τότε από Πρόταση 28, το M δεν είναι καθέτως διαχωρίσιμο για κανένα θετικό ακέραιο k. Συνεπώς $\kappa(M) = r(M)$, εξ' ορισμού.
Έστω προς άτοπο λοιπόν ότι $r(M) < g(M) = k$. Τότε $g(M) \geqslant r(M) + 1$. Όμως για όλα τα κυκλώματα στο M, $r(C) = |C| - 1$. Άρα

$$|C| = r(C) + 1 \leqslant r(M) + 1 \overset{C\ \tau\upsilon\chi\acute{o}\nu}{\Rightarrow} g(M) \leqslant r(M) + 1.$$

Συνεπώς $g(M) = r(M)+1$ και άρα όλα τα κυκλώματα έχουν μέγεθος ίσο με $r(M)+1$. Τότε όμως πρέπει $M \cong U_{r(M),|E(M)|}$, γιατί αλλιώς αν $M \ncong U_{r(M),|E(M)|}$ τότε πρέπει να υπάρχει κάποιο $I \subseteq E$ για το οποίο $|I| \leqslant r(M)$ και $I \notin \mathcal{I}$. Τότε όμως I εξαρτημένο και άρα περιέχει κάποιο κύκλωμα C. Τότε όμως $|C| \leqslant r(M)$, άτοπο γιατί ισχύει ότι $|C| = r(M) + 1$, από πιο πάνω. Συνεπώς $r = r(M)$, $n = |E(M)|$ και $M \cong U_{r,n}$.

Έχουμε τώρα ότι

$$(\forall X, Y \in \mathcal{C}^*)(X \cap Y \neq \emptyset).$$

Θα δείξουμε ότι $2(n-r+1) > n$. Έστω $X \in \mathcal{C}^*$. Τότε $E - X \in \mathcal{I}^*$, αφού αν $E - X \notin \mathcal{I}^*$ τότε υπάρχει $X' \subseteq E - X$ με $X' \in \mathcal{C}^*$ και $X' \cap X = \emptyset$. Άτοπο. Άρα $E - X \in \mathcal{I}^*$. Φυσικά

$$\exists X'' \supsetneq E - X, X'' \in \mathcal{C}^*$$

και άρα

$$|X| + |X''| > |X| + |E - X| = n$$

και από Πόρισμα 11, έχουμε ότι

$$|X| = |X''| = n - r + 1$$

άρα

$$|X| + |X''| = 2(n - r + 1) > n.$$

Άρα

$$2(n - r + 1) > n$$

και συνεπώς αποδείξαμε αυτό που θέλαμε. Τώρα έχουμε

$$2(n - r + 1) > n \Rightarrow 2n - 2r + 2 > n \Rightarrow n > 2r - 2 \Rightarrow n \geqslant 2r - 1$$

Άρα $n \geqslant 2r - 1$ και $M \cong U_{r,n}$ συνεπώς έχουμε άτοπο ως προς την αρχική υπόθεση. Άρα

$$\kappa(M) = r(M) \geqslant g(M) = k \Rightarrow \lambda(M) = \min\{\kappa(M), g(M)\}$$

Συνεπώς αποδείξαμε για όλες τις περιπτώσεις το ζητούμενο. □

4.3 Σχέση της κάθετης συνεκτικότητας με την γραφοθεωρητική

Λήμμα 11. *Έστω (E_1, E_2) μία διαμέριση του συνόλου των ακμών ενός συνεκτικού γραφήματος G. Τότε*

$$|V(G[E_1])| + |V(G[E_2])| - |V(G)| = |V(G[E_1]) \cap V(G[E_2])|.$$

Απόδειξη. Για απλότητα, έστω $G[E_1] = G_1$, $G[E_2] = G_2$. Απαριθμούμε τις κορυφές του G μία–μία. Έστω v_1, v_2, v μεταβλητές που δηλώνουν τον αριθμό των κορυφών που έχουμε βρει να ανήκουν στα σύνολα κορυφών των $V(G_1), V(G_2)$ και $V(G)$ αντίστοιχα. Οι μεταβλητές αυτές έχουν αρχικές τιμές 0. Έστω λοιπόν κορυφή u του G. Αν έχουμε ότι $u \in V(G_1) - V(G_2)$, τότε

$$v_1 \leftarrow v_1 + 1,\ v_2 \leftarrow v_2,\ v \leftarrow v + 1.$$

Αν πάλι $u \in V(G_1) - V(G_2)$ τότε

$$v_1 \leftarrow v_1,\ v_2 \leftarrow v_2 + 1,\ v \leftarrow v + 1.$$

Τέλος, αν $u \in V(G_1) \cap V(G_2)$ τότε πάλι έχουμε:

$$v_1 \leftarrow v_1 + 1,\ v_2 \leftarrow v_2 + 1,\ v \leftarrow v + 1.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι κορυφές που ανήκουν βρίσκονται στο $V(G_1) \cap V(G_2)$ και μόνο αυτές προσμετρώνται δύο φορές στο άθροισμα $|V(G_1)| + |V(G_2)|$. Συνεπώς

$$|V(G_1)| + |V(G_2)| = |V(G)| + |V(G_1) \cap V(G_2)|.$$

Φέρνοντας το $|V(G)|$ στο πρώτο μέλος, το ζητούμενο έπεται. □

Λήμμα 12. *Έστω (E_1, E_2) μία διαμέριση του συνόλου των ακμών ενός συνεκτικού γραφήματος G. Τότε*

$$r(E_1) + r(E_2) - r(M(G)) \leqslant |V(G[E_1]) \cap V(G[E_2])| - 1.$$

Η ισότητα στη σχέση αυτή ισχύει όταν $G[E_i] = G_i,\ i = 1, 2$ συνεκτικό.

Απόδειξη. Από Πρόταση 9, ισχύει ότι $r(X) = |V(G[X])| - \omega(G[X])$ για το $M(G)$. Τότε

$$r(E_i) = |V(G_i)| - \omega(G_i),\ \omega(G_i) \geqslant 1$$

$$r(M(G)) = |V(G)| - \omega(G) \overset{G\ \text{συνεκτικό}}{=} |V(G)| - 1.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} r(E_1) + r(E_2) - r(M(G)) &= |V(G_1)| + |V(G_2)| - |V(G)| + 1 - \omega(G_1) - \omega(G_2) \\ &\overset{G_1, G_2\ \text{συνεκτικά}}{\leqslant} |V(G_1)| + |V(G_2)| - |V(G)| + 1 - 1 - 1 \\ &= |V(G_1)| + |V(G_2)| - |V(G)| - 1. \end{aligned}$$

Από Λήμμα 11, έχουμε ότι

$$|V(G_1)| + |V(G_2)| - |V(G)| = |V(G_1 \cap G_2)|$$

συνεπώς

$$r(E_1) + r(E_2) - r(M(G)) \leqslant |V(G_1 \cap G_2)| - 1$$

Παρατηρούμε ότι αν τα G_1, G_2 είναι συνεκτικά, τότε στις πράξεις πιο πάνω οι ανισώσεις γίνονται ισότητες. Συνεπώς τελείωσε η απόδειξη. $\square$

Λήμμα 13. *Έστω G συνεκτικό γράφημα και έστω V' ένας ελαχιστικός διαχωριστής μεγέθους k και έστω H_1, H_2 δύο συνεκτικές συνιστώσες του $G[V - V']$. Τότε, αν $E_i = E(G[V(H_i) \cup V'])$ για $i = 1, 2$ και $E' = E(G[V'])$, τότε $r(E_2 - E') = r(E_2)$.*

Απόδειξη. Προς άτοπο, έστω $r(E_2 - E') < r(E_2)$. Αυτό σημαίνει ότι τα $G[E_2]$ και $G[E_2 - E']$ έχουν διαφορετικού μεγέθους παραγόμενα δέντρα. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$(\forall u \in V')(\exists v \in V(H_2))(\{u, v\} \in E_2).$$

Αν δεν ίσχυε αυτό, δηλαδή αν υπήρχε κάποια κορυφή $w \in V'$ για την οποία $\{w, v\} \notin E(H_2)$ για κάθε $v \in V(H_2)$, τότε το $V' - w$ θα ήταν διαχωριστής, άρα η V' δεν θα ήταν ελαχιστική. $\square$

Συνεπώς, για αυτό το λόγο, η αφαίρεση του E' από το E_2 δεν δίνει γράφημα με περισσότερες του ενός συνιστώσες. Άρα τα γραφήματα $G[E_2]$ και $G[E_2 - E']$ έχουν τον ίδιο αριθμό κορυφών και είναι συνεκτικά. Συνεπώς έχουν παραγόμενα δέντρα ίδιου μεγέθους. Άρα $r(E_2 - E') = r(E_2)$.

Λήμμα 14. *Έστω G συνεκτικό γράφημα και έστω ότι έχει ελαχιστικό διαχωριστή V' μεγέθους k. Τότε το $M(G)$ είναι κάθετα k–διαχωρίσιμο.*

Απόδειξη. Έστω H_1, H_2 δύο συνεκτικές συνιστώσες του G. Έστω

$$G_i = G[V' \cup V(H_i)], E_i = E(G_i), i = 1, 2$$

Εφόσον G_i είναι συνεκτικά και αφού $|V(G_i)| \geqslant k + 1$, έπεται ότι ο αριθμός ακμών ενός παραγόμενου δέντρου θα έχει τουλάχιστον k ακμές. Άρα $r(E_i) \geqslant k$. Έχουμε τώρα

$$E' = E(G[V'])$$

και

$$E_2' = E(G) - E_1 \supseteq E_2 - E'.$$

Από προηγούμενο Λήμμα, έπεται ότι

$$r(E_2) \geqslant r(E_2 - E') = r(E_2) \geqslant k$$

άρα και

$$r(E_2^{'}) \geqslant k.$$

Από Λήμμα 12, έπεται ότι

$$r(E_1) + r(E_2^{'}) - r(M(G)) \leqslant |V(G_1) \cap V(G_2)| - 1 \leqslant |V^{'}| - 1 \leqslant k - 1$$

Αλλά και $\min\{r(E_1), r(E_2^{'})\} \geqslant k$. Συνεπώς

$$\min\{r(E_1), r(E_2^{'})\} \geqslant k$$

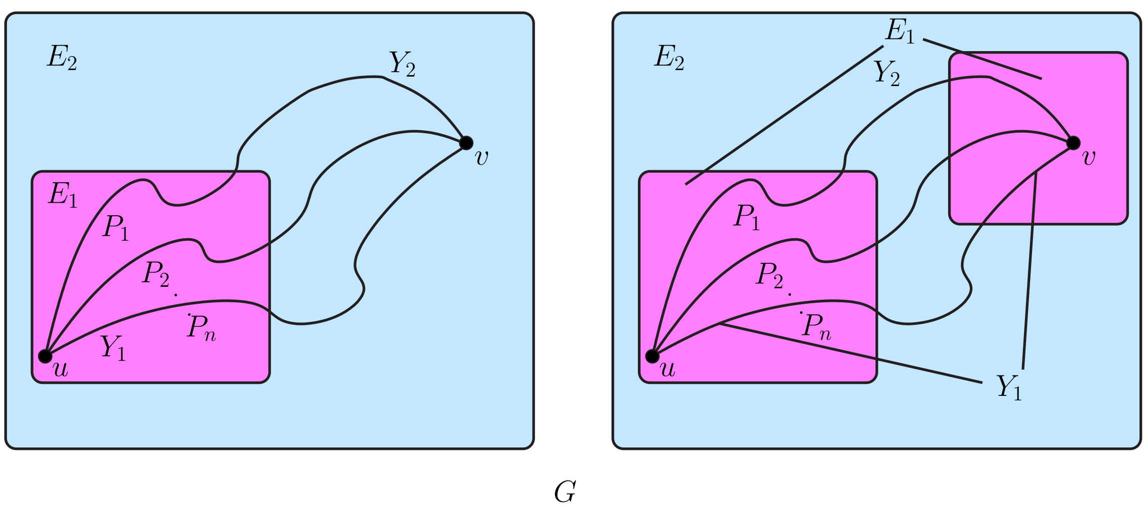
$$r(E_1) + r(E_2^{'}) - r(M(G)) \leqslant k - 1$$

και άρα το $M(G)$ είναι κάθετα k–διαχωρίσιμο. □

Ορισμός 52. Έστω G γράφημα και έστω $u, v \in V(G)$. Θα λέμε ότι οι u και v είναι *συνδεδεμένες* ανν οι u και v ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G.

Λήμμα 15. *Αν G είναι ένα n–συνεκτικό γράφημα, τότε το $M(G)$ δεν είναι κάθετα διαχωρίσιμο για κανένα $k < n$.*

Απόδειξη. Θα δουλέψουμε με απαγωγή σε άτοπο:
Έστω ότι υπάρχει $k < n$ τ.ω. να υπάρχει κάθετος k–διαχωρισμός του $M(G)$, (E_1, E_2). Ορίζουμε $G_i = G[E_i], i = 1, 2$. Θα δείξουμε αρχικά ότι κάθε δύο κορυφές του G είναι συνδεδεμένες σε κάποιο από τα G_1, G_2. Έστω προς άτοπο ότι δεν ισχύει αυτό, δηλαδή έστω ότι υπάρχουν κορυφές u, v οι οποίες δεν ανήκουν ταυτόχρονα στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G_1 ή του G_2. Τότε προφανώς $\{u, v\} \notin E(G)$.



Σχήμα 4.1: Λήμμα 15 περιπτώσεις.

Συνδυάζοντας τώρα το γεγονός ότι το G είναι n–συνεκτικό, από Θ.Menger έπεται ότι υπάρχουν εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια $P_1, P_2, ..., P_n$ από το u στο v. Έχουμε τώρα ότι $E(P_j) \nsubseteq E_i,\ j = 1, 2.., n,\ i = 1, 2$, από το Σχήμα 4.1. Θέτουμε τώρα

$$Y_i = E_i \cap \bigcup_{i=1}^{n} E(P_j).$$

Από Σχήμα 4.1, παρατηρούμε ότι Y_i είναι δέντρο. Συνεπώς είναι ανεξάρτητο σύνολο και άρα

$$r(Y_i) = |Y_i|.$$

Τώρα $Y_1 \cup Y_2 = \bigcup_{i=1}^{n} E(P_j)$ και πάλι από Σχήμα 4.1 βλέπουμε ότι για να κατασκευάσουμε ένα παραγόμενο δέντρο του $G[\bigcup_{i=1}^{n} E(P_j)]$, αρκεί να αφαιρέσουμε $n-1$ εξερχόμενες ακμές από την v. Συνεπώς τότε

$$r(Y_1)+r(Y_2)-r(Y_1 \cup Y_2) = |Y_1|+|Y_2|-|Y_1 \cup Y_2|+n-1 \overset{Y_1 \cap Y_2 = \emptyset}{=} |Y_1|+|Y_2|-|Y_1|-|Y_2|+n-1 = n-1.$$

Αλλά $E_i \supseteq Y_i$ και $E(G) \supseteq Y_1 \cup Y_2$, συνεπώς από Λήμμα 8 έχουμε ότι

$$r(E_1) + r(E_2) - r(E(G)) \geqslant r(Y_1) + r(Y_2) - r(Y_1 \cup Y_2).$$

Τότε όμως $k < n \Rightarrow k \leqslant n - 1$. Συνεπώς

$$r(E_1) + r(E_2) - r(E(G)) \geqslant n - 1 \geqslant k.$$

άτοπο ως προς την αρχική υπόθεση ότι το $M(G)$ είναι k–διαχωρίσιμο. Συνεπώς, κάθε ζεύγος κορυφών u, v, είναι συνδεδεμένο σε τουλάχιστον 1 από τα G_1, G_2.
Συνεχίζοντας έχουμε ότι $\min\{r(E_1), r(E_2)\} \geqslant k$ και $r(E_1) + r(E_2) - r(E(G)) \leqslant k - 1$. Άρα

$$r(E_1) + r(E_2) \leqslant r(E(G)) + k - 1.$$

Χ.π.γ. έστω ότι $r(E_1) = \max\{r(E_1), r(E_2)\}$. Τότε

$$\begin{aligned} \max\{r(E_1), r(E_2)\} &= r(E_1) \leqslant r(E(G)) - r(E_2) + k - 1 \\ &\overset{-r(E_2) \leqslant -k}{\leqslant} r(E(G)) - k + k - 1 \\ &= r(E(G)) - 1 < r(E(G)) \end{aligned}$$

άρα και

$$\max\{r(E_1), r(E_2)\} < r(E(G))$$

Συνεπώς ούτε το E_1 ούτε το E_2 είναι παραγόμενα σύνολα, από Πρόταση 17, άρα ούτε το G_1 ούτε το G_2 παράγουν ένα γράφημα που περιέχει κάποιο παραγόμενο δέντρο του G.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι κάθε δύο κορυφές που είναι συνδεδεμένες σε μία συνεκτική συνιστώσα H_1 του G_1 είναι και συνδεδεμένες σε κάποια συνεκτική συνιστώσα H_2 του G_2. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι $V(H_1) \subseteq V(H_2)$. Αλλά τότε $|V(G_2)| = |V(G)|$ και άρα το G_2 περιέχει ένα παραγόμενο δέντρο του G, άτοπο. Συνεπώς, υπάρχουν δύο κορυφές $u, v \in V(G)$ οι οποίες είναι συνδεδεμένες στο G_1 και όχι στο G_2.

Έστω τώρα $w \in V(G)$ με $w \notin V(H_1)$. Τότε u και w δεν είναι συνδεδεμένες στο G_1, άρα, από πιο πάνω, αναγκαστικά είναι συνδεδεμένες στο G_2 μέσω ενός μονοπατιού P_1. Ομοίως οι v και w είναι συνδεδεμένες στο G_2 μέσω ενός μονοπατιού P_2. Άρα ενώνοντας τα P_1 και P_2, συμπεραίνουμε ότι το μονοπάτι $P_1 \cup P_2$ συνδέει τις u και v στο G_2. Άτοπο. Συνεπώς τελικά συμπεραίνουμε πως το $M(G)$ δεν είναι κάθετα k–διαχωρίσιμο για κανένα $k < n$ □

Λήμμα 16. *Έστω G πλήρες γράφημα με $n = |V(G)| \geqslant 2$ και έστω $X \subseteq E(G)$. Τότε το X είναι ένας δεσμός ανν το $G[E(G) - X]$ έχει σαν συνεκτικές συνιστώσες τα K_r και K_q, για κάποιους ακεραίους με $r, q \geqslant 1$ και $r + q = n$.*

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Έχουμε ότι αφού $G[E(G) - X]$ μη–συνεκτικό και G συνεκτικό, τότε το X είναι τομή ακμών. Έστω τώρα X όχι ελαχιστική. Τότε υπάρχει $e \in X$ τ.ω. $G[(E(G) - X) \cup e]$ μη συνεκτικό. Αλλά αφού G είναι πλήρες γράφημα, έπεται ότι $G = K_r * K_q$. Συνεπώς

$$X = \{\{u, v\}/u \in V(K_r),\ v \in V(K_q)\}$$

άρα πρέπει $G[(E(G) - X) \cup e]$ συνεκτικό. Άρα $X - e$ όχι τομή ακμών, για κάθε $e \in X$, άρα X είναι δεσμός

($\Rightarrow$) Έστω ότι X δεσμός. Θ.δ.ο. $G[E(G) - X]$ έχει σαν συνεκτικές συνιστώσες τα K_r, K_q για κάποια $r, q \geqslant 1$ με $r + q = n$.

Προς άτοπο, έστω ότι το X δεν δίνει τις ζητούμενες συνεκτικές συνιστώσες αλλά κάποιες $H_1, H_2, .., H_\ell, \ell \geqslant 2$. Αρχικά, πρέπει $H_i = K_{|V(H_i)|}$. Αυτό, γιατί αν $H_i \neq K_{|V(H_i)|}$, τότε υπάρχει $\{u, v\} \in E(G)$, $\{u, v\} \notin E(H_i)$. Τότε όμως $\{u, v\} \in X$ και $X - e$ είναι επίσης τομή ακμών. Άρα X όχι ελαχιστική. Άρα πρέπει $H_i = K_{|V(H_i)|}$.

Τώρα ϑ.δ.ο. $\ell = 2$. Έστω προς άτοπο ότι $\ell \geqslant 3$. Τότε $G[E - X]$ αποτελείται από $K_{r_1}, K_{r_2}, ..., K_{r_\ell}$ συνεκτικές συνιστώσες. Τότε για κάθε K_{r_i}, K_{r_j}, $i \neq j$ υπάρχουν όλες οι δυνατές ακμές μεταξύ τους, αφού G πλήρες. Έστω X_{ij} να είναι αυτές. Τότε $X_{ij} \subseteq X$. Τότε όμως αν

$$Y = \{\{u, v\}/u \in V(K_{r_1}), v \in V(K_{r_j}), 2 \leqslant j \leqslant \ell\} \subsetneq X$$

τότε Y είναι τομή ακμών του G. Άρα X όχι ελαχιστική, άρα άτοπο. Άρα $\ell = 2$.

Συνεπώς αποδείξαμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 5. *Έστω G συνεκτικό γράφημα. Τότε*

$$\kappa(M(G)) = \kappa(G)$$

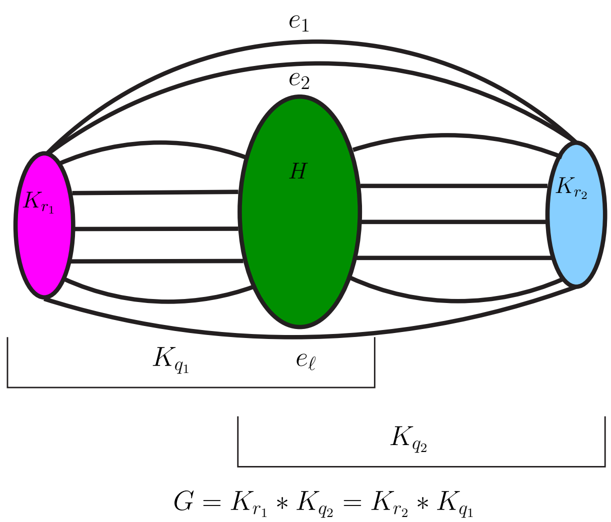
Απόδειξη. Αρχικά, έστω $\widetilde{G}$ να είναι το απλό γράφημα του G. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

i) $\widetilde{G}$ όχι πλήρης.

ii) $\widetilde{G}$ πλήρης.

i) Έστω ότι $\widetilde{G}$ όχι πλήρης. Τότε υπάρχουν κορυφές u και v τ.ω. $\{u,v\} \notin E(\widetilde{G})$. Τότε όμως $\{u,v\} \notin E(G)$ εξ' ορισμού για το G. Άρα και G όχι πλήρης. Έστω ότι $\kappa(G)=n$. Τότε το G έχει μία ελαχιστικό διαχωριστή μεγέθους n. Τότε όμως από Λήμμα 14, το $M(G)$ είναι κάθετα k–διαχωρίσιμο. Άρα $\kappa(M(G)) \leqslant n = \kappa(G)$. Από προηγούμενο Λήμμα τώρα, επειδή το G είναι n–συνεκτικό έπεται ότι το $M(G)$ δεν είναι κάθετα k-διαχωρίσιμο για κανένα $k<n$. Δηλαδή $\kappa(M(G)) \geqslant \kappa(G)$. Άρα $\kappa(M(G)) = \kappa(G)$ σε αυτή την περίπτωση.

ii) Έστω ότι $\widetilde{G}$ πλήρης. Τότε $\widetilde{G} = K_n$. Τότε πρέπει εξ' ορισμού $\kappa(G) = |V(G)|-1$. Θα δείξουμε ότι ένα πλήρες γράφημα δεν έχει δύο δεσμούς που να μην έχουν κοινά στοιχεία. Προς άτοπο, έστω X_1, X_2 δεσμοί με $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η αφαίρεση ενός δεσμού του $\widetilde{G}$, δημιουργεί δύο πλήρη γραφήματα K_r και K_q με $r+q=n,\ r,q \geqslant 1$. Έστω ότι K_{r_1}, K_{q_1} και K_{r_2}, K_{q_2}, $r_1+q_1=n, r_2+q_2=n, r_1,q_1,r_2,q_2 \geqslant 1$ είναι τα γραφήματα που προκύπτουν με την αφαίρεση των X_1 και X_2 αντίστοιχα από το $\widetilde{G}$.



Σχήμα 4.2: Θεώρημα 5. Η αποσύνθεση του G στα K_{r_1}, K_{q_2} και K_{r_2}, K_{q_1} αντίστοιχα.

Αφού $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, τότε χ.π.γ το X_2 πρέπει να είναι υποσύνολο του $E(K_{q_1})$. Όμως τότε υπάρχουν ακμές $e_1, e_2, .., e_\ell, \ell \geqslant 1$ οι οποίες με την αφαίρεσή τους δίνουν μία νέα τομή ακμών $X_1^{'} \subsetneq X_1$. Αυτό σημαίνει ότι X_1 δεν είναι δεσμός, άρα άτοπο.

Συνεπώς, το $\widetilde{G}$ δεν έχει δύο ξένους μεταξύ τους δεσμούς. Για να επεκτείνουμε το συμπέρασμά μας στο G, παρατηρούμε αρχικά ότι το G είναι ένα γράφημα που περιέχει σαν παραγόμενο υπογράφημα ένα πλήρες γράφημα. Συνεπάγεται από Λήμμα 16 ότι αν X είναι δεσμός για το G, τότε $G[E(G)-X]$ έχει σαν συνεκτικές συνιστώσες κάποια G_1, G_2 τα οποία περιέχουν πλήρη γραφήματα σαν παραγόμενα υπογραφήματα. Αυτό σημαίνει ότι αν αφαιρέσουμε τις παράλληλες ακμές του X, τότε αποκαλύπτεται ένας δεσμός του $\widetilde{G}$. Συνεπώς ένας δεσμός του G είναι υπερσύνολο ενός δεσμού του $\widetilde{G}$. Συνεπώς το G δεν

έχει δύο ξένους μεταξύ τους δεσμούς, άρα από Πρόταση 15, έπεται ότι το $M(G)$ δεν είναι κάθετα k-διαχωρίσιμο για κανένα k, άρα $\kappa(M(G)) = r(M(G)) = |V(G)| - 1$. Αλλά τότε $\kappa(M(G)) = \kappa(G)$ και συνεπώς αποδείξαμε αυτή την περίπτωση.
Συνεπώς αποδείξαμε ότι $\kappa(M(G)) = \kappa(G)$. □

4.4 Η κλάση των ομοιόμορφων μη–γραφικών μητροειδών

Λήμμα 17. *Κανένα μητροειδές $U_{r,n}$ με $r \geqslant 2, n - r \geqslant 2$ δεν είναι ισόμορφο με κάποιο γραφικό μητροειδές.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει κάποιο G με $M(G) \cong U_{r.n}, r \geqslant 2, n-r \geqslant 2$. Τότε πρέπει για όλους τους κύκλους C του G, να ισχύει ότι $|C| \geqslant r+1$, γιατί αλλιώς αν $|C| \leqslant r$ τότε $C \in \mathcal{I}_{r,n}$, άτοπο από ορισμό του $U_{r,n}$. Όλοι λοιπόν οι κύκλοι έχουν $\geqslant r+1$ στοιχεία.

Έστω τώρα ένα παραγόμενο δάσος του G. Τότε

$$|X| = r(X) = r(M) \overset{n-r\geqslant 2}{\leqslant} |E(M)| - 2 = n - 2.$$

Άρα $|E - X| \geqslant 2$ και έστω $e_1, e_2, ..., e_\ell, \ell \geqslant 2$ μία απαρίθμηση των ακμών του $E - X$. Έστω ότι το $G[X]$ έχει τα $H_1, H_2, ..., H_\ell$ ως συνεκτικές συνιστώσες. Τότε κανένα e_i δεν συνδέει κάποια από τα H_j, H_k στο G. Παίρνουμε το γράφημα $G[X \cup e_i]$. Ας πούμε ότι η e_i πέφτει στην H_j. Τότε αφού H_j δέντρο, έπεται ότι υπάρχει κύκλος $C \subseteq E(H_j) \cup e_i$ με $|C| \leqslant r+1$. Αφού όμως $|C| \geqslant r+1$, από πιο πάνω, έπεται ότι $|C| = r+1$. Αυτό γίνεται μόνο αν το $G[X]$ έχει μόνο μία συνεκτική συνιστώσα και αυτή είναι μονοπάτι. Ας πούμε ότι το $G[X]$ έχει ένα μονοπάτι με άκρα τα u και v. Τότε $e_i = \{u, v\}$. Ας πάρουμε τώρα κάποιο $e_j \neq e_i$. Τότε επειδή $|C| \geqslant r+1 \geqslant 3$, το e_j δεν μπορεί να είναι θηλιά(μήκος 1), ούτε να είναι παράλληλη ακμή(μήκος 2). Επίσης, οι ακμές αυτές δεν μπορούν να κάνουν παρακλάδια στον κύκλο, γιατί τότε ανεβαίνει η τάξη του γραφήματος. Συνεπώς δεν μπορεί να υπάρξει τέτοιο γράφημα.

Συνεπώς δεν υπάρχει ομοιόμορφο μητροειδές με $r \geqslant 2, n - r \geqslant 2$ το οποίο να είναι ισόμορφο με κάποιο γραφικό μητροειδές. □

4.5 Συνδυαστικά δυϊκά γραφήματα και 3–συνεκτικότητα

Πόρισμα 16. *Έστω G συνεκτικό γράφημα με $|V(G)| \geqslant 3$ και έστω $G \ncong K_3$. Τότε*

$$\lambda(M(G)) = \min\{\kappa(G), g(G)\}$$

Απόδειξη. Το G είναι συνεκτικό και $|V(G)| \geqslant 3$, άρα πρέπει

$$r(M(G)) \overset{\text{Πόρισμα 9}}{=} |V(G)| - 1 \geqslant 3 - 1 = 2.$$

Συνεπώς $r(M(G)) \geqslant 2$. Επιπλέον, αφού G συνεκτικό και $|V(G)| \geqslant 3$, έπεται ότι στην χειρότερη περίπτωση($|V(G)| = 3$) το γράφημα θα πρέπει να έχει $\geqslant 2$ ακμές. Θ.δ.ο

$$M(G) \ncong U_{r,n}, n \geqslant 2r - 1$$

Από αντιθετοαναστροφή αρκεί ν.δ.ο. $M(G) \cong U_{r,n} \Rightarrow n \leqslant 2r-2$. Έστω λοιπόν ότι $M(G) \cong U_{r,n}$, για κάποια $r, n, r \leqslant n$. Τότε, από προηγούμενο Λήμμα, αφού $r \geqslant 2$ έπεται ότι $n - r \leqslant 1 \Rightarrow n - 1 \leqslant r$. Αν $r = n$ τότε $n \geqslant 2r-1 \Rightarrow n \geqslant 2n-1 \Rightarrow n \leqslant 1$, άτοπο. Άρα $n \leqslant 2r-2$ σε αυτή την περίπτωση. Αν πάλι $r = n-1$, τότε $n \geqslant 2r-1 \Rightarrow n \geqslant 2n-3 \Rightarrow n \leqslant 3$. Αλλά $r \geqslant 2$ και άρα αν $n \leqslant 2 \Rightarrow r \leqslant 1$, άτοπο. Άρα τότε $n = 3$. Όμως τότε $G \cong K_3$, άρα άτοπο ως προς την αρχική υπόθεση. Άρα και πάλι $n \leqslant 2r-2$. Συνεπώς $n \leqslant 2r-2$ και άρα έπεται το ζητούμενο.

Από Θεώρημα 4 έχουμε

$$\lambda(M(G)) = \min\{\kappa(M(G)), g(G)\}$$

Όμως από Θεώρημα 5, $\kappa(M(G)) = \kappa(G)$ και έκτοτε

$$\lambda(M(G)) = \min\{\kappa(G), g(G)\}$$

□

Πόρισμα 17. *Έστω G συνεκτικό γράφημα χωρίς απομονωμένες κορυφές με $|V(G)| \geqslant 3$ και έστω $G \ncong K_3$. Τότε*

$$\lambda(M(G)) \geqslant 3 \Leftrightarrow \kappa(G) \geqslant 3 \text{ και απλό}$$

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Ας πάρουμε το G να είναι 3–συνεκτικό και απλό. Αυτό σημαίνει ότι το G δεν έχει θηλιές ή παράλληλες ακμές. Η θηλιά είναι κύκλος μήκους 1 ενώ δύο παράλληλες ακμές σχηματίζουν κύκλο μήκους 2. Άρα αν C είναι κύκλος του G, τότε $|C| \geqslant 3$. Αφού G συνεκτικό τότε και $\kappa(M(G)) = \kappa(G) \geqslant 3$. Άρα από προηγούμενο Πόρισμα, $\lambda(M(G)) = \min\{\kappa(G), g(G)\}$ και συνεπώς $\lambda(M(G)) \geqslant 3$.

($\Rightarrow$) Έστω ότι $\lambda(M(G)) \geqslant 3$. Τότε από Θεώρημα 4, $\kappa(M(G)) \geqslant 3$ και $g(G) \geqslant 3$. Από το γεγονός ότι $g(G) \geqslant 3$ έπεται ότι το G δεν έχει θηλιές και παράλληλες ακμές, άρα το G είναι απλό. Τώρα από Πρόταση 1, $M(G)$ συνεκτικό ανν G 2–συνεκτικό άρα G συνεκτικό. Συνεπώς $\kappa(M(G)) = \kappa(G)$, από Θεώρημα 5 και άρα $\kappa(G) \geqslant 3$. □

Θεώρημα 6. *Έστω G' ένα συνδυαστικό δυϊκό γράφημα ενός 3–συνεκτικού, απλού και επίπεδου γραφήματος G και έστω ότι το G' δεν έχει απομονωμένες κορυφές. Τότε το G' είναι 3–συνεκτικό και απλό.*

Απόδειξη. Αρχικά, έχουμε ότι G 3–συνεκτικό και K_3 όχι 3–συνεκτικό. Άρα δεν μπορεί

$G \cong K_3$. Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο Πόρισμα. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} G \text{ 3–συνεκτικό και απλό} & \overset{\text{Πόρισμα 17}}{\Leftrightarrow} \text{3–συνεκτικό} \\ & \overset{\text{Πόρισμα 15}}{\Leftrightarrow} M^*(G') \text{ 3–συνεκτικό} \\ & \overset{\lambda(M^*(G'))=\lambda(M(G'))}{\Longleftrightarrow} M(G') \text{ 3–συνεκτικό} \\ & \overset{\text{Πόρισμα 17}}{\Leftrightarrow} G' \text{ 3–συνεκτικό και απλό} \end{aligned}$$

Για να ισχύει η τελευταία ισοδυναμία στην κατεύθυνση($\Leftarrow$), πρέπει να ισχύει ότι $G' \ncong K_3$ και $|V(G')| \geqslant 3$. Αν $G' \cong K_3$ τότε το μοναδικό κύκλωμα στο G' πρέπει να είναι και μοναδικό συν–κύκλωμα στο G. Τότε όμως πρέπει $|V(G)| = 4$. Αυτό γιατί αν $|V(G)| \leqslant 2$, τότε το G θα πρέπει να έχει θηλιές ή παράλληλες ακμές, αν $|V(G)| = 3$ τότε $G \cong K_3$ και άρα πρέπει $|V(G)| \geqslant 4$. Τότε όμως αφού G είναι συνεκτικό με τρεις ακμές, έπεται ότι $|V(G)| = 4$ και άρα το G είναι ένα μονοπάτι, άτοπο γιατί δεν είναι 3–συνεκτικό. Άρα $G' \ncong K_3$. Αν τώρα $|V(G')| \leqslant 2$, τότε αν $|V(G')| = 1$, τότε όλες οι ακμές του G' είναι θηλιές, άρα συν–θηλιές στο G και άρα G όχι 3–συν. Αν πάλι $|V(G')| = 2$, τότε οι δύο κορυφές του G' ενώνονται με παράλληλες ακμές, οι οποίες σχηματίζουν ένα μονοπάτι στο G. Άρα τότε G όχι 3–συνεκτικό. Άρα $|V(G')| \geqslant 3$.

Συνεπώς το G' είναι 3–συνεκτικό και απλό. □

Να σημειώσουμε ότι μία απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος υπάρχει και στο [3], όμως με φορμαλισμό παλαιοτέρων ετών.

Κεφάλαιο 5

Το θεώρημα του Whitney και οι συνέπειές του

5.1 Θεώρημα Whitney

Το παρακάτω λήμμα έχει αποδειχθεί στο [9]. Όλο όμως το υπόλοιπο κεφάλαιο είναι αποκλειστικά από το [8].

Λήμμα 18. *Έστω G, H γραφήματα χωρίς θηλιές και $\theta : E(G) \to E(H)$ αντιστοιχία τ.ω. $M(G) \cong_\theta M(H)$. Τότε αν G είναι 3–συνεκτικό, τα G και H είναι θ–ισόμορφα.*

Απόδειξη. Έστω $u \in V(G)$ και έστω $E = E(G), E_u = E(u)$ οι ακμές που προσπίπτουν στην u. Αφού το G είναι 3–συνεκτικό, τότε $G[E - E_u]$ είναι 2–συνεκτικό. Τότε από Πρόταση 25, το E_u είναι ένας δεσμός. Τώρα, $M(G) \cong_\theta M(H)$, άρα από Πρόταση 24, $M^*(G) \cong_\theta M^*(H)$, δηλαδή για το E_u ισχύει:

$$E_u \text{ δεσμός του } G \Leftrightarrow \theta(E_u) \text{ δεσμός του } H$$

Από Πρόταση 1,

$$G[E - E_u] \text{ 2–συνεκτικό} \Leftrightarrow M(G[E - E_u]) \text{ συνεκτικό}$$

Επίσης,

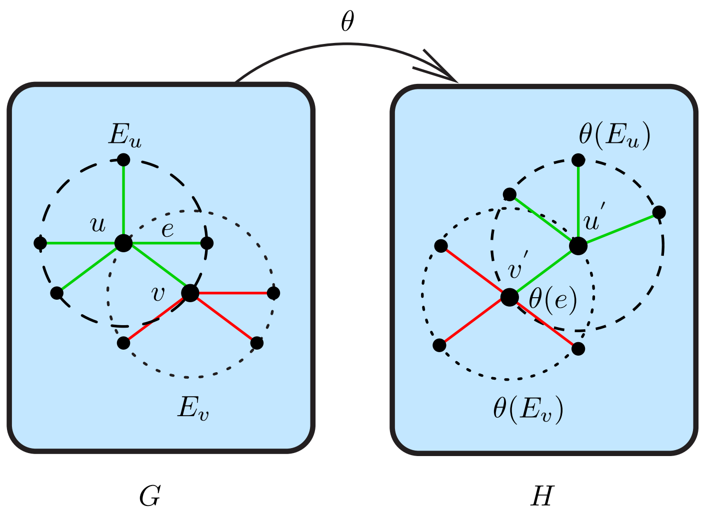
$$M(G[E - E_u]) \cong_{\theta|E-E_u} M(H[\theta(E - E_u)])$$

λόγω Πορίσματος 8 και άρα από Πόρισμα 15 καί το $M(H[\theta(E - E_u)]$ είναι συνεκτικό. Ισοδύναμα λοιπόν και το $H[\theta(E - E_u)]$ είναι 2–συνεκτικό. Συνεπώς

$$G[E - E_u] \text{ 2–συνεκτικό} \Leftrightarrow H[\theta(E - E_u)] \text{ 2–συνεκτικό}$$

για κάθε κορυφή $u \in V(G)$. Άρα $H[\theta(E - E_u)]$ 2–συνεκτικό και $\theta(E_u)$ είναι δεσμός Αυτό σημαίνει ότι το $\theta(E_u)$ είναι ένα αστέρι του H γιατί αν δεν ήταν, τότε το $\theta(E_u)$ θα διαχώριζε το γράφημα σε παραπάνω από μία συνεκτικές συνιστώσες και άρα δεν θα ήταν 2–συνεκτικό. Συνεπώς για κάθε κορυφή $u \in V(G)$:

$$E_u \text{ αστέρι του } G \Leftrightarrow \theta(E_u) \text{ αστέρι του } H$$



Σχήμα 5.1: Λήμμα 18.

Τώρα, υπάρχει μία αντιστοιχία $\sigma_1 : V(G) \to 2^{E(G)}$ μεταξύ των κορυφών του G και των αστεριών του, και μία αντιστοιχία $\sigma_2 : 2^{E(H)} \to V(H)$ μεταξύ των αστεριών του H και των κορυφών τους. Επίσης ορίζουμε $\phi : 2^{E(G)} \to 2^{E(H)}$ τ.ω. για κάθε υποσύνολο X του $E : \phi(X) = \theta(X)$. Θέτοντας

$$\psi = \sigma_2 \circ \phi \circ \sigma_1 : V(G) \to V(H)$$

τότε για τις αντιστοιχίες θ, ψ ισχύει ότι για κάθε $u \in V(G), e \in E(G)$,

$$u \in e \Leftrightarrow \psi(u) \in \theta(e)$$

Άρα $G \cong_\theta H$. □

Λήμμα 19. *Έστω G 2–συνεκτικό γράφημα με τουλάχιστον 4 κορυφές και έστω ότι το G δεν είναι 3–συνεκτικό. Τότε το G έχει αναπαράσταση γενικευμένου κύκλου, κάθε τμήμα του οποίου είναι τεμάχιο.*

Απόδειξη. Έστω $\{u, v\}$ ένας 2–διαχωριστής του G. Έστω ότι το $G - \{u, v\}$ έχει σαν συνεκτικές συνιστώσες τα $H_1, H_2, ..., H_\lambda, \lambda \geqslant 1$. Ορίζουμε $G_1 = G[V(H_1) \cup \{u, v\}]$ και $G_2 = G[V(H_{-1}) \cup \{u, v\}]$, όπου $H_{-1} = G - \{u, v\} - V(H_1)$. Για να μην υπάρχουν κοινές ακμές με το G_1, αφαιρούμε από το G_2 όλες τις ακμές από το u στο v. Έστω G_2' το νέο γράφημα που προκύπτει. Το G_2' είναι 2–συνεκτικό. Τα G_1, G_2 έχουν $\geqslant 3$ κορυφές το καθένα, διαμερίζουν το σύνολο ακμών του G, έχουν ακριβώς δύο κοινές κορυφές και αν αντικαταστήσουμε τα G_1, G_2' με δύο ακμές $e_{G_1}, e_{G_2'}$ με άκρα τα u και v, τότε παίρνουμε έναν κύκλο. Συνεπώς G_1, G_2' αποτελούν γενικευμένο κύκλο του G.

Έστω τώρα ότι το G_1 δεν είναι 2–συνεκτικό. Τότε το G_1 αποτελείται από δύο συνιστώσες $G_{1,1}, G_{1,2}$ οι οποίες έχουν μία μοναδική κοινή κορυφή, την x. Έστω ότι $x = u$ ή $x = v$. Τότε το G δεν είναι 2–συνεκτικό, άρα άτοπο. Αν τώρα οι u, v ανήκουν εξ' ολοκλήρου στο $G_{1,1}$ ή $G_{1,2}$, τότε το G περιέχει έναν διαχωριστή μεγέθους 1, την $\{x\}$, άρα πάλι άτοπο. Συνεπώς τα $G_{1,1}, G_{1,2}, G_2'$ διαμερίζουν πάλι το σύνολο ακμών του G, το καθένα έχει ακριβώς δύο κοινές κορυφές με το υπόλοιπο γράφημα και η αντικατάσταση των $G_{1,1}, G_{1,2}, G_2'$ με ακμές στις κορυφές επαφής τους δίνουν το K_3, το οποίο είναι κύκλος. Άρα $G_{1,1}, G_{1,2}, G_2'$ αποτελούν πάλι γενικευμένο κύκλο. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, ελέγχουμε αν τα $G_{1,1}$ και $G_{1,2}$ είναι 2–συνεκτικά και αν κάποιο δεν είναι, τότε πράττουμε όπως με το G_1. Τελικά προκύπτει αναδρομικά ότι το G_1 μπορεί να διασπαστεί σε τεμάχια τα οποία μαζί με το τεμάχιο G_2' δίνουν έναν γενικευμένο κύκλο. □

Λήμμα 20. *Έστω G 2–συνεκτικό γράφημα με γενικευμένη αναπαράσταση κύκλου $G_1, G_2, ..., G_k$. Έστω γράφημα H για το οποίο $M(G) \cong_\theta M(H)$, όπου $\theta : E(G) \to E(H)$ αντιστοιχία. Τότε το H έχει αναπαράσταση γενικευμένου κύκλου $H_1, H_2, ..., H_k$, όπου $H_i = H[\theta(E(G_i))]$.*

Απόδειξη. Για κάποιο $j \in \{1, 2, ..., k\}$, έστω $G_{-j} = \bigcup_{i \neq j} G_i, H_{-j} = \bigcup_{i \neq j} H_i$. Για να αποδείξουμε ότι τα $H_1, H_2, ..., H_k$ αποτελούν μία αναπαράσταση γενικευμένου κύκλου για το H, πρέπει αρχικά ν.δ.ο.

$$|V(H_j) \cap V(H_{-j})| = 2$$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι εφόσον τα $G, G_1, G_2, ..., G_k$ είναι τεμάχια έπεται και ότι τα $H, H_1, H_2, ..., H_k$ είναι τεμάχια, λόγω Πρότασης 15.

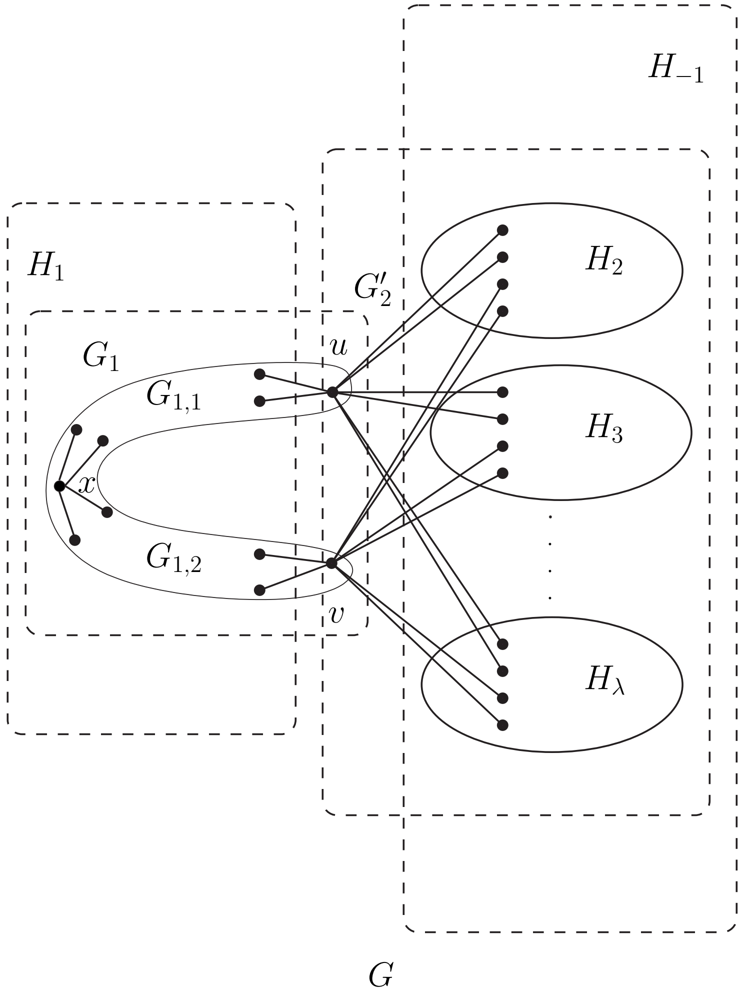
Το G έχει ένα κύκλο C ο οποίος τέμνει όλα τα σύνολα $E(G_1), E(G_2), ..., E(G_k)$, συνεπώς και το $\theta(C)$ είναι κύκλος και τέμνει όλα τα $E(H_1), E(H_2), ..., E(H_k)$. Αυτό μας κάνει να συμπεράνουμε ότι το H_{-j} έχει μία ακμή e με κάποιο άκρο x στο H_j. Έστω τώρα κάποιο $f \in E(H_j)$. Τότε, αφού το H είναι τεμάχιο, υπάρχει κύκλος C_1 που περιέχει τις e και f.

Τώρα, ξεκινώντας από το x και διατρέχοντας πρώτα την ακμή e, διατρέχουμε τον κύκλο C_1 μέχρι την πρώτη φορά που θα βρούμε κάποια κορυφή του H_j. Εφόσον ο C_1 περιέχει την ακμή f στο H_j πρέπει να υπάρχει αυτή η κορυφή. Έστω y αυτή. Ορίζουμε P να είναι το μονοπάτι από την x στην y. Τότε

$$y \in V(H_j) \cap V(H_{-j}) - x$$

Συνεπώς προκύπτει ότι

$$|V(H_j) \cap V(H_{-j})| \geqslant 2$$



Σχήμα 5.2: Λήμμα 19. Η αποσύνθεση του G στα G_1, και G_2'.

Αν αποδείξουμε ότι

$$V(H_j) \cap V(H_{-j}) = \{x, y\} \; (*)$$

τότε έχουμε τελειώσει.

Έστω u ένας από τους δύο διαχωριστές του G_j. Αφού το G_j είναι τεμάχιο, το αστέρι γύρω από την u, E_u, είναι ένας δεσμός για το G_j. Συνεπώς το $\theta(E_u)$ είναι επίσης δεσμός για το H_j, άρα το $H_j \backslash \theta(E_u)$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες. Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 21. *Κάθε κύκλος του H που περιέχει μία ακμή του H_j και του H_{-j} περιέχει επίσης και μία ακμή του $\theta(E_u)$.*

Απόδειξη. Προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε κύκλος του G που περιέχει μία ακμή του G_j και μία ακμή του G_{-j} περιέχει επίσης μία ακμή του E_u. Αυτό έχει σαν συνέπεια λόγω ισομορφισμού να ισχύει και για το H το ίδιο. $\square$

Έστω τώρα ότι τα x, y συνδέονται με ένα μονοπάτι στο $H_j \backslash \theta(E_u)$. Τότε η ένωσή του με το P είναι ένας κύκλος C' στο H. Επειδή $E(P) \cap E(H_{-j}) \neq \emptyset$ το C' περιέχει ακμές του H_j καί του H_{-j}. Αλλά τότε το C' δεν περνάει από το $\theta(E_u)$, άτοπο από πάνω Λήμμα.

Τώρα έστω ότι τα x, y περιέχονται στα H_j^x και H_j^y, συνιστώσες του $H_j \backslash \theta(E_u)$. Έστω τώρα προς άτοπο ότι δεν ισχύει το (*). Τότε το $V(H_j) \cap V(H_{-j}) - \{x, y\}$ περιέχει κάποια κορυφή z. Έστω ότι g, h είναι εξερχόμενες ακμές του z που ανήκουν στα H_{-j} και H_j αντίστοιχα. Επειδή το H είναι τεμάχιο, έπεται ότι υπάρχει κύκλος C_2 που περιέχει τις g, h, από Πρόταση 1. Διατρέχουμε τον C_2 ξεκινώντας από την κορυφή z και καλύπτοντας την ακμή g πρώτα. Έστω ότι το w είναι το πρώτο σημείο όπου το C_2 συναντά το $V(P) \cup V(H_j)$. Αν $w = z$, τότε το C_2 δεν διατρέχει καθόλου την h, άρα $w \neq z$. Έστω ότι Q είναι το μονοπάτι από την z στην w που διατρέξαμε.
Θα διακρίνουμε 3 περιπτώσεις στις οποίες σε κάθε μία θα βρούμε ότι το H έχει ένα κύκλο C_3 ο οποίος διατρέχει τα H_j, H_{-j} αλλά όχι το $\theta(E_u)$. Αυτό μας φέρνει αντίφαση στο πιο πάνω Λήμμα, άρα δεν ισχύει το (*) και ισχύει ότι

$$|V(H_j) \cap V(H_{-j})| = 2.$$

Έστω λοιπόν χ.π.γ. ότι $z \in H_j^x$. Τότε:

i) $w \in V(P)$. Τότε συνδέοντας το Q με το P από την x στην z, παίρνουμε ένα μονοπάτι από την z στην x. Το συνδέουμε με ένα μονοπάτι τυχαίο μονοπάτι στο H_j από την x στην z και προκύπτει ο κύκλος C_3.

ii) $w \in V(H_j^x) - V(P)$. Συνδέουμε το Q με ένα τυχαίο μονοπάτι στο H_j^x από την x στην z, παράγοντας τον C_3.

iii) $w \in V(H_j^y) - V(P)$. Εδώ ο C_3 παράγεται συνδέοντας τα Q, P και δύο τυχαία μονοπάτια, το ένα στο H_j^x από την x στην z και το άλλο στο H_j^y από την y στην w.

Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι και στις 3 περιπτώσεις λόγω του πάνω Λήμματος η υπόθεση (*) δεν ισχύει, άρα

$$|V(H_j) \cap V(H_{-j})| = 2.$$

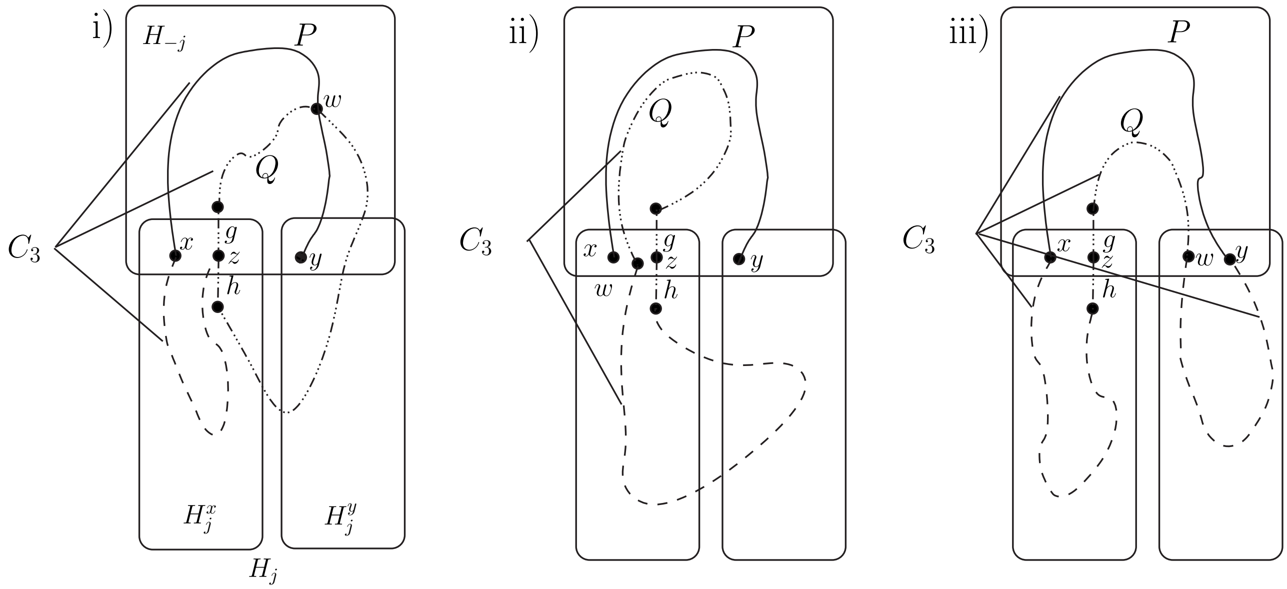
Συνεπώς το H έχει αναπαράσταση γενικευμένου κύκλου τα $H_1, H_2, ..., H_k$, όπου

$$H_i = H[\theta(E(G_i))].$$

$\square$

Θεώρημα 7. *(Whitney 1933). Έστω G και H γραφήματα χωρίς απομονωμένες κορυφές. Τότε*

$$M(G) \cong M(H) \Leftrightarrow G \text{ και } H \text{ 2–ισόμορφα}.$$



Σχήμα 5.3: Περιπτώσεις i)$w \in V(P)$,ii)$w \in V(H_j^x) - V(P)$,iii)$w \in V(H_j^y) - V(P)$

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Έστω ότι G και H 2–ισόμορφα. Τότε πρέπει να έχουν τους ίδιους κύκλους. Άρα

$$M(G) \cong M(H).$$

($\Rightarrow$) Έστω ότι $M(G) \cong M(H)$. Τότε κάνουμε διάσπαση στους 1–διαχωριστές των G και H, παράγοντας τα γραφήματα G^+ και H^+. Τα G και G^+ έχουν τους ίδιους κύκλους. Όμοίως και τα H και H^+. Συνεπώς $M(G) \cong M(G^+)$ και $M(H) \cong M(H^+)$, συνεπώς $M(G^+) \cong M(H^+)$.

Αν τώρα αποδείξουμε ότι G^+ και H^+ 2–ισόμορφα, τότε έχουμε τελειώσει γιατί μπορούμε με ένωση κορυφών να παράγουμε τα G και H. Περιορίζουμε λοιπόν την απόδειξη σε G και H 2–συνεκτικά.

Θα αποδείξουμε ότι αν G 2–συνεκτικό και $M(G) \cong M(H)$, τότε μπορούμε να πάρουμε το G από το H με μία πεπερασμένη ακολουθία από στρέψεις. Δουλεύουμε με επαγωγή στον αριθμό των κορυφών του $G, |V(G)|$:

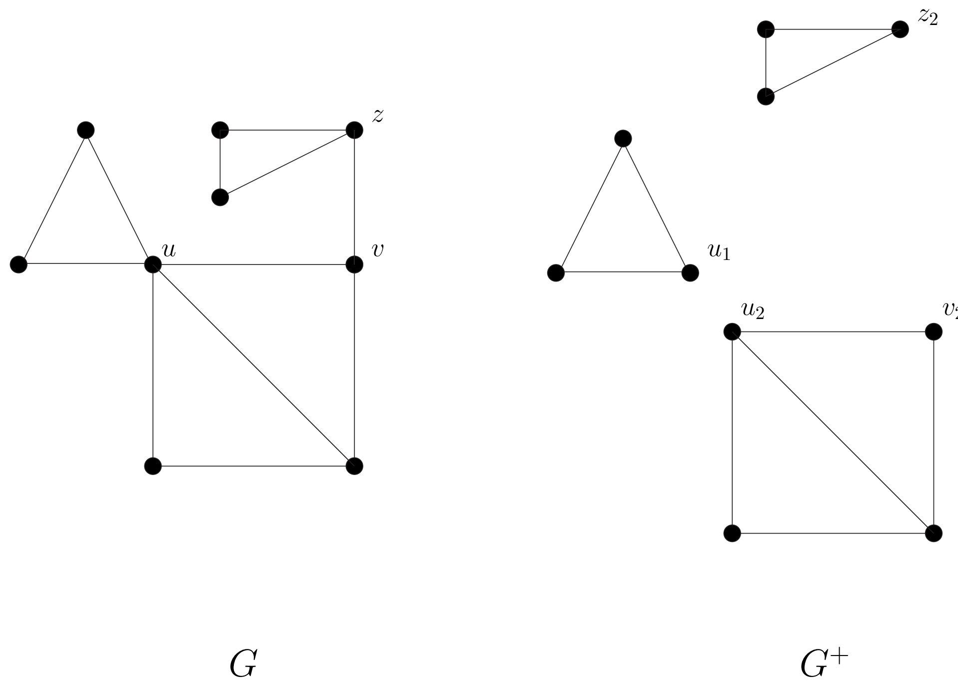
Για την βάση της επαγωγής, εξετάζουμε όλα τα 2–συνεκτικά γραφήματα με αριθμό κορυφών $\leqslant 4$. Αυτά μπορεί να είναι τα παρακάτω.

Τότε το G είναι ισόμορφο με το H, άρα για $|V(G)| \leqslant 4$ ισχύει το Θεώρημα.

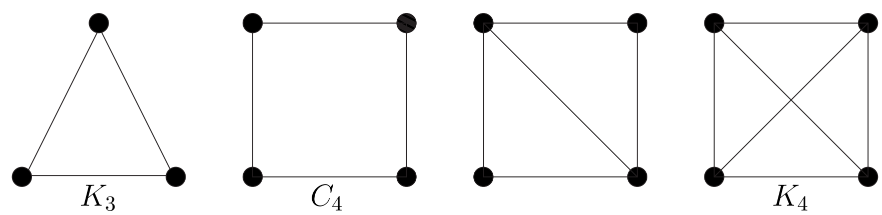
Τώρα υποθέτουμε ότι για $n \geqslant 5$, όλα τα 2–συνεκτικά γραφήματα με αριθμό κορυφών μικρότερο του n ισχύει το Θεώρημα. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και $|V(G)| = n$.

Παρατηρούμε αρχικά ότι αν τα G, H είναι 3–συνεκτικά, τότε λόγω Λήμματος 18 είναι ισόμορφα. Άρα για 3–συνεκτικά γραφήματα το Θεώρημα ισχύει.

Έστω τώρα ότι το G είναι 2–συνεκτικό και όχι 3–συνεκτικό. Από Λήμμα 19 το G έχει γενικευμένη αναπαράσταση κύκλου $G_1, G_2, ..., G_k,\ k \geqslant 2$ όπου $G_i, i \leqslant k$ τεμάχια. Άρα από



Σχήμα 5.4: Διάσπαση του G στο G^+.



Σχήμα 5.5: Όλα τα 2–συνεκτικά γραφήματα με $|V(G)| \leqslant 4$.

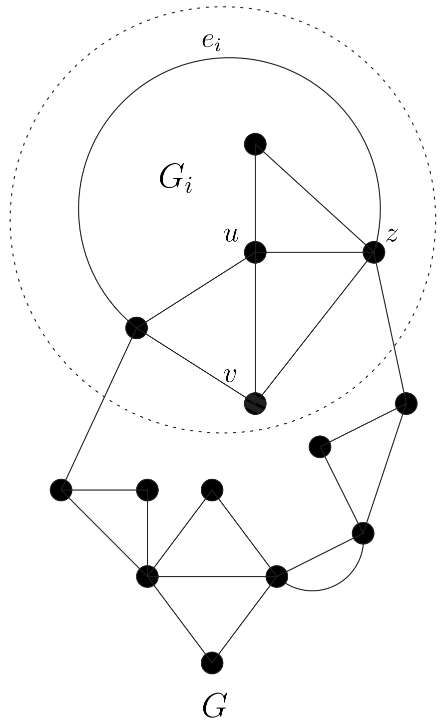
Λήμμα 20 το H έχει γενικευμένη αναπαράσταση κύκλου $H_1, H_2, ..., H_k$ με

$$H_i = H[\theta(E(G_i)].$$

Τώρα, ορίζουμε για κάθε G_i το $G_i + e_i$ και ομοίως για το H_i το $H_i + f_i$, όπου οι e_i και f_i περνούν από τις κορυφές επαφής των G_i και H_i. Παρατηρούμε ότι κάθε 2–διαχωριστής του $G_i + e_i$ είναι και 2–διαχωριστής του G, συνεπώς, αν πάρουμε από το $H_i + f_i$ γράφημα ισόμορφο με το $G_i + e_i$ με στρέψεις, τότε μπορούμε να πάρουμε με στρέψεις το G από το H.

Θα δείξουμε τώρα ότι αν $M(G_i) \cong_\theta M(H_i)$ όπου $\theta : E(G_i) \to E(H_i)$ αντιστοιχία, τότε η επέκτασή της στο $E(G_i) \cup e_i$, θ', ορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ των $M(G_i + e_i)$ και $M(H_i + f_i)$.

Έστω C κύκλος του $G_i + e_i$. Αν ο C περιέχει την e_i, τότε $C - e_i$ είναι μονοπάτι με



Σχήμα 5.6: Το $\{u, v\}$ είναι ένας 2–διαχωριστής του G_i αλλά όχι του G και του $G_i + e_i$ ενώ το $\{v, z\}$ είναι 2–διαχωριστής και του G_i και του G.

αρχή και τέλος τις κορυφές επαφής του $G_i + e_i$. Τότε όμως $\theta^{'}(C) - f_i$ μονοπάτι με αρχή και τέλος τις κορυφές επαφής του $H_i + f_i$. Άρα $\theta^{'}(C)$ είναι κύκλος. Αν C δεν περιέχει την e_i, τότε $\theta^{'}(C)$ κύκλος του $H_i + f_i$. Συνεπώς

$$M(G_i + e_i) \cong_{\theta'} M(H_i + f_i).$$

Όμως επειδή $|V(G_i{+}e_i)| < |V(G)|$ ισχύει η επαγωγική υπόθεση συνεπώς κάνοντας στρέψεις στο $H_i + f_i$ το μετασχηματίζουμε σε ένα γράφημα ισόμορφο του $G_i + e_i$, άρα κάνοντας στρέψεις στο H παίρνουμε ένα γράφημα $H^{'}$ με $H^{'}_1, H^{'}_2, ..., H^{'}_k$ αναπαράσταση γενικευμένου κύκλου και G_i ισόμορφα με $H^{'}_i$.

Σαν τελευταίο βήμα της απόδειξης, πρέπει να κάνουμε στρέψεις σε κορυφές επαφής του $H^{'}$. Έστω $G_1, G_2, ..., G_k$ και $H^{'}_1, H^{'}_{\sigma(2)}, ..., H^{'}_{\sigma(k)}$ οι σειρές στις οποίες εμφανίζονται τα τεμάχια των G και $H^{'}$, όπου σ μετάθεση του $\{2, 3, ..., k\}$. Τότε αν $H^{'}_2 = H^{'}_{\sigma(\ell)}, \ell \geqslant 3$ και u, v είναι οι κορυφές επαφής που συνδέουν τα $H^{'}_{\sigma(2)}, H^{'}_{\sigma(\ell)}$ με τα $H^{'}_1$ και $H^{'}_{\sigma(\ell+1)}$ αντίστοιχα, τότε κάνουμε στρέψη στις u, v και παράγουμε το γράφημα $H^{''}$. Συνεχίζουμε ψάχνοντας να βρούμε το δείκτη της $H^{'}_3$ στην διάταξη σ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για όλα τα i. Τελικά κάνουμε μερικές στρέψεις γύρω από τις κορυφές επαφής κάποιων $H^{'}_i$. Τελικά προκύπτει ότι τα G και H είναι 2–ισόμορφα. $\square$

5.2 Θεώρημα τοπολογικού ισομορφισμού

Θεώρημα 8. *Αν G είναι 3–συνεκτικό επίπεδο και απλό γράφημα, τότε κάθε δύο ενεπίπεδες εμβαπτίσεις του είναι τοπολογικά ισόμορφες.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το Θεώρημα, πρώτα θα αποδείξουμε την ασθενή μορφή του:

Λήμμα 22. *Κάθε δύο ενεπίπεδες εμβαπτίσεις του G είναι ασθενώς τοπολογικά ισόμορφες.*

Απόδειξη. Έστω δύο εμβαπτίσεις του G στο επίπεδο, G_1 και G_2 για τις οποίες $G_1 \ncong_{\alpha\tau\pi} G_2$ και έστω G_1^*, G_2^* γεωμετρικά δυϊκά γραφήματά τους. Από Θεώρημα 6 τα G_1^*, G_2^* είναι 3–συνεκτικά και απλά.

Για απλότητα θεωρούμε ότι τα G_1, G_2, G_1^*, G_2^* έχουν σαν σύνολο ακμών το $E(G)$. Έχουμε ότι

$$M(G_1) \cong M(G_2)$$

άρα και

$$M^*(G_1) \cong M^*(G_2)$$

από Πρόταση 24. Από Λήμμα 2

$$M^*(G_1) \cong M(G_1^*)$$

και

$$M^*(G_2) \cong M(G_2^*)$$

άρα

$$M(G_1^*) \cong M(G_2^*).$$

Όμως τότε ικανοποιούνται οι προυποθέσεις της Πρότασης 18 και συνεπώς

$$G_1^* \cong G_2^*.$$

Τώρα $G_1 \ncong_{\alpha\tau\pi} G_2$ συνεπώς υπάρχει κάποιο X υποσύνολο ακμών το οποίο είναι σύνορο μίας όψης F του G_1 αλλά όχι του G_2. Τότε η όψη F αντιστοιχίζεται σε μία κορυφή $v(F)$ του G_1^* από την οποία εξέρχονται οι ακμές του X. Επειδή G_1^* 3–συνεκτικό, έπεται ότι X είναι δεσμός, από Πρόταση 2. Αλλά $G_1^* \cong G_2^*$ άρα πρέπει το X να είναι και δεσμός στο G_2^*, αλλά αυτό δεν γίνεται γιατί το X δεν είναι σύνορο καμίας όψης του G_2^*, άτοπο. Συνεπώς

$$G_1 \cong_{\alpha\tau\pi} G_2.$$

Άρα αποδείξαμε την ασθενή μορφή του θεωρήματος. □

Έχουμε λοιπόν $G_1 \cong_{\alpha\tau\pi} G_2$. Υπάρχει αντιστοιχία σ μεταξύ των συνόλων των όψεων των G_1 και G_2 τ.ω. κάθε σύνολο ακμών X είναι το σύνορο της F ανν το X είναι το σύνορο της $\sigma(F)$. Έστω F, X όψη του G_1 και σύνορό της. Τώρα έστω δύο κυκλικές παραθέσεις

$$\pi(F) = < u_1, u_2, u_3, ..., u_1 >$$

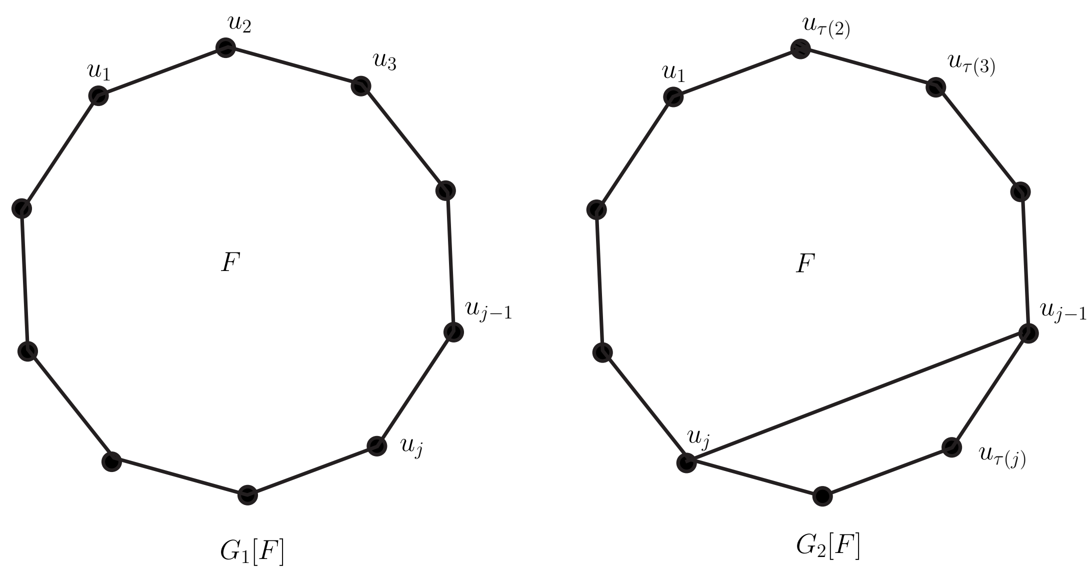
και

$$\pi(\sigma(F)) = < u_1, u_{\tau(2)}, u_{\tau(3)}, ..., u_1 >$$

όπου τ αναδιάταξη του $\{2, 3, ..., |X|\}$. Τότε από Λήμμα 3 τα $\pi(F)$ και $\pi(\sigma(F))$ είναι κύκλοι. Προς άτοπο έστω ότι $\pi(F) \neq \pi(\sigma(F))$ και έστω $j = \min\{k \mid u_k \neq u_{\tau(k)}\}$. Το u_j απαντάται πιο μετά στην $\pi(\sigma(F))$ από το $u_{\tau(j)}$. Αλλά $G_1 \cong G_2$, άρα η ακμή $\{u_{j-1}, u_j\}$ δημιουργεί τον κύκλο $< u_{j-1}, u_{\tau(j)}, u_{\tau(j+1)}, ..., u_j, u_{j-1} >$, συνεπώς το F δεν είναι κύκλος, άτοπο. Συνεπώς

$$G_1 \cong_{\tau\pi} G_2.$$

Συνεπώς τελείωσε η απόδειξη. □

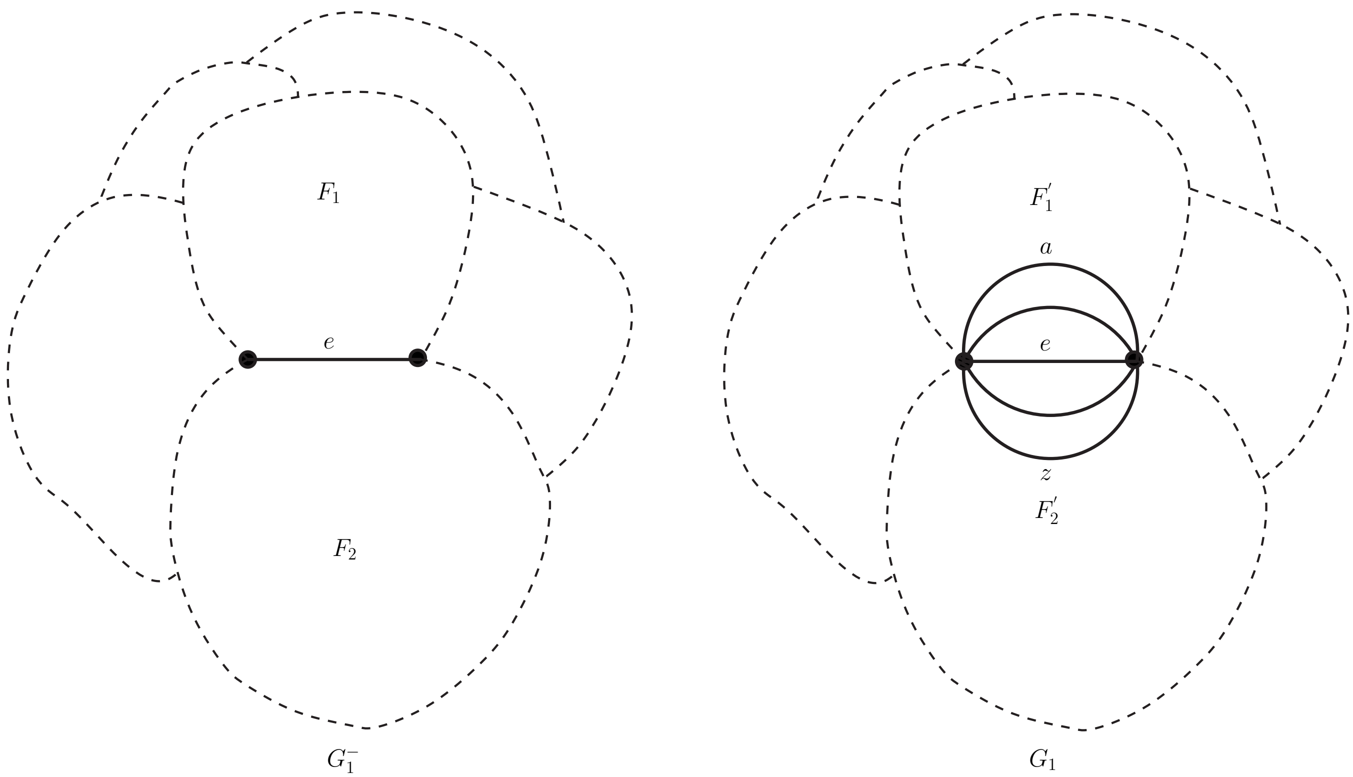


Σχήμα 5.7: Θεώρημα 22. Με την υπόθεση ότι δεν διατηρούνται οι κυκλικές παραθέσεις, καταλήγουμε σε άτοπο.

Σαν παρατήρηση σε αυτή την απόδειξη, παρατηρούμε ότι το θεώρημα μπορεί να γενικευτεί και για πολυγραφήματα χωρίς θηλιές. Δίνουμε παρακάτω την απόδειξη:

Πόρισμα 18. *Αν G είναι 3–συνεκτικό επίπεδο και γράφημα χωρίς θηλιές, τότε κάθε δύο ενεπίπεδες εμβαπτίσεις του είναι τοπολογικά ισόμορφες.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε το απλό γράφημα του G, έστω αυτό να είναι το G^-. Έστω δύο ενεπίπεδες εμβαπτίσεις του G, G_1 και G_2. Παίρνουμε τα απλά γραφήματα των G_1, G_2 έστω G_1^- και G_2^-. Τότε από το προηγούμενο θεώρημα τα G_1^- και G_2^- είναι τοπολογικώς ισόμορφα μέσω κάποιων αντιστοιχιών $\rho^- : V(G_1) \to V(G_2)$, $\sigma^- : F(G_1^-) \to F(G_2^-)$. Έστω e μία ακμή του G_1^- η οποία ανήκει σε μία παράλληλη κλάση στο G_1. Παρατηρούμε ότι η e βρίσκεται στο σύνορο ακριβώς δύο όψεων, έστω των F_1 και F_2. Αυτές οι όψεις αντιστοιχούν σε δύο όψεις $F_1^{'}$ και $F_2^{'}$ στο G_1 και τέμνονται η κάθε μία με ακριβώς μία ακμή της παράλληλης κλάσης που ορίζει η e. Έστω a και z οι ακμές για τα $F_1^{'}$ και $F_2^{'}$ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι οι εσωτερικές όψεις που δημιουργούν οι παράλληλες ακμές έχουν μονάχα δύο κορυφές. Συνεπώς τετριμμένα, υπάρχει αντιστοιχία σ_1 μεταξύ των όψεων αυτών στα G_1 και G_2 που να διατηρεί τις κυκλικές παραθέσεις. Επιπλέον, στο υπόλοιπο γράφημα, λόγω τοπολογικής ισομορφίας των G_1^- και G_2^-, υπάρχει αντιστοιχία σ_2 η οποία διατηρεί τις κυκλικές παραθέσεις στα G_1 και G_2. Ορίζουμε την αντιστοιχία $\sigma : F(G_1) \to F(G_2)$ να είναι η ένωση των σ_1 και σ_2. Οι αντιστοιχίες $\rho = \rho^-$ και $\sigma : F(G_1) \to F(G_2)$ ορίζουν τον τοπολογικό ισομορφισμό. $\square$



Σχήμα 5.8: Πόρισμα 18. Τα διαγράμματα όψεων των G_1^- και G_1.

5.3 Θεώρημα μοναδικότητας δυϊσμού

Θεώρημα 9. *Έστω G 3–συνεκτικό επίπεδο γράφημα χωρίς θηλιές. Αν G_1, G_2 είναι συνδυαστικά δυϊκά του G, και αν G_1, G_2 δεν έχουν απομονωμένες κορυφές, τότε $G_1 \cong G_2$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $E = E(G), E_1 = E(G_1), E_2 = E(G_2)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το G, η μία είναι να είναι απλό και η άλλη μη–απλό.

i) Έστω ότι G απλό. Τότε από Πόρισμα 13, το G είναι συνδυαστικό δυϊκό των G_1, G_2, συνεπώς ισχύει ότι $M^*(G) \cong M(G_1), M^*(G) \cong M(G_2)$, άρα και

$$M(G_1) \cong M(G_2).$$

Τώρα, το G είναι 3–συνεκτικό και επίπεδο. Τότε, από Θεώρημα 6, έχουμε ότι G_1, G_2, 3–συνεκτικά και απλά. Αφού G_1, G_2 είναι απλά, ικανοποιούν τις προυποθέσεις της Πρότασης 18 και αν $\psi : E_1 \to E_2$ ενάγει τον ισομορφισμό για τα $M(G_1), M(G_2)$, έπεται ότι $G_1 \cong G_2$.

ii) Έστω ότι G όχι απλό. Από κάθε παράλληλη κλάση αφαιρούμε μία ακμή, και έστω X ότι είναι η ένωση των συνόλων αυτών των μειωμένων παράλληλων κλάσεων. Ορίζουμε $G^- = G \backslash X$. Τότε G^- είναι απλό, 3–συνεκτικό και επίπεδο.
Τώρα $M^*(G) \cong_{\psi_1} M(G_1)$ και $M^*(G) \cong_{\psi_2} M(G_2)$, όπου

$$\psi_1 : E \to E_1, \psi_2 : E \to E_2$$

αντιστοιχίες. Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω Λήμμα, αφού το αποδείξουμε:

Λήμμα 23. *Τα* $G_1^- = G_1/\psi_1(X), G_2^- = G_2/\psi_2(X)$ *έχουν σαν συνδυαστικό δυϊκό το* G^-.

Απόδειξη. Αρχικά, θ.δ.ο. για κάθε $e \in E$,

$$G_1/\psi_1(e) \text{ συνδυαστικό δυϊκό του } G \backslash e$$

Έστω λοιπόν $e \in E, Y \subseteq E - e$. Διακρίνουμε περιπτώσεις για το $Y \cup e$:

i) $Y \cup e$ όχι δεσμός του G. Τότε

$$\begin{aligned}
Y \text{ δεσμός του } G\backslash e &\Leftrightarrow Y \text{ δεσμός του } G \\
&\overset{\text{Πρ. } 25}{\Leftrightarrow} Y \text{ συν–κύκλωμα του } M(G) \\
&\overset{\text{Πρ. } 25}{\Leftrightarrow} Y \text{ κύκλωμα του } M^*(G) \\
&\Leftrightarrow \psi_1(Y) \text{ κύκλωμα του } M(G_1) \\
&\Leftrightarrow \psi_1(Y) \text{ κύκλωμα του } M(G_1/\psi_1(e)) \\
&\overset{\text{Πρ. } 25}{\Leftrightarrow} \psi_1(Y) \text{ κύκλος του } G_1/\psi_1(e).
\end{aligned}$$

ii) $Y \cup e$ δεσμός του G. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
Y \text{ δεσμός του } G\backslash e &\Leftrightarrow Y \cup e \text{ δεσμός του } G \\
&\overset{\text{Πρ. }25}{\Leftrightarrow} Y \cup e \text{ συν–κύκλωμα του } M(G) \\
&\overset{\text{Πρ. }25}{\Leftrightarrow} Y \cup e \text{ κύκλωμα του } M^*(G) \\
&\Leftrightarrow \psi_1(Y \cup e) \text{ κύκλωμα του } M(G_1) \\
&\Leftrightarrow \psi_1(Y) \text{ κύκλωμα του } M(G_1/\psi_1(e)) \\
&\overset{\text{Πρ. }25}{\Leftrightarrow} \psi_1(Y) \text{ κύκλος του } G_1/\psi_1(e).
\end{aligned}$$

Συνεπώς $G\backslash e$ συνδυαστικό δυϊκό του $G_1/\psi_1(e)$ μέσω της $\psi_1|E - e$. Άρα αποδείξαμε το ζητούμενο.

Πιο πάνω λοιπόν αποδείξαμε ότι αν G είναι συνδυαστικό δυϊκό του G_1 και $e \in E$, τότε $G\backslash e$ είναι γεν. δυϊκό του $G_1/\psi_1(e)$. Έστω τώρα κάποιο $f \in E(G) - e$. Τότε πρέπει επαγωγικά να ισχύει ότι

$$G\backslash(e \cup f) \text{ συνδυαστικό δυϊκό του } G_1/\psi_1(e \cup f)$$

Επαναλαμβάνοντας επαγωγικά την ίδια διαδικασία για κάθε στοιχείο του X, προκύπτει ότι

$$G^- \text{ συνδυαστικό δυϊκό του } G_1^-$$

άρα ο G^- είναι συνδυαστικό δυϊκό των G_1^-, G_2^-. □

Συνεχίζουμε τώρα με την απόδειξη του Θεωρήματος 7. Ορίζουμε $\psi_i^- = \psi_i|E - X$. Από Πρόταση 12 έχουμε ότι

$$M^*(G^-) \cong_{\psi_1^-} M(G_1^-)$$

και

$$M^*(G^-) \cong_{\psi_2^-} M(G_2^-).$$

Έπεται ότι

$$M(G_1^-) \cong_{(\psi_1^-)^{-1}} M^*(G^-)$$

λόγω συμμετρικότητας (Πρόταση 10). Έπειτα, λόγω μεταβατικότητας (Πρόταση 11), έπεται ότι

$$M(G_1^-) \cong_{\psi_2^- \circ (\psi_1^-)^{-1}} M(G_2^-)$$

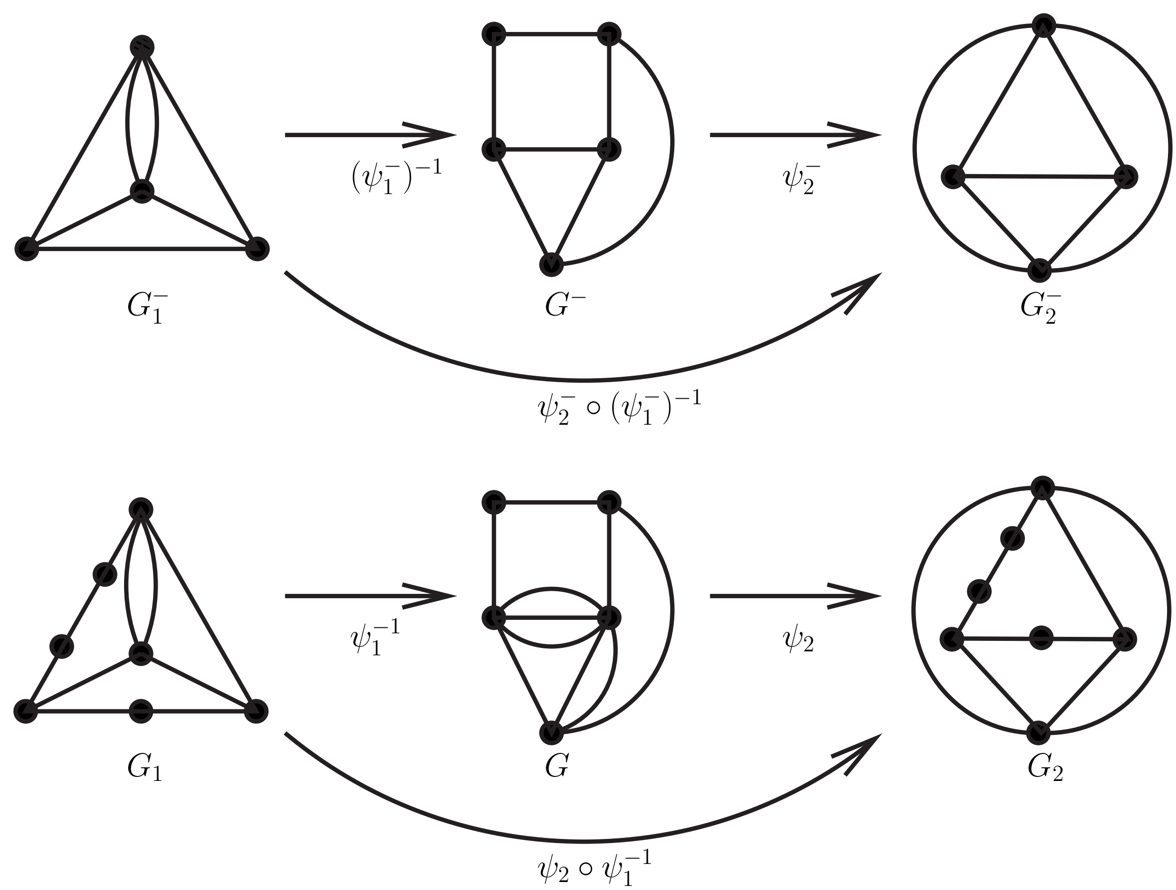
Τώρα, από Θεώρημα 6, τα G_1^- και G_2^- είναι 3-συνεκτικά και απλά άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Λήμματος 18 και συνεπώς τα G_1^- και G_2^- είναι $\psi_2^- \circ (\psi_1^-)^{-1}$–ισόμορφα, όπου

$$\psi_2^- \circ (\psi_1^-)^{-1} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1}|\psi_1(E - X)$$

Τώρα παρατηρούμε ότι κάθε ακμή $f \in \psi_i(X)$ βρίσκεται σε σειρά με κάποια ακμή $e \in E(G_i) - \psi_i(X)$ στο G_i. Θα αποδείξουμε ότι για να πάρουμε το G_i, αρκεί να κάνουμε υποδιαιρέσεις στις ακμές του $G_i/\psi_i(X)$ οι οποίες βρίσκονται σε σειρά με κάποια ακμή του $\psi_i(X)$, ή αλλιώς αν S είναι σειραϊκή κλάση του G_i τότε $G_i[S]$ είναι μονοπάτι.

Έστω λοιπόν μία σειραϊκή κλάση S του G_i. Έστω $f \in \psi_i(X)$ και $e \in E(G_i) - \psi_i(X)$, με $f, e \in S$. Έστω ότι $f = \{u', v'\}$ και ότι η σύνθλιψη της f στο $G_i/\psi_i(X)$ δίνει την κορυφή u. Προς άτοπο, έστω ότι το f δεν παράγεται με υποδιαίρεση του e στο $G_i/\psi_i(X)$. Το $G_f = G_i/\psi_i(X - f) - \{e, f\}$ είναι μη–συνεκτικό. Έστω H_1, H_2 συνεκτικές συνιστώσες του G_f και έστω $w \in V(H_1), z \in V(H_2)$. Τότε, από Θεώρημα Menger, υπάρχουν 3 εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια, το ένα από αυτά περνάει αναγκαστικά από την e και το άλλο αναγκαστικά από την u στο $G_i/\psi_i(X)$, άρα αναγκαστικά από την f στο G_f. Όμως τότε το τρίτο μονοπάτι συνδέει τις w και z στο G_f. Άτοπο γιατί G_f μη–συνεκτικό. Συνεχίζοντας για όλες τις ακμές του S και έπειτα για όλες τις σειριακές κλάσεις του G_i, επαγωγικά καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Για να τελειώσει η απόδειξη, παρατηρούμε ότι αν S είναι σειραϊκή κλάση του G_1, τότε



Σχήμα 5.9: Θεώρημα 9, σχεδιάγραμμα εικόνων των συναρτήσεων.

$$G_1[S] \cong_{\psi_2 \circ \psi_1^{-1}|S} G_2[\psi_2 \circ \psi_1^{-1}(S)]$$

Αυτό συνεπάγεται ότι αν αντικαταστήσουμε κάθε ακμή e του G_1^- που ανήκει σε κάποια σειραϊκή κλάση στο G_1 με το μονοπάτι που ορίζει η κλάση αυτή και σε συνδυασμό με το ότι

$$G_1^- \cong_{\psi_2 \circ \psi_1^{-1}|\psi_1(E-X)} G_2^-$$

έπεται ότι

$$G_1 \cong_{\psi_2 \circ \psi_1^{-1}} G_2$$

Συνεπώς τελείωσε η απόδειξη.

$\square$

Βιβλιογραφία

[1] Δημήτριος Μ. Θηλυκός. *Σημειώσεις στην Θεωρία Γραφημάτων (χειρόγραφο).* 2008.

[2] http://www.wikipedia.org, Hassler Whitney, 2008.

[3] Hassler Whitney. Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs. *American Journal of Mathematics*, 54(1):150–168, 1932.

[4] Hassler Whitney. Non–separable and Planar Graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 34(2):339–362, 1932.

[5] Hassler Whitney. 2–Isomorphic graphs. *Amer. Math.*, 55(1/4):245–254, 1933.

[6] Hassler Whitney. On the abstract properties of linear dependence. *American Journal of Mathematics*, 57(7):509–533, 1935.

[7] Inukai, T. and Weinberg, L. Theorems on matroid connectivity. *Discrete Math.*, 22:(311–312), 1978.

[8] James G. Oxley. *Matroid Theory.* Oxford University Press, 1992.

[9] Klaus Truemper. On Whitney's 2–Isomorphism Theorem for Graphs. *Journal of Graph Theory*, 4, 1980.

[10] Klaus Truemper. *Matroid Decomposition Revised Edition.* 1998.

[11] Menger, K. Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fund. Math.*, 10, 1927.

[12] Reinhard Diestel. *Graph Theory.* Springer–Verlag New York, 1997, 2000.

[13] Richardson, W. R. H. Decomposition of chain–groups and binary matroids, In Proc. Fourth Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing. σελίδες (463–476). Utilitas Mathematica, Winnipeg. , 1973.

[14] Thomas Wolle and Hans L. Bodlaender. A Note on Edge Contraction. Τεχνική Αναφορά υπ. αρίθμ. UU-CS-2004-028, Department of Information and Computing Sciences, Utrecht University, 2004.

[15] W. T. Tutte. *Connectivity in Graphs.* University of Toronto Press, 1966.