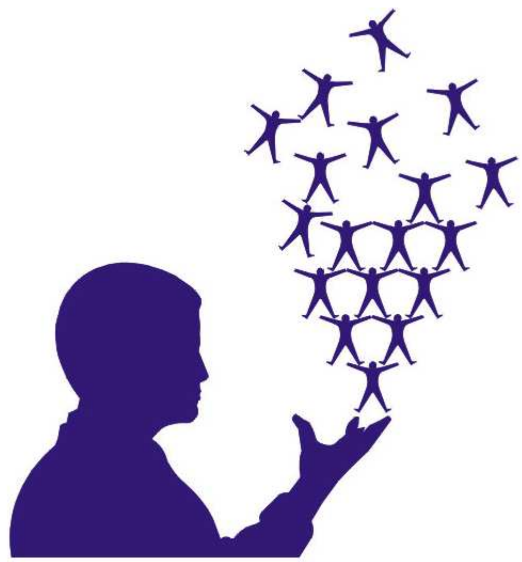
ΑΔΙΚΙΑ

ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΜΕΣΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ



Γεωργίου Κωνσταντίνος
Α.Μ. 200204

Επιβλέπων καθηγητής: Κουτσουπιάς Ηλίας

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ
μΠλ∀

Αύγουστος 2004

Περιεχόμενα

Λίστα σχημάτων

1 Πρόλογος

Η παρούσα εργασία μπορεί να αναγνωστεί από άτομα με στοιχειώδη γνώση μαθηματικών και θεωρίας αλγορίθμων. Ένας αναγνώστης που δεν έχει σχέση με το αντικείμενο μπορεί να πάρει μια γεύση από το δεύτερο κεφάλαιο όπου αφιερώνουμε λίγες σελίδες στο αντικείμενο που πραγματεύεται η επιστήμη της θεωρητικής πληροφορικής. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται αρχές από την ανάλυση προσεγγιστικών αλγορίθμων και σχετίζεται άμεσα με το δέκατο κεφάλαιο αλλά και με την ιδέα ανάλυσης αλγορίθμων για προβλήματα άμεσης απόφασης. Στο τέταρτο κεφάλαιο κάνουμε μια πληρέστερη αναφορά στη θεωρία ανάλυσης άμεσων αλγορίθμων, γνωστής και ως θεωρία ανάλυσης ανταγωνισμού. Στο πέμπτο κεφάλαιο δίνουμε μερικά στοιχεία θεωρίας παιγνίων για να καταλήξουμε σε ένα αποτέλεσμα που θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στην ανάλυση πιθανοτικών άμεσων αλγορίθμων. Στο κεφάλαιο έξι, παρουσιάζουμε μια ομάδα ισοδύναμων προβλημάτων άμεσης απόφασης και δίνουμε γνωστά αποτελέσματα που δεν αφορούν τη θεωρία ανάλυσης ανταγωνισμού. Στο έβδομο κεφάλαιο αντιμετωπίζουμε αυτά τα προβλήματα με ντετερμινιστικούς, πιθανοτικούς και νέους αλγορίθμους. Το κεφάλαιο επτά είναι αφιερωμένο σε πειραματικά αποτελέσματα των νέων αλγορίθμων, απουσίας θεωρητικών αποτελεσμάτων. Στο ένατο κεφάλαιο συσχετίζουμε και πάλι τη θεωρία ανάλυσης ανταγωνισμού για τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο έξι, με τη θεωρία παιγνίων βάσει της οποίας αναλύουμε την έννοια της αδικίας. Τέλος στο δέκατο κεφάλαιο αναφέρουμε ιδιαίτερα περιληπτικά δύο προβλήματα από τη θεωρητική πληροφορική που σχετίζονται με μιας μορφής αδικίας, το ένα από τη θεωρία προσεγγιστικών αλγορίθμων και το άλλο από τη θεωρία άμεσων αλγορίθμων.

Ευχαριστίες: Αυτή η εργασία αποτελεί τη διπλωματική μου εργασία για την απόκτηση του μεταπτυχιακού διπλώματος από το διαπανεπιστημιακό πρόγραμμα μΠλ∀. Με αφορμή την αποπεράτωση αυτού του μέρους των σπουδών μου θα ήθελα να αναφερθώ σε όσους στάθηκαν δίπλα μου. Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου που πάντα με υποστηρίζει στις φιλοδοξίες μου. Θέλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα το σύμβουλο καθηγητή μου Ηλία Κουτσουπιά για την ιδιαίτερη εμπιστοσύνη που έχει δείξει στο πρόσωπό μου καθώς και για την υπομονή του. Ευχαριστώ επίσης όλους τους συνεργάτες μου από το εργαστήριο CO.RE.LAB και το κύριο Ζάχο. Τους πρώτους για την υπομονή που δείξανε πολλές φορές στο να ακούνε τις σκέψεις μου αλλά και την ιδιαίτερα φιλική στάση τους απέναντι σε όποιο πρόβλημα και αν αντιμετώπισα, το δεύτερο για τον ανθρώπινο χαρακτήρα σχέσεων που έχει επιλέξει να έχει με τους φοιτητές του και την αυτοπεποίθηση που μου επέτρεψε να καλλιεργήσω. Επιπλέον ευχαριστώ όλους εκείνους τους φίλους, ιδιαίτερα κοντινούς ή μακρινούς, που πολλές φορές όντας ενθουσιασμένος τους πληροφορούσα για όσα διάβαζα χωρίς αυτοί έχουν σχέση με μαθηματικά, μεταξύ αυτών και το φίλο που Δημήτρη που επιμελήθηκε για εμένα το σκίτσο του εξωφύλλου. Τέλος δε θα ήθελα να αφήσω όλους εκείνους τους μουσικούς που ενώ γράφω και διαβάζω με συντροφεύουν με τις μελωδίες τους και μου επιτρέπουν ακόμα να ονειρεύομαι.

2 Από τον Ευκλείδη στη θεωρητική πληροφορική

Η ανθρωπότητα χιλιάδες χρόνια πριν κατασκευαστεί ο πρώτος υπολογιστής είχε την ιδέα ανάπτυξης αλγορίθμων χωρίς προφανώς να τους κατανοεί στο βαθμό που μπορούμε σήμερα. Η καθημερινή επαφή του ανθρώπου με διάφορες δυσκολίες είτε ακόμα και οι φιλοσοφικές του ανησυχίες τον φέρανε αντιμέτωπο με την επίλυση πολλών προβλημάτων τα οποία αναζητούσαν διεκπεραιωτικές και καλά καθορισμένες μεθόδους επίλυσης. Το ζητούμενο ήταν η επινόηση μιας διαδικασίας που επαναλαμβανόμενη θα μπορούσε να δώσει απάντηση σε κάποιο πρόβλημα όποια και να ήταν τα δεδομένα του. Ένα απλό παράδειγμα προβλήματος και ίσως ο πρώτος αλγόριθμος που μαθαίνουμε στα πρώτα μαθητικά μας χρόνια είναι ο αλγόριθμος διαίρεσης δύο φυσικών.

Πρόβλημα 1. *Δίνονται οι* $a, b \in N$. *Να βρεθούν* $\pi, \upsilon \in N : a = \pi b + \upsilon$ *με* $\upsilon < b$

Αποδεικνύεται οτι το πρόβλημα είναι καλά ορισμένο, δηλαδή για σταθεροποιημένα a, b υπάρχουν μοναδικά π, υ που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση και μάλιστα μπορούμε να τα υπολογίσουμε με τον αλγόριθμο της διαίρεσης. Αν κοιτάξουμε το πρόβλημα πιο βαθειά μπορούμε να δούμε οτι αυτό που μας εξασφαλίζει τη μοναδικότητα των π, υ είναι ο αλγόριθμο της διαίρεσης.

Βεβαίως ως μαθητές δεν μπορούμε να κατανοήσουμε την αξία της διαδικασίας που μας μαθαίνουν ώστε να διαιρέσουμε δύο φυσικούς και ούτε φανταζόμαστε την προσπάθεια που κατέβαλαν κάποιοι να αποδείξουν οτι αυτή η διαδικασία είναι καλά ορισμένη. Από τότε έως σήμερα δεν έχει αλλάξει μόνο ο τρόπος που βλέπουμε τον αλγόριθμο της διαίρεσης αλλά και ο τρόπος ανάλυσης ενός αλγορίθμου. Στο ερώτημα λοιπόν "τι είναι αλγόριθμος" θα μπορούσε να απαντήσει κανείς οτι είναι μια πεπερασμένη και καλά ορισμένη ακολουθία βημάτων που δίνει λύση σε ένα πρόβλημα. Το σίγουρο είναι οτι η ρίζα της λέξης προέρχεται από το όνομα ενός Άραβα μαθηματικού.

2.1 Αιτιοκρατία ως πρώτη λογική απόπειρα

Είναι λογικό το ότι τα πρώτα προβλήματα που αντιμετωπίστηκαν με τη βοήθεια αλγορίθμων προέρχονταν από τον κλάδο της Άλγεβρας. Οι πρώτες δε απόπειρες επίλυσης προβλημάτων δε μπορούσαν να είναι καθόλου μακριά από ντετερμινιστικά μοντέλα σκέψης. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι *το κόσκινο του Ερατοσθένη*, ένας αλγόριθμος πιστοποίησης πρώτων αριθμών. Το κριτήριο που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος είναι αιτιοκρατικό (ντετερμινιστικό), κάθε βήμα του δηλαδή προκαλείται μονοσήμαντα από μια αιτία. Στο ερώτημα αν ένας φυσικός p είναι πρώτος ο αλγόριθμος διαγράφει αρχικά όλα τα πολλαπλάσια του 2 μέχρι και τον αριθμό p έπειτα διαγράφει όλα τα πολλαπλάσια του επόμενου από τον αριθμό 2 μη διαγεγραμένου φυσικού και συνεχίζει έως ότου διαγραφεί ο p οπότε και δεν είναι πρώτος, είτε έως ότου διαγραφούν όλοι οι αριθμοί έως και τον p (για την ακρίβεια χρειάζεται μέχρι και τον $\lceil \sqrt{p} \rceil$) αλλά όχι ο p, οπότε και είναι πρώτος. Ο παραπάνω αλγόριθμος ακόμα και στη βελτιωμένη του έκδοση είναι ιδιαίτερα αργός ή καλύτερα δεν υπάρχει καλή εξάρτηση του πλήθους των βημάτων που χρειάζεται για να πιστοποιήσει ένα πρώτο αριθμό σε σχέση με το μέγεθος του αριθμού αυτού.

Από αυτό το απλό παράδειγμα δε μπορεί να υποψιαστεί κανείς τις σύγχρονες μεθόδους σχεδιασμού αλγορίθμων. Τρεις από τις πιο κοινές και δημοφιλείς μεθόδους σχεδιασμού ντετερμινιστικών αλγορίθμων είναι η μέθοδος διαίρει και βασίλευε (divide and conquer), ο δυναμικός προγραμματισμός (dynamic programming) και οι άπληστοι αλγόριθμοι (greedy algorithms).

Σύμφωνα με τη μέθοδο διαίρει και βασίλευε, χωρίζουμε το στιγμιότυπο του προβλήματος που θέλουμε να λύσουμε σε δύο ή περισσότερα υποπροβλήματα των οποίων η λύση κατάλληλα επεξεργασμένη μπορεί να μας δώσει τη λύση του αρχικού προβλήματος. Η αρχική διαίρεση του προβλήματος σε υποπροβλήματα συνεχίζεται αναδρομικά ώστε να φτάσει κανείς σε υποπροβλήματα τετριμμένου μεγέθους και λύσης.

Ο γραμμικός προγραμματισμός επίσης βασίζεται κατά κανόνα στην αναδρομή. Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται κυρίως σε προβλήματα βελτιστοποίησης και τα οποία έχουν την ιδιότητα, η βέλτιστη λύση του προβλήματος να μπορεί να εξαχθεί από τη βέλτιστη λύση υποπροβλημάτων του.

Τέλος μια αρκετά δημοφιλής ομάδα αλγορίθμων είναι αυτή των άπληστων. Επίσης οι άπληστοι αλγόριθμοι εφαρμόζονται σε προβλήματα βελτιστοποίησης και είναι συνήθως οι πρώτες απόπειρες λύσης προβλημάτων. Όπως υποδουλώνει και το όνομά τους πρόκειται για αλγορίθμους που κατασκευάζουν τη βέλτιστη λύση έχοντας κάποιο "άπληστο" κριτήριο. Έτσι σε κάθε βήμα τους εκτελούν και αποφασίζουν σύμφωνα με τι εκείνη τη στιγμή είναι περισσότερο συμφέρον, ελπίζοντας αυτό να οδηγήσει σε ολικά βέλτιστη λύση. Είναι ενδιαφέρον ότι για πολλά προβλήματα, οι άπληστοι αλγόριθμοι δίνουν βέλτιστες λύσεις. Σημαντικές εφαρμογές έχουν σε προσεγγιστικά προβλήματα αλλά επίσης και σε προβλήματα άμεσων αποφάσεων. Επίσης χαρακτηριστικό είναι ότι πολλές φορές άπληστοι αλγόριθμοι μπορεί να δώσουν πολύ άσχημα αποτελέσματα όπως στο πρόβλημα του σακιδίου (knapsack).

2.2 Αναφορά στις κλάσεις P και NP

Οι πρώτοι αλγόριθμοι που αναπτύχθηκαν άνηκαν στην κλάση των ντετερμινιστικών. Άμεση συνέπεια της επινόησης ενός αλγορίθμου ήταν βέβαια η μελέτη της αποδοτικότητάς του, καθώς και η σύκγρισή του με τον καλύτερο, που δεν είναι πάντα γνωστός. Ένας αλγόριθμος λοιπόν χαρακτηρίζεται από το πλήθος των βημάτων που χρειάζεται για να δώσει λύση σε ένα πρόβλημα σε σχέση με το μέγεθος της εισόδου. Αν π.χ. για κάθε είσοδο με μέγεθος n ο αλγόριθμος απαιτεί το πολύ $kf(n)$ βήματα για κάποιο $k \in R$ και κάποια συνάρτηση f θα λέμε οτι έχει πολυπλοκότητα $O(f(n))$. Εδώ να τονίσουμε οτι η απόδοση ενός αλγορίθμου καθορίζεται από το πλήθος των βημάτων που χρειάζεται στη χειρότερη περίπτωση και αυτό κατόπιν σύμβασης (υπάρχουν συγγραφείς που μελετούν την μέση πολυπλοκότητα αλγορίθμων). Οι παραπάνω σκέψεις μας επιτρέπουν να ορίσουμε και την πολυπλοκότητα για ένα πρόβλημα που δεν είναι άλλη από την πολυπλοκότητα του καλύτερου (ταχύτερου) αλγορίθμου που λύνει το πρόβλημα.

Έχοντας ορίσει ως μέτρο δυσκολίας για κάθε πρόβλημα την χρονική αποτελεσματικότητα του καλύτερου αλγορίθμου που το λύνει, μπορούμε να μιλάμε για ιεραρχική κατάταξη των προβλημάτων. Πολλά προβλήματα έχουν προκύψει να έχουν γραμμικό τρόπο εξάρτησης για το χρόνο που απαιτούν να λύσουν ένα πρόβλημα, άλλα πολυωνυμικό και άλλα εκθετικό. Για κάποιο λόγο που δεν είναι απολύτως σαφής θεωρούμε τα προβλήματα που λύνονται από αλγορίθμους σε πολυωνυμικό χρόνο εύκολα, ως προς το οτι τα πολυώνυμα δεν είναι συναρτήσεις που παίρνουν γρήγορα μεγάλες τιμές - τουλάχιστον συγκρινόμενες με εκθετικές συναρτήσεις. Βεβαίως τι πρακτική αξία μπορεί να έχει ένας πολυωνιμκός αλγόριθμος που λύνει ένα πρόβλημα σε χρόνο n^5 ; Παρόλαυτά όλα τα προβλήματα για τα οποία ύπάρχουν αλγόριθμοι που τρέχουν σε πολυωνυμικό χρόνο, λέμε οτι δημιουργούν μια κλάση, την P.

Κατά τη μελέτη πολλών προβλημάτων πολλά από αυτά αντιστεκόνται ακόμα και σήμερα ως προς την πολυωνυμική επίλυσή τους. Στην προσπάθεια να δοθεί απάντηση στον αν πράγματι για κάποια προβλήματα δεν υπάρχουν πολυωνυμικοί αλγόριθμοι ή απλά δε βρέθηκε κανείς ακόμα να τους αναπτύξει, επινοήθηκε ένα υπολογιστικό μοντέλο ως προς το ο οποίο θα μελετούμε τα προβλήματα. Αυτό είναι η Μηχανή Turing. Ένα τέτοιο υπολογιστικο μοντέλο καθορίζεται εν ολίγοις από ένα σύνολο καταστάσεων και μια συνάρτηση μετάβασης από κατάσταση σε κατάσταση. Τέτοιες μηχανές ονομάζονται ντετερμινιστικές μηχανές Turing. Το ενδιαφέρον είναι οτι προβλήματα για τα οποία έχουμε πολυωνυμικούς αλγορίθμους μπορούμε να κατασκευάσουμε μια μηχανή Turing που να τα "λύνουν" επίσης γρήγορα. Αντιστοίχως για τα προβλήματα που αντιστέκονται σε γρήγορους αλγορίθμους, υπάρχει δυσκολία να βρεθεί μηχανή Turing που να τα λύνει, ή και να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει τέτοια. Ορίστηκε έτσι ένα νέο μοντέλο μηχανής, η μη ντετερμινιστική μηχανή Turing, της οποία η διαφορά με την προήγουμενη είναι οτι έχει σχέση μετάβασης και όχι συνάρτηση. Κάποια από τα δύσκολα προβλήματα μπορούν να λυθούν από τέτοιες μηχανές σε πολυωνυμικό χρόνο και όλα αυτά δημιουργούν την κλάση NP. Για αυτά τα προβλήματα και μέχρι σήμερα υπάρχουν μόνο εκθετικοί αλγόριθμοι. Για το ερώτημα που έχει μείνει ανοιχτό μέχρι σήμερα δηλαδή για το αν $P = NP$, έχει επιννόηθεί η έννοια του NP-πλήρους προβλήματος το οποίο έχει την ιδιότητα να χαρακτηρίζει την κλάση προβλημάτων NP ως προς το οτι όλα τα υπόλοιπα μπορούν να αναχθούν σε αυτό και είναι επομένως τουλάχιστον δύσκολο όσο και τα υπόλοιπα. Ο διαχωρισμός λοιπόν ή η ταύτιση των κλάσεων θα μπορούσε να αποδειχθεί με το να μελετηθεί ένα NP-πλήρες πρόβλημα ως προς την επιλυσημότητά του από πολυωνυμικό αλγόριθμο. Παρά τις άκαρπες μέχρι τώρα προσπάθειες, η επιστημονική κοινότητα πιστεύει στην πλειοψηφεία της οτι $P \neq NP$ και επομένως θεωρεί τα προβλήματα της κλάσης NP δύσκολα.

2.3 Πιθανοτικοί αλγόριθμοι

Μια καλή ιδέα για να ισχυροποιήσουμε τα εργαλεία μας έναντι δύσκολων προβλημάτων είναι να κάνουμε τους αλγορίθμους μας πιθανοτικούς. Κάποιος που δεν είναι εξοικειωμένος με την ιδέα των πιθανοτικών αλγορίθμων μπορεί να δυσκολευτεί να αποδεχθεί την υπεροχή έναντι των ντετερμινιστικών αλγορίθμων μια και ξενίζει το γεγονός οτι ένας αλγόριθμος που μπορεί σε κάποια στάδιά του να εκτελεί τυχαίες αποφάσεις, μπορεί να είναι καλύτερος από το βέλτιστο ντετερμινιστικό. Ένα καλό επιχείρημα για να πειστεί κανείς είναι να παρατηρήσει οτι ένας πιθανοτικός αλγόριθμος είναι μια κατανομή στους ντετερμινιστικούς αλγορίθμους Ένας λοιπόν πιθανοτικός αλγόριθμος μπορεί να λειτουργεί με πιθανότητα p_1 σαν τον ντετερμινιστικό αλγόριθμο A_1, με πιθανότητα p_2 ο αλγόριθμος A_2 κ.ο.κ. και αυτό να εξελίσεται δυναμικά από βήμα σε βήμα.

Ένα καλό παράδειγμα έρχεται και πάλι από την Άλγεβρα και μάλιστα τη θεωρία αριθμών. Μέχρι και τον Αύγουστο του 2002 το πρόβλημα πιστοποίησης πρώτων αριθμών αντιστεκόταν σε κάθε γνωστό πολυωνυμικό αλγόριθμο. Στην προσπάθεια να λυθεί αξιόπιστα και γρήγορα το πρόβλημα αναπτύχθηκαν πιθανοτικές μέθοδοι που βασίζονται στην εύρεση ενός "μάρτυρα" για το γεγονός οτι ένας αριθμός είναι πρώτος ή όχι. Τέτοιες πιστοποιήσεις ήταν δύσκολο (λόγω όγκου) να ελεγχθούν εξαντλητικά, ωστόσο ο χώρος των πιθανών μαρτύρων μπορεί (ανάλογα με το πρόβλημα και την ιδιότητα που ελέγχεται) να είναι τόσο πυκνός ώστε να αρκεί να επιλεγεί ένα τυχαίο στοιχείο ως μάρτυρας. Η παραπάνω μέθοδος όπως και άλλες και ανάλογα με το φορμαλιστικό ορισμό των πιθανοτικών αλγορίθμων,μπορεί να έχουν μια πιθανότητα σφάλματος για θετική ή αρνητική (ή και καθόλου) απάντηση.

Οι πιθανοτικοί αλγόριθμοι δεν περιορίζονται στην πιστοποίηση ιδιοτήτων αλλά εφαρμόζονται και σε πολλά άλλα προβλήματα, όπως προβλήματα που αφορούν ανάγκη για αποφάσεις μεταξύ ενός συνόλου από επιλογές με στόχο τη βελτιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό συνδέει αμέσως τους πιθανοτικούς αλγορίθμους με προβλήματα προσέγγισης βέλτιστων λύσεων στα οποία θα αναφερθούμε σε λίγο.

Μια και οι πιθανοτικοί αλγόριθμοι ενέχουν την ιδέα την τυχαίας απόφασης δεν είναι δυνατό ούτε λογικο να αναλυθούν ντετερμινιστικά. Έτσι η χρονική και ποιοτική απόδοσή τους θα αναλύεται στη μέση περίπτωση. Επίσης είναι σύνηθες να εξασφαλίσουμε την επίτευξη ενός στόχου δείχνοντας οτι συμβαίνει με θετική πιθανότητα (ενδεχομένως αρκετά μικρή) είτε ακόμα θα αποκλύουμε ένα γεγονός δείχνοντας οτι πραγματοποιείται με πιθανότητα που μειώνεται "γρήγορα" όσο αυξάνεται η είσοδος του προβλήματος.

2.4 Προσέγγιση βέλτιστων λύσεων

Η επιστημονική κοινότητα έχει αρχίσει να συμβιβάζεται με το γεγονός ότι υπάρχουν δύσκολα προβλήματα ανεξάρτητα από το γεγονός ότι δε μπορεί να δικαιολογήσει την αδυναμία της να τα λύσει. Η επόμενη λογική απόπειρα είναι να αναζητηθούν προσεγγιστικές λύσεις των προβλημάτων. Συνήθως τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε είναι προβλήματα βελτιστοποίησης, μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης. Κριτήριο για την αποδοτικότητα ενός αλγορίθμου θα είναι προφανώς η ταχύτητά του (πως εξαρτάται δηλαδή το πλήθος το βημάτων από το μέγεθος της εισόδου) καθώς και ο λόγος προσέγγισης, δηλαδή πόσο κοντά βρίσκεται η λύση στη βέλτιστη. Το ενδιαφέρον είναι ότι αυτή η νέα ιδέα ορίζει πολλές καινούριες κλάσεις προβλημάτων σε κάποιες από τις οποίες ανήκουν προβλήματα που μπορούν να προσεγγιστούν όσο πολύ επιθυμούμαι, σε άλλες προβλήματα που προσεγγίζονται το πολύ κατά μια σταθερά, και σε άλλες προβλήματα που δεν προσεγγίζονται καλύτερα από ένα λογαριθμικό ή και πολυωνυμικό λόγο σε σχέση με την είσοδο (και αυτό εκτός αν $P = NP$). Μια μικρή εισαγωγή στη θεωρία προσεγγιστικών αλγορίθμων κάνουμε στο κεφάλαιο 3.

2.5 Άμεσοι αλγόριθμοι

Πέρα από τις συνηθισμένα φιλοσοφικές ανησυχίες των μαθηματικών που τους ωθούν συχνά να ασχολούνται με προβλήματα με μη εφαρμόσιμη λύση, η επιστήμη της θεωρητικής πληροφορικής μετά την ανάπτυξη των πρώτων ιδεών στον τομέα της θεωρίας αλγορίθμων στράφηκε προς μια νέα κατηγορία προβλημάτων, τα προβλήματα άμεσων αποφάσεων. Στην προσπάθεια να λυθούν καθημερινά προβλήματα, έγινε κατανοητό πως για να προσομοιώσουμε τα προβλήματά μας στον υπολογιστή ή ακόμα και στο χαρτί θα πρέπει να αποδεχθούμε ότι πολλές φορές καλούμαστε να πάρουμε αποφάσεις χωρίς να γνωρίζουμε όλα τα δεδομένα. Ως παράδειγμα ας σκεφτούμε ότι έχουμε να αλλάξουμε 100 ευρώ σε δολάρια σε ένα διάστημα 30 ημερών και κάθε ημέρα η ισοτιμία μεταβάλλεται. Ο καλύτερος αλγόριθμος που θα ήξερε βέβαια την ισοτιμία για όλες τις μέρες θα επέλεγε να μετατρέψει το συνάλλαγμα την ημέρα με την καλύτερη ισοτιμία. Ένας ρεαλιστικός αλγόριθμος δε γνωρίζει τη διακύμανση της ισοτιμίας και καλείται καθημερινά να αποφασίσει αν θα μετατρέψει κάποιο ποσό σε δολάρια ή όχι. Η αποδοτικότητα του αλγορίθμου θα εκτιμάται όχι πλέον από την ταχύτητά του αλλά από το λόγο της λύσης που προσφέρει σε σχέση με τη λύση ενός αλγορίθμου που γνωρίζει όλα τα δεδομένα του προβλήματος εξαρχής. Με το πρόβλημα ανάλυσης αλγορίθμων για προβλήματα άμεσων αποφάσεων ασχολούμαστε εκτενέστερα στο κεφάλαιο 4.

2.6 Ο συμβολισμός O , Θ , Ω

Μετά την επινόηση και την πρώτη απόπειρα ανάλυσης των αλγορίθμων, έγινε συνειδητή η ανάγκη ενός νέου ορισμού για την πληρέστερη αξιολόγηση τους. Ένας βασικός λόγος είναι ότι ενώ οι αλγόριθμοι μπορούν να περιγραφούν σε μια "χονδροειδή" ψευδοπρογραμματιστική γλώσσα, η υλοποίησή τους διαφέρει από προγραμματιστική σε προγραμματιστική γλώσσα ως προς την απόλυτη πολυπλοκότητά τους.

Για να κάνουμε τα πράγματα πιο σαφή να τονίσουμε ότι ένας αλγόριθμος εφόσον λύνει ένα πρόβλημα, αξιολογείται ο χρόνος στον οποίο το λύνει. Εδώ ως μονάδα χρόνου ορίζουμε ένα βήμα του αλγορίθμου, που μπορεί να είναι μια ανάθεση, μια σύγκριση ή και κάτι άλλο. Η χρονική αποδοτικότητα ενός αλγορίθμου είναι λογικό να εξαρτάται από το μέγεθος της εισόδου του προβλήματος, έτσι αν σε ένα αλγόριθμο εισάγουμε δεδομένα μεγέθους n αυτός μπορεί να μας απαντά σε $34n^3$ βήματα. Η υλοποίηση του σε μια προγραμματιστική γλώσσα μπορεί να απαιτεί $100n^3$ βήματα ωστόσο η τάξη μεγέθους της χρονικής πολυπλοκότητας παραμένει σταθερή. Εξάλλου οι εκτιμήσεις γίνονται για αυθαίρετα μεγάλες εισόδους όπου οι τιμές $34n^3, 100n^3$ πρακτικά δε διαφέρουν. Είναι χρήσιμο λοιπόν να εισάγουμε μια έννοια κλάσεων συναρτήσεων κάτω από την οποία δύο αλγόριθμοι με χρονική πολυπλοκότητα $34n^3$ και $100n^3$ θα είναι ισοδύναμοι. Με τη βοήθεια της νέας αυτής έννοιας δεν περιοριζόμαστε να μετράμε μόνο χρονική πολυπλοκότητα. Για παράδειγμα ένας αλγόριθμος θα μπορεί κάλλιστα να εξασφαλίζει τάξης μεγέθους $\log n$ χειρότερη λύση από τη βέλτιστη δυνατή αν αυτός είναι προσεγγιστικός. Εισάγουμε λοιπόν τον εξής συμβολισμό.

Ορισμός 1. *Συμβολισμός* Θ, O, Ω

(i) $\Theta(g(n)) := \{f(n) | \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} : 0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0\}$

(ii) $O(g(n)) := \{f(n) | \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} : 0 \leqslant f(n) \leqslant cg(n), \forall n \geqslant n_0\}$

(iii) $\Omega(g(n)) := \{f(n) | \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} : 0 \leqslant cg(n) \leqslant f(n), \forall n \geqslant n_0\}$

Σύμφωνα με τις κλάσεις που ορίσαμε έχουμε ενδεικτικά ότι $34n^3, 100n^3 \in \Theta(n^3)$, $\log^{50} \in O(n^{0,1})$ και $e^x \in \Omega(n^{1000})$. Έτσι λοιπόν όταν γράφουμε $f(n) \in \Theta(g(n))$ θα εννοούμε ότι πρακτικά ότι οι συναρτήσεις f, g είναι τελικά (στο άπειρο) σχεδόν ίσες. Γράφοντας $f(n) \in \Omega(g(n))$ θα εννοούμε ότι η συνάρτηση f αυξάνεται με ρυθμό τουλάχιστον όσο και της g και αντιστρόφως για το σύμβολο O. Εδώ να επισημάνουμε ότι καταχρόμαστε το συμβολισμό και αντί για τη σχέση του ανήκει ($\in$), έχει επικρατήσει να χρησιμοποιούμε ισότητα.

3 Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι

Οι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι επινοήθηκαν με αφορμή την αδυναμία μας να λύσουμε όσα προβλήματα θεωρούμε δύσκολα. Προκειμένου να επιτύχουμε γρήγορους και αποδοτικούς αλγορίθμους προτιμήθηκε να θυσιαστεί η αποδοτικότητα της λύσης. Οι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι εφαρμόζονται κατά κύριο λόγο σε προβλήματα βελτιστοποίησης και παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο για δύο βασικούς λόγους. Ο πρώτος και ο βασικότερος είναι να συσχετισθεί η ανάλυση των προσεγγιστικών αλγορίθμων με αυτή των άμεσων. Οι δύο αυτές θεωρίες έχουν ως κοινό χαρακτηριστικό ότι η αποδοτικότητα των αλγορίθμων εκτιμάται ως ο λόγος τους με τους βέλτιστους όπως αυτοί ορίζονται σε κάθε περίπτωση. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι στο κεφάλαιο 10 της εργασίας, παρουσιάζεται ένα πρόβλημα αδικίας από τη θεωρητική πληροφορική (το πρόβλημα της δρομολόγησης) που μελετάται από τη σκοπιά των προσεγγιστικών αλγορίθμων.

3.1 Παραδείγματα προσεγγιστικών προβλημάτων

Πριν δούμε αυστηρά τον ορισμό του μέτρου αποδοτικότητας για ένα αλγόριθμο ας αναφέρουμε δύο παραδείγματα προβλημάτων από την περιοχή. Το πρώτο από αυτά είναι το κάλυμμα κόμβων (vertex cover ή και VC). Το πρόβλημα VC είναι γνωστό ότι είναι NP-complete με εύκολη αναγωγή από το πρόβλημα της κλίκας (clique) ή και το 3-SAT.

Πρόβλημα 2 (Κάλυμμα κορυφών VC). *Δεδομένου μη κατευθυνόμενου γράφου* $G = (V, E)$ *και μιας συνάρτησης κόστους* $c : V \to \mathbb{Q}^+$ *για τους κόμβους του, να βρεθεί ελάχιστου κόστους κάλυμμα κορυφών. Να βρεθεί δηλαδή ένα σύνολο* $V' \subseteq V$ *τέτοιο ώστε κάθε ακμή να έχει τουλάχιστον ένα της κόμβο στο σύνολο.*

Ένα κάλυμμα κορυφών είναι προφανώς ένα υποσύνολο των κόμβων που έχει όλους τους κόμβους του γράφου γείτονες, αν βέβαια δεν τους περιλαμβάνει. Η ιδιότητα αυτή μας δίνει την επόμενη ιδέα για λύση του προβλήματος. Θα ασχοληθούμε με την ειδική περίπτωση που κάθε κόμβος έχει κόστος 1.

Αλγόριθμος 1. *Για το πρόβλημα VC και για ένα γράφο* G*, θεώρησε ένα μεγιστικό ταίριασμα (matching). Θεώρησε το σύνολο των κόμβων που συμμετέχουν στο ταίριασμα ως κάλυμμα.*

Είναι σαφές ότι ο παραπάνω αλγόριθμος δε δίνει πάντα βέλτιστη λύση. Μια και υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος για την εύρεση ενός ταιριάσματος, αν ο παραπάνω αλγόριθμος μπορούσε να εγγυηθεί βέλτιστη λύση, θα είχαμε απαντήσει στο πρόβλημα $P\, vs\, NP$. Πόσο καλός είναι τελικά αυτός ο αλγόριθμος και πως αυτό μπορεί να μετρηθεί;

Πριν δώσουμε απαντήσεις ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα.

Πρόβλημα 3 (Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή, traveling salesman problem, TSP). *Δεδομένου πλήρους γράφου με μη αρνητικές βάρη ακμών, να βρεθεί κύκλος που επισκέπτεται ακριβώς μία φορά κάθε κόμβο, και είναι ελάχιστου κόστους.*

Το ενδιαφέρον με αυτό το πρόβλημα είναι ότι στη γενική του περίπτωση, όπου μεταξύ τριών κόμβων δεν ισχύει η τριγωνική ανισότητα, δεν είναι καν προσεγγίσημο. Την έννοια θα την εξηγήσουμε στην επόμενη παράγραφο, αλλά διαισθητικά μπορούμε να την καταλαβαίνουμε ως ότι το γενικό TSP δεν υπάρχει αλγόριθμος που για κάθε στιγμιότυπό του να μπορεί να εγγυηθεί ένα φραγμένο μέτρο αποδοτικότητας, εκτός βέβαια και αν $P = NP$. Ακόμα και στην περίπτωση που ισχύει η τριγωνική ανισότητα, το πρόβλημα παραμένει δύσκολο και είναι NP-πλήρες. Η πληρότητα αποδεικνύεται με αναγωγή από το πρόβλημα του κύκλου Hamilton (Hamilton cycle), το οποίο με τη σειρά του αποδεικνύεται NP-πλήρες με τη βοήθεια του VC.Παρόλα αυτά σε αυτή την ειδική περίπτωση το πρόβλημα μπορεί να προσεγγιστεί με τον επόμενο αλγόριθμο. Για χάρη της πληρότητας της παρουσίασης αναφέρουμε ότι ένα MST (minimum spanning tree) είναι ένα μεγιστικού μεγέθους δένδρο, υπογράφημα ενός γράφου, ελαχίστου κόστους, ως προς το κόστος των ακμών του.

Αλγόριθμος 2. *Για το πρόβλημα TSP που ισχύει η τριγωνική ανισότητα και για ένα γράφο $G = (E, V)$, θεώρησε ένα MST του G, έστω T. Διπλασίασε τις ακμές του και πάρε ένα κύκλο Euler για αυτό. Θεώρησε ως διαδρομή του πλανόδιου πωλητή τη σειρά των κόμβων με την οποία τους επισκέπτεται κανείς στον κύκλο Euler.*

3.2 Λόγος προσέγγισης

Για το μέτρο αποδοτικότητας των προσεγγιστικών αλγορίθμων αρκεί κανείς να πραγματευτεί με τον τρόπο που αυτοί προέκυψαν. Οι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι είναι αυστηρά πολυωνυμικού χρόνου και έτσι η λύση που προτείνουν δεν είναι βέλτιστη. Αντιθέτως αν και τα προβλήματα που λύνουμε με τη βοήθεια των προσεγγιστικών αλγορίθμων είναι NP-δύσκολα, υπάρχουν για αυτά αλγόριθμοι (προφανώς υπερπολυωνυμικοί) που υπολογίζουν βέλτιστες λύσεις. Ως προς αυτές τις λύσεις μπορούν να συγκριθούν οι λύσεις των προσεγγιστικών. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι οι λύσεις και οι αλγόριθμοι αναφέρονται σε ένα σταθεροποιημένο πρόβλημα Π.

Ορισμός 2. *Έστω A και I ένας αλγόριθμος και ένα στιγμιότυπο του προβλήματος Π αντίστοιχα. Αν με $SOL_A(I)$ και με $OPT(I)$ συμβολίσουμε τη λύση του αλγορίθμου A και του βέλτιστου αντίστοιχα, τότε θα λέμε ότι ο αλγόριθμος A επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης ρ αν*

$$\frac{SOL_A(I)}{OPT(I)} \leqslant \rho$$

και αυτό για κάθε στιγμιότυπο I. Επίσης ο αλγόριθμος A θα λέγεται ρ' προσεγγιστικός αν επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης

$$\rho' = \inf_{\rho}\{\rho : \frac{SOL_A(I)}{OPT(I)} \leqslant \rho\}$$

και αυτό επίσης για κάθε στιγμιότυπο I.

Για τα δύο προβλήματα που παρουσιάσαμε νωρίτερα, τόσο αλγόριθμος για το VC, όσο και ο αλγόριθμος για το TSP είναι 2-προσεγγιστικοί.

Όπως φαίνεται από τον ορισμό για τα προβλήματα ελαχιστοποίησης, όταν ένας αλγόριθμος επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης ρ τότε είναι τουλάχιστον ρ προσεγγιστικός. Όσο πιο μικρός είναι αυτός ο αριθμός προφανώς τόσο καλύτερο. Για ένα πρόβλημα, η ικανότητα να το προσεγγίσουμε προκύπτει από το infimum της προσεγγισιμότητας αλγορίθμων για το πλήθος των αλγορίθμων που λύνουν το πρόβλημα, όπου το inf θεωρείται στο πλήθος των αλγορίθμων.

Τέλος να αναφέρουμε ότι πολλά προβλήματα δεν επιδέχονται σταθερό λόγο προσέγγισης. Ο προηγούμενος ορισμός γενικεύεται και σε $f(n)$-προσεγγισημότητα όπου n είναι το μέγεθος της εισόδου του προβλήματος.

3.3 Προσεγγισημότητα

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει στη θεωρία ανάλυσης προσεγγιστικών αλγορίθμων, η προσεγγισημότητα των προβλημάτων. Για ένα σταθεροποιημένο πρόβλημα Π προκύπτει το ερώτημα, ποιος είναι ο καλύτερος αλγόριθμος που προσεγγίζει τη βέλτιστη λύση. Με άλλα λόγια το ερώτημα είναι, δεδομένου προβλήματος και για κάθε στιγμιότυπό του, πόσο κοντά μπορούμε να βρεθούμε στη βέλτιστη λύση. Για το VC γνωρίζουμε ότι υπάρχει $a > 1$ τέτοιο ώστε για κάθε αλγόριθμο A, ο A είναι το πολύ a-προσεγγίσημος. Υπάρχουν προβλήματα για τα οποία δεν υπάρχει καλύτερος από λογαριθμικός παράγοντας προσέγγισης (set cover) και ακόμα και προβλήματα για τα οποία δεν υπάρχει καλύτερος από πολυωνυμικός (clique). Όπως ήδη αναφέραμε υπάρχουν και προβλήματα για τα οποία δεν υπάρχει καν φράγμα για το λόγο προσέγγισης που επιτυγχάνουν (γενικό TSP).

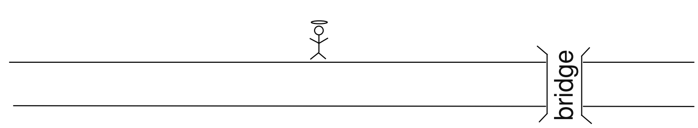
4 Θεωρία ανάλυσης ανταγωνισμού

Στα προβλήματα άμεσων αποφάσεων, ένας αλγόριθμος πρέπει να παράγει μια ακολουθία από αποφάσεις που θα επηρεάσει την ποιότητα της απόδοσής του στο τέλος μιας διαδικασίας. Κάθε απόφαση μπορεί να βασίζεται στη γνώση του παρελθόντος αλλά δεν μπορεί να στηρίζεται στο μέλλον. Η ιδέα είναι να μοντελοποιήσουμε καταστάσεις κατά τις οποίες, αποφάσεις πρέπει να λαμβάνονται άμεσα χωρίς γνώση του μέλλοντος και μάλιστα πολλά είναι τα προβλήματα στην επιστήμη των υπολογιστών ή και στη οικονομική θεωρία στα οποία καλούμαστε να διαγράψουμε σχέδιο δράσης σε πραγματικό χρόνο. Προβλήματα άμεσων αποφάσεων καθώς και η ανάλυση του ανταγωνισμού (competitive analysis), η θεωρία δηλαδή μελέτης της απόδοσης ενός αλγορίθμου που λύνει ένα πρόβλημα άμεσης απόφασης (άμεσος αλγόριθμος, online algorithm), έχουν μελετηθεί εκτενώς τα τελευταία 30 περίπου χρόνια κατά τα οποία πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα έχουν λυθεί και πολλά άλλα έχουν μείνει ανοιχτά. Αφετηρία για τη μελέτη άμεσων αλγορίθμων ήταν κατά βάση η θεωρία της συνδυαστικής βελτιστοποίησης καθώς και η ανάλυση βάσεων δεδομένων. Αν και σε πολλές περιπτώσεις προβλήματα δε χρειάζονται να λυθούν σε πραγματικό χρόνο, ο ορισμός της ειδική κλάσης αλγορίθμων που λύνουν το πρόβλημα άμεσα, δίνει απρόσμενα καλές προσεγγιστικές λύσεις. Το γεγονός αυτό δίνει ένα παραπάνω κίνητρο για τη μελέτη άμεσων αλγορίθμων. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ίσως το πιο απλό και έπειτα ένα από τα πιο ρεαλιστικά προβλήματα που μπορούν να μελετηθούν με αυτή τη θεωρία.

4.1 Παραδείγματα άμεσων προβλημάτων

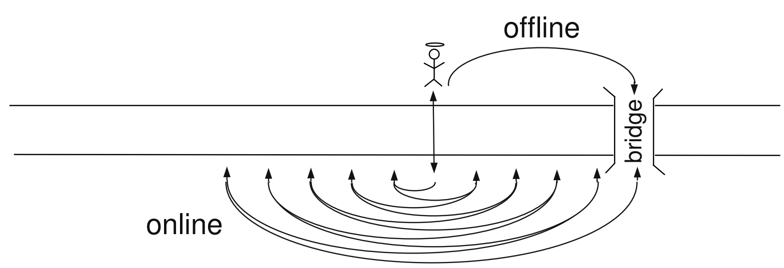
4.1.1 Το πρόβλημα της γέφυρας

Το πρόβλημα της γέφυρας είναι ίσως το πιο απλό πρόβλημα άμεσης απόφασης που μπορεί κανείς να αναφέρει όταν πρωτοαναφερθεί σε τέτοιου είδους προβλήματα. Σε αυτό το πρόβλημα ένας ταξιδιώτης βρίσκεται στην όχθη ενός ποταμού που εκτείνεται ανατολικά και δυτικά σε ευθεία γραμμή και απεριόριστα. Το οπτικό του πεδίο περιορίζεται αποκλειστικά στη θέση του. Μια γέφυρα επιτρέπει την επικοινωνία με την απέναντι όχθη όμως είναι τοποθετημένη σε άγνωστο σημείο. Το ερώτημα είναι πως πρέπει να κινηθεί ο ταξιδιώτης ώστε να φτάσει κάποια στιγμή στη γέφυρα.



Σχήμα 1: Το πρόβλημα της γέφυρας

Απλά και μόνο η αναζήτηση της λύσης για το πρόβλημα δε προσφέρει τόση συγκίνηση όση ίσως προσφέρει η ανάλυση της αποδοτικότητας του αλγορίθμου. Μια καλή ερώτηση είναι πως μπορεί να ορισθεί η αποδοτικότητα. Η συνήθης προσπάθεια να αναλύσουμε τη χρονική πολυπλοκότητα δε φαίνεται να έχει ενδιαφέρον πιο πολύ διότι συνήθως οι αποφάσεις που λαμβάνονται άμεσα υπολογίζονται και άμεσα (χωρίς αυτό να είναι ο κανόνας). Το επόμενο λογικό κριτήριο προκύπτει από συσχέτιση των άμεσων αλγορίθμων με τους προσεγγιστικούς. Στους προσεγγιστικούς αλγορίθμους συγκρίνουμε τη λύση του αλγορίθμου με τη βέλτιστη δυνατή. Με ένα πρόχειρο παραλληλισμό κανείς θα μπορούσε να συγκρίνει ένα άμεσο αλγόριθμο με το βέλτιστο επίσης άμεσο αλγόριθμο. Μια και πλέον δε μετράμε τη χρονική πολυπλοκότητα, πολύ εύκολα θα μπορούσαμε να πέσουμε σε τετριμμένες λόγους σύγκρισης. Το μέτρο σύγκρισης μπορεί να προκύψει χαλαρώνοντας τον περιορισμό που έχουμε στην κλάση των άμεσων προβλημάτων. Ο περιορισμός αυτός είναι οι αποφάσεις να λαμβάνονται σε πραγματικό χρόνο. Μια λογική λοιπόν σύγκριση ακούγεται να είναι αυτή της απόδοσης του άμεσου αλγορίθμου με την απόδοση ενός αλγορίθμου(offline) που έχει τη γνώση που λείπει από τον άμεσο, όπου απόδοση θα είναι ένα διαφορετικό σε κάθε πρόβλημα κριτήριο που θα προσπαθούμε να βελτιστοποιήσουμε. Για το πρόβλημα της γέφυρας ένας offline αλγόριθμος γνωρίζει που είναι η γέφυρα, στέλνει λοιπόν τον ταξιδιώτη να διανύσει την απόσταση από την αρχική του θέση μέχρι τη γέφυρα και έχει αυτή την απόσταση ως μέτρο απόδοσης. Πόσο καλός μπορεί να είναι ο λόγος της απόδοσης ενός άμεσου αλγορίθμου προς το βέλτιστο; Αυτό είναι όπως θα δούμε λίγο αργότερα το αντικείμενο μελέτης της θεωρίας ανταγωνισμού. Για το πρόβλημα της γέφυρας και μια απλή σκέψη επιβάλει ότι για να βρει ο ταξιδιώτης κάποτε τη γέφυρα θα πρέπει επαναλαμβανόμενα να αλλάζει κατεύθυνση και κάθε φορά να απομακρύνεται όλο και περισσότερο από την αρχική του θέση (σχήμα 2).



Σχήμα 2: Άμεσος αλγόριθμος για το πρόβλημα της γέφυρας

Για την παραπάνω κλάση αλγορίθμων αποδεικνύεται ότι οποιοσδήποτε από αυτούς είναι τουλάχιστον 9 φορές χειρότερος από τον προφανή offline αλγόριθμο που μετακινεί τον ταξιδιώτη απευθείας στη γέφυρα. Επίσης αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος με σημεία επιστροφής δυνάμεις του 2, δηλαδή 2^1 προς τα δεξιά, $2^1 + 2^2$ προς τα αριστερά, $2^1 + 2^2 + 2^3$ προς τα δεξιά κ.ο.κ., αναγκάζει τον ταξιδιώτη να διανύσει 9 φορές μεγαλύτερη απόσταση από την περίπτωση που θα μπορούσε να ξέρει που είναι η γέφυρα, κάτι που χαρακτηρίζει τον αλγόριθμο ως έναν από τους βέλτιστους που λύνουν το πρόβλημα της γέφυρας. Μόλις έχουμε αναφέρει τις πρώτες αρχές της ανάλυσης ανταγωνισμού τουλάχιστον για το παραπάνω πρόβλημα. Αυτές επιβάλουν τη σταθεροποίηση ενός αλγορίθμου που θα αποφασίζει πως θα κινείται ο ταξιδιώτης. Ένα μέτρο αποδοτικότητας του αλγορίθμου είναι να συγκριθεί με το βέλτιστο offline, και να λάβουμε υπόψη μας τη χειρότερη περίπτωση. Την ανάλυση ενός αλγορίθμου ακόμα για το πρόβλημα της γέφυρας μπορούμε να το δούμε και ως ένα παιχνίδι μεταξύ ενός άμεσου αλγορίθμου f και ενός εχθρού γνωστού και ως adversary ο οποίος προσπαθεί να "ντροπιάσει" τον αλγόριθμο, κάνοντας την απόδοσή του πολύ χειρότερη από αυτή της βέλτιστης λύσης. Δεδομένων σημείων επιστροφής, ένας εχθρός τοποθετεί τη γέφυρα έτσι ώστε να μεγαλώσει το κλάσμα $\frac{online_f\ solution}{offline\,OPT\ solution}$. Σε αυτό λοιπόν το παιχνίδι, ένας εχθρός προσπαθεί να αυξήσει τον παραπάνω λόγο τον οποίο ο αλγόριθμος f προσπαθεί να κρατήσει χαμηλά. Η ποσότητα τότε

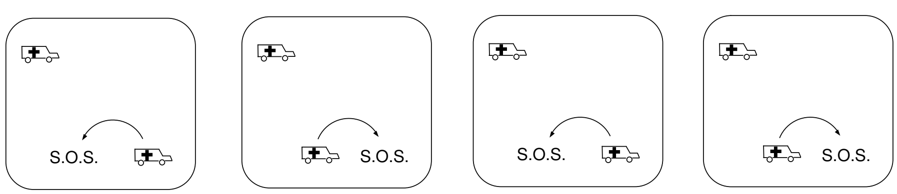
$$\min_f \max_{adv} \frac{online_f\ solution}{offline\ OPT\, solution}$$

χαρακτηρίζει την αποδοτικότητα που μπορούμε να επιτύχουμε σε κάποιο πρόβλημα. Για το πρόβλημα της γέφυρας και για τους αλγορίθμους που επιλέγουν θέσεις επιστροφής $x_1, x_2, x_3, \ldots$ εκατέρωθεν του μηδενός, εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι τον εχθρό τον συμφέρει να τοποθετήσει τη γέφυρα δίπλα ακριβώς από ένα σημείο επιστροφής ώστε να αναγκάσει τον άμεσο ταξιδιώτη σε μεγαλύτερη διαδρομή. Η επιλογή των $x_1, x_2, x_3, \ldots$ καθώς και η επιλογή του εχθρού καθορίζουν την αποδοτικότητα της επιλογής που είναι η

$$\min_{x_1, x_2, \ldots} \max_{n \geqslant 2} \frac{2x_1 + \ldots + 2x_n + x_{n-1}}{x_{n-1}}$$

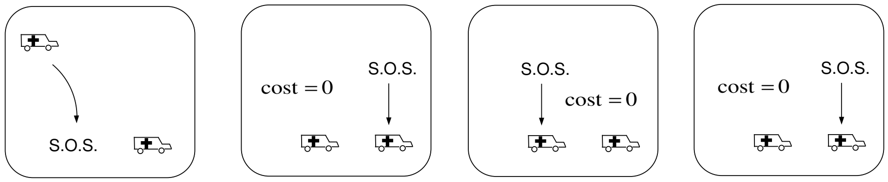
4.1.2 Εξυπηρέτηση ασθενών από το ΕΚΑΒ

Ένα περισσότερο ρεαλιστικό και πιο χαρακτηριστικό πρόβλημα άμεσης απόφασης, πιο πολύ διότι ενέχει ακολουθία αποφάσεων πραγματικού χρόνου σε αντίθεση με το πρόβλημα της γέφυρας, είναι το πρόβλημα εξυπηρέτησης του ΕΚΑΒ. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε αναλάβει να καθοδηγήσουμε τα 2 ασθενοφόρα που διαθέτουμε για να εξυπηρετήσουμε τους ασθενείς σε μια μικρή πόλη. Κάθε μια ώρα λαμβάνουμε μια κλήση στο τηλεφωνικό κέντρο, ή αλλιώς μια αίτηση συντεταγμένων που πρέπει να εξυπηρετήσουμε με ένα ασθενοφόρο απλά μετακινώντας το εκεί. Πιο ασθενοφόρο πρέπει να μετακινηθεί; Επιπόλαια θα απαντούσε κανείς, το κοντινότερο. Έχουμε προετοιμάσει όμως το έδαφος για να εξηγήσουμε ότι η επιλογή δεν είναι τελικά καλή. Ο άπληστος αλγόριθμος της μετακίνησης του κοντινότερου ασθενοφόρου πρέπει να συγκριθεί με το κόστος μετακίνησης των αποφάσεων ενός βέλτιστου διαχειριστή, σύμφωνα πάντα με τις αιτήσεις ενός εχθρού που προσπαθεί να ντροπιάσει τον αλγόριθμό μας. Ένας τέτοιος λοιπόν εχθρός θα μπορούσε να μας δίνει κάθε φορά ως αίτηση τη θέση προηγούμενη θέση του ασθενοφόρου που εξυπηρέτησε τελευταία φορά, αναγκάζοντας μόνο το ένα από τα δύο να κινείται (σχήμα 3).



Σχήμα 3: Άπληστη λύση για το πρόβλημα του ΕΚΑΒ

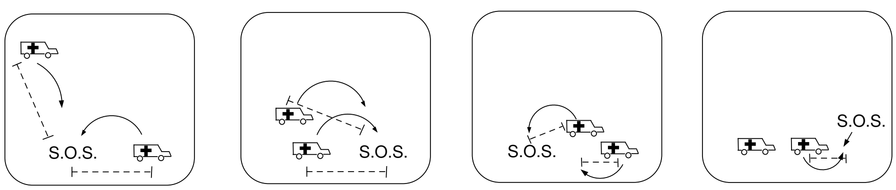
Αντιθέτως ο βέλτιστος offline αλγόριθμος θα μετακινούσε τα δύο ασθενοφόρα στις θέσεις των αιτήσεων που επαναλαμβάνονται, χωρίς να αναγκαστεί μετά τη δεύτερη αίτηση να ξαναμετακινήσει ασθενοφόρο, αποδεικνύοντας χείριστη αποδοτικότητα (σχήμα 4).



Σχήμα 4: Βέλτιστη εξυπηρέτηση αιτήσεων

Το πρόβλημα εξυπηρέτησης ασθενών από το ΕΚΑΒ αποτελεί εκλαΐκευση μιας οικογένειας προβλημάτων γνωστών ως metrical task systems και ποιο συγκεκριμένα μια υποκατηγορία τους, το k-server problem, σύμφωνα με το οποίο σε ένα μετρικό χώρο έχουμε σημεία στα οποία υπάρχουν k το πλήθος εξυπηρετητές. Αίτηση ονομάζεται ένα σημείο του χώρου, και εξυπηρετείται μετακινώντας έναν εξυπηρετητή εκεί. Το κόστος είναι η απόσταση που διανύει ο εξυπηρετητής.

Για το πρόβλημα της εξυπηρέτησης ασθενών από το ΕΚΑΒ γνωρίζουμε ότι η καλύτερη λύση που μπορούμε να έχουμε είναι σίγουρα δύο φορές χειρότερη από τη βέλτιστη offline. Ένας επίσης καλύτερος από τον προηγούμενο αλγόριθμο είναι αυτός που τοποθετεί στην αίτηση το κοντινότερο ασθενοφόρο και μετακινεί προς την κατεύθυνση της αίτησης και για το ίδιο διάστημα και το άλλο ασθενοφόρο εφόσον ο εξυπηρετητής δε βρίσκεται ανάμεσα στην αίτηση και το ίδιο το ασθενοφόρο (σχήμα 5).



Σχήμα 5: Βέλτιστος άμεσος αλγόριθμος για το πρόβλημα του ΕΚΑΒ

Ο παραπάνω αλγόριθμος γνωστός και ως διπλής εξυπηρέτησης (double coverage) επιτυγχάνει χείριστη απόδοση διπλάσια από τη βέλτιστη offline.

4.2 Ανάλυση ανταγωνισμού

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να για να μελετήσει κανείς το πρόβλημα της ανάλυσης ενός άμεσου αλγορίθμου. Ένας αρκετά παραστατικός είναι να δούμε το πρόβλημα ως ένα παιχνίδι ανάμεσα σε ένα παίχτη που καλείται να λάβει άμεσες αποφάσεις και ένα μοχθηρό εχθρό. Ο παίχτης τρέχει έναν άμεσο αλγόριθμο σε μια σειρά αιτήσεων που έχει επινοήσει ο εχθρός. Η δε ακολουθία αιτήσεων που έχει επινοήσει ο εχθρός βασίζεται προφανώς στον αλγόριθμο που εφαρμόζει ο παίχτης, και στόχος του εχθρού είναι να πλάσει εκείνη την ακολουθία που συγκριτικά με τον καλύτερο offline αλγόριθμο προκαλεί στον παίχτη κακή συμπεριφορά. Από την άλλη ο παίχτης προσπαθεί με την επιλογή του αλγορίθμου να περιορίσει τη δυνατότητα του εχθρού να τον ντροπιάσει. Με άλλα λόγια ο εχθρός προσπαθεί να επινοήσει μια ακολουθία αιτήσεων που θα κοστίσει στον παίχτη αλλά από την άλλη δε θα είναι ιδιαίτερα δαπανηρή για να εξυπηρετηθεί από ένα βέλτιστο αλγόριθμο. Η ανάλυση μπορεί να γίνει ελάχιστα πιο σύνθετη αν λάβουμε υπόψη ότι οι αλγόριθμοι διαφοροποιούνται σε ντετερμινιστικούς και πιθανοτικούς.

4.2.1 Είδη εχθρών

Χωρίς να έχουμε δώσει ακόμα τον αυστηρό ορισμό του λόγου ανταγωνισμού, του κριτηρίου δηλαδή αποδοτικότητας των άμεσων αλγορίθμων μπορούμε να ασχοληθούμε με τη διαφοροποίηση που μπορούμε να κάνουμε μεταξύ των αλγορίθμων και των εχθρών που έχουν να αντιμετωπίσουν. Για τους ντετερμινιστικούς αλγορίθμους προκύπτει ένα φυσικό μοντέλο εχθρού. Αυτός γνωρίζει τον αλγόριθμο που προσπαθεί να ντροπιάσει και επιλέγει κάθε φορά τη χειρότερη για τον παίχτη αίτηση. Μια και ο αλγόριθμος είναι ντετερμινιστικός μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο εχθρός για να αποφασίσει την επόμενη αίτηση, λαμβάνει υπόψη την απόφαση του παίχτη. Αυτό γίνεται χωρίς βλάβη αφού ο αλγόριθμος είναι ντετερμινιστικός και ο εχθρός μπορεί να τον προσομοιώσει και να προβλέψει τις επιλογές του.

Τα πράγματα διαφοροποιούνται στους πιθανοτικούς αλγορίθμους στους οποίους η θεωρία της ανάλυσης ανταγωνισμού διαχωρίζει τους εχθρούς σε δύο είδη, σε αυτούς που έχουν ως γνώση μόνο τον πιθανοτικό αλγόριθμο και σε εκείνους που μπορούν να εκμεταλλευτούν τις αποφάσεις του αλγορίθμου. Έτσι η πρώτη διαφοροποίηση για τους εχθρούς, τους διαχωρίζει σε προσαρμόσιμους (adaptive) και επιλήσμονες (oblivious) οι οποίοι αντιστοιχούν σε ντετερμινιστικούς και πιθανοτικούς αλγορίθμους. Η ανάλυση των αμνήμονων εχθρών φαίνεται να είναι πιο οικεία μια και τέτοιοι χρησιμοποιούνται στην ανάλυση offline πιθανοτικών αλγορίθμων. Το σχόλιο έχει να κάνει όχι με την ισχύ μόνο που έχει ένας εχθρός για να προτείνει αιτήσεις αλλά και το μέτρο που θα χρησιμοποιηθεί για να εξυπηρετήσει και ο ίδιος τις αιτήσεις. Ένας επιλήσμων εχθρός που τίθεται έναντι ενός πιθανοτικού αλγορίθμου δε μπορεί παρά να συγκρίνει τη λύση του άμεσου αλγορίθμου με τη λύση του βέλτιστου offline.

Στη βιβλιογραφία υπάρχει διαφοροποίηση για προσαρμόσιμους εχθρούς. Στην πρώτη κατηγορία βρίσκουμε τους προσαρμόσιμους-offline (adaptive-offline) εχθρούς οι οποίοι και πάλι έχουν ως κόστος εξυπηρέτησης των αιτήσεων που προτείνουν, το κόστος του βέλτιστου offline αλγορίθμου. Από την άλλη, οι προσαρμόσιμοι-άμεσοι (adaptive-online) είναι λιγότερο ισχυροί. Ένας τέτοιος εχθρός προτείνει μια αίτηση την οποία και εξυπηρετεί και στη συνέχεια εξυπηρετείται και από τον άμεσο αλγόριθμο, χωρίς βέβαια ο τελευταίος να γνωρίζει την κίνηση του εχθρού. Με άλλα λόγια ένας προσαρμόσιμος-άμεσος εχθρός αντιμετωπίζει αιτήσεις σαν να ήταν ένας άμεσος αλγόριθμος, που όμως γνωρίζει και τη στρατηγική που ακολουθείται για την πρόταση ακολουθίας αιτήσεων.

Στην παρουσίαση μας θα ασχοληθούμε μόνο με δύο από τα παραπάνω είδη εχθρών, τον επιλήσμονα και τον προσαρμόσιμο-offline που στο εξής θα ονομάζουμε απλά προσαρμόσιμο. Επίσης νύξη θα κάνουμε και σε άλλο ένα είδος εχθρών, των ομοιόμορφα τυχαίων. Πρόκειται για μια κατηγορία εχθρών που δε λαμβάνει καμιά πληροφορία για να προτείνει ακολουθία αιτήσεων. Η ιδέα της επινόησης ενός τέτοιου αλγορίθμου μπορεί να δικαιολογηθεί με την προσπάθεια να προσομοιάσουμε την πραγματικότητα, σύμφωνα με την οποία όχι μόνο ένας αλγόριθμος δεν έρχεται αντιμέτωπος με τον ισχυρότερο εχθρό, αλλά επίσης θα μας ενδιέφερε η συμπεριφορά του έναντι σε ένα ομοόμορφα τυχαίο δείγμα αιτήσεων.

4.2.2 Λόγος ανταγωνισμού

Τώρα είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε το λόγο ανταγωνισμού που θα χαρακτηρίζει την αποδοτικότητα άμεσων αλγορίθμων

Ορισμός 3. *Ένας άμεσος αλγόριθμος ALG θα λέγεται c-ανταγωνιστικός αν υπάρχει σταθερά a τέτοια που για κάθε πεπερασμένη ακολουθία αιτήσεων I,*

$$ALG(I) \leqslant c\,OPT(I) + a$$

όπου $ALG(I)$ και $OPT(I)$ είναι τα κόστη λύσεων που προτείνουν ο άμεσος αλγόριθμος και ο βέλτιστος αντίστοιχα στην ακολουθία αιτήσεων I.

Πολλές φορές στη βιβλιογραφία και όταν η σταθερά a είναι μικρότερη ή ίση με το μηδέν ο αλγόριθμος λέγεται ισχυρά c-ανταγωνιστικός. Ο ρόλος της σταθεράς a είναι να ορίζει το λόγο ανταγωνισμού ανεξάρτητο από τις αρχικές συνθήκες. Στο πρόβλημα για παράδειγμα της γέφυρας, και αν έλειπε η σταθερά a, ο εχθρός θα μπορούσε να τοποθετήσει τη γέφυρα σε απόσταση ε από την αρχή και αντίθετα από την πρώτη μετακίνηση του ταξιδιώτη. Αυτό, και αν ο παίχτης διήνυε απόσταση $b > 0$ μέχρι την πρώτη επάνοδο στην αρχική θέση θα έκανε το λόγο ανταγωνισμού $\frac{b+\varepsilon}{\varepsilon} \to \infty$. Επίσης ένας ισχυρά c-ανταγωνιστικός αλγόριθμος είναι και c-προσεγγιστικός με τον περιορισμό ότι ο αλγόριθμος είναι άμεσος. Όταν ένας αλγόριθμος είναι c-ανταγωνιστικός θα λέμε επίσης ότι επιτυγχάνει ή εξασφαλίζει λόγο ανταγωνισμού c. Ένας τέτοιος αλγόριθμος επίσης ονομάζεται ανταγωνιστικός. Σε πολλά προβλήματα ο λόγος ανταγωνισμού δεν είναι σταθερός και εξαρτάται από μια παράμετρο του προβλήματος. Αυτό μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 4. *Ένας άμεσος αλγόριθμος ALG θα λέγεται $f(n)$-ανταγωνιστικός αν υπάρχει συνάρτηση f τέτοια που για μια παράμετρο n του προβλήματος και κάθε πεπερασμένη ακολουθία αιτήσεων I,*

$$ALG(I) \leqslant f(n)\,OPT(I) + a$$

όπου $ALG(I)$ και $OPT(I)$ είναι τα κόστη λύσεων που προτείνουν ο άμεσος αλγόριθμος και ο βέλτιστος αντίστοιχα στην ακολουθία αιτήσεων I.

Οι έννοιες όμοιες και ελαφρά διαφοροποιημένες για πιθανοτικούς αλγορίθμους έχουν ως εξής. Στη συνέχεια με ADV θεωρούμε οποιοδήποτε είδος εχθρού.

Ορισμός 5. *Ένας άμεσος αλγόριθμος ALG θα λέγεται c-ανταγωνιστικός αν υπάρχει σταθερά a τέτοια που για κάθε πεπερασμένη ακολουθία αιτήσεων I,*

$$E[ALG(I) - c\,ADV(I)] \leqslant a$$

όπου $ALG(I)$ και $ADV(I)$ είναι τα κόστη λύσεων που προτείνουν ο άμεσος αλγόριθμος και ο εχθρός όπως αυτός έχει οριστεί αντίστοιχα στην ακολουθία αιτήσεων I.

Η μέση τιμή υπολογίζεται στις τυχαίες επιλογές του πιθανοτικού αλγορίθμου ALG.

Επίσης να παρατηρήσουμε ότι η λύση $ADV(I)$ είναι η βέλτιστη όταν ο εχθρός είναι αμνήμων ή προσαρμόσιμος-offline. Στην περίπτωση του προσαρμόσιμου άμεσου εχθρού, οι αποφάσεις του άμεσου αλγορίθμου συγκρίνονται με το κόστος αποφάσεων που επίσης λαμβάνονται σε πραγματικό χρόνο. Επίσης παρά τον κοινό χαρακτηρισμό του κόστους λύσεων από ένα επιλήσμονα και ένα προσαρμόσιμο άμεσο εχθρό, υπάρχει μια θεμελιώδης διαφορά ανάμεσά τους. Ο αμνήμων εχθρός λαμβάνοντας υπόψη τον άμεσο αλγόριθμο και μόνο, σταθεροποιεί εξαρχής την ακολουθία αιτήσεων που προτείνει στον παίχτη. Στη συνέχεια ο εχθρός εκτιμά το κόστος του που είναι ανεξάρτητο από thn κατανομή που έχει χρησιμοποιήσει ο παίχτης για να εξυπηρετήσει τις αιτήσεις. Το κόστος επομένως του εχθρού είναι σταθερό. Στην περίπτωση λοιπόν ενός αμνήμονα εχθρού, η c-ανταγωνιστικότητα γράφεται και $E[ALG(I)] - c\,ADV(I) \leqslant a$ ή ακόμα καλύτερα

$$E[ALG(I)] - c\,OPT(I) \leqslant a$$

Αντιθέτως στην περίπτωση ενός επιλήσμονα-offline εχθρού, η ακολουθία αιτήσεων ακολουθεί μια κατανομή και εξαρτάται από τις αποφάσεις του άμεσου αλγορίθμου. Η προτεινόμενη λοιπόν λύση από τον εχθρό, αν και βέλτιστη είναι μια τυχαία μεταβλητή. Η c-ανταγωνιστικότητα γράφεται τότε

$$E[ALG(I) - c\,OPT(I)] \leqslant a$$

Έχοντας ορίσει την ανταγωνιστικότητα και τα διαφορετικά ήδη εχθρών είμαστε έτοιμοι να δικαιολογήσουμε γιατί τα είδη εχθρών αμνήμονες (OBL), προσαρμόσιμοι-online ($ADON$) και προσαρμόσιμοι-offline ($ADOF$) χαρακτηρίζονται και αδύναμοι, μέτριοι και ισχυροί αντίστοιχα. Για ένα τύπο εχθρού ADV και ένα άμεσο αλγόριθμο ALG ας συμβολίσουμε με $\overline{R}_{ADV}(ALG)$ βέλτιστο το λόγο ανταγωνισμού του άμεσου αλγορίθμου. Σε αυτό το σημείο πρέπει να επισημάνουμε ότι η αποδεδειγμένη ανταγωνιστικότητα ενός αλγορίθμου δεν είναι υποχρεωτικά η πραγματική (βέλτιστη). Αν για παράδειγμα η πραγματική ανταγωνιστικότητα ενός αλγορίθμου είναι 3, η έλλειψη κατάλληλη απόδειξης θα μπορούσε να μας εξασφάλιζε ότι ο αλγόριθμος είναι το πολύ 4 φορές χειρότερος από τον βέλτιστο κάτι που δεν είναι ψέμα. Σε αντιστοιχία με τους προσεγγιστικούς αλγορίθμους, μια οικογένεια παραδειγμάτων που θα εξασφάλιζε το κατώτερο φράγμα για απόδοση, θα έκανε και το φράγμα σφιχτό. Τυπικά λοιπόν

$$\overline{R}_{ADV}(ALG) = \inf_{c}\{c : ALG\ is\ c - competitive\ vs\ ADV\}$$

Η ισχύς τότε των τριών εχθρών μεταφράζεται στην επόμενη σχέση

$$\overline{\mathcal{R}}_{OBL}(ALG) \leqslant \overline{\mathcal{R}}_{ADON}(ALG) \leqslant \overline{\mathcal{R}}_{ADOF}(ALG)$$

Για να πειστούμε για τη σχέση αρκεί να παρατηρήσουμε τα εξής. Ας θεωρήσουμε ένα άμεσο αλγόριθμο ALG και ότι ένας αμνήμων εχθρός OBL προκαλεί στον αλγόριθμο c-ανταγωνιστικότητα. Αυτή είναι η καλύτερη δυνατή εκτίμηση για την απόδοση του άμεσου αλγορίθμου έναντι μιας ακολουθίας αιτήσεων που αποφασίζεται ανεξάρτητα από την κατανομή αποφάσεων του αλγορίθμου. Ένας προσαρμόσιμος-online εχθρός μπορεί επίσης να προτείνει την ίδια ακολουθία αιτήσεων, απλά δε χρησιμοποιεί το δικαίωμα να λάβει υπόψη τις αποφάσεις του αλγορίθμου. Αν και ο εχθρός εξυπηρετεί τις αιτήσεις επίσης άμεσα, αυτές είναι προαποφασισμένες, επομένως έχουν κόστος για τον προσαρμόσιμο-online εχθρό όσο και του επιλήσμονα κάτι που αποδεικνύει ότι $\overline{\mathcal{R}}_{OBL}(ALG) \leqslant \overline{\mathcal{R}}_{ADON}(ALG)$. Από την άλλη ένας προσαρμόσιμος-offline εχθρός έχει την ίδια ισχύ για προτάσεις ακολουθιών αιτήσεων, το δικαίωμά του όμως να εξυπηρετεί εκ των υστέρων την ακολουθία αιτήσεων κάνουν το κόστος του προσαρμόσιμου-offline τουλάχιστον όσο καλό και του προσαρμόσιμου-offline (πιθανόν και μικρότερο). Η τελευταία παρατήρηση αποδεικνύει τη σχέση $\overline{\mathcal{R}}_{ADON}(ALG) \leqslant \overline{\mathcal{R}}_{ADOF}(ALG)$.

Το αποτέλεσμα της παραπάνω σχέσης είναι ότι όταν αποδεικνύουμε φράγματα για το λόγο ανταγωνισμού πιθανοτικών αλγορίθμων έναντι ενός εθρού αυτά μπορούν να μεταφερθούν και στους άλλους. Για παράδειγμα ένα κάτω φράγμα ανταγωνιστικότητας έναντι αμνήμονα εχθρό ισχύει και για τους υπόλοιπους όπως επίσης και ένα άνω φράγμα έναντι προσαρμόσιμου-offline εχθρού. Με άλλα λόγια τα άνω φράγματα ανταγωνιστικότητας, όταν αυτά αποδεικνύονται για ισχυρότερους εχθρούς είναι πιο ισχυρά. Για τα κάτω φράγματα ισχύει το ίδιο για τους πιο αδύναμους εχθρούς.

4.2.3 Διαφορά ανταγωνισμού

Υπάρχουν παραδείγματα άμεσων προβλημάτων που ο ορισμός της αποδοτικότητας ενός άμεσου αλγορίθμου μπορεί να απλοποιηθεί. Πρόκειται για προβλήματα όπου το κόστος της λύσης είναι φραγμένο για κάθε είσοδο. Με τέτοια προβλήματα θα ασχοληθούμε στο μεγαλύτερο μέρος αυτής της παρουσίασης. Σε αυτά τα προβλήματα υπάρχει ένας πραγματικός b τέτοιος που και για κάθε ακολουθία αιτήσεων I

$$OPT(I) \leqslant b$$

Σε τέτοια προβλήματα η έννοια του λόγου ανταγωνισμού χάνει την αξία της. Ένα μέτρο αποδοτικότητας θα μπορούσε να είναι τότε η διαφορά ανταγωνισμού. Για προβλήματα λοιπόν άμεσων αποφάσεων με φραγμένο offline βέλτιστο κόστος λύσεων μπορούμε να ορίσουμε τη c-ανταγωνιστικότητα ως εκείνο τον αριθμό c που ικανοποιεί τη σχέση

$$ALG(I) - OPT(I) \leqslant c$$

και αυτό για κάθε ακολουθία αιτήσεων I.

Δεν πρέπει να ξεχνάμε επίσης ότι ένας αλγόριθμος μπορεί να μην είναι καν ανταγωνιστικός, να μην έχει δηλαδή σταθερή διαφορά ανταγωνισμού. Σε αυτή την περίπτωση και αν είναι n μια παράμετρος του προβλήματος, θα λέμε ένα αλγόριθμο $f(n)$ ανταγωνιστικό αν για κάθε ακολουθία αιτήσεων I ισχύει

$$ALG(I) - OPT(I) \leqslant f(n)$$

Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $OPT(I) \leqslant b$ μας επιτρέπει να μετράμε την αποδοτικότητα ενός τέτοιου αλγορίθμου απλά με την τάξη μεγέθους κόστους που μπορεί να εξασφαλίσει έναντι ενός εχθρού. Μια λοιπόν και η αποδοτικότητα ενός αλγορίθμου μετριέται στη χειρότερη περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε ως διαφορά ανταγωνιστικότητας ενός αλγορίθμου ALG να είναι

$$\overline{\mathcal{R}}_{ADV}(ALG) = \Theta(\sup_I \{ALG(I)\})$$

Για παράδειγμα θα λέμε ότι ένας άμεσος αλγόριθμος έχει διαφορά ανταγωνισμού $\Omega(\sqrt{n})$ ή και $O(n^3)$.

5 Στοιχεία θεωρίας παιγνίων

Η θεωρία παιγνίων όπως θα δούμε και σε ένα από τα τελευταία κεφάλαιο ενέχεται στη θεωρία ανάλυσης ανταγωνισμού. Η συσχέτιση δεν υπάρχει μόνο λόγω της ιδιαιτερότητας προβλημάτων άμεσων αποφάσεων στα οποία ορίζεται κάποιου είδους αδικία και με το οποίο θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο 9 , αλλά και λόγω της εφαρμογής ενός αποτελέσματος από τη θεωρία παιγνίων στην ανάλυση πιθανοτικών αλγορίθμων. Το τελευταίο δε, συσχετίζεται με την ανάλυση αποδοτικότητας πιθανοτικών αλγορίθμων σε προβλήματα άμεσων αποφάσεων, με το οποίο θα ασχοληθούμε σε αυτό το κεφάλαιο.

5.1 Παίγνια ακέραιας και μεικτής στρατηγικής

Παίγνιο στρατηγικής ονομάζεται η προσπάθεια μοντελοποίησης και ερμηνείας αποφάσεων που λαμβάνονται από μεμονωμένα άτομα όταν αυτά αλληλεπιδρούν με άλλα. Το πλάνο έχει ως εξής. Ένα σύνολο από παίχτες καλούνται να λάβουν στιγμιαία μια απόφαση. Το γινόμενο όλων των αποφάσεων καθορίζει το "κέρδος" κάθε παίχτη με τρόπο που είναι γνωστός σε όλους. Κάθε παίχτης καλείται να λάβει την απόφαση που τον συμφέρει περισσότερο. Αυτό που διαφοροποιεί ένα παίγνιο στρατηγικής από ένα πρόβλημα απόφασης είναι ότι στο πρώτο, το όφελος ενός παίχτης καθορίζεται από το σύνολο των επιλογών των παιχτών. Για να κάνουμε την αναφορά πιο αυστηρή έρχεται ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 6. *Ένα παίγνιο στρατηγικής αποτελείται από*

(i) ένα πεπερασμένο σύνολο παιχτών N

(ii) για κάθε παίχτη $i \in N$ ένα μη κενό σύνολο A_i (το σύνολο των αποφάσεων που μπορεί να λάβει ο παίχτης i

(iii) για κάθε παίχτη $i \in N$ μια σχέση προτίμησης $\gtrsim_i$ επί του συνόλου $A = \times A_1 \times \ldots \times A_{|N|}$

Ένας λόγος που ο ορισμός είναι τόσο γενικός είναι για να μπορεί να καλύψει ένα μεγάλο εύρος καταστάσεων. Το παραπάνω μοντέλο δε θέτει περιορισμούς στο σύνολο των πιθανών αποφάσεων που από παίχτη σε παίχτη μπορεί να είναι από μια μεμονωμένη οντότητα έως ένα σύνθετο όργανο που λαμβάνει αποφάσεις, και που μπορεί να αποτελείται από λίγα στοιχεία, μέχρι και να είναι πολύ μεγάλο. Παρόλα αυτά το μοντέλο περιορίζεται σε καταστάσεις κατά τις οποίες σε κάθε παίχτη αναθέτουμε μια σχέση προτίμησης, που μπορεί να μετουσιώνει από τα συναισθήματα ενός ατόμου για τις επιλογές της ομάδας στην οποία ανήκει μέχρι και ικανοποίηση ενός οργανισμού που δε δρα συνειδητά για την παραγωγικότητα που επιτυγχάνουν οι εργαζόμενοι σε αυτόν.

Η παραπάνω επινόηση μοντελοποιεί καταστάσεις κατά τις οποίες οι παίχτες επιλέγουν με ντετερμινιστικό τρόπο μεταξύ των στρατηγικών τους. Τέτοιου είδους επιλογές ονομάζονται και ακέραιες στρατηγικές σε αντίθεση με τις μεικτές που επιτρέπουν στους παίχτες να ορίζουν πιθανοτικά την τύχη τους. Έως τώρα, ένα στρατηγικό παιχνίδι αποτελείτο από μια τριάδα $< N, (A_i)_{i \in N}, (\gtrsim_i)_{i \in N} >$, όπου η σχέση $\gtrsim_i$ οριζόταν επί του συνόλου $A = A_1 \times \ldots \times A_{|N|}$. Πλέον, και με την υπόθεση ότι η σχέση προτίμησης για κάθε παίχτη i μπορεί να παρασταθεί από την αναμενόμενη τιμή μιας συνάρτησης $u_i : A \to \mathbb{R}$, το παίγνιο στρατηγικής θα περιγράφεται από την τριάδα $< N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} >$.

Για ένα παίγνιο $G =< N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} >$ και με $\Delta(A_i)$ συμβολίζεται το σύνολο των κατανομών πιθανοτήτων στο σύνολο A_i. Ονομάζουμε το σύνολο $\Delta(A_i)$, σύνολο μεικτών στρατηγικών για τον παίχτη i, σε αντίθεση με το σύνολο A_i που ονομάζεται σύνολο ακέραιων στρατηγικών. Στην επέκταση του προηγούμενου παιγνίου, ένα παίγνιο μεικτής στρατηγικής επιτρέπει στους παίχτες στρατηγικές από το σύνολο $\Delta(A_i)$. Αυτά τα πολύ εισαγωγικά στοιχεία είναι αρκετά για να καταλήξουμε λίγο αργότερα στην αρχή του Yao.

5.2 Αυστηρώς ανταγωνιστικά παίγνια

Πολλά παίγνια δύο μόνο παιχτών και με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων μπορούν να αναπαρασταθούν πολύ εύκολα με τη βοήθεια πινάκων. Οι επιλογές του ενός παίχτη αλλάζουν ανά γραμμές, ενώ του δεύτερου ανά στήλες. Το ζευγάρι σε κάθε στοιχείο του πίνακα αντιστοιχεί στους δύο παίχτες και αποτελεί τη στρατηγική τους, ή τη συνέπειά της όπως θα δούμε σε λίγο.

Παράδειγμα 1. *Δύο φίλοι βρίσκονται σε ένα καθιστικό και θέλουν να περάσουν την ώρα τους ακούγοντας μουσική. Προτεραιότητα και για τους δύο είναι να ακούσουν μουσική παρέα, όμως ο ένας προτιμά να ακούσει Nick Cave και ο άλλος Mark Lanegan. Η ικανοποίηση που παίρνει κάθε ένας από το συνδυασμό των επιλογών φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Αν οι δυο φίλοι δε συμφωνήσουν*

	Cave	Lanegan
Cave	2,1	0,0
Lanegan	0,0	1,2

Σχήμα 6: Το παίγνιο της μάχης των δύο φύλων

δεν είναι κανένας τους ικανοποιημένος. Αν καταφέρουν να μείνουν μαζί έχουν τουλάχιστον από μια μονάδα ικανοποίησης ενώ αυτός που ακούει την επιλογή του έχει δύο μονάδες ικανοποίησης.

Το παράδειγμα είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως η μάχη των φύλων. Δεν είναι τυχαία η αναπαράσταση σε πίνακα των προτιμήσεων των παιχτών, κάτι που είναι εφικτό μόνο σε πεπερασμένα παίγνια, σε παίγνια δηλαδή στα οποία το σύνολο των επιλογών είναι πεπερασμένο. Επίσης να παρατηρήσουμε τη διαφοροποίηση μεταξύ του παραδείγματος και του ορισμού που δώσαμε ως προς τις προτιμήσεις και τη σχέση προτίμησης. Εδώ οι παίχτες επιλέγουν Cave ή Lanegan. Αποφασίζουν συγκρίνοντας τη συνέπεια των αποφάσεών τους που μεταφράζεται με την ικανοποίηση που παίρνουν.

Πολλές φορές οι προτιμήσεις των παιχτών μπορούν να οριστούν πιο φυσικά αντί με τις προτιμήσεις τους, μέσω των συνεπειών των επιλογών τους. Για αυτό ορίζουμε μια συνάρτηση $g : A \to C$ που συσχετίζει το σύνολο προτιμήσεων ενός παίχτη με το σύνολο συνεπειών C. Η σχέση προτίμησης τότε $\gtrsim_i$ για κάθε παίχτη ορίζεται ως $a \gtrsim_i b$, για $a, b \in A_i$, αν και μόνο αν $g(a) \gtrsim_i^* g(b)$, όπου $\gtrsim_i^*$ σχέση στο σύνολο των συνεπειών.

Σε πολλές περιπτώσεις η έννοια της συνέπειας σχετίζεται με την έννοια του κέρδους, την οποία και προσπαθεί να μεγιστοποιήσει κάθε οντότητα που συμμετέχει στο παίγνιο. Η συνάρτηση που συσχετίζει τις προτιμήσεις με τις συνέπειες, καλείται τότε συνάρτηση πληρωμής και συμβολίζεται με u_i, $u_i : A \to \mathbb{R}$. Η σχέση του συνόλου $u_i(A) \subseteq \mathbb{R}$ προέρχεται από τη συνήθη διάταξη των πραγματικών.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα λεγόμενα αυστηρώς ανταγωνιστικά παίγνια.

Ορισμός 7. *Ένα παίγνιο στρατηγικής* $< \{1, 2\}, (A_i)_{i\in\{1,2\}}, (\gtrsim_i)_{i\in\{1,2\}} >$ *θα λέγεται αυστηρώς ανταγωνιστικό αν για κάθε* $a \in A$ *και κάθε* $b \in A$ *έχουμε*

$$a \gtrsim_1 b \Longleftrightarrow b \gtrsim_2 a$$

Τα αυστηρώς ανταγωνιστικά παίγνια είναι γνωστά και ως παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Αν το παίγνιο σχετίζεται με συναρτήσεις πληρωμής u_i τότε για αυτές ισχύει ότι $u_1 + u_2 = 0$, με την έννοια του αθροίσματος κατά σημείο. Με άλλα λόγια, σε τέτοια παίγνια, στους δύο παίχτες και συναρτήσει των στρατηγικών τους, τους αποτιμώνται μέσω της συνάρτησης πληρωμής αντίθετες τιμές. Αυτός είναι ο λόγος που η καλύτερη επιλογή στρατηγικής από ένα παίχτη λαμβάνεται δεδομένου ότι , ότι και να επιλέξει, ο αντίπαλος του θα προσπαθήσει να διαλέξει στρατηγική για να τον βλάψει όσο το δυνατό περισσότερο.

5.3 Το θεώρημα minimax

Ας δώσουμε ένα ακόμα παράδειγμα παιγνίου αυτή τη φορά μηδενικού αθροίσματος.

Παράδειγμα 2. *Θεωρούμε ένα παίγνιο με δύο παίχτες. Κάθε ένας παίχτης μπορεί να επιλέξει μεταξύ τριών στρατηγικών, "πέτρα, ψαλίδι και χαρτί". Ο νικητής καθορίζεται από τον επόμενο κανόνα. Το χαρτί νικά την πέτρα τυλίγοντάς την, το ψαλίδι νικά το χαρτί κόβοντάς το και η πέτρα νικά το ψαλίδι σπάζοντάς το. Ο νικητής κερδίζει από το χαμένο μια μονάδα.*

Όπως και στο πρώτο παράδειγμα, το παίγνιο μπορεί να αναπαρασταθεί από τον επόμενο πίνακα όπου τα γράμματα A, B, C αντιστοιχούν στο ψαλίδι, στο χαρτί και την πέτρα αντίστοιχα.

Ο πίνακας πληρωμής είναι γενικά $n \times m$ ανάλογα με το πλήθος στρατηγικών κάθε παίχτη και εδώ προφανώς 3×3. Επίσης η πληρωμή του ενός παίχτη R είναι σε αντιστοιχία με τις γραμμές ενώ του άλλου παίχτη C είναι σε αντιστοιχία με τις στήλες. Αν ονομάσουμε M τον παραπάνω πίνακα τότε $M_{i,j}$ είναι η ποσότητα που πληρώνει ο παίχτης C στον παίχτη R. Το παίγνιο είναι πλήρως ορισμένο από τον πίνακα M μια και είναι μηδενικού αθροίσματος.

Ποια είναι μια καλή στρατηγική για κάθε παίχτη; Είναι λογικό ο παίχτης R να προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το κέρδος του. Ας υποθέσουμε ότι οι αποφάσεις λαμβάνονται ταυτόχρονα, δηλαδή κανένας παίχτης δεν έχει πληροφορία για την πρόθεση του άλλου παίχτη. Ο παίχτης λοιπόν R επιλέγοντας τη στρατηγική

	A	B	C
A	0	1	-1
B	-1	0	1
C	1	-1	0

Σχήμα 7: Αποτιμητικός πίνακας του παιγνίου ”πέτρα, μολύβι, χαρτί”

στη γραμμή i έχει εξασφαλίσει κέρδος τουλάχιστον $\min_j M_{i,j}$ ανεξάρτητα από την επιλογή του παίχτη C. Επομένως μια βέλτιστη στρατηγική για τον παίχτη R θα ήταν να μεγιστοποιήσει την ποσότητα $\min_j M_{i,j}$. Ας συμβολίσουμε με $V_R = \max_i \min_j M_{i,j}$ το κάτω φράγμα της πληρωμής που μπορεί να εξασφαλίσει για τον εαυτό του όταν επιχειρεί βέλτιστη στρατηγική. Ομοίως ορίζουμε $V_C = \min_j \max_i M_{i,j}$ το καλύτερο άνω φράγμα για τον παίχτη C ο οποίος επίσης επιχειρεί βέλτιστη στρατηγική. Στη γενική περίπτωση οι δύο αυτές ποσότητες συνδέονται με τη σχέση

$$\max_i \min_j M_{i,j} \leqslant \min_j \max_i M_{i,j}$$

Στο τελευταίο παράδειγμα εύκολα προκύπτει ότι $V_R = -1$ και $V_C = 1$, η σχέση των οποίων δεν είναι τυχαία, μια και το παίγνιο είναι μηδενικού αθροίσματος. Συνηθίζουμε να λέμε ότι ένα παίγνιο αυστηρώς ανταγωνιστικό έχει λύση αν $V_C = V_R$. Αν γ, ρ είναι οι στρατηγικές των παιχτών από τις οποίες προκύπτει η λύση, ισχύει προφανώς ότι $V = V_C = V_R = M_{\gamma,\rho}$. Ένα τέτοιο παίγνιο είναι και το τροποποιημένο ”πέτρα-ψαλίδι-χαρτί” όπως φαίνεται στο σχήμα 8.

	A	B	C
A	0	1	2
B	-1	0	1
C	-2	-1	0

Σχήμα 8: Τροποποιημένος αποτιμητικός πίνακας του παιγνίου ”πέτρα, μολύβι, χαρτί”

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι $\gamma = \rho = A$ και $V = 0$. Τι γίνεται όμως με παίγνια που δεν έχουν λύση όπως αυτή ορίστηκε. Μια καλή απάντηση είναι ότι μπορούμε να καταφύγουμε σε πιθανοτικές στρατηγικές, για να δικαιολογήσουμε τα προγραφόμενα. Κάθε παίχτης θα μπορεί να επιλέγει μια κατανομή από τις δυνατές στρατηγικές που μπορεί να ακολουθήσει. Αν λοιπόν το σύνολο των ακέραιων στρατηγικών ενός παίχτη έχει μέγεθος n, μια μεικτή του στρατηγική θα είναι ένα διάνυσμα $p = (p_1, \ldots, p_n)$ με $p_j \in [0, 1]$, όπου p_j θα είναι η πιθανότητα του παίχτη να διαλέξει ως στρατηγική την j στήλη.

Λόγω του νέου ορισμού, το κέρδος του παίχτη θα είναι μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή

$$p^T M q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i M_{i,j} q_j$$

όπου q ένα m-διάστατο διάνυσμα και η μεικτή στρατηγική του δεύτερου παίχτη. Όπως και πριν χρησιμοποιώντας το συμβολισμό V_R, V_C για το βέλτιστο κάτω φράγμα του κέρδους για τον παίχτη R και το βέλτιστο άνω φράγμα για τον παίχτη C αντίστοιχα, έχουμε ότι

$$V_R = \max_p \min_q p^T M q$$

$$V_C = \min_q \max_p p^T M q$$

Το περίφημο θεώρημα minimax εξασφαλίζει ότι ένα τέτοιο παίγνιο έχει πάντα λύση.

Θεώρημα 1 (Το θεώρημα minimax του von Neumann). *Για κάθε αυστηρώς ανταγωνιστικό παίγνιο με 2 παίχτες που επιλέγουν μεικτές στρατηγικές p, q,*

$$\max_p \min_q p^T M q = \min_q \max_p p^T M q$$

5.4 Η αρχή του Yao

Η αρχή του Yao είναι η μετάφραση στη θεωρία ανάλυσης ανταγωνισμού για άμεσους πιθανοτικούς αλγόριθμους αλλά και της ανάλυσης πιθανοτικών αλγορίθμων της αρχής minimax του von Neumann. Πρόκειται για μια παρατήρηση που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε πιο εύκολα, κάτω φράγματα για την αποδοτικότητα άμεσων πιθανοτικών αλγορίθμων έναντι επιλήσμονα εχθρού. Οι αλγόριθμοι αυτοί εφαρμόζονται για προβλήματα βελτιστοποίησης. Ανάλογα με το αν το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης η αρχή του Yao έχει μια απλή διαισθητική ερμηνεία. Για λόγους συνέχειας θα ασχοληθούμε με την ερμηνεία που αφορά προβλήματα ελαχιστοποίησης. Αυτή είναι η εξής: Προκειμένου να επιτευχθεί ένα κάτω φράγμα c για την αποδοτικότητα ενός πιθανοτικού άμεσου αλγορίθμου, αρκεί να επιλεγεί μια κατανομή πιθανοτήτων στις δυνατές ακολουθίες αιτήσεων, τέτοια ώστε η σταθερά c να φράσσει από κάτω το λόγο του μέσου κόστους ενός ντετερμινιστικού άμεσου αλγορίθμου προς το μέσο βέλτιστο κόστος. Σε αυτήν την περίπτωση το c είναι ένα κάτω φράγμα για κάθε πιθανοτικό άμεσο αλγόριθμο.

Για να εφαρμόσουμε την αρχή minimax στην ανάλυση ενός πιθανοτικού αλγορίθμου, ο οποίος πιθανόν να προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει τη χρονική του πολυπλοκότητα, το λόγο προσέγγισης μιας βέλτιστης λύσης ή ότι άλλο μετρήσιμο μέγεθος, αρκεί να δούμε τον παίχτη που επιλέγει ένα ντετερμινιστικό αλγόριθμο ως τον παίχτη στηλών σε ένα αυστηρώς ανταγωνιστικό παίγνιο. Ο παίχτης των γραμμών R είναι ο εχθρός που προσπαθεί να ντροπιάσει τον αλγόριθμο του C. Επίσης ο παίχτης C επιλέγει μια μεικτή στρατηγική, μια κατανομή δηλαδή στους δυνατούς ντετερμινιστικούς αλγορίθμους. Στη συνέχεια ξαναθέτουμε την αρχή του von Neumann στην γλώσσα των αλγορίθμων.

Πόρισμα 1. *Έστω Π ένα πρόβλημα με πεπερασμένο σύνολο δυνατών στιγμιοτύπων εισόδου $\mathcal{I}$ (σταθερού μεγέθους) και ένα πεπερασμένο σύνολο αλγορίθμων $\mathcal{A}$. Ας είναι επίσης $I \in \mathcal{I}$, $A \in \mathcal{A}$ και $C(I, A)$ ένα μετρήσιμο μέγεθος που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε (π.χ. χρόνος).*

Για δύο τυχαίες κατανομές p, q στα $\mathcal{I}, \mathcal{A}$ αντίστοιχα, συμβολίζουμε με I_p μια τυχαία είσοδο για το πρόβλημα Π επιλεγμένη σύμφωνα με την κατανομή p και A_q ένα τυχαίο ντετερμινιστικό αλγόριθμο επιλεγμένο επίσης από την κατανομή q. Τότε

$$\max_p \min_q E[C(I_p, A_q)] = \min_q \max_p E[C(I_p, A_q)]$$

$$\max_p \min_{A \in \mathcal{A}} E[C(I_p, A)] = \min_q \max_{I \in \mathcal{I}} E[C(I, A_q)]$$

Από το παραπάνω πόρισμα παίρνουμε άμεσα την αρχή του Yao σύμφωνα με την οποία

$$\min_{A \in \mathcal{A}} E[C(I_p, A)] \leqslant \max_{I \in \mathcal{I}} E[C(I, A_q)]$$

Με άλλα λόγια και αν κριτήριο αποδοτικότητας είναι ο χρόνος, η αναμενόμενη χρονική πολυπλοκότητα του βέλτιστου ντετερμινιστικού αλγορίθμου για μια τυχαία επιλεγμένη είσοδο είναι κάτω φράγμα της χρονικής πολυπλοκότητας του βέλτιστου πιθανοτικού αλγορίθμου.

Ας δούμε αμέσως την αρχή του Yao για μια ειδική περίπτωση, που αφορά τη θεωρία ανάλυσης ανταγωνισμού. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα πεπερασμένο σύνολο από αλγορίθμους $\mathcal{A} = \{ALG_1, ALG_2, \ldots, ALG_m\}$ και ένα πεπερασμένο σύνολο από δυνατές ακολουθίες αιτήσεων $\mathcal{S} = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$

Θεώρημα 2 (Η αρχή Yao για πεπερασμένα παίγνια). *Έστω ALG ένας άμεσος αλγόριθμος για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Έστω επίσης $y(j)$ μια κατανομή πιθανοτήτων στο πεπερασμένο πλήθος διαφορετικών ακολουθιών αιτήσεων. Τότε*

$$\overline{\mathcal{R}}_{OBL}(ALG) \geqslant \max\{\min_i \frac{E_{y(j)}[ALG_i(\sigma_j)]}{E_{y(j)}[OPT_i(\sigma_j)]}, \min_i E_{y(j)}[\frac{ALG_i(\sigma_j)}{OPT_i(\sigma_j)}]\}$$

Να παρατηρήσουμε ότι η αρχή στην παραπάνω της μορφή αναφέρεται σε πεπερασμένα παίγνια. Ο λόγος είναι για να εξασφαλίζεται η αρχή minimax. Μπορούμε να χαλαρώσουμε αυτή την απαίτηση εφόσον το παίγνιο που ορίζεται, αν και άπειρο μπορεί να τυποποιηθεί ως παίγνιο 2 παιχτών μηδενικού αθροίσματος (two-person zero-sum game) με αποτιμητική συνάρτηση που ικανοποιεί την αρχή minimax.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η εφαρμογή που μπορεί να βρει η παραπάνω αρχή σε προβλήματα άμεσων αποφάσεων με φραγμένη βέλτιστη λύση, με τα οποία θα ασχοληθούμε. Θυμίζουμε ότι τέτοια προβλήματα είναι όσα ικανοποιούν τη σχέση

$OPT(\sigma) \leqslant b$ για κάθε ακολουθία αιτήσεων σ. Χαλαρώνοντας την απαίτηση των πεπερασμένων παιγνίων, η αρχή του Yao δίνει την επόμενη πρόταση.

Πόρισμα 2. *Ας είναι* $\{ALG_1, ALG_2, \ldots\}$*και*$\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$ *σύνολα από ντετερμινιστικούς αλγορίθμους και δυνατές ακολουθίες αιτήσεων αντίστοιχα για ένα πρόβλημα με φραγμένη offline λύση, της οποίας η βέλτιστη πιθανοτική άμεση λύση είναι μη σταθερή. Ισχύει ότι*

$$\overline{\mathcal{R}}_{OBL}(ALG) = \Omega(\inf_i E_{y(j)}[ALG_i(\sigma_j)])$$

Η ερμηνεία του πορίσματος είναι πιο απλή από ότι φαίνεται. Για να εκτιμήσουμε το κάτω φράγμα της αποδοτικότητας πιθανοτικών αλγορίθμων στην ειδική κατηγορία άμεσων προβλημάτων που προαναφέραμε, αρκεί να πετύχουμε εκτίμηση για την τη μέση αποδοτικότητα των ντετερμινιστικών αλγορίθμων πάνω σε μια κατανομή των πιθανών ακολουθιών αιτήσεων. Το πόρισμα αυτό θα μας φανεί χρήσιμο στην παράγραφο 7.2 όταν θα χρειαστεί να εκτιμήσουμε ένα κάτω φράγμα των πιθανοτικών αλγορίθμων για το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών.

6 Προβλήματα άμεσων αποφάσεων

Προβλήματα άμεσων αποφάσεων καταμερισμού εργασίας σε μηχανές έχουν μελετηθεί εκτενώς τα τελευταία χρόνια ωστόσο βασικά ερωτήματα μένουν ακόμα αναπάντητα. Τέτοια ερωτήματα έχουν να κάνουν με τον ορισμό και κατ' επέκταση τη μελέτη της αδικίας που μπορεί να προκαλέσει ένας αλγόριθμος κατανομής εργασίας, όπου από την έννοια κατανομή εργασίας καλύπτεται μια μεγάλη οικογένεια προβλημάτων. Παρακάτω θα ασχοληθούμε με εκείνη την κατηγορία προβλημάτων στα οποία συνεχώς προγραμματίζονται εργασίες που πρέπει να κατανεμηθούν σε μια ομάδα μηχανών. Για κάθε τέτοιο πρόβλημα αναπτύσσουμε την έννοια της επιθυμητής επιφόρτισης και τη διαφορά αυτής από την επιφόρτιση που προκαλεί ένας άμεσος αλγόριθμος την καλούμε αδικία. Η διαφοροποίηση αυτή από τον κλασικό ορισμό απόδοσης άμεσων αλγορίθμων αποδίδεται στο ότι για την κλάση προβλημάτων που θα αναφερθούμε υπάρχει τετριμμένη και καμιά φορά μηδενική επιφόρτιση από offline αλγόριθμους, όπως εξηγήσαμε στην παράγραφο 4.2.3.

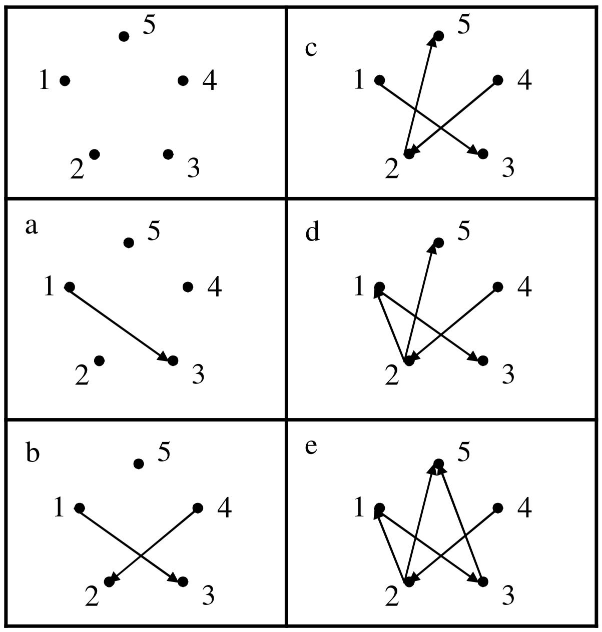
Σε ένα τυπικό πρόβλημα άμεσης ανάθεσης εργασιών υπάρχει ένα σύνολο διαθέσιμων μηχανών και σε κάθε βήμα μια εργασία μπορεί να εκτελεστεί σε ένα υποσύνολο των μηχανών με ορισμένο κόστος. Η εργασία πρέπει να ανατεθεί σε μια μηχανή. Το πρόβλημα οπως έχει μελετηθεί ήδη είναι η μείωση της μέγιστης επιφόρτισης του συστήματος. Δεχόμενοι ότι οι μηχανές είναι απρόθυμες να αναλάβουν μια εργασία πρέπει να επινοηθεί ένας κανόνας ανάθεσης που θα συμφωνεί με κάποιον ορισμό επιθυμητής επιφόρτισης. Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα τέτοιων προβλημάτων είναι ότι υπάρχουν πρωτόκολλα ανάθεσης εργασιών για τα οποία η απόκλιση από την επιθυμητή επιφόρτιση, ή αλλιώς αδικία, φράσσεται από μια συνάρτηση του πλήθους των μηχανών και είναι ανεξάρτητη από το πλήθος των αιτήσεων.

Ως παράδειγμα προβλήματος μπορούμε να αναφέρουμε το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών προτεινόμενο από τους Fagin και Williams [6]. Σε αυτό το πρόβλημα n παίχτες δημιουργούν μια κοινοπραξία οδηγών και κάθε μέρα ένα υποσύνολο ανθρώπων πάντα με κοινό προορισμό, εμφανίζεται για να χρησιμοποιήσει το μοναδικό αυτοκίνητο. Καλούμαστε να αναπτύξουμε κάποιο "δίκαιο" κανόνα προγραμματισμού ανάθεσης της οδήγησης.

Παρακάτω μελετάμε το πρόβλημα σε διάφορες μορφές του και αποδεικνύουμε ότι το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών είναι ένας καλός αντιπρόσωπος ενός συνόλου προβλημάτων. Επίσης σε επόμενο κεφάλαιο αναφερόμαστε στον ορισμό της αδικίας και συζητάμε πόσο "δίκαιος" είναι.

6.1 Το πρόβλημα προσανατολισμού ακμών

Ένα από τα πιο γνωστά προβλήματα άμεσων αποφάσεων είναι το πρόβλημα προσανατολισμού ακμών (*edge orientation*). Σε αυτό το πρόβλημα έχουμε n κόμβους που συμβολίζονται με $\{1, 2, \ldots, n\}$. Σε κάθε βήμα του προβλήματος ένα μη διατεταγμένο ζεύγος φτάνει, μια μη προσανατολισμένη δηλαδή ακμή και καλούμαστε να την προσανατολίσουμε. Στόχος είναι μετά το πέρας κάθε βήματος και για κάθε κόμβο, η διαφορά μεταξύ των εισερχόμενων ακμών από τις εξερχόμενες να είναι μικρή. Ορίζουμε αδικία για ένα κόμβο v να είναι η ποσότητα $\frac{1}{2}|in\, degree(v) - out\, degree(v)|$. Αδικία σε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος ονομάζουμε τη μεγαλύτερη αδικία κόμβου δηλαδή την ποσότητα $\max_v \frac{1}{2}|in\, degree(v) - out\, degree(v)|$. Ο ορισμός είναι λογικός μια και αν π.χ. ένα κόμβος συμμετέχει σε άρτιο πλήθος αιτήσεων, δηλαδή σε μη προσανατολισμένες ακμές, θα θέλαμε να έχει ισάριθμες εισερχόμενες και εξερχόμενες. Στο σχήμα 9 φαίνεται ένα παράδειγμα προσανατολισμού ακμών για 5 κόμβους και για τη σειρά αιτήσεων $\{1,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{1,2\}, \{3,5\}$



Σχήμα 9: Το πρόβλημα προσανατολισμού ακμών

Εύκολα παρατηρούμε ότι στο πέμπτο βήμα η αδικία για τον παίχτη 2 είναι $\frac{1}{2}$ ενώ η αδικία του στιγμιότυπου οφείλεται στον παίχτη 5 ο οποίος έχει αδικία 1.

6.2 Το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών

Το πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών (*generalcarpool*) όπως ορίστηκε από τους Fagin και Williams στο [6] έχει ως εξής: *Σε ένα χωρίο n ανθρώπων (παιχτών) αποφασίζεται από κοινού να αγοραστεί ένα μεταφορικό μέσο (απεριόριστης χωρητικότητας). Κάθε μέρα ένα υποσύνολο των n ανθρώπων, γνωστό και ως αίτηση, εμφανίζεται και θέλει να μετακινηθεί προς ένα προκαθορισμένο και πάντα ίδιο προορισμό και ένας από αυτούς πρέπει να οδηγήσει. Πρέπει να επινοήσουμε ένα αλγόριθμο που θα αποφασίζει ποιος θα οδηγήσει. Αυτός πρέπει να έχει τέτοια κριτήρια απόφασης ώστε να ενθαρρύνεται η περαιτέρω συμμετοχή κάθε παίχτη.*

Στην εισαγωγή του κεφαλαίου αναφερθήκαμε σε μια κλάση προβλημάτων όπου εργασίες πρέπει να κατανεμηθούν σε ένα σύνολο μηχανών με στόχο τη μειωμένη απόκλιση από μια εκ των προτέρων αποφασισμένη επιφόρτιση (αδικία). Το πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών μπορούμε να το δούμε ως ένα τέτοιο πρόβλημα. Μηχανές είναι οι παίχτες και το υποσύνολο των παιχτών δηλώνει το υποσύνολο των μηχανών σε μία από τις οποίες μπορεί να ανατεθεί η εργασία με κόστος όσο και το μέγεθος του υποσυνόλου. Ο παίχτης τελικά που θα οδηγήσει αντιστοιχεί στη μηχανή που θα επωμιστεί το βάρος να διεκπεραιώσει την εργασία.

Το πρώτο ερώτημα που πρέπει να τεθεί είναι το πώς μπορεί να οριστεί η αδικία. Αν και για το θέμα θα αναφερθούμε αργότερα, μπορούμε να δώσουμε μια διαισθητικά ικανοποιητική εξήγηση για τον ορισμό της αδικίας στο πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών. Ας υποθέσουμε ότι στο πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών κάθε μέρα εκτός από ένα μεταφορικό μέσο είναι διαθέσιμος και ένας οδηγός ο οποίος για κάθε διαδρομή πρέπει να πληρωθεί. Μια και οι προορισμός είναι πάντα ο ίδιος μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κόστος κάθε διαδρομής είναι 1. Αν ένα υποσύνολο d παιχτών εμφανιστεί μια μέρα, κάθε ένας από αυτούς οφείλει στον οδηγό $1/d$ του κόστους της διαδρομής. Ένας από τους παίχτες πρέπει να επωμιστεί το κόστος του οδηγού πληρώνοντας τη διαδρομή. Η αδικία του παίχτη που πληρώνει τη διαδρομή αυξάνεται κατά $1 - 1/d$,δηλαδή το ποσό που πληρώνει παραπάνω από αυτό που του αναλογεί, και η αδικία όσων δεν πληρώνουν τη διαδρομή μειώνεται κατά $1/d$. Αν με d_i συμβολίσουμε την αδικία του i παίχτη, ορίζουμε ως αδικία του προβλήματος την ποσότητα $\max_i |d_i|$.

Οι Fagin και Williams πρότειναν τον προφανή άπληστο αλγόριθμο που λύνει το παραπάνω πρόβλημα και που αναθέτει το κόστος της διαδρομής σε εκείνον τον παίχτη που χρωστά περισσότερο στους υπολοίπους. Θα δούμε ότι ο προφανής αλγόριθμος είναι ο καλύτερος ντετερμινιστικός, καθώς και θα αναλύσουμε πιθανοτικούς αλγορίθμους. Πιο συγκεκριμένα θα δούμε ότι

1. Η καλύτερη αδικία που μπορεί να πετύχει οποιοσδήποτε ντετερμινιστικός αλγόριθμος είναι γραμμική. Πιο συγκεκριμένα ο προφανής άπληστος αλγόριθμος επιτυγχάνει αδικία το πολύ $\frac{n-1}{2}$ ενώ για κάθε ντετερμινιστικό αλγόριθμο υπάρχει μια ακολουθία αιτήσεων που μπορεί να προταθεί και να προκαλέσει αδικία $\frac{1}{2}\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$. Μια καλύτερη ακολουθία αιτήσεων μπορεί επίσης να βρεθεί που να προκαλεί αδικία τουλάχιστον $\frac{n-1}{3}$.

2. Υπάρχει πιθανοτικός αλγόριθμος με αναμενόμενη αδικία που φράσσεται άνω από τη συνάρτηση $\sqrt{n \log n}$, ενώ για κάθε πιθανοτικό αλγόριθμο υπάρχει μια ακολουθία αιτήσεων που του προκαλεί αδικία τουλάχιστον $\sqrt[3]{\log n}$. Ανοιχτό παραμένει το ερώτημα ποιο φράγμα είναι σφιχτό. Στην παρούσα εργασία προτείνουμε ένα νέο αλγόριθμο που πιστεύουμε ότι χαμηλώνει το άνω φράγμα σε $\log n$.

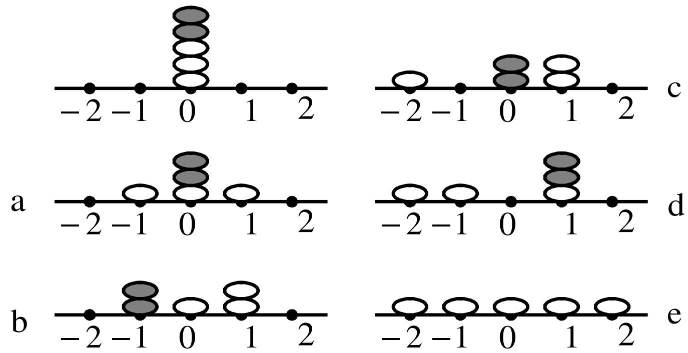
3. Υπάρχει πιθανοτικός αλγόριθμος που εξασφαλίζει αναμενόμενη αδικία το πολύ $\log l$ όπου l είναι το πλήθος των αιτήσεων, και επομένως μη φραγμένη ως προς σταθεροποιημένο πλήθος παιχτών.

4. Ο προφανής άπληστος αλγόριθμος έναντι ενός ομοιόμορφα τυχαίου εχθρού εξασφαλίζει αδικία $\Theta(\log \log n)$.

Το ενδιαφέρον όπως θα δούμε είναι ότι τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν μέσω της ισοδυναμίας του προβλήματος κοινοπραξίας οδηγών με άλλα προβλήματα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το αποτέλεσμα που αποδεικνύει ισοδυναμία μεταξύ του προβλήματος $generalcarpool$ και του προβλήματος κοινοπραξίας οδηγών όπου κάθε μέρα εμφανίζονται δύο παίχτες $(2 - personcarpool)$.

6.3 Το πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες

Ένα άλλο πρόβλημα που σχετίζεται με προβλήματα άμεσων αποφάσεων χωρίς αυτό να είναι ένα από αυτά, είναι το πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες $(chipgame)$, το οποίο μελετήθηκε εκτενώς στο [1]. Σε αυτό το παιχνίδι όμοια πούλια τοποθετούνται σε στοίβες πάνω στον άξονα των ακεραίων και σε κάθε γύρο επιλέγονται δύο από αυτά που βρίσκονται στη ίδια στοίβα. Το ένα από τα πούλια αυξάνει τη θέση του στον άξονα και το άλλο τη μειώνει. Στο σχήμα 10 φαίνεται ένα παράδειγμα με 5 πούλια. Με σκούρο χρώμα σημαδεύουμε εκείνα τα πούλια που επιλέγουμε σε κάθε βήμα να κινηθούν



Σχήμα 10: Το πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες

Εύκολα παρατηρούμε ότι μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων τα πούλια έχουν απλωθεί στους ακεραίους σε απόσταση $\frac{n-1}{2}$ από την αρχή του άξονα. Πιο συγκεκριμένα έχει αποδειχθεί ότι για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση από τα πούλια, υπάρχει μοναδική τερματική κατάσταση. Αν επιπλέον το παιχνίδι ξεκινήσει με n πούλια κανένα από αυτά δε μπορεί να βρεθεί μακρύτερα από $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$

Μαι απλή σκέψη μπορεί αρχικά να μας δόσει ενδείξεις για το πόσο μακριά μπορούν να φτάσουν τα πούλια. Αρχικά ένα παίχτης, μπορεί να χτυπήσει ανά ζευγάρια όλα τα πούλια που βρίσκονται στην αρχή των αξόνων και να τοποθετήσει τα μισά στη θέση 1 και τα υπόλοιπα στη θέση -1. Συνεχίζοντας με τα με $n/2$ πούλια της θέσης 1 μεταφέρει $n/4$ από αυτά στη θέση 2 κ.ο.κ. Μετά από περίπου $n \log n$ αιτήσεις έχει μεταφέρει ένα πούλι στη θέση $\log n$.

Στο παραπάνω παράδειγμα, το άπλωμα από τα πούλια στην ευθεία των ακεραίων δεν είναι τυχαία. Για την ακρίβεια υπάρχει το επόμενο ενδιαφέρον αποτέλεσμα αυτού του συνδυαστικού προβλήματος που μας εξασφαλίζει πόσο μακριά μπορούν να φτάσουν τα πούλια.

Πρόταση 1. *Για κάθε αρχική θέση από τα πούλια υπάρχει μοναδική τελική κατάσταση στην οποία μπορούν να βρεθούν. Αυτή η κατάσταση για τα n πούλια είναι να καταλαμβάνουν n συνεχόμενες θέσεις των ακεραίων. Πιο συγκεκριμένα και αν η αρχική θέση τους είναι το 0, τα πούλια θα απλωθούν στο διάστημα $[\lceil -\frac{n-1}{2} \rceil, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ εκτός και αν ο n είναι άρτιος όποτε δε θα υπάρχει πούλι στη θέση 0. Επιπλέον το πλήθος των βημάτων που απαιτείται για να βρεθεί το παιχνίδι στην τερματική του κατάσταση είναι $\frac{n(n+1)(n+2)}{24}$ αν n είναι άρτιος και $\frac{n(n+1)(n+2)}{24}$ αν είναι περιττός.*

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στα επόμενα. Για χάρη πληρότητας στην παρουσίασή μας θα αναφερθούμε στη συνέχεια στις απαραίτητες λεπτομέρειες αποτελεσμάτων που θα μας είναι χρήσιμα στην ανάλυση της απόδοσης προβλημάτων άμεσων αποφάσεων. Τα αποτελέσματα θα μας φανούν χρήσιμα στην απόδειξη κάτω φράγματος για την απόδοση ενός προσαρμόσιμου εχθρού έναντι οποιουδήποτε ντετερμινιστικού αλγορίθμου για το πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών καθώς και για το κάτω φράγμα που πετυχαίνει επιλήσμων εχθρός έναντι οποιουδήποτε πιθανοτικού αλγορίθμου για το ίδιο πρόβλημα. Το αρχικό πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες είχε διατυπωθεί σε μια πιο ειδική του μορφή και σε αυτή είχε κυρίως μελετηθεί. Τα αποτελέσματα του γενικεύονται άμεσα από την ειδική στη γενική περίπτωση. Στην ειδική του περίπτωση, το πρόβλημα με τα πούλια έχει ως εξής.

Ορισμός 8 (Το ειδικό παιχνίδι με τα πούλια σε στοίβες). *Σε αυτό παιχνίδι-διαδικασία , στοίβες από πούλια βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία. Σε κάθε μονάδα του χρόνου κάθε στοίβα με πάνω από ένα πούλια χωρίζεται στα δύο, με τα μισά πούλια να μετακινούνται προς τα αριστερά και τα άλλα μισά προς τα αριστερά. Αν σε μια θέση υπάρχει περιττό πλήθος από πούλια, τότε ένα πούλι παραμένει στην θέση.*

Μας ενδιαφέρει να περιγράψουμε τη διαδικασία όπου αρχικά έχουμε μια στοίβα από πούλια. Δύο παραδείγματα με αρχικά 5 και 9 πούλια αντίστοιχα φαίνονται στο σχήμα 11.

$t=0$:			5		
$t=1$:		2	1	2	
$t=2$:	1	0	3	0	1
$t=3$:	1	1	1	1	1
position ⟶	−2	−1	0	1	2

$t=0$:					9				
$t=1$:				4	1	4			
$t=2$:			2	0	5	0	2		
$t=3$:		1	0	3	1	3	0	1	
$t=4$:		1	1	1	3	1	1	1	
$t=5$:		1	1	2	1	2	1	1	
$t=6$:		1	2	0	3	0	2	1	
$t=7$:		2	0	2	1	2	0	2	
$t=8$:	1	0	2	0	3	0	2	0	1
$t=9$:	1	1	0	2	1	2	0	1	1
$t=10$:	1	1	1	0	3	0	1	1	1
$t=11$:	1	1	1	1	1	1	1	1	1
position ⟶	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

Σχήμα 11: Το γενικό πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες

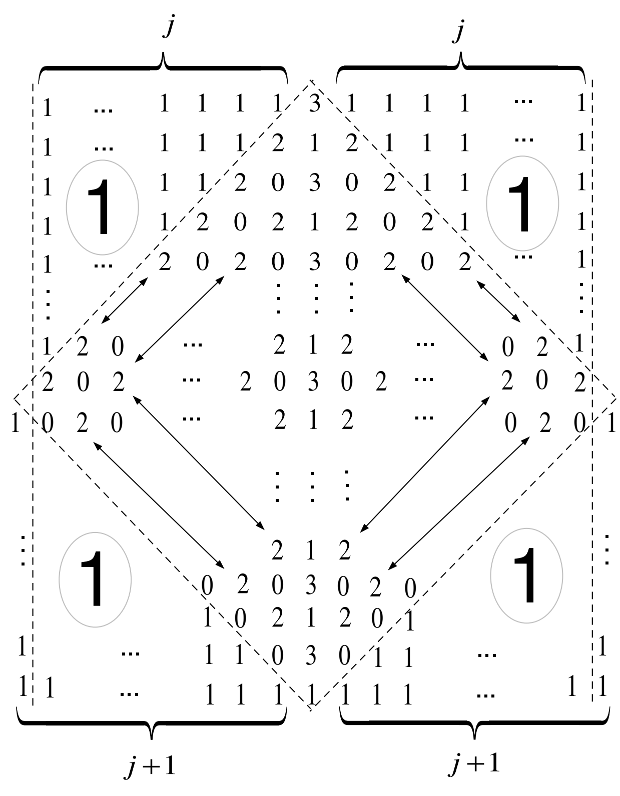
Ο χρόνος μετριέται σε μονάδες t και μια αρχική στοίβα τοποθετείται στη θέση 0. Παρατηρούμε ότι όπως και στο πιο γενικό πρόβλημα και τουλάχιστον στα δύο αυτά παραδείγματα η διαδικασία τερματίζεται και μάλιστα σε παρόμοια κατάσταση. Να παρατηρήσουμε ότι στη ειδική του περίπτωση το παιχνίδι και στη μονάδα του χρόνου πραγματοποιεί μια σειρά από κινήσεις που θα μπορούσε να κάνει ένας παίχτης στο γενικότερο πρόβλημα. Στο ειδικό παιχνίδι και αν με $a_{i,t}$ συμβολίσουμε το πλήθος από πούλια που στο βήμα t βρίσκονται στη θέση i παρατηρούμε ότι

$$a_{i,t} = \lfloor \frac{a_{i-1,t-1}}{2} \rfloor + \lfloor \frac{a_{i+1,t-1}}{2} \rfloor + (a_{i,t-1} \mod 2)$$

Στο προηγούμενο σχήμα και σε κάθε χρονική μονάδα σημειώνεται ο αριθμός $a_{i,t}$. Όσο μια τουλάχιστον στοίβα έχει τουλάχιστον δύο πούλια, μια κίνηση μπορεί να γίνει. Μπορούμε να δείξουμε αμέσως ότι η παραπάνω διαδικασία τερματίζει πάντα σε μια προβλέψιμη τελική κατάσταση.

Πρόταση 2. *Στο ειδικό πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες και αν η αρχική στοίβα τοποθετημένη στο* 0 *έχει* $2n+1$ *πούλια, τότε σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων, τα πούλια θα καλύπτουν τις θέσεις* $-n, -n+1, \ldots, 0, \ldots, n-1, n$.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο πλήθος των βημάτων που απαιτούνται για να έρθει το σύστημα στο τελικό του σχηματισμό. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι το σύστημα φτάνει σε μια κατάσταση από j συνεχόμενα 1, τρεις άσσους στο 0 και άλλα j συνεχόμενα 1. Θα εξηγήσουμε διαισθητικά πως από αυτή την κατάσταση και μετά από ένα πεπερασμένο πλήθος από βήματα, τα 1 φτάνουν να καλύπτουν δύο επιπλέον θέσεις (σχήμα 12). Μέχρι τα 1 να καλύπτουν τις επιπλέον δύο θέσεις, στις ενδιάμεσες καταστάσεις εναλασσώμενες στοίβες από 1 και 2 πούλια εμφανίζονται. Η ακολουθία από τέτοιες στοίβες αυξάνονται και φτάνουν μέχρι τα άκρα των θέσεων j και $-j$. Στο επόμενο βήμα τα πούλια καλύπτουν δύο επιπλέον θέσεις και στο εξής και μέχρι κάθε στοίβα να αποτελείται από ένα μόνο πούλι, η ακολουθία από στοίβες των 2 και 0 πούλιων συρρικνούται. Μια αναπαράσταση έχουμε πιο κάτω.



Σχήμα 12: Αλλαγή κατάστασης στο πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες

Η παρατήρηση για το τελευταίο βήμα της επαγωγής μας επιτρέπει να κάνουμε και το επαγωγικό. Η ιδέα για να αποδείξουμε την πρόταση είναι να θεωρήσουμε μια ακολουθία αιτήσεων που θα φέρνει το σύστημα στις επόμενες καταστάσεις

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 2n+1 & & & & \\
 & & & 1 & 2n-1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & 2n-3 & 1 & 1 & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 2n-5 & 1 & 1 & 1 & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2n-7 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Με την πρόχειρα περιγραφείσα ακολουθία βημάτων όπου έχουμε μόνο τρία πούλια στο 0 και από ένα οπουδήποτε αλλού και που καταλήγουμε σε μια κατάσταση όπου σε κάθε στοίβα βρίσκεται μόνο ένα πούλι, μπορούμε να μεταβούμε από την κατάσταση με k πούλια στο 0 και από ένα οπουδήποτε αλλού στην κατάσταση με $k-1$ και από ένα οπουδήποτε αλλού με τα πούλια να καταλαμβάνουν δύο επιπλέον θέσεις. Ο τρόπος είναι να σκεφτόμαστε ότι πάντα στη θέση 0 βρίσκονται μόνο τρία πούλια και να ακολουθήσουμε την πρώτη ακολουθία βημάτων. Επαναλαμβάνοντας την ίδια ακολουθία $2n-1$ φορές μπορούμε να μεταβούμε από την κατάσταση με $2n+1$ πούλια στη θέση 0 στην κατάσταση με $2n+1$ συνεχόμενα πούλια.

□

Με την παραπάνω πρόταση αποδείξαμε ότι και στο γενικό πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες ένας παίχτης μπορεί να καταφέρει να απλώσει τελείως τα πούλια ώστε να μην υπάρχουν δύο στην ίδια στοίβα και όντας όλα συνεχόμενα. Το επόμενο λογικό ερώτημα είναι πόσα βήματα χρειάζεται για να φέρει το σύστημα στην τελική του κατάσταση. Λόγω της διαφοροποίησης του ειδικού και γενικού προβλήματος με τα πούλια σε στοίβες, το πλήθος των βημάτων διαφοροποιείται επίσης. Αρχικά θα δείξουμε ένα άνω φράγμα για την ειδική περίπτωση του προβλήματος που εύκολα γενικεύεται.

Λήμμα 1. *Για το ειδικό πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες και για τις μονάδες χρόνου ισχύουν τα εξής*

> *Αν βρισκόμαστε σε άρτια μονάδα χρόνου τότε οι ακολουθίες* $a_0, a_2, a_4, \ldots$ *και* $a_0, a_{-2}, a_{-4}, \ldots$ *είναι μη φθίνουσες.*
>
> *Αν βρισκόμαστε σε περιττή μονάδα χρόνου τότε οι ακολουθίες* $a_1, a_3 a_5, \ldots$ *και* $a_{-1}, a_{-3}, a_{-5}, \ldots$ *είναι μη φθίνουσες.*

Παραλείπουμε την απόδειξη του λήμματος που δεν είναι πολύ δύσκολη και παρουσιάζουμε αμέσως άνω φράγμα για το απαιτούμενο πλήθος βημάτων.

Θεώρημα 3. *Για το ειδικό πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες και αν η αρχική κατάσταση του προβλήματος έχει* $2n+1$ *πούλια στη θέση* 0, *χρειάζονται το πολύ* n^2+n *βήματα για να βρεθεί το σύστημα στην τελική του κατάσταση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(k) = \sum_{i=1}^{k} a_i|i|$. Μια και έχουμε αποδείξει ότι το σύστημα έχει σαν τελική κατάσταση αυτή που τα πούλια απλώνονται, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f προκύπτει από αυτή την τελική κατάσταση και είναι $n^2 + n$. Τα βήματα στα οποία η συνάρτηση f μπορεί να αυξηθεί είναι αυτή κατά την οποία στα πούλια που μετακινούνται, συμμετέχει και η στοίβα που βρίσκεται στη θέση 0 και αυτό συμβαίνει στα άρτια βήματα. Μια και όταν μια στοίβα συμμετέχει, αυτή έχει τουλάχιστον δύο πούλια, όταν μπορεί να αυξηθεί η συνάρτηση f αυτό γίνεται κατά 2 μονάδες. Επομένως σε $n^2 + n$ βήματα η συνάρτηση f θα έχει τιμή τουλάχιστον $n^2 + n$ και δεν μπορεί να την ξεπεράσει. Επομένως πραγματοποιούνται το πολύ $n^2 + n$ βήματα. □

Άμεσα παίρνουμε τότε το ζητούμενο αποτέλεσμα

Πόρισμα 3. *Το γενικό πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες έρχεται στην τελική του κατάσταση σε $O(n^3)$ βήματα.*

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα είναι άμεσο παρατηρώντας ότι ένα βήμα του ειδικού προβλήματος με τα πούλια σε στοίβες αντιστοιχεί σε n το πολύ βήματα για το γενικό πρόβλημα. □

Χρειαζόμαστε μια τελική παρατήρηση για να πεισθούμε για την αλήθεια των προηγούμενων ισχυρισμών. Ο λόγος είναι ότι ενώ μελετάγαμε το παιχνίδι με τα πούλια σε στοίβες, θέταμε συνεχώς και διαφορετικούς κανόνες για τον τρόπο μετακίνησης των πουλιών, πολλές φορές δε, μετακινούσαμε πάνω από ένα ζευγάρια από πούλια. Αυτό όπως θα δούμε αμέσως έγινε χωρίς βλάβη, έτσι που τα προηγούμενα αποτελέσματα δε μπορούν να αμφισβητηθούν.

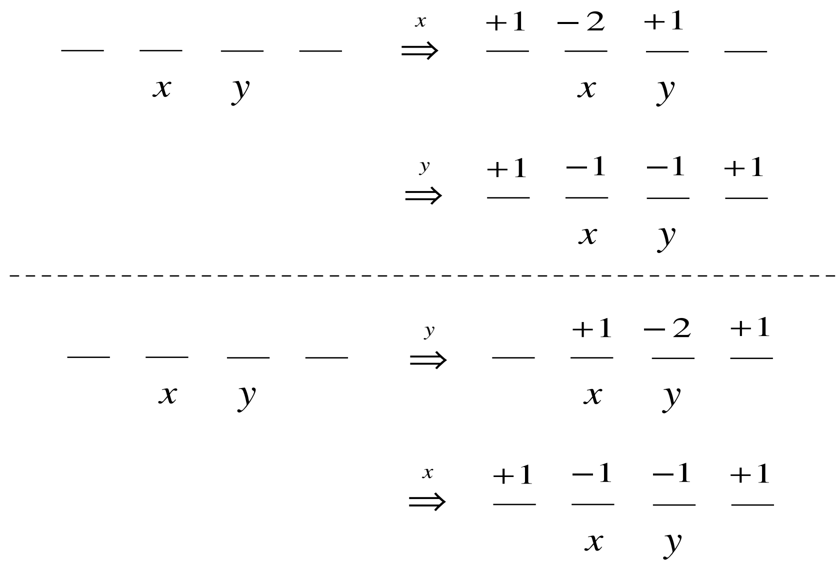
Θεώρημα 4. *Η τελική κατάσταση του προβλήματος με τα πούλια σε στοίβες είναι ανεξάρτητη από τη σειρά με την οποία εφαρμόζονται οι μετακινήσεις.*

Απόδειξη. Το κλειδί για την απόδειξη είναι να παρατηρήσει κανείς ότι δύο νικήσεις που γίνονται ταυτόχρονα, μπορούν να πραγματοποιηθούν και ανεξάρτητα με την ίδια τελική κατάσταση.

Πράγματι ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο στοίβες στις θέσεις x και y, Αν οι θέσεις αυτές απέχουν πάνω από μία θέση είναι προφανώς ανεξάρτητη η τελική κατάσταση από το με ποια σειρά θα πραγματοποιηθούν οι μετακινήσεις. Αυτό που πρέπει στοιχειωδώς να μελετήσουμε είναι να βρίσκονται οι στοίβες x και y σε γειτονικές θέσεις δηλαδή να ισχύει $x = y + 1$ ή $y = x + 1$. Όπως φαίνεται στο σχήμα 13 και για την περίπτωση όπου $y = x + 1$, καταλήγουμε στην ίδια κατάσταση είτε πρώτα χτυπήσουμε τη στοίβα στη θέση x και μετά τη στοίβα στη θέση y ή αντιστρόφως.

Με βάση τώρα αυτή την απλή παρατήρηση είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το θεώρημα. Για χάρη αυστηρότητας ας ορίσουμε μερικές έννοιες. Μια κατάσταση B θα λέγεται απόγονος κατάσταση της A αν υπάρχει ακολουθία κινήσεων από πούλια τέτοια που από την κατάσταση A μπορούμε να μεταβούμε στην κατάσταση B. Μια κατάσταση θα λέγεται τελική αν δε μπορούν να γίνουν άλλες κινήσεις.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι δεν υπάρχει μοναδική τελική κατάσταση, ότι υπάρχει δηλαδή κατάσταση A με δύο τελικές καταστάσεις. Επίσης επιλέγουμε την κατάσταση A να είναι τέτοια ώστε να μην έχει απογόνους καταστάσεις με παραπάνω από μία



Σχήμα 13: Η αντιμεταθετικότητα των κινήσεων στο πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες

τελικές καταστάσεις. Ας είναι λοιπόν A', A'' δύο άμεσοι απόγονοι καταστάσεις της κατάστασης A με διαφορετικές τελικές καταστάσεις. Τέτοιες υπάρχουν διότι η κατάσταση A έχει τουλάχιστον δύο τελικές καταστάσεις και δεν έχει απογόνους καταστάσεις με την ίδια ιδιότητα. Οι καταστάσεις A', A'' δε μπορούν να έχουν κοινούς απογόνους καταστάσεις διότι διαφορετικά κάθε μια από αυτές θα είχε δύο διαφορετικές τελικές καταστάσεις. Επίσης από το γεγονός ότι οι A', A'' είναι διαφορετικές καταστάσεις, συμπεραίνουμε ότι εφαρμόστηκαν κινήσεις σε διαφορετικές στοίβες. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η κατάσταση A' προέκυψε από την κατάσταση A με μετακίνηση από τη στοίβα x, και αντίστοιχα η κατάσταση A'' από τη στοίβα y. Λόγω της πρώτης παρατήρησης, αν εφαρμόσουμε μετακίνηση της στοίβας y στην κατάσταση A' και της x στην A'', θα βρεθούμε στην ίδια κατάσταση, έτσι που δημιουργήσαμε κοινή απόγονο κατάσταση των καταστάσεων A', A'', πράγμα άτοπο.

□

6.4 Το πρόβλημα στρογγυλοποίησης διανύσματος

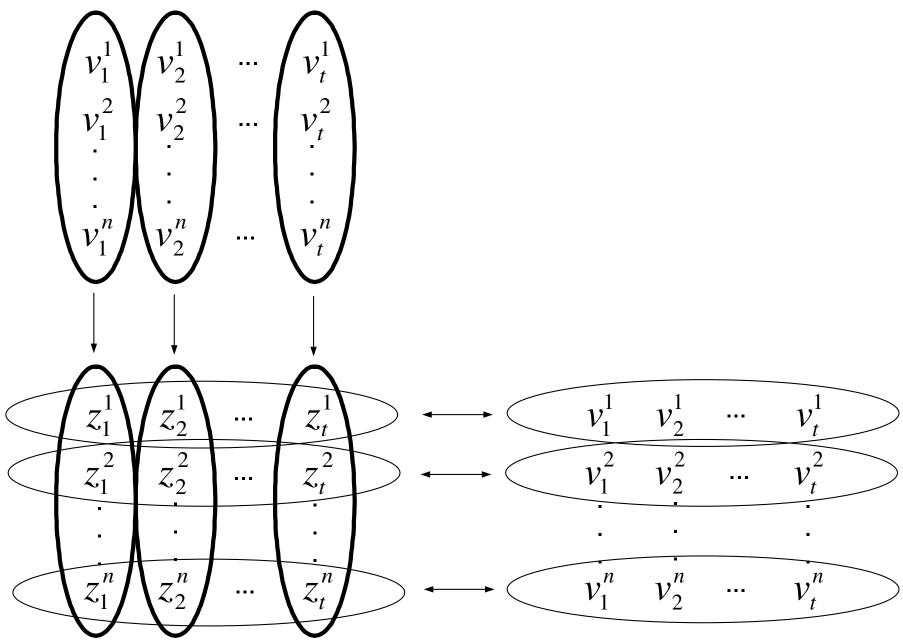
Ένα ακόμα πρόβλημα άμεσης απόφασης είναι το πρόβλημα στρογγυλοποίησης διανύσματος (*vector rounding*). Το n-διάστατο πρόβλημα έχει ως εξής: είσοδος του προβλήματος είναι μια ακολουθία στηλών (διανυσμάτων) $(V_1, V_2, \ldots)$ όπου $V_t = (v_t^1, v_t^2, \ldots, v_t^n$ με $v_t^i \in \mathbb{R})$. Καλούμαστε να παράγουμε μια λίστα διανυσμάτων $(Z_1, Z_2, \ldots)$ όπου $Z_t = (z_t^1, z_t^2, \ldots, z_t^n$ με $z_t^i \in \mathbb{Z}$ ώστε να σέβονται το άθροισμα δηλαδή

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, z_t^i \in \{\lceil v_t^i \rceil, \lfloor v_t^i \rfloor\}$$

και

$$\sum_{i=1}^{n} z_t^i \in \{\lceil \sum_{i=1}^{n} v_t^i \rceil, \lfloor \sum_{i=1}^{n} v_t^i \rfloor\}$$

Μπορούμε να φανταστούμε το πρόβλημα σαν ένα πίνακα που μας δίνεται στήλη στήλη και εμείς σε κάθε γύρο πρέπει να τροποποιούμε τα στοιχεία των στηλών κάνοντας άνω ή κάτω στρογγυλοποίηση σεβόμενοι το άθροισμα των στηλών.



Σχήμα 14: Το πρόβλημα στρογγυλοποίησης διανύσματος

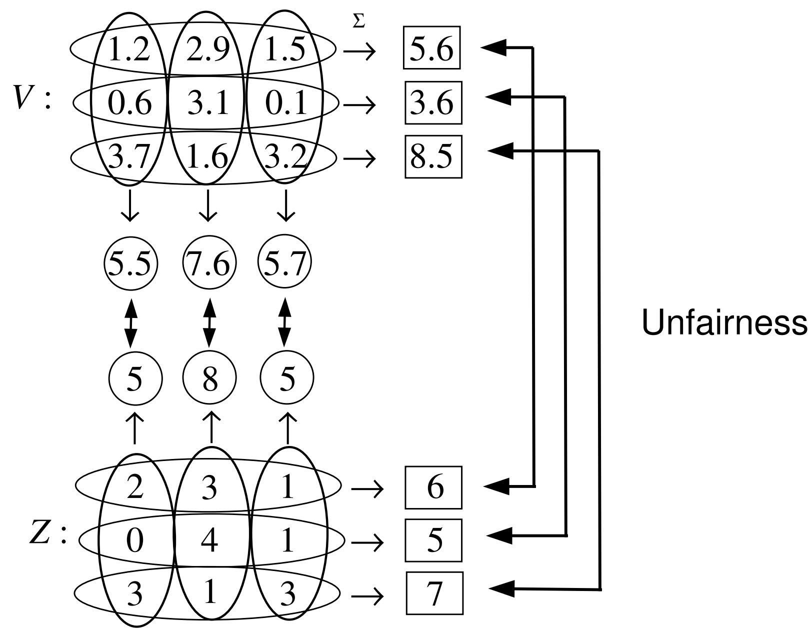
Ο στόχος όπως φαίνεται και στο σχήμα 14 είναι να κρατήσουμε τη διαφορά ανά γραμμή μεταξύ στηλών εισόδου και εξόδου χαμηλά. Ορίζουμε έτσι λογικά για είσοδο $(V_1, V_2, \ldots)$ και έξοδο $(Z_1, Z_2, \ldots)$ αδικία στο βήμα t να είναι η ποσότητα

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\sum_{j=1}^{t} z_j^i - \sum_{j=1}^{t} v_j^i|$$

Ένα αριθμητικό παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 15 για μια ακολουθία 3 αιτήσεων και για διανύσματα διάστασης 3

Η μέγιστη αδικία στήλης για το τρίτο βήμα οφείλεται στη γραμμή 3 και όπως φαίνεται είναι 1.5.

Ένα σπουδαίο αποτέλεσμα το οποίο σχετίζεται άμεσα με το γεγονός ότι στα προβλήματα άμεσων αποφάσεων που εξετάζουμε μελετούμε τη διαφορά ανταγωνισμού και όχι το λόγο είναι ότι στην offline εκδοχή του προβλήματος μπορούμε να πετύχουμε αδικία φραγμένη από 1 δηλαδή



Σχήμα 15: Παράδειγμα για το πρόβλημα στρογγυλοποίησης διανύσματος

Για κάθε ακολουθία πραγματικών διανυσμάτων $(V_1, V_2, \ldots)$ υπάρχει ακολουθία ακέραιων διανυσμάτων $(Z_1, Z_2, \ldots)$, τέτοια που για κάθε $t \geqslant 1$ ισχύει

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\sum_{j=1}^{t} z_j^i - \sum_{j=1}^{t} v_j^i| \leqslant 1$$

6.5 Η ισοδυναμία $2 - person\ carpool \equiv general\ carpool$

Ένας από τους λόγους που κάνουμε αναφορά σε όλα τα παραπάνω προβλήματα είναι ότι σχετίζονται άμεσα. Η συσχέτιση όπως θα δούμε είναι τόσο ισχυρή που μας επιτρέπει να μελετούμε την αδικία του προβλήματος κοινοπραξίας οδηγών βρίσκοντας φράγματα για κάποιο άλλο πρόβλημα όπως το πρόβλημα προσανατολισμού ακμών. Η γενική εικόνα συσχέτισης των προβλημάτων φαίνεται στην παρακάτω σχέση:

$$edge\ orientation \simeq 2person\ carpool \leq_{unfairness} general\ carpool$$

$$general\ carpool \leq_{unfairness} vector\ rounding \leq_{unfairness} 2person\ carpool$$

και επομένως τα προβλήματα είναι όλα ισοδύναμα μεταξύ τους. Για να είμαστε πιο αυστηροί να επισημάνουμε ότι με $\simeq$ συμβολίζουμε την απόλυτη ισοδυναμία προβλημάτων ενώ με $\leq_{unfairness}$ συμβολίζουμε την αναγωγημότητα ενός προβλήματος σε ένα άλλο με την αδικία του δεύτερου να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους.

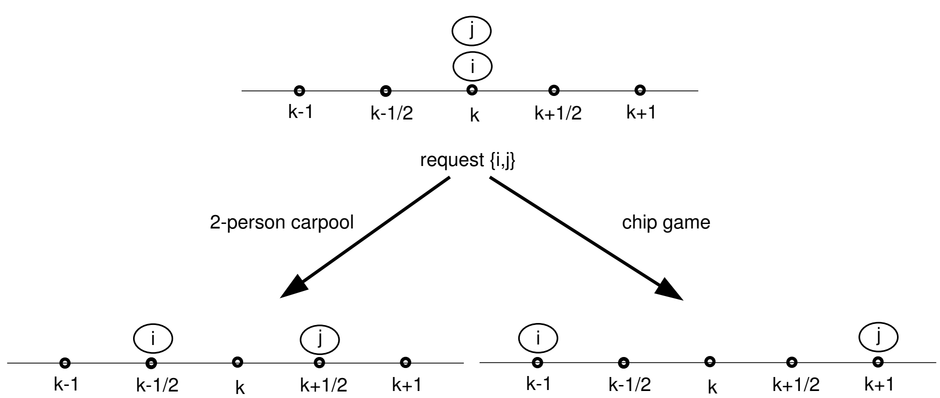
Πιο τυπικά ένα πρόβλημα A θα λέμε ότι ανάγεται στο πρόβλημα B και θα το συμβολίζουμε $A \leq_{unfairness} B$ αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ τέτοια ώστε για κάθε στιγμιότυπο $x \in A$ υπάρχει στιγμιότυπο $y \in B$ με $y = f(x)$ ώστε να υπάρχει σταθερά $k \in \mathbb{R}^+$ και

$$Unfairness_A(x) \leqslant k \cdot Unfairness_B(y)$$

όπου $Unfairness_A(x), Unfairness_B(y)$ η αδικία για τα προβλήματα A, B όπως αυτή ορίστηκε σε κάθε ένα από αυτά και για τα στιγμιότυπα $x \in A, y \in B$ αντίστοιχα.

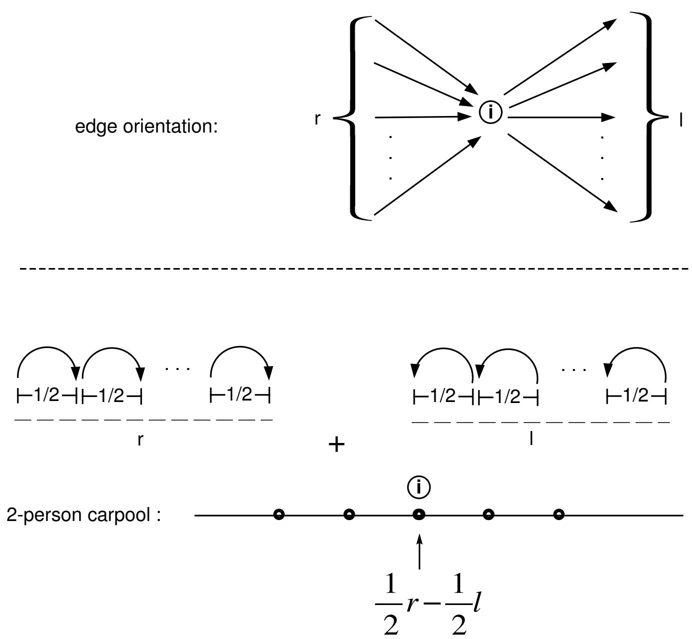
Η αναγωγή αυτή έχει νόημα μόνο αν το κάτω φράγμα της αδικίας για τα παραπάνω προβλήματα δεν είναι σταθερά. Αυτό ισχύει και όπως θα δούμε, ακόμα και για τους πιθανοτικούς αλγορίθμους μπορούμε πάντα να πετύχουμε ένα κάτω φράγμα αδικίας $\sqrt[3]{\log n}$. Η ύπαρξη της παραπάνω αναγωγής και στην περίπτωση αλγορίθμου που μας εξασφαλίζει αδικία $g(n)$ για κάποιο από τα προβλήματα, μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι υπάρχει αλγόριθμος για κάθε άλλο πρόβλημα με αδικία της τάξης του $O(g(n))$.

Ο αναγνώστης μπορεί να έχει ήδη υποψιαστεί τη σχέση μεταξύ των προβλημάτων μια και μερικές αναγωγές είναι τετριμμένες. Αρχικά όμως να αναφερθούμε στο πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες το οποίο δεν αναφέρεται στη παραπάνω συσχέτιση μια και δεν είναι πρόβλημα άμεσης απόφασης. Παρόλα αυτά μπορούμε να δούμε το πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες ως ειδική περίπτωση του προβλήματος κοινοπραξίας οδηγών όπου κάθε μέρα εμφανίζονται δύο μόνο παίχτες. Σε αυτή την παραλλαγή του προβλήματος κάθε μέρα έρχονται 2 παίχτες που έχουν την ίδια αδικία όπως αυτή ορίστηκε στο αρχικό πρόβλημα κοινοπραξίας. Είναι εύκολο τότε να δούμε ότι με την προφανή αναγωγή όπου τα πούλια αντιστοιχούν στους παίχτες, η αδικία του *chip game* είναι ακριβώς διπλάσια από την αδικία του παραλλαγμένου $2 - person\ carpool$ (σχήμα 16). Πράγματι κάθε στιγμιότυπο ακόμα και του γενικού προβλήματος κοινοπραξίας οδηγών μπορούμε να το φανταστούμε με τους παίχτες να βρίσκονται πάνω στην ευθεία των ρητών ανάλογα με την αδικία του καθενός. Στην ειδική περίπτωση όπου έρχονται σε κάθε αίτηση μόνο δύο παίχτες, αυτοί θα κινούνται πάνω στην ευθεία των ρητών με άλματα του $1/2$, λόγω του ορισμού της αδικίας.



Σχήμα 16: Η ισοδυναμία $2 - carpool \equiv$ προσανατολισμός ακμών

Επίσης το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών είναι τετριμμένα ισοδύναμο με το πρόβλημα του προσανατολισμού ακμών, με την προφανή αναγωγή μεταξύ κόμβων και παιχτών. Για να πειστεί κανείς για αυτό αρκεί να σκεφτεί ότι η αδικία στο πρόβλημα προσανατολισμού ακμών έχει οριστεί ως $\max_v \frac{1}{2}|in\, degree(v) - out\, degree(v)|$. Επίσης μπορούμε να φανταζόμαστε ότι κάθε φορά που στο πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών θέλουμε να εξυπηρετήσουμε μια αίτηση, θέλουμε δηλαδή να αποφασίσουμε για το ποιος θα οδηγήσει, ορίζουμε με την απόφασή μας χρέη μεταξύ των παιχτών. Αν δηλαδή μια αίτηση είναι η $\{i, j\}$ πρέπει να αποφασίσουμε αν ο παίχτης i θα χρωστά $1/2$ στον παίχτη j, προσθέτοντας της ακμή (i, j), ή το αντίστροφο προσθέτοντας την ακμή (j, i). Η διαισθητική εικόνα που έχουμε ήδη για το πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών πάνω στον άξονα των ακεραίων με άλματα του $1/2$, ταιριάζει απόλυτα με τη γραφοθεωρητική άποψη (σχήμα 17). Οι εισερχόμενες ακμές στον κόμβο i αντιστοιχούν στο πλήθος των κινήσεων του παίχτη i προς τα δεξιά κατά $1/2$ ενώ οι εξερχόμενες στις κινήσεις προς τα αριστερά. Αν λοιπόν ο παίχτης i συμμετέχει σε $r + l$ αιτήσεις, στο πρόβλημα $edge\ orientation$ είτε στο $2 - person\ carpool$ και σε r από αυτές αποφασιστεί η ακμή να εισέρχεται στον κόμβο i ή αλλιώς ο παίχτης i να οδηγήσει οπότε και να μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά $1/2$ στον άξονα των ακεραίων και στις υπόλοιπες l αιτήσεις να συμβεί το αντίθετο



Σχήμα 17: Η αδικία στα προβλήματα $2 - carpool$ και προσανατολισμού ακμών

έχουμε ότι στο μεν πρόβλημα προσανατολισμού ακμών $Unfairness_{edge\, orientation}(i) = \frac{1}{2}|r - l|$ ενώ για το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών $Unfairness_{2-person\ carpool}(i) = |\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}l|$ κάτι που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι

$$\max_i Unfairness_{edge\, orientation}(i) = \max_i Unfairness_{2-person\ carpool}(i)$$

ή αλλιώς ότι η αδικία όπως ορίστηκε για τα δύο προβλήματα είναι ακριβώς η ίδια.

Με επίσης απλά επιχειρήματα προκύπτει η αναγωγή ως προς την αδικία από το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών (γενικό) στο πρόβλημα στρογγυλοποίησης διανύσματος. Εδώ το πλήθος παιχτών αντιστοιχεί στο πλήθος γραμμών του προβλήματος στρογγυλοποίησης. Ας υποθέσουμε ότι στο γενικό πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών έχουμε να αποφασίσουμε για μια σειρά αιτήσεων $(X_1, X_2, \ldots)$ με $X_i \subseteq \{1, 2, \ldots n\}$. Κατασκευάζουμε ακολουθία διανυσμάτων $(V_1, V_2, \ldots)$ $V_t = (v_t^1, v_t^2, \ldots, v_t^n)$ με $v_t^i = \{\frac{1}{|X_t|}$ αν $i \in X_t$ και 0 αν $i \notin X_t$

Μια και θέλουμε να περιγράψουμε την αναγωγή *general carpool* $\leq_{unfairness}$ *vector rounding* και πέρα από τη μετατροπή των στιγμιοτύπων που ήδη περιγράφτηκε να τονίσουμε ότι στρογγυλοποίηση ενός στοιχείου του διανύσματος v_t^i προς τα πάνω θα σημαίνει ότι ο παίχτης i στο βήμα t καλείται να οδηγήσει. Να παρατηρήσουμε ότι μια και $\forall i, t,\ 0 \leqslant v_t^i \leqslant 1$ και μια και σε κάθε βήμα πρέπει να γίνεται σεβαστό το άθροισμα κατά στήλες, μόνο ένα από τα z_t^i θα είναι 1 , για συγκεκριμένο t, αφού $\sum_{i=1}^n v_t^i = 1$ και από τον ορισμό του *vector rounding* θα πρέπει επίσης $\sum_{i=1}^n z_t^i = 1$.

Θυμόμαστε ακόμα ότι από τον ορισμό της αδικίας στο πρόβλημα στρογγυλοποίησης διανύσματος έχουμε για τη γραμμή i

$$Unfairness_{vector\ rounding}(i) = \sum_{j=1}^{t} z_j^i - \sum_{j=1}^{t} v_j^i =$$

$$= \sum_{j:i \in X_j} (z_j^i - v_j^i)$$

Από τον ορισμό της αδικίας για το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών και για τον παίχτη i αυτή τη φορά παρατηρούμε ότι αν αυτός δε συμμετέχει στην αίτηση j τότε δεν αλλάζει η αδικία του και συμβαδίζει με την παραπάνω μετατροπή. Αν πάλι συμμετέχει τότε θα οδηγήσει είτε όχι. Στην πρώτη περίπτωση

$$Unfairness_{carpool}(i) \leftarrow Unfairness_{carpool}(i) + 1 - \frac{1}{|X_j|}$$

ενώ στη δεύτερη περίπτωση

$$Unfairness_{carpool}(i) \leftarrow Unfairness_{carpool}(i) - \frac{1}{|X_j|}$$

Σε κάθε χρονική στιγμή δηλαδή j στης οποίας την αίτηση συμμετέχει ο παίχτης i, η αδικία του μειώνεται κατά $\frac{1}{|X_j|}$, ενώ επιπλέον αυξάνεται κατά 1 αν επιλεχθεί να οδηγήσει. Έχουμε επομένως

$$Unfairness_{carpool}(i) = \sum_{j:i \in X_j and i\ drives} 1 - \sum_{j:i \in X_j} \frac{1}{|X_j|}$$

Μετά τα παραπάνω επιχειρήματα είναι άμεσο ότι

$$Unfairness_{carpool}(i) = Unfairness_{vector\ rounding}(i)$$

και επομένως $\max_i Unfairness_{carpool}(i) = \max_i Unfairness_{vector\ rounding}(i)$, δηλαδή ότι υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ των ορισμών της αδικίας για τα δύο προβλήματα.

Ήρθε η ώρα να ασχοληθούμε με το δυσκολότερο κομμάτι του κεφαλαίου, την αναγωγή του προβλήματος στρογγυλοποίησης διανύσματος σε αυτό της κοινοπραξίας οδηγών όπου κάθε μέρα εμφανίζονται δύο παίχτες. Τονίζουμε για άλλη μια φορά τη σημασία της αναγωγής μια και δε μας εξασφαλίζει μόνο ισοδυναμία ως προς την αδικία που μπορεί να προκαλέσει ένας εχθρός στα προβλήματα *general carpool*, *edge orientation* και *vector rounding* αλλά και αυτών με το $2-$ *person carpool*. Προκειμένου λοιπόν να βελτιώσει κανείς υπάρχοντα αποτελέσματα για το πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών μπορεί να ασχοληθεί με τα φαινομενικά ευκολότερα υπόλοιπα προβλήματα ή χωρίς βλάβη να υποθέσει ότι οι αιτήσεις στο αρχικό πρόβλημα είναι δισύνολα.

Θεώρημα 5. *Όσο για ντετερμινιστικούς αλγορίθμους τόσο και για πιθανοτικούς αλγορίθμους ισχύει ότι*

$$vector\ rounding \leqslant_{unfairness} 2 - person\ carpool$$

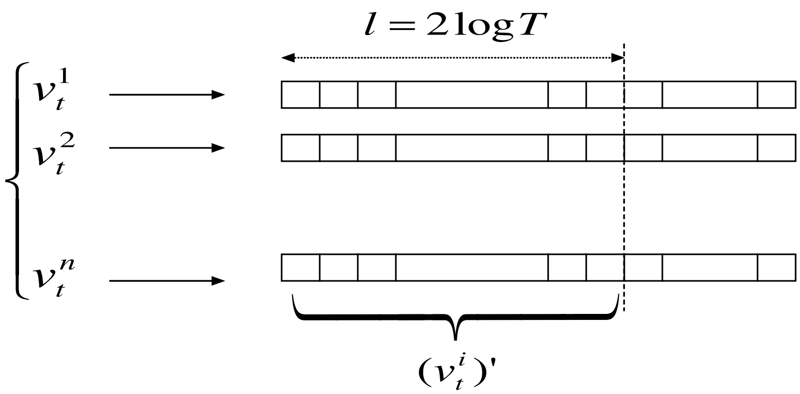
Απόδειξη. Για να γίνουμε πιο σαφείς να επισημάνουμε αναλυτικά τη διατύπωση του θεωρήματος. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ντετερμινιστικό αλγόριθμο f για το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών με n παίχτες όπου κάθε μέρα εμφανίζονται μόνο δύο παίχτες και ο οποίος εξασφαλίζει αδικία έναντι οποιουδήποτε προσαρμόσιμου εχθρού το πολύ $a(n)$. Θα επινοήσουμε ένα ντετερμινιστικό αλγόριθμο f' τέτοιον που για το πρόβλημα της στρογγυλοποίησης διανύσματος και επίσης για οποιαδήποτε ακολουθία προτείνει ένας προσαρμόσιμος εχθρός, εξασφαλίζει αδικία το πολύ $2a(n)$. Το ίδιο ισχύει και για πιθανοτικούς αλγόριθμους, δηλαδή αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πιθανοτικό αλγόριθμο f' για το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών με n παίχτες όπου κάθε μέρα εμφανίζεται μόνο δύο παίχτες και ο οποίος εξασφαλίζει αδικία έναντι οποιουδήποτε επιλήσμονα εχθρού το πολύ $b(n)$, θα επινοήσουμε ένα πιθανοτικό αλγόριθμο $\tilde{f}'$ τέτοιον που για το πρόβλημα της στρογγυλοποίησης διανύσματος και επίσης για οποιοδήποτε ακολουθία προτείνει ένας επιλήσμον εχθρός, εξασφαλίζεται αδικία το πολύ $2b(n)$.

Πριν ξεκινήσουμε την απόδειξη να κάνουμε δύο παραδοχές που δε βλάπτουν τη γενικότητα. Με τη βοήθεια του αλγορίθμου που διαθέτουμε για το πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών που κάθε μέρα εμφανίζονται δύο παίχτες, θέλουμε να επινοήσουμε ένα νέο αλγόριθμο για το πρόβλημα στρογγυλοποίησης διανύσματος. Θα απεικονίσουμε λοιπόν ένα στιγμιότυπο του προβλήματος *vector rounding* σε ένα στιγμιότυπο του *carpool*.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν το πρόβλημα στρογγυλοποίησης διανύσματος με n-διάστατα διανύσματα και με μια ακολουθία αιτήσεων $\varphi = (V_1, V_2, \ldots)$. Υποθέτουμε ότι $\forall t$ και για $1 \leqslant i \leqslant n$, $v_t^i \in \mathbb{R}^+$ και επίσης $\forall t$, $\sum_{i=1}^n v_t^i \in \mathbb{N}$ Οι παραπάνω παραδοχές γίνονται πράγματι χωρίς βλάβη της γενικότητας. Πράγματι, αν κάποιο v_t^i δεν ήταν θετικό θα μπορούσαμε να του προσθέσουμε $|\lceil v_t^i \rceil|$ και έπειτα να το αφαιρέσουμε από το αντίστοιχο z_t^i χωρίς να έχουμε αλλοίωση στην αδικία. Επίσης αν για κάποια αίτηση το άθροισμα των στοιχείων του διανύσματος δεν είναι φυσικός μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα ακόμα στοιχείο σε κάθε διάνυσμα ώστε να κάνουμε το άθροισμα φυσικό, κάνοντας τη στήλη κάθε αίτησης να έχει

$n+1$ γραμμές. Τέλος υποθέτουμε ότι έχουμε ένα λογικό κάτω φράγμα για το πλήθος των αιτήσεων T και ότι αυτές είναι δύναμη του 2. Ας παρατηρήσουμε ότι μόνο ο περιορισμός των αιτήσεων μπορούσε να μειώσει την αδικία.

Επιστρέφοντας στην αναγωγή και για μια ακολουθία αιτήσεων $\varphi = (V_1, V_2, \ldots)$ θεωρούμε τη δυαδική αναπαράσταση κάθε στοιχείου v_t^i από κάθε στήλη (σχήμα 18). Από αυτή την αναπαράσταση κρατάμε μόνο τα $l = 2\log T$ όπου T το πλήθος των αιτήσεων. Για να διατηρήσουμε την αδικία μπορούμε να τροποποιήσουμε κατάλληλα ένα από τα v_t^i και αυτό μεταβάλει την αδικία μόλις κατά $\frac{1}{T}$ κάτι που μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο αυξάνοντας την τιμή του l.

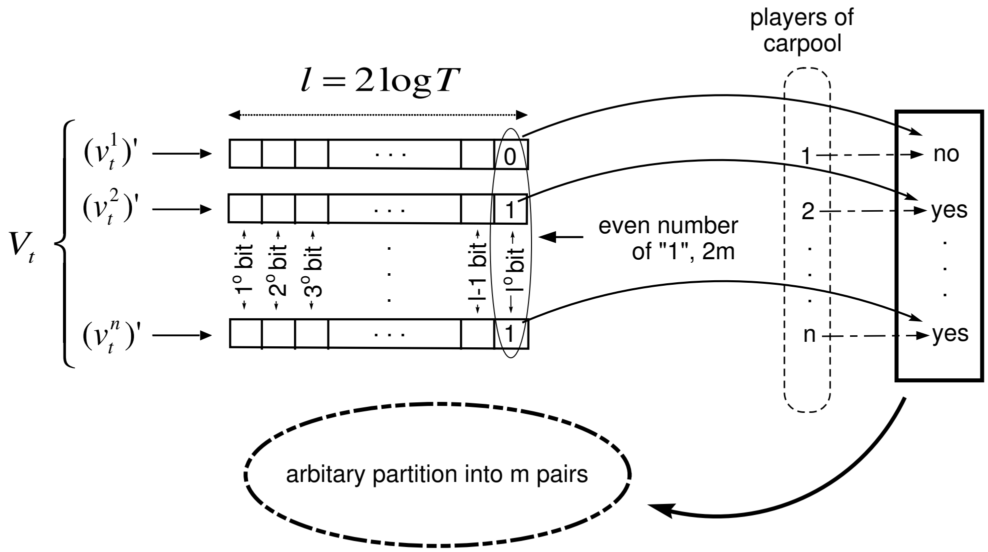


Σχήμα 18: Μετατροπή αιτήσεων στο δυαδικό σύστημα

Θα ανάγουμε το πρόβλημα με τα n-διάστατα διανύσματα στο πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών με n παίχτες. Για την ακρίβεια για κάθε αίτηση του *vector rounding* και για κάθε μια θέση από τα bits των v_t^i θα δημιουργήσουμε ένα στιγμιότυπο του *carpool* με περισσότερες ίσως από μια αιτήσεις και θα εφαρμόσουμε για αυτά τον αλγόριθμο f.

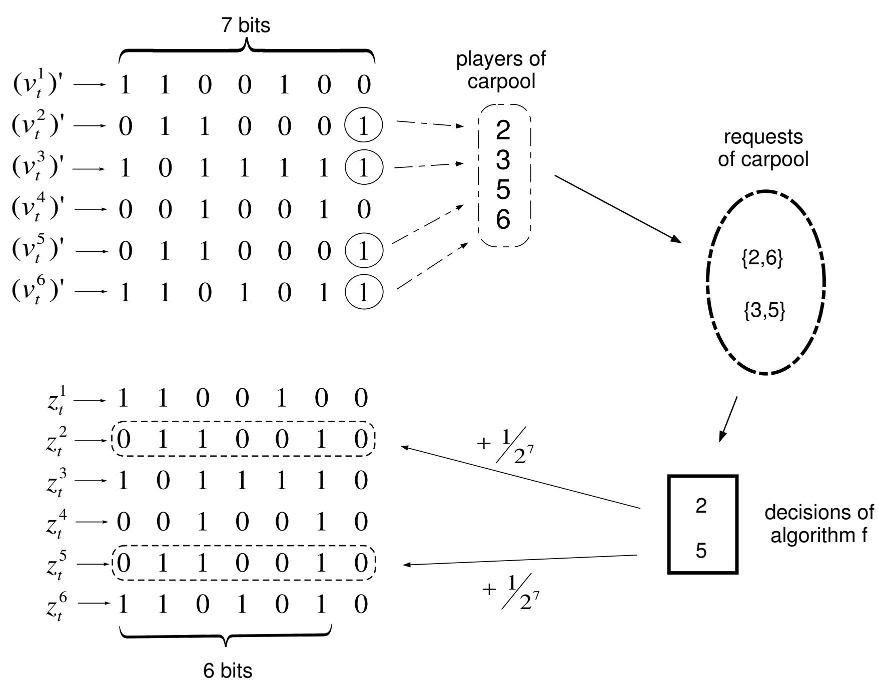
Θα περιγράψουμε αρχικά πως δημιουργούμε το "πολλαπλό" στιγμιότυπο του *carpool* από το l-οστό bit των στοιχείων της αίτησης V_t. Μια και όπως έχουμε υποθέσει $\sum_{i=1}^{n} v_t^i \in \mathbb{N}$ θα υπάρχει άρτιο πλήθος από γραμμές του V_t όπου το l-οστό bit είναι 1. Ορίζουμε τότε ένα σύνολο από τους παίχτες που αντιστοιχούν στις γραμμές που τελειώνουν σε bit 1, και το διαμερίζουμε αυθαίρετα σε δισύνολα (σχήμα 19). Θεωρούμε τα δισύνολα αυτά αιτήσεις για το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών. Αν ο αλγόριθμος f επιλέξει από την αίτηση $\{i, j\}$ να οδηγήσει ο i, στρογγυλοποιούμε το v_t^i προς τα πάνω, του προσθέτουμε δηλαδή $1/2^l$, ενώ στρογγυλοποιούμε προς τα κάτω το v_t^j, μηδενίζουμε δηλαδή το l-οστό bit. Να παρατηρήσουμε ότι μετά τη διαδικασία που αφορά την l-οστή στήλη της αναπαράστασης των στοιχείων v_t^i χρειαζόμαστε για την αναπαράστασή τους μόνο $l-1$ bits, μια και τα τελευταία έχουν μηδενιστεί.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση του αναγνώστη. Θεωρούμε την παρακάτω αίτηση του t-οστού βήματος των 7-διάστατων διανυσμάτων με 6 γραμμές (σχήμα 20). Το αντίστοιχο πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών θα έχει επίσης 6 παίχτες. Στις αιτήσεις του *carpool* θα συμμετέχουν οι παίχτες $\{2, 3, 5, 6\}$. Από το σύνολο δημιουργούμε αυθαίρετα τα ζευγάρια αιτήσεων $\{2, 6\}$



Σχήμα 19: Δημιουργία νέων αιτήσεων

και $\{3, 5\}$. Υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος f επιλέγει από αυτές τις δύο αιτήσεις να οδηγήσουν οι παίχτες 2 και 5 αντίστοιχα. Τροποποιώντας κατάλληλα τα v_t^i, στρογγυλοποιώντας δηλαδή τα v_t^2 και v_t^5 προ τα πάνω και τα v_t^3 και v_t^6 προς τα κάτω, ως προς το l-οστό bit, προκύπτουν τα αντίστοιχα z_t^i.



Σχήμα 20: Παράδειγμα δημιουργίας νέων αιτήσεων

Επιστρέφουμε τώρα στην αναγωγή. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα οι νέες στήλες σέβονται το άθροισμα όπως απαιτεί ο ορισμός του προβλήματος στρογγυλοποίησης διανύσματος. Τη διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω για το l-οστό bit την επαναλαμβάνουμε για κάθε άλλο bit. Αφού ολοκληρωθεί η διαδικασία για όλα τα l bits, προκύπτει το τελικό ακέραιο διάνυσμα Z_t. Η αναγωγή όπως περιγράφτηκε είναι αυτή που εξασφαλίζει το πολύ διπλάσια αδικία μεταξύ των δύο προβλημάτων. Πράγματι, ας συμβολίσουμε με $C(t,j,i,V_1,V_2,\ldots,V_t)$ την αδικία του i παίχτη για το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών, που επιτυγχάνει η ακολουθία αιτήσεων $(V_1,V_2,\ldots,V_t)$ στο στιγμιότυπο j. Επίσης ας συμβολίσουμε με $D(t,i,V_1,V_2,\ldots,V_t)$ την αδικία που επιφέρει στην i γραμμή για το πρόβλημα στρογγυλοποίησης διανύσματος η ίδια ακολουθία αιτήσεων, δηλαδή $D(t,i,V_1,V_2,\ldots,V_t) = \sum_{k=1}^{t}(z_k^i - v_k^i)$. Με επαγωγή στο l και λόγο του ότι στο στιγμιότυπο που αντιστοιχεί στο r bit απαιτούνται $r-1$ bits για την αναπαράσταση κάθε στοιχείου μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$D(t,i,V_1,V_2,\ldots,V_t) = \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{2^{j-1}} C(t,j,i,V_1,V_2,\ldots,V_t)$$

Το ενδιαφέρον είναι ότι όσα περιγράφτηκαν μέχρι στιγμής δεν περιορίζουν τη διατήρηση της αδικίας από ντετερμινιστικούς σε πιθανοτικούς αλγόριθμους. Ας διαχωρίσουμε όμως τώρα τις δύο διαφορετικές καταστάσεις. Στους ντετερμινιστικούς αλγορίθμους δεχθήκαμε ότι ο η απόδοση του αλγορίθμου f περιγράφεται από τη σχέση $|C(t,j,i,V_1,V_2,\ldots,V_t)| \leqslant a(n)$ και επομένως

$$|D(t,i,V_1,V_2,\ldots,V_t)| = |\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{2^{j-1}} C(t,j,i,V_1,V_2,\ldots,V_t)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{2^{j-1}} |C(t,j,i,V_1,V_2,\ldots,V_t)| \leqslant$$

$$\leqslant a(n)\frac{1}{2^{j-1}} = a(n)2(1-\frac{1}{2^l}) \leqslant 2a(n)$$

και επομένως

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |D(t,i,V_1,V_2,\ldots,V_t)| \leqslant 2a(n)$$

Πριν δώσουμε αντίστοιχα επιχειρήματα για τους πιθανοτικούς αλγορίθμους να παρατηρήσουμε ότι κάθε ένα από τα στιγμιότυπα που δημιουργήσαμε είναι στα πλαίσια των δυνατοτήτων ενός αμνήμονα εχθρού. Αυτό είναι αλήθεια διότι το j-οστό στιγμιότυπο εξαρτάται από την ακολουθία αιτήσεων $(V_1,V_2,\ldots,V_t)$ και τις αποφάσεις που έλαβε ο αλγόριθμος για τα στιγμιότυπα $j+1$ έως l. Έτσι οι αποφάσεις που λαμβάνονται σε ένα στιγμιότυπο δεν επηρεάζουν την είσοδο για τα επόμενα στιγμιότυπα. Μια λοιπόν και $E[\max_{1\leqslant i\leqslant n} |C(t,j,i,V_1,V_2,\ldots,V_t)|] \leqslant a(n)$ έχουμε :

$$E[\max_{1\leqslant i\leqslant n} |D(t,i,V_1,V_2,\ldots,V_t)|] =$$

$$= E[\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{2^{j-1}} C(t, j, i, V_1, V_2, \ldots, V_t)|] \leqslant$$

$$\leqslant E[\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{2^{j-1}} |C(t, j, i, V_1, V_2, \ldots, V_t)|] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{2^{j-1}} E[\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |C(t, j, i, V_1, V_2, \ldots, V_t)|] =$$

$$= a(n) 2(1 - \frac{1}{2^l}) \leqslant 2a(n)$$

κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

7 Αλγόριθμοι για προβλήματα άμεσων αποφάσεων

7.1 Αλγόριθμοι έναντι προσαρμόσιμου εχθρού

Παρουσιάζουμε τους αλγορίθμους που προτάθηκαν από τους Fagin και Williams [1] στους οποίους και περιλαμβάνεται ο βέλτιστος. Ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίστηκε το πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών 20 χρόνια πριν διαφέρει αρκετά μια και εν τω μεταξύ έγινε σαφέστερη η έννοια των προβλημάτων άμεσων αποφάσεων καθώς και η ανάλυση ανταγωνισμού. Παρακάτω γίνεται απλή αναφορά των ιδεών από τους δύο συγγραφείς καθώς και η ανάλυσή αυτών με πιο σύγχρονες ιδέες.

Ήδη έχουμε αναφέρει ότι οι ντετερμινιστικοί αλγόριθμοι δεν έχουν σταθερό κάτω φράγμα αδικίας. Το επιχείρημα αυτό το χρησιμοποιήσαμε για να δώσουμε έννοια στην ισοδυναμία για τα προβλήματα $2-person\ carpool$ και $general\ carpool$. Μια απόδειξη για το ότι η αδικία δεν είναι κάτω φραγμένη από σταθερά είναι η πρώτη παρατήρηση που κάναμε για το πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες και το πόσο αυτά μπορούν να απομακρυνθούν από την αρχή των αξόνων. Το επιχείρημά αυτό κάνει την αδικία των ντετερμινιστικών αλγορίθμων τουλάχιστον $\frac{\log n}{2}$, αλλά όπως θα δούμε το κάτω φράγμα είναι πολύ χειρότερο .Ας αρχίσουμε όμως να παρουσιάζουμε κάποιους ντετερμινιστικούς αλγορίθμους.

Αλγόριθμος 3 (Ο αλγόριθμος της εναλλαγής). *Αν υπάρχουν N παίχτες θεώρησε μια αλφαριθμητική τους διάταξη και για τις πρώτες N μέρες ανάθεσε σε κάθε ένα από μια μέρα. Ο υπεύθυνος για κάθε μέρα οδηγεί. Επανέλαβε το ίδιο για κάθε N-άδα ημερών που ακολουθεί.*

Το πλεονέκτημα του αλγορίθμου είναι η απλή του διατύπωση καθώς και η ευκολία με την οποία γίνεται η ανάθεση για την οδήγηση. Τα προβλήματα αρχίζουν να δημιουργούνται από τη στιγμή που θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε την ισχύ του αλγορίθμου με τη θεωρία της ανταγωνιστικής ανάλυσης όπου ένας εχθρός προσπαθεί να ντροπιάσει τον αλγόριθμο. Με την πρώτη κιόλας απουσία ενός παίχτη από την αίτηση εκείνης της μέρας στην οποία είναι υπεύθυνος, καλείται να ανταλλάξει τη μέρα που του αντιστοιχεί με τη μέρα κάποιου άλλου. Μετά από λίγες κιόλας απουσίες φαίνεται δύσκολο να αποφασίσει κανείς ποιος πρέπει να οδηγήσει, έχοντας να κάνει πρώτα κατάλληλες εναλλαγές στις αναθέσεις των ημερών.

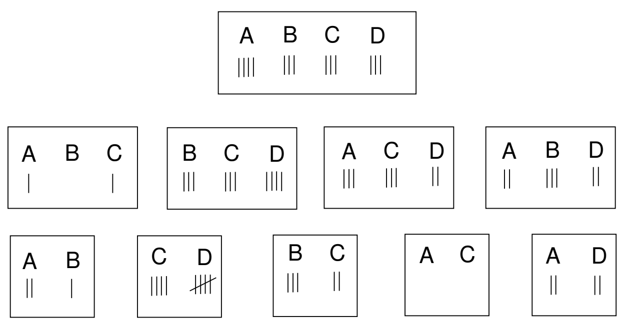
Η επόμενη απόπειρα θα είναι ένας αλγόριθμος που δε θα φαντάζεται δύσκολος στην εφαρμογή και που θα προσπαθεί να μην αποθαρρύνει τους παίχτες να συμμετέχουν στις αιτήσεις (ανεξάρτητα από ότι στην ανάλυση ανταγωνιστικότητας, προκαλούμε τη συμμετοχή παιχτών για να προκαλέσουμε κακή απόδοση του αλγορίθμου).

Αλγόριθμος 4 (Ο αλγόριθμος των κουπονιών). *Αν στην αίτηση $D_j \subseteq \{1, \ldots, n\}$ αποφασιστεί να οδηγήσει ο παίχτης $i \in D_j$, οι παίχτες $D_j - \{i\}$ αποδίδουν στον παίχτη i από ένα κουπόνι. Τελικά ο αλγόριθμος για να αποφασίσει ποιος θα οδηγήσει θα τον επιλέξει μεταξύ εκείνων που συμμετέχουν στην αίτηση με τα λιγότερα κουπόνια.*

Η ιδέα αποδεικνύεται να είναι πολύ κακή μια και όπως θα δούμε αργότερα η λύση που προτείνεται από τον παραπάνω αλγόριθμο ούτε λογικά δίκαιη μπορεί να χαρακτηριστεί αλλά και ούτε φραγμένη αδικία έχει για σταθεροποιημένο πλήθος παιχτών. Για τη μη δίκαιη συμπεριφορά του αλγορίθμου μπορεί να υποψιαστεί ο αναγνώστης σκεφτόμενος ότι οι παίχτες που επιλέγονται να οδηγήσουν σε μέρες με μεγάλη προσέλευση παιχτών, δηλαδή σε πολυπληθείς αιτήσεις, επιβραβεύονται με πολλά κουπόνια, λιγότερα από τα οποία θα μπορούσε να πάρει ένας παίχτης ο οποίος θα αναγκαζόταν να οδηγεί σε πολλές διαδρομές που τα αμάξι θα έχει μόνο ένα επιπλέον επιβάτη.

Αλγόριθμος 5 (Ο αλγόριθμος του δυναμοσυνόλου). *Ο αλγόριθμος κρατά σε μια μνήμη όλες τις δυνατές αιτήσεις από τους $\{1,\ldots,n\}$ παίχτες που είναι $2^n-(n+1)$ σε πλήθος, δηλαδή όλα τα υποσύνολα μεγέθους τουλάχιστον 2. Για κάθε αίτηση που εξυπηρετούμε με ένα παίχτη, σημειώνουμε στην αντίστοιχη αίτηση ότι αυτός επιλέχθηκε να οδηγήσει. Επιλέγουμε εκείνον τον παίχτη που έχει οδηγήσει λιγότερες φορές για τις όμοιες αιτήσεις στο παρελθόν.*

Ένα παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου φαίνεται παρακάτω όπου στο παιχνίδι συμμετέχουν οι παίχτες A, B, C, D.



Σχήμα 21: Πιθανή έξοδος του αλγορίθμου του δυναμοσυνόλου

Όπως φαίνεται από το σχήμα στην αίτηση $\{A, C, D\}$ ο αλγόριθμος απαντά D, στην αίτηση $\{A, D\}$ απαντά A ή D, ενώ στην αίτηση $\{A, B\}$, απαντά B. Ενώ ο παραπάνω διαδικασία φαίνεται να κρατά ισορροπίες μεταξύ των παιχτών απαιτεί πολύ μνήμη για επεξεργασία του παρελθόντος ώστε να βγάλει απόφαση. Σε αντίθεση με πολλά προβλήματα στη θεωρητική πληροφορική όπου η χρησιμοποίηση πολύ χώρου σημαίνει καλύτερη απόδοση η αδικία που μπορεί να προκληθεί είναι αρκετά μεγάλη και μάλιστα το κάτω φράγμα για αυτή είναι αρκετά κακό για κάθε ντετερμινιστικό αλγόριθμο.

Την πιο προφανή λύση και τελικά την καλύτερη την αφήσαμε για το τέλος. Ο πλέον άπληστος αλγόριθμος για το πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών είναι ο αυτός που εξασφαλίζει μικρότερη αδικία. Η ιδέα του βρίσκεται στην ερμηνεία που μπορούμε να δώσουμε στο πρόβλημα κοινοπραξίας ως προς το ότι κάθε μέρα πρέπει ένας από τους συμμετέχοντες στην αίτηση παίχτες να καλύψει ένα προκαθορισμένο ποσό, το οποίο ας είναι μια μονάδα. Στην περίπτωση όπου ένα σύνολο r από παίχτες κάνουν την εμφάνισή τους, κάθε ένας θα έπρεπε να χρεωθεί $1/|r|$-οστό της διαδρομής. Αυτό θα συμβεί με όλους εκτός από αυτόν που τελικά θα οδηγήσει και θα πρέπει στο μέλλον οι υπόλοιποι παίχτες να του ξεχρεώσουν τα $(|r|-1)\frac{1}{|r|}$ που επιπλέον έχει ήδη πληρώσει.

Αλγόριθμος 6 (Ο σφαιρικά άπληστος αλγόριθμος). *Αρχικοποίησε για κάθε παίχτη $i \in \{1, \ldots, n\}$ την εκκρεμότητα του $d_i = 0$. Για την αίτηση $r \subseteq \{1, \ldots, n\}$ επέλεξε να οδηγήσει εκείνος ο παίχτης $j \in r$ που $d_j = \min_{i \in r} d_i$. Ενημέρωσε στη συνέχεια την εκκρεμότητα κάθε παίχτη ως εξής:*

$$d_i \leftarrow d_i + \frac{1}{|r|}, \, i \in r - \{j\}$$

$$d_j \leftarrow d_j + 1 - \frac{1}{|r|}$$

Είναι σαφές ότι ο τελευταίος αλγόριθμος είναι βελτίωση του δεύτερου που παρουσιάστηκε στο ίδιο κεφάλαιο. Να παρατηρήσουμε επίσης η εκκρεμότητα όπως ορίστηκε για τον σφαιρικά άπληστο αλγόριθμο συμπίπτει με την αδικία του προβλήματος όπως έχει οριστεί δηλαδή $Unfairness = \max_{i \in r} d_i$.

Όλοι οι παραπάνω αλγόριθμοι όπως και κάθε ντετερμινιστικός, εξασφαλίζουν το πολύ ένα προφανές κάτω φράγμα για την αδικία που φαίνεται στην επόμενη παρατήρηση που έρχεται ως πόρισμα της πρότασης και είναι ισχυρότερη από την αρχική μας παρατήρηση για το κάτω φράγμα.

Πρόταση 3. *Για κάθε ντετερμινιστικό αλγόριθμο υπάρχει ακολουθία αιτήσεων που προκαλεί για το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών αδικία τουλάχιστον*

$$\frac{1}{2}\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το παραπάνω φράγμα ισχύει για παιχνίδια όπου κάθε μέρα εμφανίζεται ένα ζευγάρι παιχτών ως αίτηση. Ως ειδική περίπτωση του προβλήματος *general carpool* το κάτω φράγμα θα ισχύει και για το γενικότερο πρόβλημα. Έχουμε ήδη επιχειρηματολογήσει για το γεγονός ότι το πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες μοιάζει αρκετά με το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών με δύο παίχτες. Ο τρόπος που μετράμε την αδικία στο πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών μπορεί να αναπαρασταθεί με την τοποθέτηση των παιχτών πάνω στην ευθεία των ρητών. Η θέση κάθε παίχτη ορίζει την αδικία του. Στην περίπτωση που οι αιτήσεις είναι ζευγάρια παιχτών αυτοί θα κινούνται πάνω στον άξονα των ρητών ανά $1/2$. Ένας προσαρμόσιμος εχθρός τότε θα μπορούσε μεταξύ άλλων να προτείνει αιτήσεις με παίχτες που έχουν την ίδια αδικία. Περιορίζοντας την ισχύ του εχθρού σε αιτήσεις από παίχτες με την ίδια αδικία, το κάτω φράγμα της αδικίας για τον αλγόριθμο το πολύ να μικρύνει. Αν όμως ο εχθρός δεχθεί αυτόν τον περιορισμό, μπορεί να δει την πρόκληση να τους αυξήσει την αδικία σαν το πρόβλημα με τα πούλια σε στοίβες. Σε αυτή του τη μικρή παραλλαγή, τα πούλια-παίχτες κάνουν άλματα αντί μοναδιαίου μήκους, $1/2$. Ο εχθρός προτείνοντας τότε την ακολουθία αιτήσεων που εξασφαλίζει το άπλωμα στην ευθεία των ρητών από τα πούλια σε στοίβες, πετυχαίνει το ζητούμενο κάτω φράγμα. □

Θα δούμε σε λίγο ότι ως προς την κλάση αδικίας που επιτυγχάνεται, το παραπάνω φράγμα είναι σφιχτό, δηλαδή ο βέλτιστος ντετερμινιστικός αλγόριθμος έχει εκτός από γραμμικό κάτω φράγμα και γραμμικό άνω φράγμα ως προς το μέγεθος των παιχτών.

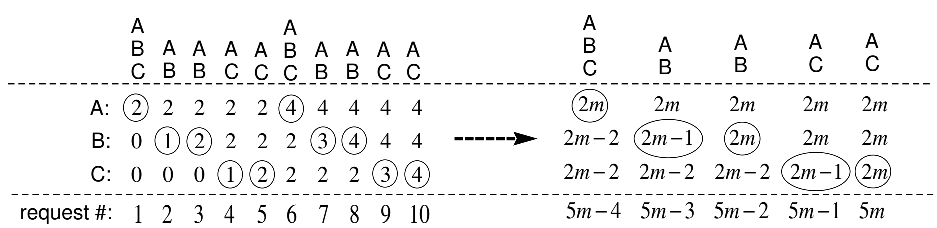
Το άνω φράγμα της αδικίας ως προς το μέγεθος των παιχτών δεν είναι ιδιότητα που έχει κάθε ντετερμινιστικός αλγόριθμος. Μια κακή ιδιότητα που μπορεί να έχει ένας αλγόριθμος είναι να μην κρατά σε ισορροπία στα χρέη των παιχτών. Αυτό μπορεί να τον οδηγήσει σε μη φραγμένη αδικία. Δίνουμε όνομα σε αυτή την ιδιότητα.

Ορισμός 9. *Ένας αλγόριθμος θα λέγεται στοιχειωδώς δίκαιος αν η αδικία που εξασφαλίζει είναι φραγμένη από κάποια συνάρτηση του μεγέθους των παιχτών.*

Ένα παράδειγμα αλγορίθμου μη στοιχειωδώς δίκαιου είναι αυτό του αλγορίθμου των κουπονιών.

Πρόταση 4. *Για το πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών υπάρχει μη στοιχειωδώς δίκαιος αλγόριθμος.*

Απόδειξη. Ένα παράδειγμα μη στοιχειωδώς δίκαιου αλγορίθμου είναι ο αλγόριθμος με τα κουπόνια. Χάριν ευκολίας και χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι ο αλγόριθμος μεταξύ παιχτών που συμμετέχουν σε μια αίτηση και έχουν το ίδιο πλήθος κουπονιών, επιλέγει για το ποιος θα οδηγήσει με κριτήριο μια λεξικογραφική διάταξη. Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια κοινοπραξία τριών παιχτών A, B, C. Προτείνουμε την ακολουθία αιτήσεων $(\{A,B,C\},\{A,B\},\{A,B\},\{A,C\},\{A,C\})^{\star}$. Στο σχήμα 22 φαίνεται το πλήθος των κουπονιών κάθε παίχτη μετά από κάθε αίτηση. Σε κάθε αίτηση επίσης σημειώνεται ο παίχτης που επιλέγεται να οδηγήσει καθώς και οι συμμετέχοντες.



Σχήμα 22: Αδικία για τον αλγόριθμο με τα κουπόνια

Για κάθε πέντε αιτήσεις ο παίχτης A οδηγεί μια φορά. Αν οι πεντάδα αιτήσεων επαναληφθεί m φορές ο παίχτης A θα οδηγήσει ισάριθμες φορές. Για κάθε πεντάδα όμως θα του αντιστοιχούσαν $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+2$ φορές οδήγησης. Η αδικία που είναι και η διαφορά τους υπολογίζεται σε $|m-(\frac{1}{3}+2)m|=\frac{4}{3}m$ δηλαδή μη φραγμένη συνάρτηση του πλήθους των παιχτών. □

Προφανώς μας ενδιαφέρουν αλγόριθμοι που είναι στοιχειωδώς δίκαιοι. Για τον πρώτο αλγόριθμο της εναλλαγής έχουμε να παρατηρήσουμε ότι έχει αυτή την ιδιότητα. Ωστόσο η ιδιότητα της στοιχειώδους δικαιοσύνης δεν έχει κανένα νόημα για τον τετριμμένο ορισμό του προβλήματος που απαιτεί κάθε μέρα να εμφανίζονται όλοι οι παίχτες. Με μια απλή ανάθεση κάθε μέρας σε κάθε παίχτη πετυχαίνουμε όπως είδαμε αδικία 1. Ουσία αποκτά η παραπάνω ιδιότητα για αλγορίθμους που τίθενται πράγματι έναντι προσαρμόσιμων εχθρών. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι αν πράγματι υπάρχουν στοιχειωδώς δίκαιοι αλγόριθμοι. Τα πράγματα ξεκαθαρίζονται με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5. *Για το πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών, υπάρχει στοιχειωδώς δίκαιος αλγόριθμος.*

Απόδειξη. Ο αλγόριθμος του δυναμοσυνόλου είναι στοιχειωδώς δίκαιος. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι στο πλήθος των $2^n - (n+1)$ διαφορετικών αιτήσεων που υπάρχουν οι εκκρεμότητες των παιχτών δε μπορεί να διαφέρουν περισσότερο από μια μονάδα. Αυτό σημαίνει ότι ένα παίχτης το πολύ να έχει οδηγήσει $O(2^{n-1})$ περισσότερες φορές από κάποιον άλλο. Αυτό είναι που αποδεικνύει φράγμα για την αδικία $O(2^n)$. □

Η παραπάνω πρόταση αποδεικνύει αδικία για το πρόβλημα που εξετάζουμε τουλάχιστον $1/2\lceil 1/2(n-1)\rceil$ και το πολύ 2^n. Με άλλα λόγια

$$\Omega(n) \leqslant Unfairness_{carpool} \leqslant O(2^n)$$

Η μισή αλήθεια είναι ότι η αδικία που επιτυγχάνουν οι ντετερμινιστικοί αλγόριθμοι είναι περιορισμένη από τις παραπάνω συναρτήσεις. Ολόκληρη η αλήθεια όπως έχουμε ήδη προαναγγείλει είναι ότι τελικά το φράγμα είναι σφιχτό από κάτω και με αυτό θα ασχοληθούμε στη συνέχεια. Θα δείξουμε ότι $Unfairness_{carpool} = \Theta(n)$

Ο Coppersmith πρώτος αποδεικνύει το υπάρχον κάτω φράγμα για το πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών με μέθοδο διαφορετική από αυτή που προτείνεται παραπάνω. Επίσης με μια τεχνική απόδειξη βελτιώνει το κάτω φράγμα στο εξής που οι λεπτομέρειες της απόδειξης δεν έχουν δημοσιευτεί

Πρόταση 6. *Για το πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών, για κάθε αλγόριθμο και για αιτήσεις που δεν είναι μεγέθους άνω του τρία, υπάρχει προσαρμόσιμος εχθρός που επιτυγχάνει αδικία τουλάχιστον $(n-1)/3$.*

Ο ίδιος και λίγο μετά τη δημοσίευση των Fagin και Williams κατεβάζει και το άνω φράγμα σε γραμμικό. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια πιο εύκολη απόδειξη του αποτελέσματος [2]. Όπως ήδη έχουμε πει ο βέλτιστος ντετερμινιστικός αλγόριθμος είναι ο σφαιρικά άπληστος. Για να δείξουμε ένα καλό πάνω φράγμα χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2. *θεωρούμε το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών με n παίχτες που τίθεται έναντι ενός τυχαίου προσαρμόσιμου εχθρού. Για κάθε βήμα του προβλήματος δηλαδή μετά την εξυπηρέτηση κάθε αίτησης, υπάρχει ένας κατευθυνόμενος γράφος με πλήθος κόμβων όσο και αυτό των παιχτών, πλήθος ακμών E και μια συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathbb{R}$ με τις επόμενες ιδιότητες:*

(i)

$$\forall e \in E,\ \frac{1}{n!} \leqslant w(e) \leqslant \frac{1}{2}$$

(ii)

$$\forall e \in E,\ w(e) = \frac{p}{q},\ p, q \in ,\ q/n!$$

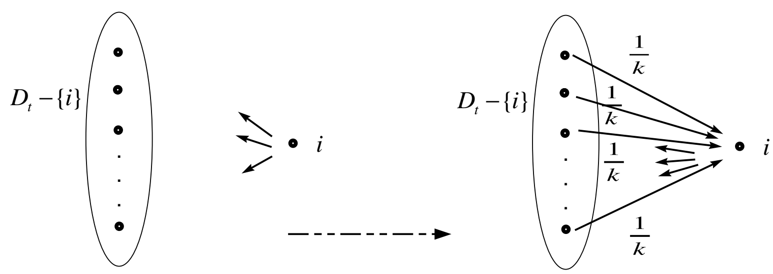
(iii)
$$\forall j \in \{1, \ldots n\}, d_j = \sum_{e \in in(j)} w(e) - \sum_{e \in out(j)} w(e)$$

(iv) Ο γράφος δεν περιέχει αντιπαράλληλες ακμές

όπου $in(j), out(j) \subseteq E$ είναι το πλήθος ακμών που εισέρχονται και εξέρχονται αντίστοιχα από τον κόμβο j.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο πλήθος των διεκπεραιωμένων αιτήσεων. Όταν καμία αίτηση δεν έχει ικανοποιηθεί το λήμμα ισχύει για τον κενό γράφο. Στο επαγωγικό βήμα δεχόμαστε ότι το λήμμα ισχύει μετά την εξυπηρέτηση της $t-1$ αίτησης. Θα δείξουμε ότι ισχύει και μετά την εξυπηρέτηση της αίτησης $D_t = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Επίσης θεωρούμε ότι για κάθε i, j, $w((i,j)) = -w(j,i)$. Μετά την εξυπηρέτηση κάθε αίτησης μετατρέπουμε το γράφο ώστε να ισχύουν οι τέσσερεις ιδιότητές του και αυτό σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα και αν ο αλγόριθμος επιλέξει τον παίχτη i δηλαδή $d_i = min_j d_j$, μετατρέπουμε το γράφο ώστε να μην υπάρχουν ακμές από τον κόμβο i στο σύνολο $D_t - \{i\}$. Στο δεύτερο βήμα προσθέτουμε νέες ακμές στο γράφο που αντιστοιχούν στα χρέη μεταξύ των παιχτών.

Αρχικά για το δεύτερο βήμα και δεδομένου ότι δεν υπάρχουν ακμές από το $D_t - \{i\}$ προς τον κόμβο i έχουμε την εικόνα του σχήματος 23.



Σχήμα 23: Τροποποίηση του γράφου (1)

Με την πρόσθεση των $k-1$ ακμών από το $D_t - \{i\}$ προς των κόμβο i, αφαιρούμε από κάθε κόμβο του $D_t - \{i\}$ εκκρεμότητα $\frac{1}{k}$ και προσθέτουμε εκκρεμότητα $(k-1)\frac{1}{k}$ στον οδηγό i. Το βήμα αυτό διατηρεί την ιδιότητα iii.

Για να επιτύχουμε όμως να μην υπάρχουν ακμές από το $D_t - \{i\}$ προς τον κόμβο i πριν το δεύτερο βήμα της μετατροπής του γράφου εργαζόμαστε ως εξής. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει η ακμή (j,i), $j \in D_t$ από το $D_t - \{i\}$ προς τον κόμβο i με $w((j,i)) > 0$. Επειδή $d_i = min_j d_j$, $d_i \leqslant d_j$ με $d_j \in D_t$ θα πρέπει να υπάρχει $l \in \{1, \ldots, n\} - D_t - \{i\}$ με $w((l,j)) > w((l,i))$. Αν δεν υπήρχε τέτοιος κόμβος l , ο παίχτης i δε θα είχε επιλεγεί από τον σφαιρικά άπληστο αλγόριθμο. Τροποποιούμε τότε την ακμή (j,i) σύμφωνα με την επόμενη διαδικασία.

while $w(i,j) > 0$ **do**

Διάλεξε $l \in \{1, \ldots, n\} - D_t - \{i\}$ με $w((l,j)) > w((l,i))$

if $w(l,j) > 0$ **then**

$w \leftarrow \min\{\frac{1}{2} - w(l,i), w(j,i), w(l,j)\}$

$w(l,i) \leftarrow w(l,i) + w$

$w(l,j) \leftarrow w(l,j) - w$

$w(j,i) \leftarrow w(j,i) - w$

else $(w(l,j) < 0)$

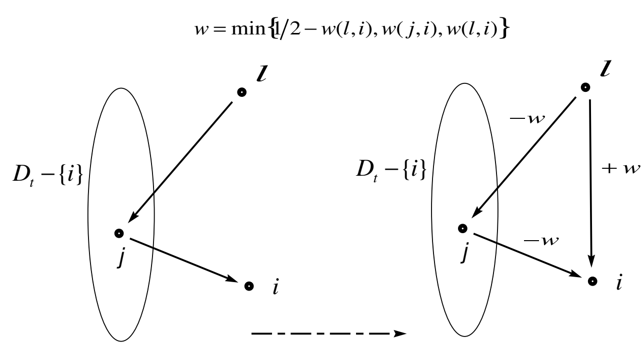
$w \leftarrow \min\{\frac{1}{2} - w(j,l), w(j,i), w(i,l)\}$

$w(j,l) \leftarrow w(j,l) + w$

$w(j,i) \leftarrow w(j,i) - w$

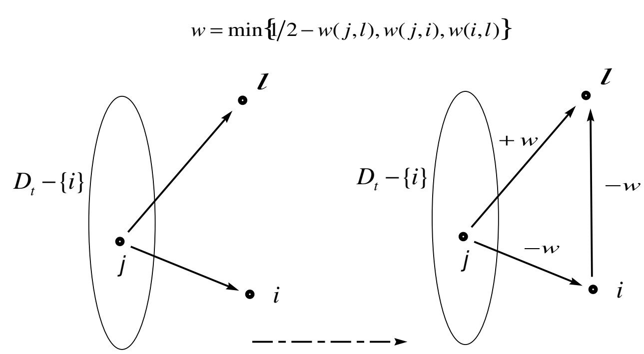
$w(i,l) \leftarrow w(i,l) - w$

Στην περίπτωση όπου $w(l,j) > 0$ έχουμε την εικόνα του σχήματος 24



Σχήμα 24: Τροποποίηση του γράφου (2)

ενώ αν $w(l,j) < 0$ ή αλλιώς $w(j,l) > 0$ έχουμε την εικόνα του σχήματος 25.



Σχήμα 25: Τροποποίηση του γράφου (3)

Στο τέλος και αν υπάρχουν αντιπαράλληλες ακμές τις αντικαθιστούμε με νέες που θα έχουν βάρος το αλγεβρικό άθροισμα των βαρών και κατεύθυνση που θα ορίζεται από το πρόσημο του αθροίσματος. Αυτό διατηρεί την ιδιότητα iv. Η διαισθητική ιδέα πίσω από τη διαδικασία είναι να μετατοπίσουμε το χρέος του παίχτη j προς τον παίχτη i χρησιμοποιώντας ένα τρίτο παίχτη l. Έτσι αντί να χρωστά ο παίχτης j στον i είναι ισοδύναμο να χρωστά ο παίχτης j στον l και αυτός στον i. Με αυτή τη διαδικασία το άθροισμα των χρεών παραμένει σταθερό και ίσο με 0.

Γιατί όμως η παραπάνω διαδικασία τερματίζει; Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου $w(j,i) = 0$. Για να το πετύχει, αφαιρεί κάθε φορά την ποσότητα w. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης για το $t-1$ βήμα έπεται ότι τη στιγμή που ξεκινά η διαδικασία $w > \frac{1}{n!}$. Για τον ίδιο λόγο, επιπλέον επειδή από το $t-1$ βήμα όλες οι ακμές αν υπάρχουν έχουν βάρος το πολύ $1/2$ και επειδή η διαδικασία σέβεται την ιδιότητα ii, το w είναι τέτοιο που προστηθέμενο ή αφαιρούμενο από το βάρος κάθε ακμής το αφήνει από $1/n!$ έως $1/2$. Έτσι εξακολουθεί $w > \frac{1}{n!}$ και επομένως η διαδικασία τερματίζει.

□

Άμεσα παίρνουμε τότε το επιθυμητό άνω φράγμα.

Θεώρημα 6. *Ο σφαιρικά άπληστος αλγόριθμος εξασφαλίζει αδικία έναντι οποιουδήποτε επιλήσμονα εχθρού το πολύ $(n-1)/2$.*

Απόδειξη. Θυμόμαστε ότι $Unfairness_{carpool} = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} |d_j|$ και επομένως λόγω του λήμματος παίρνουμε

$$\max_{j\in\{1,\ldots,n\}} |d_j| = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} \{|\sum_{e\in in(j)} w(e) - \sum_{e\in out(j)} w(e)|\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{e\in in(j)} w(e) \leqslant (n-1)\frac{1}{2}$$

□

Πόρισμα 4. *Για το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών ισχύει*

$$Unfairness_{carpool} = \Theta(n)$$

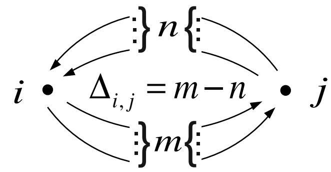
Απόδειξη. Από το θεώρημα 6 και το κάτω φράγμα για κάθε ντετερμινιστικό αλγόριθμο (πρόταση 6) έχουμε ότι $\frac{n-1}{3} \leqslant Unfairness_{carpool} \leqslant \frac{n-1}{2}$ □

7.2 Πιθανοτικός αλγόριθμος έναντι επιλήσμονα εχθρού

Μετά την ανάλυση του ντετερμινιστικού σφαιρικά άπληστου αλγορίθμου, επόμενο είναι να αναζητήσει κανείς την τύχη του στους πιθανοτικούς αλγορίθμους. Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε ένα πιθανοτικό αλγόριθμο με αναμενόμενη αδικία σαφώς μικρότερη από αυτή που εξασφαλίζει κάθε ντετερμινιστικός [2]. Επίσης η απόδοσή του τον θέτει στον καλύτερο μέχρι στιγμής πιθανοτικό αλγόριθμο.

Η μόνη ισχύ που έχουν οι άμεσοι αλγόριθμοί για το πρόβλημα που μας απασχολεί είναι ότι για να λάβουν μια απόφαση μπορούν να λάβουν υπόψη τους την τρέχουσα κατάσταση που βρίσκεται το πρόβλημα. Η καθαρά άπληστη επιλογή λύσης ήδη αναλύθηκε. Παρόλα αυτά παρόμοια ιδέα είναι αυτή που μπορεί να δημιουργήσει ένα πιθανοτικό αλγόριθμο. Η άπληστη επιλογή και η ισχύς της τυχαιότητας προσφέρουν την επόμενη πρόταση λύσης του προβλήματος προσανατολισμού ακμών.

Αλγόριθμος 7 (Τοπικά άπληστος αλγόριθμος). *Για το πρόβλημα προσανατολισμού ακμών και για κάθε ζευγάρι κόμβων* (i, j) *ο αλγόριθμος θυμάται την ποσότητα* $Delta_{i,j}$ *που ονομάζουμε σχετική αδικία των* i *και* j. $Delta_{i,j}$ *είναι η διαφορά των ακμών που έχουν προσανατολιστεί από το* i *στο* j *από αυτές που έχουν προσανατολιστεί από το* j *στο* i.



Σχήμα 26: Σχετική αδικία δύο παιχτών

Όταν μια αίτηση $\{i, j\}$ *πρέπει να εξυπηρετηθεί, η ακμή προσανατολίζεται προς το* i *αν* $\Delta_{i,j} > 0$ *και προς το* j *αν* $\Delta_{i,j} < 0$. *Στην περίπτωση όπου* $\Delta_{i,j} = 0$ *η ακμή προσανατολίζεται προς τη μια ή την άλλη κατεύθυνση με πιθανότητα* $1/2$.

Όπως φαίνεται ο αλγόριθμος ορίζει μια τοπική έννοια δικαιοσύνης μεταξύ οποιωνδήποτε παιχτών και αποφασίζει κάθε φορά το πώς θα εξυπηρετήσει την αίτηση κρατώντας χαμηλά την αδικία. Στην περίπτωση που η έννοια που έχει ορίσει δεν τον βοηθά για να δώσει λύση αποφασίζει τυχαία και επομένως η στρατηγική του δικαιολογεί πλήρως το όνομά του. Περνάμε αμέσως στην ανάλυση του αλγορίθμου. Αρχικά και ως λήμμα για το άνω φράγμα της αδικίας του αλγορίθμου θα χρειαστούμε ένα γνωστό αποτέλεσμα από τη θεωρία πιθανοτήτων γνωστό και ως φράγμα Chernoff. Το φράγμα Chernoff είναι μια εφαρμογή της ανισότητας Markov.

Λήμμα 3 (Ανισότητα Markov). *Έστω* Y *μια τυχαία μεταβλητή με μη αρνητικές τιμές. . Για κάθε* $t \in \mathbb{R}^+$,

$$Pr[Y \geqslant t] \leqslant \frac{E[Y]}{t}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση f_t με $f_t(y) = 1$ αν $y \geqslant t$ και 0 διαφορετικά. Παρατηρούμε ότι $Pr[Y \geqslant t] = E[f_t(Y)]$. Επειδή τότε, $f_t(y) \geqslant \frac{y}{t}$ και από τη γραμμικότητα της μέσης τιμή παίρνουμε:

$$E[f_t(Y)] \leqslant E[\frac{Y}{t}] = \frac{E[Y]}{t}$$

□

Θεώρημα 7. *Φράγμα Chernoff Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ ανεξάρτητες δοκιμές Poisson, έτσι ώστε για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$ $Pr[X_i] = p_i$, όπου $0 < p_i < 1$. Για την τυχαία μεταβλητή $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, με $\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i$ και για κάθε $\delta_1 > 0$ και κάθε $0 < \delta_2 \leqslant 1$*

$$Pr[X > (1+\delta_1)\mu] < [\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}]^{\mu}$$

$$Pr[X < (1-\delta_2)\mu] < e^{\frac{-\mu\delta^2}{2}}$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$Pr[X < (1-\delta)\mu] = Pr[-X > -(1-\delta)\mu] = Pr[e^{-tX} > e^{-t(1-\delta)\mu}]$$

Και αυτό για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Markov παίρνουμε

$$Pr[e^{-tX} > e^{-t(1-\delta)\mu}] \leqslant \frac{E[e^{-tX}]}{e^{-t(1-\delta)\mu}} = \frac{E[e^{-t\sum_{i=1}^{n} X_i}]}{e^{-t(1-\delta)\mu}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{E[e^{-tX_i}]}{e^{-t(1-\delta)\mu}}$$

Η τυχαία μεταβλητή e^{-tX_i} παίρνει την τιμή e^{-t} με πιθανότητα p_i και την τιμή 1 με πιθανότητα $1 - p_i$ δηλαδή

$$E[e^{-tX_i}] = p_i e^{-t} + 1 - p_i = p_i(e^{-t} - 1) + 1 < e^{p_i(e^{-t}-1)}$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από τη σχέση $1 + x < e^x$ και για $x = p_i(e^{-t} - 1)$. Έχουμε τότε

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{E[e^{-tX_i}]}{e^{-t(1-\delta)\mu}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{p_i(e^{-t}-1)}}{e^{-t(1-\delta)\mu}} = \frac{e^{\sum_{i=1}^{n} p_i(e^{-t}-1)}}{e^{-t(1-\delta)\mu}} = \frac{e^{\mu(e^{-t}-1)}}{e^{-t(1-\delta)\mu}}$$

Εδώ να παρατηρήσουμε ότι οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για κάθε θετικό t, επομένως αρκεί να επιλέξουμε το κατάλληλο t που θα μας εξασφαλίζει το καλύτερο φράγμα. Θεωρούμε λοιπόν $t = \ln(1/(1-\delta))$ και παίρνουμε

$$Pr[X < (1-\delta)\mu] < [\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{(1-\delta)}}]^{\mu}$$

Τέλος για $\delta \in (0, 1]$ παρατηρούμε ότι $(1-\delta)^{(1-\delta)} > e^{-\delta+\delta^2/2}$, από το οποίο έπεται και το αποτέλεσμα.

□

Πιθανώς ο αναγνώστης έχει υποψιαστεί πως θα χρησιμοποιηθεί το παραπάνω γνωστό θεώρημα. Ας ξεκαθαρίσουμε όμως και τυπικά τα πράγματα.

Λήμμα 4. *Αν με X_i συμβολίσουμε την τυχαία μεταβλητή που μετρά το βαθμό των εισερχόμενων ακμών από τις εξερχόμενες ($indegree_i - outdegre_i$) για κάποιο σταθεροποιημένο κόμβο i τότε $Pr[|X_i| > a] < 2e^{\frac{-a^2}{4k}}$, όπου k είναι το πλήθος των παιχτών j για τους οποίους το ζευγάρι i, j έχει στην ακολουθία αιτήσεων περιττό πλήθος επαναλήψεων.*

Απόδειξη. Θυμόμαστε από τον τοπικά άπληστο αλγόριθμο οτι οι ποσότητες $\Delta_{i,j}$ είναι ανεξάρτητες για σταθεροποιημένο i και για τα διάφορα j και μάλιστα

$$X_i = \sum_{j \in N(i)} \Delta_{i,j}$$

Επίσης $\Delta_{i,j} = \pm 1$ και μάλιστα ισοπίθανα. Εύκολα παρατηρούμε οτι

$$Pr[|X_i| > a] = Pr[X_i > a \vee X_i < -a]$$

Μια και το πρόβλημα είναι συμμετρικό ως προς θετική η αρνητική αδικία έχουμε οτι

$$Pr[|X_i| > a] = 2Pr[X_i < -a] = 2Pr[\sum_{j \in N(i)} \Delta_{i,j} < -a] = 2Pr[\sum_{j \in N(i)} (\Delta_{i,j}+1) < k-a] =$$

$$= 2Pr[\frac{\sum_{j \in N(i)} (\Delta_{i,j}+1)}{2} < \frac{k-a}{2}]$$

Παρατηρούμε οτι η τυχαία μεταβλητή $\frac{\sum_{j \in N(i)} (\Delta_{i,j}+1)}{2}$ ορίζει ανεξάρτητες δοκιμές Poisson με $p_i = 1/2$, δηλαδή

$$E[\frac{\sum_{j \in N(i)} (\Delta_{i,j}+1)}{2}] = \frac{k}{2}$$

Για να εφαρμόσουμε το φράγμα Chernoff αρκεί να προσδιορίσουμε το δ τέτοιο που $(1-\delta)\mu = \frac{k-a}{2}$. Παίρνοντας λοιπόν $\delta = \frac{a}{k}$ παρατηρούμε οτι πράγματι $0 < \delta \leqslant 1$ και επομένως εφαρμόζοντας το θεώρημα 7 παίρνουμε

$$Pr[|X_i| > a] < 2e^{\frac{-\mu\delta^2}{2}} = 2e^{\frac{-a^2}{4n}}$$

□

Είμαστε έτοιμοι τώρα να δώσουμε ένα άνω φράγμα για τον τυπικά άπληστο αλγόριθμο. Το αποτέλεσμα είναι άμεσο του λήμματος.

Θεώρημα 8. *Ο τοπικά άπληστος αλγόριθμος εξασφαλίζει αδικία έναντι οποιουδήποτε αμνήμονα εχθρού το πολύ* $\sqrt{n \log n}$

Απόδειξη. Από το λήμμα 4 έχουμε ότι $Pr[|X_i| > a] < e^{\frac{-a^2}{4k}}$. Επομένως

$$\exists i,\, Pr[|X_i| > a] = \sum_{i=1}^{n} Pr[|X_i| > a] < 2ne^{\frac{-a^2}{4n}}$$

Παίρνοντας $a \approx \sqrt{n \log n}$ έχουμε ότι

$$\exists i,\, Pr[|X_i| > a] < \frac{2}{n}$$

Η τελευταία σχέση είναι αρκετή για να συμπεράνουμε το ζητούμενο.

□

Οι παραπάνω σκέψεις δίνουν ελπίδες για το πόσο το πολύ κακός είναι ο τοπικά άπληστος αλγόριθμος. Το φράγμα είναι σφιχτό μια και κανείς πολύ εύκολα μπορεί να βρει ακολουθία αιτήσεων με αναμενόμενη αδικία $\sqrt{n \log n}$.

Πρόταση 7. *Για τον τοπικά άπληστο αλγόριθμο υπάρχει ακολουθία αιτήσεων προτεινόμενη από επιλήσμονα εχθρό με αναμενόμενη αδικία τουλάχιστον* $\sqrt{n}$

Απόδειξη. Θωρούμε ένα από τους n κόμβους και τον θέτουμε ζευγάρι με κάθε ένα από τους υπόλοιπους $n-1$ κόμβους. Αρχικά η σχετική αδικία μεταξύ των παιχτών είναι 0 και επομένως ο επιλεγμένος κόμβος και για $n-1$ βήματα θα εκτελέσει ένα αμερόληπτο τυχαίο περίπατο. Ο τυχαίος περίπατος για n βήματα έχει αναμενόμενη θέση $\sqrt{n}$ μακριά από τη θέση εκκίνησης και έτσι έπεται το επιθυμητό κάτω φράγμα. □

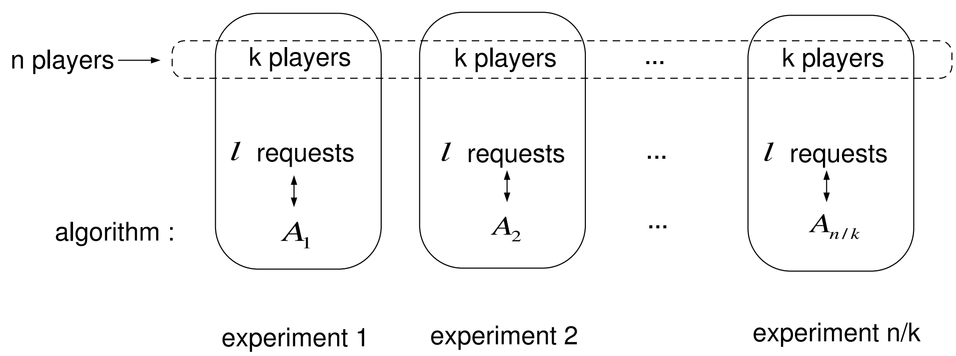
Τελικά πόσο καλός είναι ο τοπικά άπληστος αλγόριθμος; Για αυτόν γνωρίζουμε ακριβώς την αδικία που εξασφαλίζει. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αν πραγματικά είναι βέλτιστος αρκεί να μελετήσουμε το κάτω φράγμα για όλους τους πιθανοτικούς αλγορίθμους για το πρόβλημα προσανατολισμού ακμών. Όπως θα δούμε σε λίγο το κάτω φράγμα θα μας θέσει ένα ανοιχτό πρόβλημα, το ποια είναι τελικά η αδικία του βέλτιστου πιθανοτικού αλγορίθμου. Υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι υπάρχει καλύτερος πιθανοτικός αλγόριθμος που θα παρουσιάσουμε σε επόμενο κεφάλαιο, ωστόσο η αύξηση του κάτω φράγματος για το πρόβλημα φαίνεται να μην είναι προς το παρόν κοντά.

Θεώρημα 9. *Για κάθε πιθανοτικό αλγόριθμο που λύνει το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών, υπάρχει ακολουθία αιτήσεων που μπορεί να προτείνει ένας αμνήμων εχθρός και που θα προκαλεί αδικία* $\Omega(\sqrt[3]{\log n})$.

Απόδειξη. Αντί να βρούμε για σταθεροποιημένο "τυχαίο" πιθανοτικό αλγόριθμο μια ακολουθία αιτήσεων που θα προκαλεί το ζητούμενο κάτω φράγμα αδικίας, θα επινοήσουμε μια κατανομή ακολουθιών που θα προκαλεί την ίδια αδικία έναντι οποιουδήποτε ντετερμινιστικού αλγορίθμου. Από την αρχή minimax ή αλλιώς την αρχή του Yao (πόρισμα 2), αν βρεθεί μια κατανομή στις ακολουθίες αιτήσεων που λειτουργεί καλά για κάθε ντετερμινιστικό αλγόριθμο, έπεται ότι για κάθε πιθανοτικό αλγόριθμο υπάρχει ακολουθία αιτήσεων που προκαλεί το ίδιο κάτω φράγμα. Επειδή η ανάλυση ανταγωνισμού για ένα πρόβλημα άμεσης απόφασης είναι ένα παίγνιο ανάμεσα στον αλγόριθμο και ένα εχθρό, η αρχή του Yao αναφέρεται στη σχέση που υπάρχει για την απόδοση ενός ντετερμινιστικού αλγορίθμου έναντι σε μια μεικτή στρατηγική ενός εχθρού και στην απόδοση ενός πιθανοτικού αλγορίθμου έναντι σε μια απλή στρατηγική.

Η ιδέα μετά από αυτή την παρατήρηση είναι να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 2 και το πόρισμα 3 (chip game). Οι προτάσεις μας εξασφαλίζουν σε $O(k^3)$ βήματα αδικία k. Να επισημάνουμε πως αν και η στρατηγική ενός παίχτη στο παιχνίδι με τα πούλια σε στοίβες συγκρίνεται με ένα προσαρμόσιμο εχθρό για το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών, επειδή η στρατηγική του εχθρού είναι ανεξάρτητη από τις επιλογές του παίχτη, ο εχθρός μπορεί να θεωρηθεί και αμνήμων. Θα βρούμε λοιπόν ένα κατάλληλο k και θα χωρίσουμε το σύνολο των n παιχτών σε $k-$-άδες. Κάθε ένα από αυτά τα υποσύνολα θα τα υποβάλλουμε στη σειρά αιτήσεων που προκαλεί αδικία k^3 έναντι σε κάθε φορά τυχαίο ντετερμινιστικό αλγόριθμο. Το k θα είναι τέτοιο ώστε για κάθε πιθανό ντετερμινιστικό αλγόριθμο, με σταθερή πιθανότητα αυτός να συμπίπτει στις αποφάσεις με κάποιον από τους επίσης τυχαίους ντετερμινιστικούς αλγορίθμους των υποσυνόλων μεγέθους k. Ας κάνουμε όμως τα πράγματα πιο ξεκάθαρα.

Έστω $1, 2, \ldots, n$ οι παίχτες. Χωρίζουμε το σύνολο των παιχτών σε k-άδες, όπου το k θα το καθορίσουμε αργότερα. Χωρίς βλάβη θεωρούμε ότι το k διαιρεί το n , έτσι που δημιουργούνται n/k σύνολα παιχτών. Σε κάθε ένα από αυτά τα σύνολα θα θέσουμε και από μια ακολουθία αιτήσεων, αυτή ακριβώς που σύμφωνα με την πρόταση 1 εξασφαλίζει αδικία $k/2$. Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία αιτήσεων του θεωρήματος είναι μήκους l. Σε κάθε μια λοιπόν k-άδα αντιστοιχούμε μια ακολουθία l αιτήσεων, με κατανομή αυτή που προτείνει η πρόταση 1 και έναντι ενός τυχαία κάθε φορά επιλεγμένου ντετερμινιστικού αλγόριθμου. Γενικά για l αιτήσεις υπάρχουν 2^l διαφορετικοί ντετερμινιστικοί αλγόριθμοι που αποφασίζουν για αυτές. Κάθε μια λοιπόν ακολουθία από l αιτήσεις τη θέτουμε αντιμέτωπη με έναν τυχαίο ντετερμινιστικό αλγόριθμο ,επιλεγμένο ομοιόμορφα από τους 2^l κάθε φορά διαφορετικούς, (σχήμα 27).



Σχήμα 27: Κάτω φράγμα πιθανοτικών αλγορίθμων

Με άλλα λόγια κάνουμε n/k διαφορετικά πειράματα με τυχαία επιλεγμένους ντετερμινιστικούς αλγορίθμους. Για κάθε έναν από αυτούς τους αλγόριθμους έχουμε και την αντίστοιχη ακολουθία από l αιτήσεις με $l = O(k^3)$ που σε κάθε ένα από τα υποσύνολα των k παιχτών επιτυγχάνεται αδικίας $\Omega(k)$.

Αυτή η κατανομή από $\frac{nl}{k}$ αιτήσεις είναι η ζητούμενη. Πράγματι ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος A. Θέτουμε αντιμέτωπο τον A με την παραπάνω τυχαία κατανομή αιτήσεων. Αν ο αλγόριθμος A πάρει ακριβώς τις ίδιες αποφάσεις με κάποιον από τους αλγορίθμους A_i σε κάποιο υποσύνολο των k παιχτών θα έχει επιτευχθεί αδικία τουλάχιστον $k/2$. Ποια είναι η πιθανότητα όμως οι αποφάσεις του A να συμπίπτουν με τις αποφάσεις κάποιου από τους A_i ;

Λόγο του πλήθους των διαφορετικών ντετερμινιστικών αλγορίθμων που μπορούν να αποφασίσουν για μια ακολουθία l αιτήσεων έχουμε ότι η πιθανότητα, οι αποφάσεις του A να συμπίπτουν με αυτές κάποιου από τους A_i είναι $1/2^l$.

Θεωρούμε τυχαία μεταβλητή X_i με $X_i = 1$ αν στο i-οστό πείραμα οι αποφάσεις των αλγορίθμων συμπέσουν. Αφού $l = O(k^3)$ έχουμε

$$\forall i,\ Pr[X_i = 1] \geqslant 2^{-l} \geqslant 2^{-k^3}$$

Προφανώς η τυχαίες μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες οπότε

$$Pr[\exists i,\, X_i = 1] = 1 - Pr[\forall i,\, X_i = 0] = 1 - \prod_{i=1}^{n/k} Pr[X_i = 0] =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n/k} (1 - Pr[X_i = 1]) \geqslant 1 - (1 - 2^{-k^3})^{n/k}$$

Ορίζοντας τότε $k \approx \sqrt[3]{\log n}$ παίρνουμε ότι $Pr[\exists i,\, X_i = 1] \geqslant$constant, δηλαδή για όσο μεγάλο πλήθος παιχτών, με σταθερή πιθανότητα η προτεινόμενη κατανομή ακολουθίας αιτήσεων προκαλεί σε κάθε ντετερμινιστικό αλγόριθμο γραμμική ως προς k αδικία.

□

Το προηγούμενο θεώρημα μας επιτρέπει να εξάγουμε τα έως τώρα γνωστά φράγματα για την απόδοση των πιθανοτικών αλγορίθμων για το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών.

Πόρισμα 5. *Για το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών, η αδικία που μπορεί να εξασφαλιστεί από ένα βέλτιστο πιθανοτικό αλγόριθμο είναι από $\sqrt[3]{\log n}$ έως $\sqrt{n \log n}$.*

7.3 Αλγόριθμοι αντίστροφης απόφασης

Είναι λογικό να προσπαθήσει κανείς να εξασφαλίσει μικρή αδικία με αλγορίθμους που θυμούνται την τελευταία απόφαση που αφορά δύο παίχτες και σε μια επανάληψή της την αντιστρέφουν. Δυστυχώς αυτή η σκέψη αποτυχαίνει και ένα ισχυρό επιχείρημα είναι ιδιαίτερα απλό. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τέτοιο αλγόριθμο που συμπεριφέρεται ακριβώς όπως περιγράφτηκε πριν λίγο. Σταθεροποιούμε τον παίχτη 1, και τον θέτουμε αντιμέτωπο με τους υπόλοιπους $n - 1$ παίχτες σε ισάριθμες αιτήσεις. Αν σε αυτό το πρώτο βήμα ο παίχτης προκληθεί σε μεγάλη αδικία, ο εχθρός δε χρειάζεται να μεγαλώσει την ακολουθία αιτήσεων. Αν η αδικία του παίχτη 1 είναι μικρή τότε ένας εχθρός μπορεί να θεωρήσει τυχαία $\frac{n}{2}$ παίχτες και να συμπληρώσει την ακολουθία αιτήσεων με ισάριθμες νέες αιτήσεις που σε κάθε μία συμμετέχει επίσης ο παίχτης 1. Στην πρώτη ακολουθία αιτήσεων που προηγήθηκε και άθε ένας από αυτούς τους παίχτες ευνοήθηκε περίπου ισοπίθανα από τον αλγόριθμο ή όχι. Επομένως ο παίχτης 1 εκτελεί περίπου ένα αμερόληπτο τυχαίο περίπατο πάνω στον άξονα που περιγράφει την αδικία. Έπεται λοιπόν το επόμενο.

Πόρισμα 6. *Οι αλγόριθμοι που θυμούνται και αντιστρέφουν τις αποφάσεις εξυπηρέτησης δύο παιχτών, έχουν αδικία σχεδόν $\Omega(\sqrt{n})$*

7.4 Αλγόριθμος έναντι ομοιόμορφα τυχαίου εχθρού

Λόγω της δυσκολίας και της πολυπλοκότητας της ανάλυσης έναντι ομοιόμορφα τυχαίου εχθρού, σε αυτή την παράγραφο κάνουμε λίγο παραπάνω από απλή αναφορά στο αποτέλεσμα που υπάρχει [2]. Ο αλγόριθμος που τίθεται έναντι του ομοιόμορφα τυχαίου εχθρού είναι ο σφαιρικά άπληστος αλγόριθμος, για το πρόβλημα προσανατολισμού ακμών, ελαφρά τροποποιημένος. Να επισημάνουμε ότι η τάξη κάθε κόμβου στο κατευθυνόμενο γράφημα μπορεί να αναπαρασταθεί με τη θέση του κόμβου πάνω στον άξονα των ακεραίων.

Αλγόριθμος 8 (Τροποποιημένος σφαιρικά άπληστος αλγόριθμος). *Δεδομένης αίτησης δύο κόμβων, προσανατόλισε την ακμή προς εκείνο τον κόμβο που έχει μικρότερη θέση στον άξονα. Αν οι δύο κόμβοι μοιράζονται την ίδια θέση, για τον προσανατολισμό της ακμής συμβουλέψου ένα αμερόληπτο νόμισμα.*

Αυτή είναι μια πιθανοτική εκδοχή του σφαιρικά άπληστου αλγορίθμου που βοηθά στην ανάλυση του αλγορίθμου έναντι ενός ομοιόμορφα τυχαίου εχθρού. Από την πρόταση 1 έχουμε εξασφαλίσει ότι ακόμα και ο τροποποιημένος σφαιρικά άπληστος αλγόριθμος εξασφαλίζει αδικία στο διάστημα $\{-\lceil\frac{n-1}{2}\rceil, \ldots, \lceil\frac{n-1}{2}\rceil\}$. Αυτό σημαίνει ότι η κατάσταση του συστήματος για n παίχτες μπορεί να περιγραφεί στο χώρο $\{-\lceil\frac{n-1}{2}\rceil, \ldots, \lceil\frac{n-1}{2}\rceil\}^n$ και έτσι μπορεί να οριστεί μια αλυσίδα Markov. Για $n \geqslant 3$ και δεχόμενοι μια απλή προϋπόθεση, η αλυσίδα Markov αποδεικνύεται εργοδική επομένως συγκλίνει. Δεχόμενοι ακόμα ότι η ακολουθία αιτήσεων είναι αρκετά μεγάλη αποδεικνύεται αρχικά (και όχι τόσο πολύπλοκα) ότι ο τροποποιημένος σφαιρικά άπληστος αλγόριθμος εξασφαλίζει αδικία έναντι ομοιόμορφα τυχαίου εχθρού $O(\log n)$. Στηριζόμενος κανείς στο προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί να πάρει το ιδιαίτερα σύνθετο στη απόδειξή του επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 10. *Ο τροποποιημένος σφαιρικά άπληστος αλγόριθμος εξασφαλίζει έναντι ομοιόμορφα τυχαίου εχθρού αδικία* $\Theta(\log\log n)$.

7.5 Μη φραγμένη από πλήθος παιχτών αδικία

Από την ανάλυση που έγινε για τους ντετερμινιστικούς αλγορίθμους φαίνεται να μην έχει αξία να ασχοληθούμε με μη στοιχειωδώς δίκαιους αλγορίθμους, αλγορίθμους δηλαδή που να μην έχουν φραγμένη από μια συνάρτηση του πλήθους των παιχτών αδικία. Αυτό δεν είναι αλήθεια αν ο αλγόριθμος μπορεί να εγγυηθεί αδικία που αυξάνεται πολύ αργά σε σχέση με το μέγεθος της ακολουθίας αιτήσεων. Ένα παράδειγμα τέτοιου αλγορίθμου είναι το επόμενο [12].

Αλγόριθμος 9 (Ο τυχαίος αλγόριθμος της ετικέτας (random label algorithm, RLA)). *Για το πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών με αιτήσεις δύο παιχτών, επέλεξε για κάθε παίχτη i μια άπειρη ακολουθία $s_i \in \{0,1\}^\infty$, την ετικέτα του - ένα άπειρο δυαδικό διάνυσμα. Εξυπηρέτησε την αίτηση $\{i,j\}$ με εκείνο τον παίχτη r για τον οποίο υπάρχει k με $s_r(k) = 1$, το αντίστοιχο στοιχείο του διανύσματος του άλλου παίχτη είναι 0 και όλες οι συντεταγμένες των δύο διανυσμάτων μέχρι και το δείκτη $k-1$ είναι ίδιες. Άλλαξε στη συνέχεια τα δύο διαφορετικά πρώτα αντίστοιχα bits των παιχτών i, j μεταξύ τους.*

Δίνουμε αμέσως ένα σύντομο παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου.

Παράδειγμα 3. *Ας υποθέσουμε ότι σε ένα στιγμιότυπο εφαρμογής του αλγορίθμου RLA, πρέπει να εξυπηρετηθεί η αίτηση $\{i,j\}$. Έστω επίσης $s_i = 0110011010\ldots$ και $s_j = 0110010011\ldots$. Παρατηρούμε ότι $s_i(7) = 1$ και $s_j(7) = 0$ ενώ $s_i(t) = s_j(t), \forall t < 7$. Εξυπηρετούμε την αίτηση με τον παίχτη i και μετατρέπουμε τις ετικέτες των δύο παιχτών όπως φαίνεται στο σχήμα 28.*

$$\begin{array}{lclllllll|llll}
s_i & = & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
s_j & = & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\
\\
s_i & = & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
s_j & = & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots
\end{array}$$

Σχήμα 28: Ο τυχαίος αλγόριθμος της ετικέτας

Για τον παραπάνω αλγόριθμο ισχύει το εξής λήμμα.

Λήμμα 5. *Ονομάζουμε το δείκτη t, μέγιστο δείκτη για τους παίχτες i, j αν οι συντεταγμένες των ετικετών των ίδιων παιχτών συμπίπτουν μέχρι και την t-οστή θέση. Έστω ότι μετά την εξυπηρέτηση της l-οστής αίτησης ο μέγιστος δείκτης που έχει χρησιμοποιηθεί είναι k. Τότε η μέγιστη αδικία των παιχτών φράσσεται από k. Επίσης μετά την εξυπηρέτηση κάθε αίτησης, οι ετικέτες των παιχτών είναι τυχαίες και ανεξάρτητες.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στο πλήθος των αιτήσεων. □

Το λήμμα μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε τη μέγιστη αδικία ως το μέγιστο δείκτη μεταξύ δύο παιχτών που έχει χρησιμοποιηθεί για μια ακολουθία αιτήσεων. Αποδεικνύεται επίσης ότι αν με k συμβολίσουμε το μέγιστο δείκτη που έχει χρησιμοποιηθεί για l αιτήσεις (k δηλαδή είναι ο μέγιστος δείκτης μεταξύ l τυχαίων και ανεξάρτητων ετικετών) τότε για $x \approx \log l$ ισχύει

$$Pr[k \leqslant x] \geqslant constant$$

Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να συμπεράνουμε άμεσα την αδικία που εξασφαλίζει ο αλγόριθμος RLA.

Θεώρημα 11. *Η αδικία που εξασφαλίζει ο αλγόριθμος RLA για το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών που σε κάθε αίτηση συμμετέχουν δύο παίχτες και για l αιτήσεις, είναι με μεγάλη πιθανότητα $O(\log l)$.*

Η αξία του αλγορίθμου έγκειται στο γεγονός ότι για πολυωνυμικό ως προς το μέγεθος των παιχτών πλήθος αιτήσεων, η αδικία του είναι λογαριθμική ως προς τους παίχτες. Η πρόκληση βέβαια προέρχεται από το ερώτημα πως μπορούμε να πετύχουμε τέτοια αδικία για μη φραγμένο πλήθος αιτήσεων.

7.6 Νέος πιθανοτικός αλγόριθμος

Για το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών θεωρούμε τον εξής πιθανοτικό αλγόριθμο που βρίσκει εφαρμογή σε αιτήσεις μεγέθους 2 και έχει προταθεί από τον Ηλία Κουτσουπιά. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, αυτό δεν είναι περιοριστικό. Το δε πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών όπου κάθε μέρα εμφανίζονται μόνο 2 παίχτες, ενδείκνυται για μελέτη και για βελτίωση των υπαρχόντων αποτελεσμάτων που αφορούν την απόδοση πιθανοτικών αλγορίθμων.

Αλγόριθμος 10 (Ο τυχαία δίκαιος αλγόριθμοςrandom righteous (RR)). *Επέλεξε τυχαία ένα παίχτη από την αίτηση. Μείωσέ του την αδικία.*

Μπορούμε να φανταζόμαστε ότι η αδικία κάθε παίχτη κατά την προσομοίωση του άμεσου παιχνιδιού κοινοπραξίας οδηγών χαρακτηρίζεται από τη θέση κάθε παίχτη πάνω στον άξονα των ρητών. Κάθε φορά που ένας παίχτης οδηγεί μετακινείται $1/2$ προς τα δεξιά, αλλιώς κατά την ίδια απόσταση αριστερά. Σύμφωνα με τον παραπάνω αλγόριθμο και για μια αίτηση, επιλέγεται τυχαία (με πιθανότητα $1/2$) ένας από τους δύο παίχτες και κινείται προς το 0, ενώ ο άλλος εκτελεί κίνηση προς την αντίθετη κατεύθυνση. Όπως είναι φανερό αν οι δύο παίχτες που συμμετέχουν στην αίτηση βρίσκονται εκατέρωθεν του μηδενός, μειώνεται και στους δύο η αδικία. Αντιθέτως αν βρίσκονται από την ίδια μεριά του μηδενός, με πιθανότητα $1/2$ ο ένας από τους δύο απομακρύνεται από το 0 και ο άλλος πλησιάζει και αντιστρόφως.

Πρόκληση αποτελεί η ανάλυση της αδικίας του παραπάνω αλγορίθμου. Ας αρχίσουμε όμως με τα άσχημα νέα. Γνωρίζουμε ότι κάθε πιθανοτικός αλγόριθμος δε μπορεί να εγγυηθεί αδικία μικρότερη από $\sqrt[3]{\log n}$. Ο τυχαία δίκαιος αλγόριθμος δε μπορεί να εγγυηθεί αδικία μικρότερη από $\log n$.

Πρόταση 8. *Ο τυχαία δίκαιος αλγόριθμος έχει αδικία απέναντι σε ένα αμνήμονα εχθρό και για n παίχτες $\Omega(\log n)$*

Απόδειξη. Θα επινοήσουμε ακολουθία αιτήσεων που με "μεγάλη" πιθανότητα προκαλεί αδικία $\Omega(\log n)$. Η ιδέα είναι να φανταστούμε ένα αμνήμονα εχθρό που θα προσπαθεί να προβλέψει τη θέση κάθε παίχτη, έτσι ώστε να προτείνει αιτήσεις που με μεγάλη πιθανότητα να αυξάνει σε κάθε βήμα την αδικία (για ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων). Πιο συγκεκριμένα και αν με X_i^t συμβολίσουμε τη θέση του παίχτη i μετά την αίτηση t, θα δείξουμε ότι $Pr[\exists i : X_i^k = k] > c$ για κάποια σταθερά $c > 0$.

Χωρίς βλάβη θεωρούμε ότι αρχικά όλοι οι παίχτες έχουν αδικία 0. Χωρίζουμε την ακολουθία αιτήσεων σε k υπακολουθίες

1^η υπακολουθία: $(2,1),(4,3),6,5),(8,7),\ldots$ με $n/2$ αιτήσεις

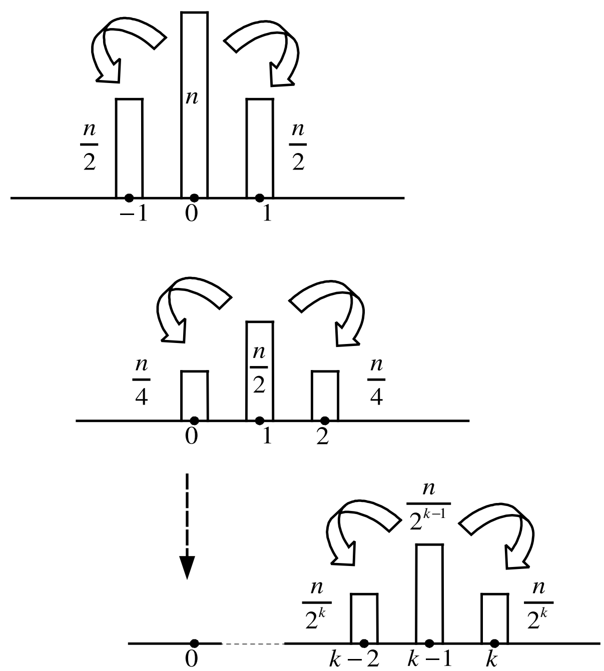
2^η υπακολουθία: $(4,2),(8,6),(12,10),(16,14),\ldots$ με $n/4$ αιτήσεις

3^η υπακολουθία: $(8,4),(16,12),(24,20),(32,28),\ldots$ με $n/8$ αιτήσεις

$\vdots$

k^η υπακολουθία: $(2^k, 2^k - 2^{k-1}),(2\cdot 2^k, 2\cdot 2^k - 2^{k-1}),(3\cdot 2^k, 3\cdot 2^k - 2^{k-1}),\ldots$ με $n/2^k$ αιτήσεις

Με την πρώτη υπακολουθία αιτήσεων ο εχθρός έχει μετατοπίσει τους n παίχτες από τη θέση 0 στις θέσεις -1 και 1 και τους έχει μετατρέψει σε ομάδες μεγέθους $n/2$. Αν και ο εχθρός δεν ξέρει που είναι πλέον κάθε παίχτης, προτείνοντας τη 2^η υπακολουθία αιτήσεων, έχει μεγάλη πιθανότητα να πετύχει κάποιους από τους $n/2$ παίχτες της θέσης 1 και να τους μετατοπίσει στη θέση 2 κ.ο.κ. Σχηματικά η στρατηγική του εχθρού αναπαρήσταται στο σχήμα 29.



Σχήμα 29: Κάτω φράγμα αδικίας για τον αλγόριθμο RR

Για ευκολία ας ονομάσουμε το σύνολο αιτήσεων της $k^{\eta\varsigma}$ υπακολουθίας A. Θα μελετήσουμε πόσα βήματα μπορεί να επαναλάβει ο εχθρός προτείνοντας νέες υπακολουθίες αιτήσεων έχοντας αρκετά μεγάλη πιθανότητα να αυξάνει κάθε φορά την αδικία. Παρατηρουμε ότι:

$$Pr[\exists i : X_i^k = k] = Pr[\exists (i,j) \in A : (X_i^{k-1} = k-1) \wedge (X_j^{k-1} = k-1)] =$$

$$= 1 - Pr[\forall i, j \in A \Rightarrow (X_i^{k-1} < k-1) \vee (X_j^{k-1} < k-1)] =$$

$$= 1 - Pr[(X_{2^k}^{k-1} < k-1) \vee (X_{2^{k-1}}^{k-1} < k-1)]^{\frac{n}{2^k}} =$$

$$= 1 - (1 - Pr[(X_{2^k}^{k-1} = k-1) \wedge (X_{2^{k-1}}^{k-1} = k-1)])^{\frac{n}{2^k}} =$$

$$= 1 - (1 - \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1}{2^{k-1}})^{\frac{n}{2^k}} =$$

$$= 1 - (1 - \frac{4}{2^{2k}})^{\frac{n}{2^k}}$$

Εύκολα τότε προκύπτει ότι για $k \approx \log n$ παίρνουμε $1 - (1 - \frac{4}{2^{2k}})^{\frac{n}{2^k}} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho$ και επομένως ένας εχθρός με την παραπάνω ακολουθία αιτήσεων και με σταθερή πιθανότητα, όσοι και αν είναι οι παίχτες, εξασφαλίζει οτι στο k-οστό βήμα υπάρχει παίχτης με αδικία $\log n$.

$\square$

Το παραπάνω κάτω φράγμα για την αποδοτικότητα του τυχαία δίκαιου αλγόριθμου μας επισημαίνει καταρχήν ότι η αποδοτικότητα των πιθανοτικών αλγορίθμων δεν μπορεί προς το παρόν να αποδειχθεί σφιχτή. Αφενός η εκτίμηση για το κάτω φράγμα της $\sqrt[3]{\log n}$ αδικίας μπορεί να είναι χαλαρό και υποτιμημένο, αφετέρου ακόμα και αν υπάρχει αλγόριθμος με αδικία μικρότερη από $\log n$ σίγουρα αυτός δεν είναι ο RR.

Έχουμε ενδείξεις για το γεγονός ότι η συμπεριφορά του RR αλγορίθμου που μόλις περιγράφτηκε είναι η χειρότερη δυνατή ή τουλάχιστον η χειρότερη δεν είναι πολύ μακριά από $\log n$ [9]. Εκτός από τα πειραματικά αποτελέσματα που όπως θα δούμε για μια περιορισμένη κατηγορία εχθρών, δίνουν στον αλγόριθμο RR συμπεριφορά πολύ καλύτερη από αυτή του τοπικά άπληστου, η διαίσθηση μας βοηθά να ελπίζουμε επίσης. Σύμφωνα λοιπόν με τη διαίσθησή μας κάθε παίχτη η πορεία πάνω στον άξονα της αδικίας, είναι ένας τυχαίος περίπατος φραγμένος από ένα ομοιόμορφα τυχαίο. Πιο ξεκάθαρα και αν με X_i^t είναι η θέση του παίχτη i μετά την εξυπηρέτηση της t-οστής αίτησης πάνω στον άξονα της αδικίας, υποθέτουμε ότι ισχύει

$$Pr[|X_i^t| > |X_i^{t-1}|] \leqslant c < \frac{1}{2}$$

και αυτό για κάθε t και δεδομένου ότι ο παίχτης i έχει συμμετάσχει στην τελευταία αίτηση. Με άλλα λόγια η παραπάνω εικασία προτείνει ότι πιθανότητα ενός παίχτη να αυξήσει την αδικία του μετά την εξυπηρέτηση μιας αίτησης στην οποία συμμετέχει είναι μικρότερη από $1/2$. Αυτή η ιδέα έχει σα στόχο να καταλήξουμε στην εξής πολύ χρήσιμη πρόταση.

Εικασία 1. *Για το πρόβλημα προσανατολισμού ακμών, ο αλγόριθμος RR αναγκάζει κάθε παίχτη σε τυχαίο περίπατο με την ιδιότητα*

$$Pr[X_i^t > a] < d^a$$

για κάποιο $d < 1$.

Αν πραγματικά ισχύει η εικασία πολύ εύκολα αποδεικνύει κανείς ότι

$$Pr[\max_i X_i^t > \frac{2}{\log d^{-1}} \log n] < \frac{1}{n}$$

και αυτό για κάθε t, δηλαδή ότι με μεγάλη πιθανότητα η αδικία του αλγορίθμου RR είναι $O(\log n)$.

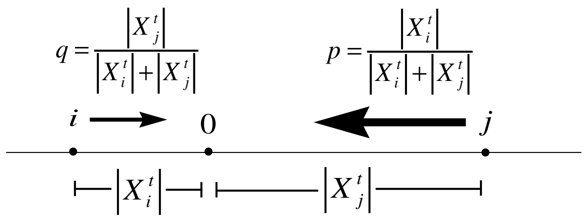
Η ιδέα του τυχαία δίκαιου αλγόριθμου γενικεύεται και δημιουργεί ένα αλγόριθμο τουλάχιστον τόσο καλό όσο και ο RR. Ο τυχαία δίκαιος αλγόριθμος βελτιώνει τη θέση κάποιου από τους παίχτες που συμμετέχουν στην αίτηση με τη βοήθεια ενός αμερόληπτου νομίσματος και ανεξάρτητα από τη θέση των παιχτών στον άξονα της αδικίας. Ο ακόμα πιο νέος αλγόριθμος λαμβάνει υπόψη αυτή ακριβώς την παράμετρο. Προτείνουμε λοιπόν και τον επόμενο πιθανοτικό αλγόριθμο.

Αλγόριθμος 11 (Ζυγισμένος τυχαία δίκαιος αλγόριθμος, balanced random righteous, BRR). *Έστω X_i^t η θέση του παίχτη i μετά την εξυπηρέτηση της t-οστής αίτησης. Θεωρούμε την αίτηση $r = \{i, j\}$. Η αίτηση r εξυπηρετείται από τον παίχτη i με πιθανότητα*

$$p = \frac{|X_i^t|}{|X_i^t| + |X_j^t|}$$

αλλιώς από τον παίχτη j.

Ο πιθανοτικός αλγόριθμος μεροληπτεί αυτή τη φορά υπέρ εκείνου του παίχτη που απέχει περισσότερο από τη μηδενική αδικία (σχήμα 30).



Σχήμα 30: Η μεροληψία της κίνησης του αλγορίθμου BRR

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι ο αλγόριθμος BRR είναι τουλάχιστον τόσο καλός όσο και ο RR, δηλαδή δεδομένης ακολουθίας αιτήσεων, ο αλγόριθμος BRR εξασφαλίζει αδικία το πολύ όσο και ο αλγόριθμος RR, Αντιστρόφως, μια ακολουθία αιτήσεων που αναγκάζει τον αλγόριθμο BRR σε μια συμπεριφορά, αναγκάζει και τον αλγόριθμο RR τουλάχιστον στην ίδια αδικία. Φαίνεται ότι ο τροποποιημένος νέος αλγόριθμος περιορίζει τη δύναμη ενός επιλήσμονα εχθρού αλλά αυτό μένει να μελετηθεί. Προς το παρόν μπορούμε απλά να συγκρίνουμε τα πειραματικά αποτελέσματα.

8 Πειραματικά αποτελέσματα

Η προσομοίωση της συμπεριφοράς των παρακάτω αλγορίθμων έγιναν με τη βοήθεια του μαθηματικού πακέτου $MAPLE$ 8 και εκτελέστηκαν από επεξεργαστή 2GHz.Πολλά από τα αποτελέσματα και κυρίως αυτά που αφορούν πολλές αιτήσεις απαιτούσαν αρκετά λεπτά για μια μόνο προσομοίωση πειράματος. Για να έχουμε ευκρινέστερη και ενδεικτικότερη εικόνα για την αποδοτικότητα των αλγορίθμων τα περισσότερα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην παράγραφο 2.2 προκύπτουν από 100 πειράματα. Σε άλλα πειράματα που η προσομοίωση για ένα πείραμα απαιτεί μερικές ώρες έχουμε επαναλάβει λιγότερες προσομοιώσεις.

Κάτι που επίσης πρέπει να τονιστεί είναι ότι τα αποτελέσματα είναι απλώς ενδεικτικά και πιθανόν παραπλανητικά. Επειδή είναι δύσκολο να προσομοιωθεί ο βέλτιστος επιλήσμων εχθρός, θέσαμε τους πιθανοτικούς αλγορίθμους έναντι ομοιόμορφα τυχαίων εχθρών. Αυτό θα σχολιαστεί περισσότερο όταν σχολιάσουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα. Επίσης να επισημάνουμε ότι η αδικία μετά το τέλος κάθε πειράματος μετριέται ως η μέγιστη αδικία που επιβαρύνει τους παίχτες μετά το πέρας της εξυπηρέτησης της τελευταίας αίτησης. Ένα ίσως καλύτερο κριτήριο θα ήταν, η αδικία να μετριέται ως η μέγιστη αδικία που επιτυγχάνεται κατά τη διάρκεια του πειράματος. Μια και τα πρώτα αποτελέσματα υπολογίστηκαν με βάση το πρώτο κριτήριο και αφού ο κύριος λόγος της προσομοίωσης είναι μάλλον η μεταξύ της απόδοσης των αλγορίθμων σύγκριση, επικράτησε αυτός.

Ακόμη και για λόγους ευκολίας θεωρήσαμε οτι η εξυπηρέτηση κάθε αίτησης αναγκάζει του παίχτες σε μοναδιαίες μετακινήσεις πάνω στον άξονα (αντί για μετακινήσεις ± 0.5). Αυτό διόρθώνεται στην εμφάνιση των αποτελεσμάτων απλά διαιρώντας την αδικία της προσομοίωσης με το 2.Τέλος κάθε ένας από τους κώδικες είναι μια διαδικασία (procedure) που μπορεί να εκτελεστεί για το επιθυμητό πλήθος επαναλήψεων και να εμπλέξει επιθυμητό πλήθος παιχτών.

8.1 Προγραμματιστική υλοποίηση

Στην πρώτη αυτή υλοποίηση οι ομοιόμορφα τυχαίες αιτήσεις προκύπτουν από τη συνάρτηση $paixtis$ που επιλέγει τυχαία ένα παίχτη από το σύνολο των παιχτών. Αν οι δύο παίχτες που συμμετέχουν σε μια αίτηση έχουν την ίδια αδικία, ο αλγόριθμος επιλέγει πως θα την εξυπηρετήσει μέσω της τυχαίας μεταβλητής $tyxeros-paixtis$ που επιλέγει ισοπίθανα έναν από τους δύο παίχτες. Τα υπόλοιπα ακολουθούν πλήρως την περιγραφή της εισαγωγής και βέβαια την περιγραφή του τοπικά άπληστου αλγόριθμου.

———————————————————————————————————

–

ΤΟΠΙΚΑ ΑΠΛΗΣΤΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

———————————————————————————————————

–

$peirama2 := \textbf{proc}(paixtes,\ aitiseis)$
local $paixtis,\ epilogi,\ i,\ j,\ xreos,\ k1,\ k2,\ tyxeros\_paixtis,\ adikia,\ peirama2;$
$paixtis := \mathrm{rand}(1..paixtes)\,;$
$paixtis()\,;$
$epilogi := \mathrm{rand}(1..2)\,;$
$epilogi()\,;$
for i **to** $paixtes$ **do** **for** j **to** $paixtes$ **do** $xreos_{i,\,j} := 0$ **end do** **end do** ;
for i **to** $aitiseis$ **do**
$k1 := paixtis()\,;$
$k2 := paixtis()\,;$
for j **while** $k1 = k2$ **do** $k2 := paixtis()$ **end do** ;
$tyxeros\_paixtis := epilogi()\,;$
if $xreos_{k2,\,k1} < xreos_{k1,\,k2}$ **then** $xreos_{k2,\,k1} := xreos_{k2,\,k1} + 1$ **end if** ;
if $xreos_{k1,\,k2} < xreos_{k2,\,k1}$ **then** $xreos_{k1,\,k2} := xreos_{k1,\,k2} + 1$ **end if** ;
if $xreos_{k1,\,k2} = xreos_{k2,\,k1}$ **then**
if $tyxeros\_paixtis = 1$ **then** $xreos_{k1,\,k2} := xreos_{k1,\,k2} + 1$
else $xreos_{k2,\,k1} := xreos_{k2,\,k1} + 1$
end if
end if
end do;
$adikia := \mathrm{abs}(\mathrm{add}(xreos_{1,\,i},\ i = 1..paixtes) - \mathrm{add}(xreos_{i,\,1},\ i = 1..paixtes))\,;$
for j **to** $paixtes$ **do**
if $adikia < \mathrm{abs}(\mathrm{add}(xreos_{j,\,i},\ i = 1..paixtes) - \mathrm{add}(xreos_{i,\,j},\ i = 1..paixtes))$
then
$adikia := \mathrm{abs}(\mathrm{add}(xreos_{j,\,i},\ i = 1..paixtes) - \mathrm{add}(xreos_{i,\,j},\ i = 1..paixtes))$
end if
end do;
$peirama2 := adikia$
end proc

Στην υλοποίηση του τυχαία δίκαιου αλγορίθμου οι τυχαίες επιλογές αιτήσεων και παιχτών γίνονται με τον ίδιο τρόπο της υλοποίησης του τοπικά άπληστου αλγόριθμου. Στον τυχαία δίκαιο αλγόριθμο, το κριτήριο απαιτεί, ο παίχτης από τους δύο που συμμετέχουν στην αίτηση και που κερδίζει στη ρίψη του νομίσματος να του μειώνεται η αδικία. Για ένα παίχτη που έχει μηδενική αδικία αυτό δεν έχει νόημα. Θα μπορούσαμε κάλλιστα, αν ένας από τους δύο παίχτες βρίσκεται στο μηδέν, να μειώνουμε την αδικία του δεύτερου, ή και όταν και οι δύο παίχτες έχουν αδικία μηδέν να εξυπηρετούμε την αίτηση τυχαία. Προτιμήσαμε να ξεπεράσουμε αυτή την μικρή αδυναμία του ορισμού με το να ορίσουμε ουδέτερη αδικία την τιμή

-0.25. Έτσι αν ένας παίχτης βρίσκεται στην θέση μηδέν και κερδίζει στη ρίψη του νομίσματος το δεύτερο παίχτη με μη μηδενική αδικία, θα μετακινηθεί στον άξονα των ακεραίων προς τα αριστερά.

———

–

ΤΥΧΑΙΑ ΔΙΚΑΙΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

———

–

```
peirama := proc(paixtes, aitiseis)
local paixtis, epilogi, i, thesi, k1, k2, j, tyxeros_paixtis, adikia, peirama;
  paixtis := rand(1..paixtes) ;
  paixtis() ;
  epilogi := rand(1..2) ;
  epilogi() ;
  for i to paixtes do thesi[i] := 0 end do ;
  for i to aitiseis do
    k1 := paixtis() ;
    k2 := paixtis() ;
    for j while k1 = k2 do k2 := paixtis() end do ;
    tyxeros_paixtis := epilogi() ;
    if tyxeros_paixtis = 1 then
      if − 0.5 < thesi[k1] then thesi[k1] := thesi[k1] − 1 ; thesi[k2] := thesi[k2] + 1
      else thesi[k1] := thesi[k1] + 1 ; thesi[k2] := thesi[k2] − 1
      end if
    else
      if thesi[k2] < −0.5 then thesi[k1] := thesi[k1] − 1 ; thesi[k2] := thesi[k2] + 1
      else thesi[k1] := thesi[k1] + 1 ; thesi[k2] := thesi[k2] − 1
      end if
    end if
  end do;
  adikia := abs(thesi[1]) ;
  for i from 2 to paixtes do
    if adikia < abs(thesi[i]) then adikia := abs(thesi[i]) end if
  end do;
  peirama := adikia
end proc
```

Τέλος για το ζυγισμένο τυχαία δίκαιο αλγόριθμο, η υλοποίηση είναι όμοια με αυτή του τυχαία δίκαιου. Να προσθέσουμε απλά ότι όπως ήδη παρατηρήσαμε η ρίψη του νομίσματος που καθορίζει την αίτηση παύει να είναι αμερόληπτη και καθορίζεται από τις σχετικές θέσεις των δύο συμμετεχόντων στην αίτηση. Στην περίπτωση που και οι δύο συμμετέχοντες έχουν μηδενική αδικία, δεν ορίζεται ο λόγος $\frac{thesi_1}{thesi_1+thesi_2}$. Το πρόβλημα εύκολα ξεπερνιέται θεωρώντας μηδενική αδικία (αρχική δηλαδή κατάσταση παιχτών) την ποσότητα ε, με $\varepsilon \approx 0$. Εδώ θεωρήσαμε

$\varepsilon = 0.01$.

–

ΖΥΓΙΣΜΕΝΟΣ ΤΥΧΑΙΑ ΔΙΚΑΙΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

–

```
peirama3 := proc(paixtes, aitiseis)
local paixtis, epilogi, i, thesi, k1, k2, j, epil, tyxeros_paixtis, adikia, peirama3;
  paixtis := rand(1..paixtes) ;
  paixtis() ;
  epilogi := rand(1..1000) ;
  epilogi() ;
  for i to paixtes do thesi[i] := 0.01 end do ;
  for i to aitiseis do
    k1 := paixtis() ;
    k2 := paixtis() ;
    for j while k1 = k2 do k2 := paixtis() end do ;
    epil := 1/1000 * epilogi() ;
    if epil < abs(thesi[k1])/(abs(thesi[k1])+abs(thesi[k2])) then tyxeros_paixtis :=
1
    else tyxeros_paixtis := 2
    end if;
    if tyxeros_paixtis = 1 then
      if - 0.5 < thesi[k1] then thesi[k1] := thesi[k1] - 1 ; thesi[k2] := thesi[k2] + 1
      else thesi[k1] := thesi[k1] + 1 ; thesi[k2] := thesi[k2] - 1
      end if
    else
      if thesi[k2] < -0.5 then thesi[k1] := thesi[k1] - 1 ; thesi[k2] := thesi[k2] + 1
      else thesi[k1] := thesi[k1] + 1 ; thesi[k2] := thesi[k2] - 1
      end if
    end if
  end do;
  adikia := abs(thesi[1]) ;
  for i from 2 to paixtes do
    if adikia < abs(thesi[i]) then adikia := abs(thesi[i]) end if
  end do;
  peirama3 := adikia
end proc
```

8.2 Πίνακες αποτελεσμάτων

Από τα πειραματικά αποτελέσματα μπορούμε να εξάγουμε αρκετά χρήσιμα αλλά και επισφαλή συμπεράσματα. Αρχικά και χωρίς να αρχίσουμε να σχολιάζουμε τα αποτελέσματα κάθε ενός από τους τρεις διαφορετικούς αλγορίθμους να επισημάνουμε ότι έπρεπε να αποφασίσουμε δεδομένου πλήθος n παιχτών πόσες αιτήσεις απαιτούνται για να πάρουμε αξιόπιστα αποτελέσματα. Από την ανάλυση του ντετερμινιστικού αλγορίθμου έναντι προσαρμόσιμου εχθρού μάθαμε ότι χρειαζόμαστε το πολύ n^3 αιτήσεις. Μια και οι πιθανοτικοί αλγόριθμοι εγγυώνται μικρότερη αδικία περιμένουμε να απαιτούνται λιγότερες αιτήσεις. Από τα πειραματικά αποτελέσματα προκύπτει ότι για περίπου n^2 αιτήσεις, τα αποτελέσματα σταθεροποιούνται. Για κάθε μια από τις περιπτώσεις 10, 50, 100, 500, 1.000, 5.000 ή 10.000 παιχτών, θεωρούμε 10, 100, 1.000, 100.00, 100.000 ή 1.000.000 αιτήσεις, εκτός εξαιρέσεων.

Δεν επιχειρήσαμε πειράματα με μεγαλύτερα δεδομένα παιχτών ή αιτήσεων διότι προσομοίωση με περισσότερους παίχτες θα απαιτούσε πολύ περισσότερες αιτήσεις κάτι που είναι χρονικά ιδιαίτερα δαπανηρό. Εξάλλου τέτοια πειραματικά αποτελέσματα με τόσο μικρού μεγέθους δεδομένα δεν ενδείκνυνται για εξαγωγή συμπερασμάτων αλλά απλά ενδείξεων. Πόσο μάλλον απλά ενδεικτικά φαίνονται σε όσους αναζητούν τη μαθηματική αυστηρότητα, το ίδιο και για εμάς.

ΤΟΠΙΚΑ ΑΠΛΗΣΤΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
10	2.53	2.63	2.76	2.76	2.63
50	2.38	6.33	8.78	8.63	8.66
100	2.01	5.85	12.95	13.96	13.30
500	1.35	3.41	10.18	26.73	35.90
1.000	1.11	2.71	7.78	22.95	49.25

Η υλοποίηση του τοπικά άπληστου αλγορίθμου, τουλάχιστον στη εφαρμογή της που φαίνεται στην προηγούμενη παράγραφό είναι χρονικά ιδιαίτερα δαπανηρή. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι για 10 παίχτες και 1.000.000 αιτήσεις απαιτούνται για την ολοκλήρωση κάθε πειράματος περίπου 56 sec ενώ για το ίδιο πλήθος αιτήσεων και για 1.000 παίχτες κάθε πείραμα κόστιζε χρονικά σχεδόν 150 sec. Αυτό μας οδήγησε στη περίπτωση των 10.000 να επαναλάβουμε μόνο 20 πειράματα.

Η αδικία των 49.25 μονάδων για 1.000 παίχτες και για 1.000.000 αιτήσεις φαίνεται υποτιμημένη σε σχέση με την πραγματική. Για 500 μόλις παίχτες, η εκτίμηση των πειραμάτων από 100.000 σε 1.000.000 δε συμφωνούν οπότε η εκτίμηση είναι πιθανόν χαμηλότερη από την πραγματική, πόσο μάλλον για μεγαλύτερο πλήθος παιχτών. Εκτελέσαμε ένα μόνο πείραμα των 500 παιχτών με 10.000.000 αιτήσεις που διήρκησε περίπου 1.500 sec και σύμφωνα με το οποίο η αδικία προέκυψε 69. Είναι λοιπόν αρκετά πιθανό η αδικία που υπολογίστηκε για 500 παίχτες να είναι κατά προσέγγιση η εκτιμώμενη.

Η σχέση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική εκτιμώμενη αδικία από τη θεωρία θα σχολιαστεί στην επόμενη παράγραφο. Προκαταβολικά αναφέρουμε ότι τα πειραματικά αποτελέσματα ακολουθούν τα θεωρητικά παρόλο που ο εχθρός αντί για επιλήσμων, είναι ακόμα πιο αδύναμος (ομοιόμορφα τυχαίος).

ΤΥΧΑΙΑ ΔΙΚΑΙΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
10	1.22	1.26	1.21	1.33	1.22
50	1.70	2.30	2.19	2.21	2.26
100	1.57	2.60	2.68	2.69	2.72
500	1.19	2.75	3.53	3.60	3.75
1.000	1.06	2.23	3.93	4.05	4.03
5000	0.85	1.57	3.19	4.96	5.04
10.000	0.72	1.33	2.67	4.97	5.40

Ο τυχαία δίκαιος αλγόριθμος παρουσιάζει σαφώς καλύτερα αποτελέσματα από τον τοπικά άπληστο αλγόριθμο, τουλάχιστον για ομοιόμορφα τυχαίο εχθρό. Επίσης χρονικά είναι λιγότερος δαπανηρός κάτι που μας επέτρεψε να έχουμε περισσότερα αποτελέσματα. Ένα πείραμα των 10.000 παιχτών με 1.000.000 αιτήσεις κόστιζε περίπου 60 sec ενώ πραγματοποιήθηκαν και 14 πειράματα με 100.000 παίχτες και 10.000.000 αιτήσεις με μέσο όρο αδικίας $6,89$ μάλλον καθόλου ενδεικτικό ως προς την πραγματικότητα. Επίσης η πιθανολογούμενη αδικία της τάξης του $\log n$ φαίνεται να συμφωνεί με τα πειραματικά αποτελέσματα.

ΖΥΓΙΣΜΕΝΟΣ ΤΥΧΑΙΑ ΔΙΚΑΙΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

	100	1000	10.000	100.000	1.000.000
10	0.81	0.76	0.75	0.76	0.73
50	1.14	1.21	1.21	1.16	1.22
100	1.06	1.32	1.34	1.37	1.37
500	0.89	1.57	1.70	1.71	1.72
1.000	0.70	1.46	1.85	1.80	1.84
5.000	0.51	1.03	1.95	2.19	2.13
10.000	0.50	1.00	1.71	2.25	2.28

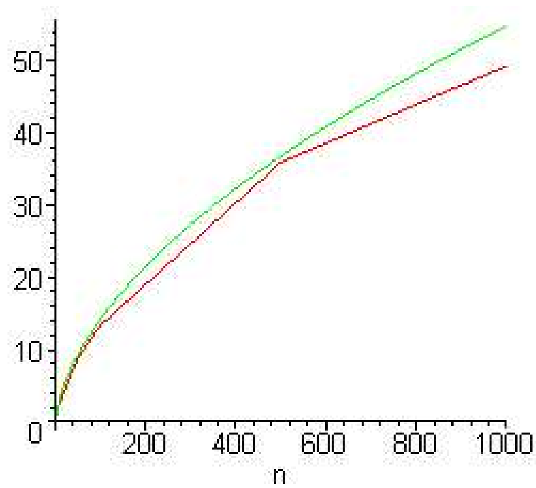
Τέλος ο ζυγισμένος τυχαία δίκαιος αλγόριθμος έχει πολύ καλύτερη συμπεριφορά από τον τυχαία δίκαιο, όπως φαίνεται από τον πίνακα αποτελεσμάτων. Λόγω της χαμηλής αδικίας που φαίνεται να επιτυγχάνει ο αλγόριθμος BRR τουλάχιστον έναντι ομοιόμορφα τυχαίου εχθρού, οι εκτιμώμενη αδικία των 10.000 παιχτών με 1.000.000 αιτήσεις μοιάζει να είναι ενδεικτική. Σε 24 πειράματα που πραγματοποιήθηκαν με ισάριθμους παίχτες και 10.000.000 αιτήσεις, ο μέσος όρος της αδικίας προέκυψε 2.31 πολύ κοντά δηλαδή στο ήδη εκτιμώμενο. Τόσες επαναλήψεις με τόσους πολλούς παίχτες ήταν εφικτές μια και χρονικά ήταν λιγότερο δαπανηρός από κάθε άλλο. Και πάλι ενδεικτικά αναφέρουμε ότι για ένα πείραμα των 10.000 παιχτών με 1.000.000 αιτήσεις χρειάζονται περίπου 78 sec.

Τέλος να επισημάνουμε ότι παρόλο που δεν έχουμε για τους δύο τελευταίους κανένα θεωρητικό αποτέλεσμα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τουλάχιστον τα πειραματικά αποτελέσματα μας μαρτυρούν ότι οι αλγόριθμοι είναι στοιχειωδώς δίκαιοι, έχουν δηλαδή φραγμένη και σταθερή αδικία σε σχέση με το μέγεθος της ακολουθίας αιτήσεων, χωρίς αυτό βέβαια να αποτελεί απόδειξη.

8.3 Γραφική σύγκριση αλγορίθμων

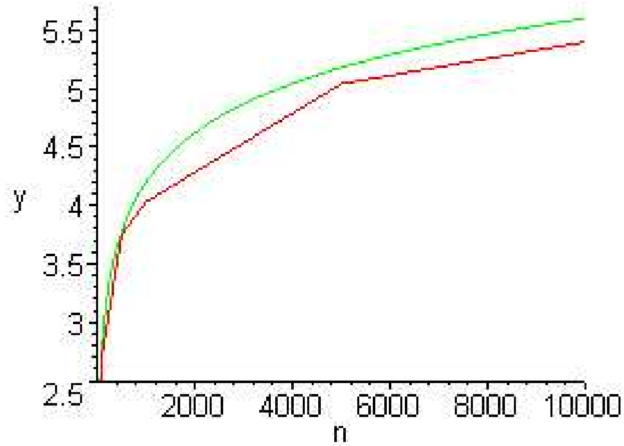
Ακολουθεί γραφική σύγκριση των αποτελεσμάτων τόσο μεταξύ τους όσο και με την εκτιμώμενη ή την πιθανολογούμενη αδικία που επιτυγχάνουν. Τα δεδομένα για τις γραφικές παραστάσεις προέκυψαν αποκλειστικά από ακολουθίες των 1.000.000 αιτήσεων. Οι τεθλασμένες γραμμές είναι το αποτέλεσμα των πειραματικών εκτιμήσεων. Επίσης οι συναρτήσεις με τις οποίες συγκρίνονται τα πειραματικά αποτελέσματα είναι κάποιες φορές πολλαπλασιασμένες με σταθερές.

Χωρίς να σχολιάσουμε περεταίρω τα αποτελέσματα αφήνουμε τον αναγνώστη να βγάλει τα δικά του συμπεράσματα.

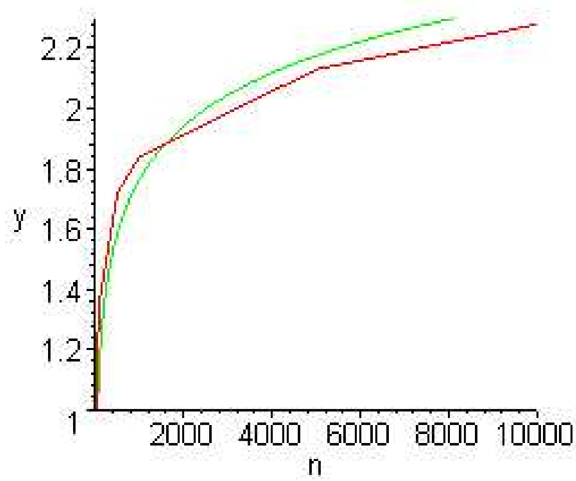


Σχήμα 31: Τοπικά άπληστος έναντι $\sqrt{n}$

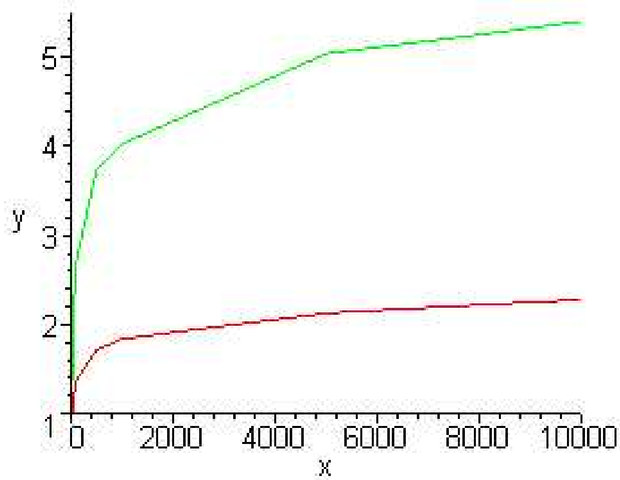
Ο τοπικά άπληστος αλγόριθμος είναι τόσο χειρότερος πειραματικά από τον τυχαία δίκαιο που δεν αξίζει να τους συγκρίνουμε γραφικά. Αντιθέτως μπορούμε να πάρουμε μια εικόνα για τη σχετική αύξηση της αδικίας μεταξύ των RR και BRR. Η μικρότερη συνάρτηση αντιστοιχεί στα αποτελέσματα του BRR.



Σχήμα 32: RR έναντι $\log n$



Σχήμα 33: BRR έναντι $\log n$



Σχήμα 34: RR έναντι BRR

9 Αδικία και θεωρία παιγνίων

Ένα από τα ανοιχτά προβλήματα που σχετίζεται με προβλήματα άμεσων αποφάσεων και πιο συγκεκριμένα με το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών (μια και είναι ένας καλός αντιπρόσωπος για τα προβλήματα που αναλύθηκαν), έχει να κάνει με τον ορισμό της αδικίας. Με την ανάλυση της αδικίας ή καλύτερα με τον ορισμό και την εξασφάλιση δικαιοσύνης σε προβλήματα όπου ένα πλήθος από άτομα-παίχτες αλληλεπιδρούν και έχουν ως στόχο τη βελτιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης έχει ασχοληθεί η θεωρία παιγνίων με κυριότερη εφαρμογή σε αρχές ψηφοφορίας και μηχανισμούς κατανομής χρέους. Η σχέση της θεωρίας παιγνίων με τα προβλήματα άμεσων αποφάσεων, αν και δεν είναι άμεση είναι ουσιώδης και έχει να κάνει με τον ορισμό και κατά συνέπεια την ανάλυση της αδικίας σε τέτοια προβλήματα.

9.1 Παίγνια συμμαχίας

Στα μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί για να ερμηνευθούν φαινόμενα με τη θεωρία παιγνίων καθοριστικό ρόλο παίζει η έννοια του παίχτη. Αν και οι πάντα οι παίχτες λειτουργούν με προσωπικό συμφέρον, αυτό μπορεί να εξαρτάται από την ιδιαιτερότητα της απόφασης τους, είτε να έχει πρωταρχική εξάρτιση από το σύνολο παιχτών που παίρνουν μια κοινή απόφαση. Τα τελευταία είναι αυτά που θα μας απασχολήσουν και ονομάζονται παίγνια συνεργασίας-συμμαχίας.

Ορισμός 10. *Ένα παίγνιο συνεργασίας* $< N, u >$ *με μεταβιβάσιμη συνάρτηση πληρωμής (coalitional game with transferable payoff) αποτελείται από*

(i) Ένα πεπερασμένο σύνολο παιχτών N.

(ii) Μια συνάρτηση $u : S \subseteq N \to \mathbb{R}$, *όπου συσχετίζει κάθε συμμαχία* S *με τον πραγματικό αριθμό* $u(S)$ *(την αξία του* S*).*

Για κάθε συμμαχία S, *με* $u(S)$ *μπορούμε να φανταζόμαστε το συνολικό κέρδος που πρέπει να μοιραστεί μεταξύ των παιχτών του* S.

Η κατάσταση που θέλουμε να μοντελοποιήσουμε είναι αυτή κατά την οποία οι αποφάσεις των παιχτών που δε συμμετέχουν στη συμμαχία S δεν επηρεάζουν την τιμή $u(S)$. Επιπλέον έχει κυριαρχήσει στη βιβλιογραφία η μελέτη εκείνων των παιγνίων συμμαχίας όπου η συμμαχία του συνόλου των παιχτών N κοστίζει τουλάχιστον όσο το άθροισμα των αξιών των επιμέρους τετριμμένων συμμαχιών. Με τη βοήθεια μιας τέτοιας συμμαχίας που καλούμε συνεκτική, θα ερμηνεύσουμε τον υπάρχων ορισμό από το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών.

Ορισμός 11. *Ένα παίγνιο συνεργασίας* $< N, u >$ *με μεταβιβάσιμη συνάρτηση πληρωμής θα λέγεται συνεκτικό αν*

$$u(N) \geqslant \sum_{k=1}^{K} u(S_k)$$

για κάθε διαμέριση $\{S_1, \ldots, S_K\}$ *του* N.

Μια από τις κυρίαρχες έννοιες στη θεωρία παιγνίων είναι αυτή της ισορροπίας Nash. Η ισορροπία Nash, χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες θα λέγαμε ότι είναι η κατάσταση ενός συστήματος κατά την οποία κανένας παίχτης δε μπορεί να βελτιώσει την κατάστασή του, που εξαρτάται από τις αποφάσεις όλων των παιχτών του παιγνίου, αλλάζοντας στρατηγική στο παιχνίδι, όπου με τον όρο στρατηγική ονομάζουμε την επιλογή ενός παίχτη από ένα προκαθορισμένο σύνολο αποφάσεων. Η παραπάνω έννοια έχει εφαρμογή σε παιχνίδια που δεν είναι συνεργασίας, ωστόσο το ανάλογό της στα παίγνια που μελετάμε είναι η έννοια του εφικτού προφίλ πληρωμής. Μια διαισθητική περιγραφή που ορίζει το εφικτό προφίλ πληρωμής είναι αυτή που θέλει να μην μπορεί να υπάρξει αλλαγή σε κάποια συμμαχία που θα μπορούσε να βελτιώσει την πληρωμή του συνόλου των παιχτών που συμμετέχουν σε αυτή.

Ορισμός 12. *Έστω $< N, u >$ ένα παίγνιο συνεργασίας με μεταβιβάσιμη συνάρτηση πληρωμής. Ας φανταζόμαστε για ευκολία ότι $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Για κάθε $(x_i) \in \mathbb{R}^n$ και κάθε συμμαχία S συμβολίζουμε $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$. Το διάνυσμα $(x_i)_{i \in S} \in \mathbb{R}^{|S|}$ θα λέγεται S-εφικτό διάνυσμα πληρωμής (S-feasible payoff vector) αν $x(S) = u(S)$. Ένα N-εφικτό διάνυσμα πληρωμής καλείται και εφικτό προφίλ πληρωμής (feasible payoff profile).*

9.2 Η τιμή Shapley

Η τιμή Shapley όπως και άλλες μέθοδοι καταμερισμού της αποτίμησης μιας συμμαχίας μπορεί να προκύψει από μια σειρά αντεπιχειρημάτων μεταξύ των παιχτών που προσπαθούν να βελτιώσουν τη θέση τους στο παίγνιο που συμμετέχουν. Για να ορίσουμε αυτά τα αντεπιχειρήματα ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα παίγνιο συνεργασίας $< N, u >$ με μεταβιβάσιμη συνάρτηση πληρωμής. Για κάθε συμμαχία S ορίζουμε το υποπαίγνιο $< S, u|_S >$ του $< N, u >$ όπου $u|_S$ είναι ο περιορισμός της συνάρτησης u στο $S \subseteq N$, δηλαδή $u_S : T \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}$ και επομένως $u_S(T) = u(T)$, $\forall T \subseteq S$. Η τιμή Shapley είναι ένα παράδειγμα συνάρτησης που αναθέτει ένα εφικτό προφίλ πληρωμής σε κάθε συμμαχία. Μια τέτοια συνάρτηση θα λέγεται αποτιμητική.

Για να δούμε λοιπόν πως προκύπτει διαισθητικά η τιμή Shapley ας φανταστούμε μια αποτιμητική συνάρτηση ψ. Όπως ήδη αναφέραμε μπορούμε να οδηγηθούμε στην έννοια της τιμής Shapley με τη βοήθεια μεθόδων-σκέψεων των παιχτών που έχουν σα στόχο να βελτιώσουν την κατάστασή τους και που μπορούν να νοούνται σαν αντεπιχειρήματα. Ένα επιχείρημα του παίχτη i έναντι του παίχτη j θα μπορούσε να έχει μια από τις δύο παρακάτω μορφές:

(i) Δώσε μου παραπάνω κέρδος αλλιώς θα αποχωρίσω από τη συμμαχία, κάτι που θα σου στοιχίσει να κερδίσεις μόνο $\psi_j(N - \{i\}, u|_{N-\{i\}})$ αντί για x_i με $x_j - \psi_j(N - \{i\}, u|_{N-\{i\}}) > 0$.

(ii) Δώσε μου παραπάνω κέρδος αλλιώς θα πείσω τους υπολοίπους να σε αποκλείσουν από τη συμμαχία, προκαλώντας σε εμένα να κερδίσω $\psi_i(N - \{j\}, u|_{N-\{j\}})$ αντί για το μικρότερο ποσό x_i έτσι που θα επωφεληθώ της θετικής ποσότητας $\psi_i(N - \{j\}, u|_{N-\{j\}}) - x_i$.

Ένα αντεπιχείρημα του παίχτη j στο επιχείρημα του παίχτη i μπορεί επίσης να έχει μια από τις παρακάτω αντίστοιχες δύο μορφές:

(i) Είναι αλήθεια πως δε με συμφέρει να αποχωρίσεις από τη συμμαχία, αλλά αν αποχωρίσω εγώ, τότε θα σου στοιχίσει τουλάχιστον όσο θα στοίχιζε σε εμένα η αποχώρησή σου δηλαδή $x_i - \psi_i(N - \{j\}, u|_{N-\{j\}}) \geqslant x_j - \psi_j(N - \{i\}, u|_{N-\{i\}})$.

(ii) Είναι αλήθεια πως αν με αποκλείσεις από τη συμμαχία θα σε ωφελήσει, αλλά αν αποκλείσω εγώ εσένα θα κερδίσω τουλάχιστον όσο θα κέρδιζες εσύ αν απέκλειες εμένα δηλαδή $\psi_j(N-\{i\}, u|_{N-\{i\}}) - x_j \geqslant \psi_i(N-\{j\}, u|_{N-\{j\}}) - x_i$.

Η τιμή Shapley είναι αυτή που εξασφαλίζει ότι για ένα επιχείρημα ενός παίχτη i έναντι κάποιου παίχτη j υπάρχει ένα αντεπιχείρημα του δεύτερου προς τον πρώτο. Λογικά έρχεται ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 13. *Μια αποτιμητική συνάρτηση ψ θα λέγεται ισορροπημένης συνεισφοράς (balanced contribution property) αν για κάθε παίγνιο συμμαχίας με μεταβιβάσιμη συνάρτηση πληρωμής $< N, u >$ και αν $i, j \in N$,*

$$\psi_i(N, u) - \psi_i(N - \{j\}, u|_{N-\{j\}}) = \psi_j - \psi_j(N - \{i\}, u|_{N-\{i\}}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η μοναδική αποτιμητική συνάρτηση ισορροπημένης συνεισφοράς είναι η τιμή Shapley που θα την ορίσουμε στη συνέχεια. Πριν όμως ας ορίσουμε τη συνεισφορά του παίχτη i να είναι η διαφορά την αποτίμησης μιας συμμαχίας που συμμετέχει από την αποτίμηση της ίδιας χωρίς τον παίχτη i δηλαδή

$$\Delta_i(S) = u(S \cup \{i\}) - u(S)$$

Ορισμός 14. *Η τιμή Shapley φ ορίζεται από τη σχέση*

$$\varphi_i(N, u) = \frac{1}{|N|!} \sum_{R \in \mathbb{K}} \Delta_i(S_i(R))$$

για κάθε παίχτη $i \in N$, όπου $\mathbb{K}$ είναι όλες οι $|N|!$ διαφορετικές μεταθέσεις του συνόλου N και $S_i(R)$ το σύνολο των παιχτών που προηγούνται στη μετάθεση R.

Μια ερμηνεία της τιμής Shapley είναι η εξής. Αν οι παίχτες διαταχθούν αυθαίρετα (και ισοπίθανα) τότε $\varphi_i(N, u)$ είναι η αναμενόμενη ,για όλες τις πιθανές μεταθέσεις, συνεισφορά του παίχτη i στο σύνολο των παιχτών που προηγούνται από αυτόν. Να παρατηρήσουμε επίσης ότι $\varphi_i(N, u) = u(S)$ και επομένως η τιμή Shapley είναι αποτιμητική συνάρτηση. Εκτός αυτού έχει και την ιδιότητα της ισορροπημένης συνεισφοράς.

Λήμμα 6. *Η τιμή Shapley είναι συνάρτηση ισορροπημένης συνεισφοράς.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\varphi_i(N, u) - \varphi_j(N, u) = \varphi_i(N - \{j\}, u|_{N-\{j\}}) - \varphi_j(N - \{i\}, u|_{N-\{i\}})$ για κάθε $i, j \in N$. Πράγματι αν για συντομογραφία συμβολίσουμε

$$a_S = \frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!}$$
$$b_S = \frac{(|S| + 1)!(|N| - |S| - 2)!}{|N|!}$$
$$c_S = \frac{|S|!(|N| - |S| - 2)!}{(|N| - 1)!} \ (\star)$$

αρχικά παρατηρούμε ότι $a_S + b_S = c_S$. Έχουμε τότε με βοήθεια συνδυαστικών επιχειρημάτων

$$\varphi_i(N, u) - \varphi_j(N, u) =$$
$$= \sum_{S \subseteq N - \{i,j\}} a_S[\Delta_i(S) - \Delta_j(S)] + \sum_{S \subseteq N - \{i,j\}} b_S[\Delta_i(S \cap \{j\}) - \Delta_j(S) \cap \{i\}]$$

Όμως

$\Delta_i(S) - \Delta_j(S) = u(S \cap \{i\}) - u(S) - u(S \cap \{j\}) + u(S) = u(S \cap \{i\}) - u(S \cap \{j\})$

και

$\Delta_i(S \cap \{j\}) - \Delta_j(S \cap \{i\}) = u(S \cap \{i, j\}) - u(S \cap \{j\} - u(S \cap \{i, j\}) + u(S \cap \{i\})) =$

$= u(S \cap \{i\}) - u(S \cap \{j\})$ δηλαδή $\Delta_i(S) - \Delta_j(S) = \Delta_i(S \cap \{j\}) - \Delta_j(S \cap \{i\})$. Επιστρέφοντας στην αρχική μας παράσταση παίρνουμε

$$\varphi_i(N, u) - \varphi_j(N, u) =$$
$$= \sum_{S \subseteq N - \{i,j\}} (a_S + b_S)(\Delta_i(S) - \Delta_j(S)) =$$
$$= \sum_{S \subseteq N - \{i,j\}} c_S(\Delta_i(S) - \Delta_j(S)) \ (\star\star)$$

Και πάλι λόγω συνδυαστικών επιχειρημάτων

$$\varphi_i(N - \{j\}, u|_{N-\{j\}}) - \varphi_j(N - \{i\}, u|_{N-\{i\}}) =$$
$$= \frac{|S|!(|N| - |S| - 2)!}{(|N| - 1)!} \sum_{S \subseteq N - \{i,j\}} (\Delta_i(S) - \Delta_j(S)) \ (\star\star\star)$$

Από τις σχέσεις $(\star), (\star\star), (\star\star\star)$ έπεται το ζητούμενο.

$\square$

Άμεσα τότε μπορούμε να δούμε ότι η τιμή Shapley είναι ισοδύναμη με κάθε άλλη αποτιμητική συνάρτηση ισορροπημένης συνεισφοράς.

Θεώρημα 12. *Η τιμή Shapley είναι η μόνη ισορροπημένης συνεισφοράς αποτιμητική συνάρτηση.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η τιμή Shapley είναι η μοναδική με τις παραπάνω ιδιότητες αρκεί κάθε δύο αποτιμητικές συναρτήσεις ισορροπημένης συνεισφοράς ψ, ψ' είναι ισοδύναμες. Αυτό θα το πετύχουμε με επαγωγή στο πλήθος των παιχτών ενός παίγνιου. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι οι δύο αποτιμητικές συναρτήσεις είναι ισοδύναμες για κάθε πλήθος παιχτών μικρότερο του n δηλαδή ότι $\psi_i(N - \{j\}, u|_{N-\{j\}}) = \psi'_i(N - \{j\}, u|_{N-\{j\}})$ για κάθε $i, j \in N$ και ας είναι $< N, U >$ ένα παίγνιο με N παίχτες. Αρχικά παρατηρούμε ότι για τις ψ, ψ' ισχύει ότι $\psi_i(N, u) - \psi'_i(N, u) = \psi_j(N, u) - \psi'_j(N, u)$ για κάθε $i, j \in N$ και αυτό διότι

$$\psi_i(N, u) - \psi_j(N, u) =$$

$$= \psi_i(N - \{j\}, u|_{N-\{j\}}) + \psi_j(N, u) - \psi_j(N - \{i\}, u|_{N-\{i\}}) - \psi_j(N, u) =$$

$$= \psi_i(N - \{j\}, u|_{N-\{j\}}) - \psi_j(N - \{i\}, u|_{N-\{i\}}) =$$

$$= \psi'_i(N - \{j\}, u|_{N-\{j\}}) - \psi'_j(N - \{i\}, u|_{N-\{i\}}) =$$

$$= \psi'_i(N - \{j\}, u|_{N-\{j\}}) + \psi'_j(N, u) - \psi'_j(N - \{i\}, u|_{N-\{i\}}) - \psi'_j(N, u) =$$

$$= \psi'_i(N, u) - \psi'_j(N, u) =$$

Σταθεροποιώντας τότε ένα παίχτη i παίρνουμε ότι

$$\psi_i(N, u) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \in N - \{i\}} (\psi'_i(N, u) + \psi_j(N, u) - \psi'_j(N, u)) =$$

$$= \frac{1}{n-1} (\sum_{j \in N - \{i\}} \psi'_i(N, u)) + \sum_{j \in N - \{i\}} (\psi_j(N, u)) - \sum_{j \in N - \{i\}} (\psi'_j(N, u)) =$$

$$\frac{1}{n-1} (\sum_{j \in N - \{i\}} \psi'_i(N, u)) + u(N) - u(N) = \psi'_i(N, u)$$

κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Αν και η ιδέα για τη διαφοροποίηση της αποτίμησης σε σχέση με τη συνεισφορά κάθε παίχτη δίνει μια πρώτη διαίσθηση για την ουσία της τιμής Shapley οι παραπάνω αναφορές είναι μάλλον φορμαλιστικές. Ακολουθεί μια πιο περιγραφική αλλά εξίσου αυστηρή αξιοματικοποίηση της τιμής Shapley.

9.3 Είναι η τιμή Shapley δίκαιη ;

Κρυμμένος κανείς πίσω από την αυστηρότητα του χαρτιού θα μπορούσε να πείσει ίσως πολλούς αναγνώστες για το ότι πράγματι η τιμή Shapley είναι δίκαιη και μάλιστα απορρέει από φαινομενικά λογικές παραδοχές. Η αλήθεια πλησιάζει να είναι αντίθετη. Οι ιδιότητες της παραπάνω αποτιμηστικής συνάρτησης φαίνονται εύλογες και έτσι από το γεγονός ότι αυτές όπως θα δούμε χαρακτηρίζουν πλήρως την τιμή Shapley, κινδυνεύει κανείς να τις θεωρήσει πανάκεια. Η πραγματικότητα θέλει να θεωρούμε αυτή τη συνάρτηση δίκαιη επειδή έχει ιδιότητες, που για να μη γίνουμε υπερβολικοί είναι ικανοποιητικά λογικές. Από την άλλη σίγουρα θα μπορούσε κανείς κάποιες από αυτές να τις βρει καταχρηστικές.

Για να θέσουμε τα αξιώματα από τα οποία απορρέει η τιμή Shapley να δώσουμε μερικούς ορισμούς. Ένας παίχτης i θα λέγεται στοιχειωδώς σημαντικός (dummy) αν η συνεισφορά του για κάθε συμμαχία S που δε συμμετέχει, είναι όσο η αξία του μονοσυνόλου που ορίζει ως συμμαχία ο ίδιος ο παίχτης δηλαδή $\Delta_i(S) = u(\{i\})$. Επίσης δύο παίχτες i, j θα λέγονται ισοδύναμοι (interchangeable) αν για κάθε συμμαχία S έχουν την ίδια συνεισφορά δηλαδή $\Delta_i(S) = \Delta_j(S)$. Ακολουθεί ορισμός ιδιοτήτων μιας αποτιμηστικής συνάρτησης ψ για δύο παίγνια $< N, u >$ $< N, w >$

Ορισμός 15.

> *(ΣΥΜ) Συμμετρία (symmetry) : Αν οι παίχτες i, j είναι ισοδύναμοι τότε $\psi_i(u) = \psi_j(u)$.*
>
> *(ΣΣΠ) Στοιχειωδώς σημαντικός παίχτης (dummy player) : Αν ο παίχτης i είναι στοιχειωδώς σημαντικός τότε $\psi_i(u) = u(\{i\})$.*
>
> *(ΠΡΟ) Προσθετικότητα: $\psi_i(u + w) = \psi_i(u) + \psi_i(w)$, όπου $< N, u + w >$ είναι το παίγνιο που ορίζεται όπως καταχρηστικά θα λέγαμε με πρόσθεση κατά σημείο δηλαδή $(u + w)(S) = u(S) + w(S)$, $\forall S$.*

Η πρώτη ιδιότητα απαιτεί δύο παίχτες που έχουν την ίδια συνεισφορά στο παιχνίδι να τους μοιράζεται ισοδυνάμως το κέρδος από τη συμμαχία που συμμετέχουν. Η ιδιότητα της επιμέρους ισοδύναμης αντιμετώπισης κάθε παίχτη που συνεισφέρει στο παιχνίδι με τον ίδιο τρόπο με κάποιον άλλο, ακούγεται ιδιαίτερα δημοκρατική και δίκαιη. Ωστόσο η ιδιότητα αυτή δεν επιτρέπει τη διαφοροποίηση των παιχτών σε σχέση με την ιδιαιτερότητά τους και που θα στοχεύει στην εξυπηρέτηση μεγαλύτερου συνόλου από παίχτες. Πράγματι η ιδιότητα μπορεί να προκαλέσει σε μηχανισμούς κατανομής χρέους άσχημη συμπεριφορά. Ας σκεφτούμε ότι ένα παιχνίδι μπορεί να σχετίζεται με την κατανομή μιας υπηρεσίας η λήψη της οποίας συνεπάγεται από κάθε παίχτη την επιμέρους πληρωμή της. Η απόρριψή της επιφέρει μηδενικό κόστος ενώ καλούμε κάθε παίχτη να δηλώσει το ποσό που θα μπορούσε να διαθέσει για να λάβει την υπηρεσία. Αν υπάρχει δε και μια αρχή η οποία θα αποφασίζει ποιος θα λάβει την υπηρεσία και με ποιο κόστος δημιουργείται ένα παίγνιο. Κάλλιστα στο παραπάνω μοντέλο θα μπορούσαν δύο παίχτες να έχουν την ίδια συνεισφορά π.χ. οι δύο παίχτες βρίσκονται στον ίδιο κόμβο ενός δικτύου και πρέπει να καλύψουν το κόστος μετάδοσης μιας πληροφορίας που επιθυμούν να λάβουν. Η τιμή Shapley κατανέμει και στους δύο το ίδιο χρέος ανεξάρτητα από το ποσό που επιθυμεί ο καθένας να διαθέσει. Για μια καλλίτερη διαισθητική εικόνα μπορούμε να φανταζόμαστε δύο παίχτες τον πλούσιο Gill Bates και το φτωχό John Smith. Και οι δύο επιθυμούν να χρησιμοποιήσουν ένα ταξί με κοινό προορισμό. Ο Gill Bates διαθέτει 99 δολάρια ενώ ο John Smith 1. Λόγω της ίδιας συνεισφοράς στη διαδρομή και αν αυτή κόστιζε 100 καθένας θα έπρεπε να πληρώσει 50 δολάρια. Η απόρριψη για συμμετοχή από τον John Smith αναγκάζει και τον Gill Bates σε άρνησή να πληρώσει 100 δολάρια. Η λύση του προβλήματος που ήθελε να μοιράσει δίκαια το κόστος της διαδρομής έχει αποτύχει.

Αντίστοιχα επιχειρήματα ισχύουν και για την ιδιότητα ΣΣΠ. Αρχικά μπορεί κανείς να επιχειρηματολογήσει για τη δικαιοσύνη που απορρέει από αυτή. Πράγματι η ιδιότητα απαιτεί $\Delta_i(S) = u(\{i\}) \Rightarrow \psi_i(u) = \Delta_i(S)$ δηλαδή σε κάθε παίχτη απαιτούμε να αναλογεί η συνεισφορά του. Και αυτό το επιχείρημα δίνει μια διάσταση ισότητας και δικαιοσύνης ωστόσο μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι $\Delta_i(\emptyset) = u(\{i\}) - u(\emptyset)$. Αν επιπλέον δεχτούμε ότι $u(\emptyset) = 0$, για κάθε στοιχειωδώς σημαντικό παίχτη και για κάθε συμμαχία S απαιτούμε $\Delta_i(S) = \Delta_i(\emptyset)$, δηλαδή η συνεισφορά του παίχτη i σε κάθε συμμαχία να είναι ίδια. Αυτό μαζί με το γεγονός ότι στον Gill Bates δεν είναι δίκαιο να αναθέτουμε ως κέρδος ή κόστος το μέγεθος της συνεισφοράς του χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη την ιδιαιτερότητα του παίχτη είναι τα σημαντικότερα επιχειρήματα που στέκονται κριτικά έναντι του ΣΣΠ.

Δεν είναι παράλογο ότι τα ίδια επιχειρήματα χρησιμοποιούνται για την υποστήριξη της δικαιοσύνης και της αδικία που πηγάζει από κάθε ιδιότητα. Η αλήθεια είναι ότι οι πρώτες δυο ιδιότητες είναι ικανοποιητικά λογικές παρά την κρίση που ασκήσαμε. Αντιθέτως η ιδιότητα ΠΡΟ είναι η πλέον αμφιλεγόμενη μια και είναι η μόνη που αναφέρεται σε δύο διαφορετικά παιχνίδια. Η συνθήκη $\psi_i(u+w) = \psi_i(u) + \psi_i(w)$ είναι ιδιαίτερα βολική από μαθηματική άποψη διότι παρέχει την ιδιότητα της επαγωγής. Η ιδιότητα προκαλεί την απομάκρυνση του μοντέλου από το ρεαλισμό μια και η αποτίμηση $(u+w)$ δε θα έπρεπε να αποκλείει τη διαφοροποίηση στη συμπεριφορά ενός παίχτη από αυτή που θα είχε για τις αποτιμήσεις u και w ξεχωριστά.

Ανεξάρτητα από το πόσο αποδεκτές μπορούν να γίνουν οι παραπάνω ιδιότητες στον αναγνώστη, χαρακτηρίζουν τη τιμή Shapley:

Λήμμα 7. *Η τιμή Shapley έχει τις ιδιότητες ΣΥΜ, ΣΣΠ και ΠΡΟ.*

Απόδειξη.

ΣΥΜ: Έστω $i, j \in N$ δύο ισοδύναμοι παίχτες και έστω R μια μετάθεση του συνόλου $N = \{1, 2, \dots, n\})$. Αρχικά παρατηρούμε ότι μια και $\Delta_i(S)\Delta_j(S)$ για κάθε συμμαχία S έχουμε $u(S \cup \{i\}) - u(S) = u(S \cup \{j\}) - u(S)\ (\star)$

Θεωρούμε μια μετάθεση R' που διαφέρει από τη μετάθεση R στο ότι οι παίχτες i, j έχουν αντιμετατεθεί. Αν ο παίχτης i προηγείται στη μετάθεση R από το παίχτη j τότε $\Delta_i(S_i(R)) = \Delta_j(S_j(R'))$. Αν πάλι ο παίχτης j προηγείται του παίχτη i έχουμε

$$\Delta_i(S_i(R)) - \Delta_j(S_j(R')) = u(S \cup \{i\}) - u(S \cup \{j\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow_{(\star)} \Delta_i(S_i(R)) = \Delta_j(S_j(R'))$$

όπου $S = S_i(R) - \{j\}$,κάτι που αποδεικνύει ότι $\varphi_i(N, u) = \varphi_j(N, u)$.
ΣΣΠ: Για ένα παίχτη στοιχειώδους συνεισφοράς έχουμε ότι $\Delta_i(S) = u(\{i\})$ και επομένως:

$$\varphi_i(N, u) = \frac{1}{|N|!} \sum_{R \in \mathbb{K}} \Delta_i(S_i(R)) =$$

$$= \frac{1}{|N|!} \sum_{R \in \mathbb{K}} u(\{i\})$$

Αφού οι δυνατές μεταθέσεις του συνόλου N είναι $|N|!$ παίρνουμε $\varphi_i(u) = u(\{i\})$

ΠΡΟ: Θυμίζουμε ότι με $S_i(R)$ συμβολίζουμε το σύνολο των παιχτών που προηγούνται του i στη μετάθεση R. Από τον ορισμό της τιμής Shapley έχουμε

$$\varphi_i(N, u+w) = \frac{1}{|N|!} \sum_{R \in \mathbb{K}} \Delta_i(S_i(R)) =$$

$$= \varphi_i(N, u+w) = \frac{1}{|N|!} \sum_{R \in \mathbb{K}} [(u+w)(S_i(R) \cap \{i\}) - (u+w)(S_i(R) \cap \{i\})] =$$

$$= \frac{1}{|N|!} \sum_{R \in \mathbb{K}} [u(S_i(R) \cap \{i\}) - u(S_i(R) \cap \{i\})] + \frac{1}{|N|!} \sum_{R \in \mathbb{K}} [w(S_i(R) \cap \{i\}) - w(S_i(R) \cap \{i\})] =$$

$$= \varphi_i(N, u) + \varphi_i(N, w)$$

□

Η τιμή Shapley δε χαρακτηρίζεται μόνο από τις τρεις ιδιότητες, είναι επίσης και ένας ισοδύναμος αντιπρόσωπος όλης της κλάσης των αποτιμητικών συναρτήσεων που χαρακτηρίζονται από τις ίδιες ιδιότητες.

Θεώρημα 13. *Η τιμή Shapley είναι η μόνη αποτιμητική συνάρτηση που καλύπτει τις ιδιότητες ΣΥΜ, ΣΣΠ και ΠΡΟ.*

Απόδειξη. Στο προηγούμενο λήμμα δείξαμε ότι η τιμή Shapley ικανοποιεί τις ιδιότητες ΣΥΜ, ΣΣΠ και ΠΡΟ. Θα δείξουμε τώρα ότι αν μια αποτιμητική συνάρτηση ψ ικανοποιεί τις ίδιες ιδιότητες τότε η τιμή της ορίζεται μονοσήμαντα και ανεξάρτητα από την ίδια την αποτιμητική συνάρτηση. Αρχικά για κάθε συμμαχία T ορίζουμε το παίγνιο u_T ως $u_T(S) = \{1$ αν $S \supseteq T$ και 0 αλλιώς.

Έστω τώρα u ένα παίγνιο με $2_{|N|}-1$ αριθμούς $(u(S))_{S \in \mathbb{L}}$. Αρχικά θα δείξουμε ότι το $(u_T)_{T \in \mathbb{L}}$ είναι μια αλγεβρική βάση για το χώρο των παιγνίων δηλαδή

Για κάθε παίγνιο $u, \exists!\,(a_T)_{T \in \mathbb{L}} : u = \sum_{T \in \mathbb{L}} a_T u_T$

Λόγω της διάστασης του $(u_T)_{T \in \mathbb{L}}$ αρκεί να δείξω ότι τα στοιχεία του είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω λοιπόν $\sum_{S \in \mathbb{L}} b_S u_S = 0$. Θα δείξουμε ότι $b_S = 0$ για κάθε S. Προς άτοπο ας υπάρχει συμμαχία T με $b_T \neq 0$. Επιλέγοντας τη συμμαχία T όπου $b_S = 0$ για κάθε $S \subset T$ οπότε έχουμε $\sum_{S \in \mathbb{L}} b_S u_S(T) = b_T \neq 0$, άτοπο. Από τις ιδιότητες ΣΥΜ και ΣΣΠ έχουμε για τη συνάρτηση ψ ότι $\psi_i(a u_T) = \frac{a}{|T|}$. Από την ιδιότητα ΠΡΟ έχουμε τότε για το τυχαίο παίγνιο u,

$$\psi_i(u) = \psi_i(\sum_{T \in \mathbb{L}} a_T u_T) = \sum_{T \in \mathbb{L}} \psi_i(a_T u_T) = \sum_{T \in \mathbb{L}} \frac{a_T}{|T|}$$

δηλαδή η τιμή της ψ στο u καθορίζεται μονοσήμαντα. □

9.4 Η τιμή Shapley σε προβλήματα άμεσων αποφάσεων

Ας θυμηθούμε πως έχουμε ορίσει την αδικία στα προβλήματα άμεσων αποφάσεων με τα οποία ασχοληθήκαμε και πιο συγκεκριμένα στο πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών μια και είναι ισοδύναμο με τα υπόλοιπα. Για το σύνολο παιχτών $\{1, 2, \ldots, n\}$ θεωρούμε την ακολουθία αιτήσεων T να είναι $D_1, D_2, \ldots, D_l$ με $D_i \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Θέλουμε να αναθέσουμε για κάθε αίτηση το κόστος που αναλογεί σε κάθε παίχτη. Ως προς αυτή την απόκλιση από αυτή την ανάθεση θυμίζουμε πως έχουμε ορίσει την αδικία του προβλήματος κοινοπραξίας οδηγών. Οι Fagin και Williams (FW) αναθέτουν σε κάθε παίχτη που μετέχει στην αίτηση i χρέος $1/|D_i|$ και μηδέν σε όσους δε συμμετέχουν. Έτσι αν $\vartheta_i(T)$ είναι το συνολικό κόστος που ανατήθεται στον παίχτη i για την ακολουθία αιτήσεων T έχουμε

$$\vartheta_i(T) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant l : i \in D_j} \frac{1}{|D_j|}$$

Και πάλι μπορούμε να ανοίξουμε μια συζήτηση για το ποιες συνθήκες πρέπει να καλύπτει ένας δίκαιος ορισμός κατανομής χρέους. Τα πράγματα δε διαφέρουν καθόλου από την τιμή Shapley. Έτσι και εδώ θα προτείνουμε τρεις λογικές συνθήκες που κανείς θα μπορούσε να δεχθεί ότι καλύπτουν την έννοια της αδικίας και άλλοι θα τις ακούγανε κριτικά. Η αληθινή χρονική πορεία για τις σκέψεις που αφορούν ένα καλό ορισμό κατανομής χρέους έχει ως εξής. Αρχικά συνειδητοποιούμε ότι η κατανομή χρέους FW ικανοποιεί μια ομάδα από ιδιότητες. Σε συζήτηση για το πόσο ρεαλιστικές είναι αυτές οι ιδιότητες δε δυσκολευόμαστε να τις δεχθούμε ως ικανοποιητικές. Μετά αποδεικνύουμε ότι αυτές οι ιδιότητες χαρακτηρίζουν πλήρως την κατανομή χρέους FW και αντιστρόφως δηλαδή η κατανομή FW είναι η μόνη με αυτές τις ιδιότητες. Εκ των υστέρων και χάριν εντυπωσιασμού παρουσιάζουμε τις ιδιότητες , έστω και κάποιες αμφιλεγόμενες, ως απαραίτητες ή έστω συμπαθητικές για να χαρακτηρίζουν μια κατανομή χρέους και αποδεικνύουμε ότι η κατανομή FW είναι η μοναδική που τις ικανοποιεί. Οι επόμενες ιδιότητες μπορούν να χαρακτηριστούν ως λογικές για μια κατανομή χρέους θ. Σε αυτές να προσθέσουμε ότι όποια ανάθεση χρέους συμβεί είναι τουλάχιστον 0.

(i) Πλήρης κάλυψη (full coverage) Το άθροισμα το χρεών όλως των παιχτών για όλες τις μέρες ισούται με το πλήθος των ημερών δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i(T) = l$$

(ii) Συμμετρικότητα (symmetry) Αν δυο παίχτες συμμετέχουν ακριβώς στις ίδιες αιτήσεις, τους ανατήθεται το ίδιο χρέος δηλαδή

$$\forall i, j, k (i \in D_k \leftrightarrow j \in D_k) \leftrightarrow (\theta_i(\{D_k\}) = \theta_j(\{D_k\}))$$

(iii) Μηδενική ανάθεση (dummy) Ένας παίχτης που δε συμμετέχει σε καμία αίτηση πληρώνει μηδενικό κόστος δηλαδή

$$\forall i, k (\theta_i(\{D_k\}) > 0) \leftrightarrow (i \in D_k)$$

(iv) Αλληλουχία (concatenation) Δεδομένων δύο ακολουθιών αιτήσεων T_1, T_2 ας είναι T η ακολουθία αιτήσεων που προκύπτει ως σειριακή ένωση των πρώτων δύο. Η ιδιότητα της αλληλουχίας θέλει για κάθε παίχτη i

$$\theta_i(T) = \theta_i(T_1) + \theta_i(T_2)$$

Η πρώτη συνθήκη είναι λογική μια και έχουμε δώσει την ερμηνεία για την ανάθεση χρέους για το πρόβλημα της κοινοπραξίας οδηγών που έχει να κάνει με το διαμερισμό μεταξύ των παιχτών που συμμετέχουν σε μια αίτηση της αξίας της διαδρομής που είναι μια μονάδα. Κάθε μέρα θα θέλαμε να μοιράζουμε τη μονάδα της αξίας στο πλήθος των συμμετεχόντων κάτι που αθροίζει το πλήθος των χρεών στο πλήθος των ημερών. Η συνθήκη της συμμετρικότητας είναι επίσης λογική για παιχνίδια που οι παίχτες είναι ισοδύναμοι και που δε μας ενδιαφέρει να ενισχύσουμε τη συμμετοχή σε κάθε αίτηση. Αντιθέτως αν εκτός από τη συμμετοχική διάθεση θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε τη συμμετοχική αποτελεσματικότητα, θα πρέπει να διαφοροποιούμε την ανάθεση χρέους των παίχτων σύμφωνα με επιπλέον κριτήρια . Η τρίτη συνθήκη ίσως είναι πράγματι η πιο λογική μια και στόχος μας είναι να ενισχύσουμε τη διάθεση για συμμετοχή στο παιχνίδι. Τέλος η ιδιότητα της αλληλουχίας είναι η αυτή που μπορεί να δεχθεί περισσότερη κριτική ιδιαίτερα από όσους θα ήθελαν η συμπεριφορά του παρελθόντος να επηρεάζει τη συμπεριφορά του μέλλοντος. Δε θα επιμείνουμε άλλο μια και αναφερθήκαμε εκτενώς στην αντίστοιχη ιδιότητα της τιμής Shapley.

Στη συνέχεια θα δείξουμε αντίστοιχα με την τιμή Shapley ότι οι παραπάνω τέσσερεις ιδιότητες χαρακτηρίζουν την κατανομή FW και αντιστρόφως [11].

Λήμμα 8. *Η κατανομή FW έχει τις ιδιότητες της συμμετρικότητα, της μηδενική ανάθεση της αλληλουχία και της πλήρους κάλυψης.*

Απόδειξη. Άμεσα από τον ορισμό την κατανομής FW. □

Θεώρημα 14. *Η κατανομή FW είναι η μόνη που έχει τις ιδιότητες της συμμετρικότητα, της μηδενική ανάθεση της αλληλουχία και της πλήρους κάλυψης.*

Απόδειξη. Πολύ εύκολα και με επαγωγή στο μέγεθος των αιτήσεων μπορούμε να δείξουμε ότι μια κατανομή χρέους με τις τέσσερεις παραπάνω ιδιότητες είναι ισοδύναμη με την κατανομή FW ϑ. Έστω λοιπόν θ μια κατανομή που έχει τις ιδιότητες της συμμετρικότητα, της μηδενική ανάθεση της αλληλουχία και της πλήρους κάλυψης. Λόγω της πρώτης και της τρίτης από αυτές τις ιδιότητες έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i(\{D_1\}) = 1 \Rightarrow \sum_{i \in D_1} \theta_i(\{D_1\}) = 1$$

Λόγω δε συμμετρίας παίρνουμε για κάθε παίχτη i, $\theta_i(\{D_1\}) = \frac{1}{|D_1|} = \vartheta_i(\{D_1\})$.

Για την επαγωγική υπόθεση θεωρούμε ότι $\theta_i(T) = \vartheta_i(T)$ για κάθε παίχτη i και κάθε T με $|T| = j$ και $1 \leqslant j < l$. Μένει να δείξουμε η σχέση ισχύει και για ακολουθίες μεγέθους l. Πράγματι αν T είναι μια τέτοια

$$\theta_i(\{D_1, \ldots, D_l\}) = \theta_i(\{D_1, \ldots, D_{l-1}\}) + \theta_i(\{D_l\}) =$$

$$= \sum_{1 \leqslant j \leqslant l-1 : i \in D_j} \frac{1}{|D_j|} + \vartheta_i(\{D_l\}) = \vartheta_i(\{D_1, \ldots, D_l - 1\}) + \vartheta_i(\{D_l\}) = \vartheta_i(\{D_1, \ldots, D_l\})$$

□

Οι ομοιότητες του ορισμού για την κατανομή χρέους σε ένα πρόβλημα άμεσης απόφασης δεν είναι τυχαίες με αυτόν του ορισμού μια αποτιμηστικής συνάρτησης στη θεωρία παιγνίων. Για την ακρίβεια μπορούμε να ορίσουμε ένα παίγνιο συνεργασίας με μεταβιβάσιμη συνάρτηση πληρωμής που σχετίζεται με το πρόβλημα κοινοπραξίας οδηγών και τέτοιο που εφαρμοσμένη η τιμή Shapley δίνει την κατανομή FW [11].

Ορισμός 16 (Παίγνιο συμμετοχικής κοινοπραξίας). *Έστω $N = \{1, \ldots, n\}$ ένα σύνολο από παίχτες. Για μια ακολουθία αιτήσεων $T = \{D_1, \ldots, D_l\}$ και κάθε συμμαχία S subset$N$ ορίζουμε*

$$u_T(S) = |\{1 \leqslant j \leqslant l - 1 : D_j \cap S \neq \emptyset\}|$$

δηλαδή $u_T(S)$ είναι το πλήθος των ημερών όπου μέλη από τη συμμαχία S εμφανίζονται στην ακολουθία αιτήσεων T.

Θεώρημα 15. *Η τιμή Shapley για κάθε παίχτη i για το παιχνίδι συμμετοχικής κοινοπραξίας είναι ακριβώς η κατανομή FW.*

Απόδειξη. Επαναφέροντας στη μνήμη μας το φορμαλισμό από τη θεωρία παιγνίων θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\psi_i(u_T, N) = \sum_{j : i \in D_j} \frac{1}{D_j}$$

Η απόδειξη προκύπτει από την παρατήρηση ότι η τιμή Shapley για ένα παίχτη i είναι η αναμενόμενη συνεισφορά του i, δηλαδή

$$\psi_i(u_T, N) = E[\Delta_i(S_i(R))]$$

για μια μετάθεση R του συνόλου N. Για δεδομένη μετάθεση R, $\Delta_i(S_i(R))$ είναι το σύνολο των ημερών D_j τέτοιες που $i \in D_j$ και ο παίχτης i είναι ο πρώτος της μετάθεσης R. Για τυχαία επιλογή του R η πιθανότητα ο παίχτης i να είναι πρώτος στην αίτηση D_j είναι $1/|D_j|$. Επομένως

$$E[\Delta_i(S_i(R))] = \sum_{j : i \in D_j} \frac{1}{D_j}$$

□

10 Θέματα αδικίας στη δρομολόγηση

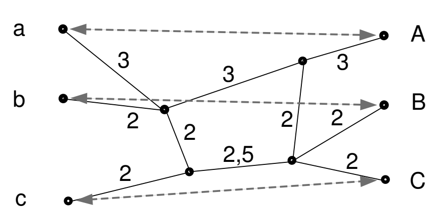
Η έννοια της αδικίας και γενικότερα η σύλληψη δίκαιων λύσεων ή η προσέγγισή τους εμφανίζεται σε αρκετά θέματα της θεωρητικής πληροφορικής. Μερικά τέτοια παραδείγματα προέρχονται από την κατασκευή μηχανισμών (mechanism design), και αφορούν προβλήματα όπως δημοπρασίες, κατανομές χρέους κ.ά. Οι κατανομές χρέους αγγίζουν τα προβλήματα άμεσων αποφάσεων που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 6 και τα οποία πρωτοτυπούν ως προς το ότι πραγματεύονται την προσέγγιση δίκαιων λύσεων σύμφωνα με κάποιο μέτρο. Αντιθέτως σε προβλήματα σχεδιασμού μηχανισμών, η έννοια της αδικίας ορίζεται απόλυτα, και οι λύσεις που προτείνονται απλά μπορεί να χαλαρώνουν σε κάποιο βαθμό τις απαιτήσεις της. Σε αυτήν την εργασία προσανατολιστήκαμε σε προβλήματα που η αδικία ορίζεται με κάποιο μέτρο ως προς το οποίο προσπαθούμε να την αποφύγουμε.

Πολύ δουλειά έχει γίνει επίσης και σε μια άλλη κατηγορία προβλημάτων που έχουν να κάνουν με δρομολόγηση σε δίκτυα και που η σχέση τους με προβλήματα όπως αυτό της κοινοπραξίας οδηγών είναι μηδενική. Και σε αυτά ορίζεται μια έννοια δικαιοσύνης την οποία έχουν πραγματευθεί και ως πρόβλημα προσεγγισημότητας αλλά και ως άμεσης απόφασης([7] και [8] αντίστοιχα). Παρακάτω παραθέτουμε ιδιαίτερα περιληπτικά μερικά αποτελέσματα για αυτά τα θέματα με μοναδικό σκοπό η παρουσίαση μας για την αδικία στη θεωρητική πληροφορική να μην είναι απόλυτα προσανατολισμένη.

10.1 Προσέγγιση βέλτιστης δρομολόγησης

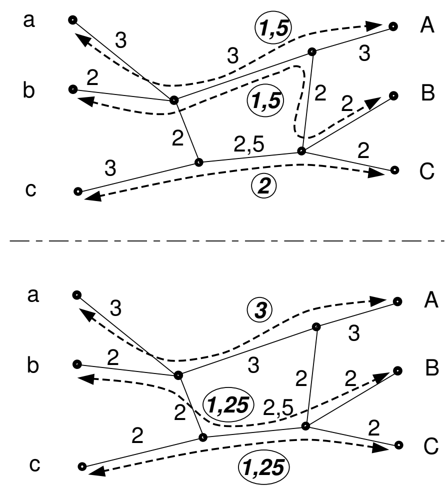
Το πρόβλημα της δρομολόγησης έχει να κάνει με την ανάθεση εύρους ζώνης (bandwidth) σε συνδέσεις σε ένα δίκτυο. Η ανάθεση αυτή θα πρέπει να γίνεται με ένα κριτήριο, μια έννοια δικαιοσύνης που μπορούμε να ορίσουμε. Για το ποιο είναι διαισθητικά το πρόβλημα της δρομολόγησης μπορούμε να δούμε το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4. *Τρεις πολίτες, οι a, b, c θέλουν να επικοινωνήσουν μέσω των υπολογιστών τους με τους ισάριθμους φίλους τους A, B, C, ο a με τον A κ.ο.κ. Οι υπολογιστές τους είναι συνδεδεμένοι με ένα δίκτυο και συμβολίζονται ως κόμβοι στην παρακάτω αναπαράστασή του ως γράφος (σχήμα 35). Οι κόμβοι συνδέονται με ακμές, κάθε μια από τις οποίες χαρακτηρίζεται από τη ροή πληροφοριών που μπορεί να καλύψει.*



Σχήμα 35: Αιτήσεις επικοινωνίας στο πρόβλημα δρομολόγησης

Το πρόβλημα είναι να ορίσουμε τρία μονοπάτια που θα ενώνουν τα ζευγάρια των τριών φίλων, κάθε ένα από τα οποία θα χαρακτηρίζεται επίσης από τη ροή *πληροφοριών που προσφέρει στους κόμβους που συνδέει, ή αλλιώς από το εύρος ζώνης. Επίσης είναι προφανές ότι το άθροισμα του εύρους ζώνης κάθε σύνδεσης που χρησιμοποιεί μια ακμή δε μπορεί να υπερβαίνει τη ροή που μπορεί να καλύψει. Δύο διαφορετικές λύσεις του προβλήματος φαίνονται στο σχήμα 36.*



Σχήμα 36: Αριθμητικές λύσεις για το πρόβλημα δρομολόγησης

Στην πρώτη περίπτωση παρέχεται για τα ζευγάρια a, A, b, B *και* c, C *εύρος ζώνης* $1.5, 1.5$ *και* 2 *αντίστοιχα ενώ στη δεύτερη* $3, 1.25$ *και* 1.25 *αντίστοιχα. Είναι σαφές ότι στη δεύτερη περίπτωση η ανάθεση για το εύρος ζώνης κάθε επικοινωνίας φαίνεται πιο αποδοτική (το συνολικό εύρος ζώνης είναι 5.5 αντί για 5 που είναι στην πρώτη λύση). Αντιθέτως όμως στη δεύτερη λύση και σε δύο επικοινωνίες ανατίθεται εύρος ζώνης χαμηλότερο από ότι στην πρώτη λύση. Ποια επομένως είναι πιο δίκαιη ή και πως θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την πιο δίκαιη;*

Το πρόβλημα όπως περιγράφτηκε στο παράδειγμα είναι ιδιαίτερα σύνθετο. Μάλιστα ο αναγνώστης μπορεί να έχει ήδη αναρωτηθεί δεδομένης κάθε μιας από τις δύο δρομολογήσεις γιατί έχει επιλεχθεί η συγκεκριμένη ανάθεση σε εύρος ζώνης. Αυτός ο προσανατολισμός στη σκέψη είναι πολύ καλός μια και δημιουργεί το ερώτημα, για δεδομένη δρομολόγηση, ποια είναι η καλύτερη ανάθεση. Επομένως το πρόβλημα της εύρεσης δρομολόγησης και έπειτα δίκαιης ανάθεσης εύρους ζώνης είναι προφανώς τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο και το πρώτο. Για την ακρίβεια και όπως θα δούμε είναι NP-πλήρες.

Στην ανάλυση αλγορίθμων για κατανομή εύρους ζώνης έχει κυριαρχήσει η έννοια της max-min δικαιοσύνης. Διαισθητικά, μια ανάθεση λέγεται max-min δίκαιη αν δε μπορεί να αυξηθεί το εύρος ζώνης μιας σύνδεσης χωρίς να μειωθεί η ανάθεση εύρους ζώνης σε σύνδεση με μικρότερό ή ίσο εύρος ζώνης. Ένα σύστημα που έχει αυτή την ιδιότητα χαρακτηρίζεται από την έννοια της σταθερότητας και μάλιστα η κατάστασή του είναι συγγενής με αυτή της σταθεράς Nash (Nash equilibrium).

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε περιληπτικά το πρόβλημα δρομολόγησης και ανάθεσης εύρους ζώνης συνδέσεων με κοινό αρχικό κόμβο και πολλαπλούς τελικούς. Ας θέσουμε όμως το πρόβλημα τυπικά.

Έστω $G = (V, E)$ ένας γράφος με βάρη $c_e \geqslant 0$ για κάθε ακμή $e \in E$ που αντιστοιχεί στη ροή που μπορεί να εξυπηρετήσει μια ακμή. Θεωρούμε ένα κόμβο $s \in V$ ως πηγή και ένα σύνολο τερματικών κόμβων $t_1, \ldots, t_k \in V$. Δρομολόγηση θα λέγεται ένα σύνολο από μονοπάτια $\{P_1, \ldots, P_k\}$, όπου το μονοπάτι P_i ενώνει του κόμβους p_i, s, και ένα διάνυσμα $r = (r_1, \ldots, r_k)$, το διάνυσμα κατανομής. Θα θεωρούμε ότι στο μονοπάτι P_i έχει ανατεθεί εύρος ζώνης r_i, με τον περιορισμό

$$\sum_{i:e \in P_i} r_i \leqslant c_e, \, \forall e \in E$$

το οποίο απλά σημαίνει ότι οι αναθέσεις δεν πρέπει να παραβιάζουν την επιτρεπτή ροή κάθε ακμής.

Κανείς θα μπορούσε να δει την max-min δικαιοσύνη ως εξής. Αρχικά θα πρέπει η μικρότερη ανάθεση ενός στιγμιοτύπου να είναι όσο το δυνατό μεγαλύτερη. Η δεύτερη μικρότερη ανάθεση θα πρέπει στη συνέχεια να είναι επίσης όσο το δυνατό μεγαλύτερη αγνοώντας την πρώτη κ.ο.κ. Πιο τυπικά έστω $z = (z_1, \ldots, z_k)$ και $z' = (z'_1, \ldots, z'_k)$ δύο διανύσματα κάθε ένα με στοιχεία σε μη φθίνουσα σειρά. Θα λέμε ότι το διάνυσμα z κυριαρχεί λεξικογραφικά του z' αν $z = z'$ ή υπάρχει δείκτης j τέτοιος που $z_j > z'_j$ για όλους τους δείκτες μεγαλύτερους ή ίσους του j και $z_j = z'_j$ για τους υπόλοιπους. Δεδομένων τώρα δύο αναθέσεων εύρους ζώνης r, r', θα λέμε ότι η ανάθεση r είναι όσο δίκαιη και η r', και θα συμβολίζουμε με $r \preceq r'$ αν για τα αντίστοιχα διατεταγμένα διανύσματα ισχύει ότι το πρώτο κυριαρχεί λεξικογραφικά του δεύτερου. Επίσης, δύο αναθέσεις θα λέγονται ισοδύναμες αν $r \preceq r'$ και $r' \preceq r$. Η σχέση αυτή ορίζει μια ολική διάταξη στην κλάση ισοδυναμίας των διανυσμάτων κατανομής και έτσι τα διανύσματα που βρίσκονται στη μέγιστη κλάση που ορίζει η σχέση $\preceq$ θα λέγονται αδέκαστες αναθέσεις.

Σύμφωνα με την πρώτη ερμηνεία που δώσαμε για την max-min δικαιοσύνη, πρόκειται για την κατάσταση κατά την οποία δε μπορούμε να αυξήσουμε κάποιο r_i χωρίς να μειώσουμε κάποιο r_j με $r_j \leqslant r_i$. Επίσης το πρόβλημα αρχικά τέθηκε ως πρόβλημα ανάθεσης εύρους ζώνης δεδομένων μονοπατιών. Για αυτό το πρόβλημα υπάρχουν διάφοροι αποδοτικοί αλγόριθμοι κάθε ένας από τους οποίους παράγει αναθέσεις αδέκαστες.

Έχουμε ορίσει ένα μέτρο δικαιοσύνης ωστόσο ακόμα είναι δύσκολο κανείς να μιλήσει για ένα μέτρο προσέγγισης βέλτιστης λύσης. Όπως ήδη αναφέραμε και θα το διατυπώσουμε στο μέλλον και αυστηρότερα, το γενικό πρόβλημα της δρομολόγησης είναι NP-πλήρες για την επίτευξη αδέκαστης κατανομής. Αναζητώντας προσέγγιση δίκαιης λύσης δυσκολευόμαστε να συγκρίνουμε μια λύση με μια αδέκαστη διότι δε μπορούμε να ορίσουμε λόγο μεταξύ των διανυσμάτων κατανομής που ορίζουν την αδικία. Ωστόσο μπορούμε να μιλάμε για κατά σημείο λόγο δύο διανυσμάτων. Έτσι λοιπόν θα λέμε ότι το διάνυσμα r είναι κατά σημείο c-προσεγγιστικό του r' αν για τα αντίστοιχα διατεταγμένα στοιχεία τους ισχύει ότι έχουν λόγο κάτω φραγμένο από $1/c$.

Για να φτάσει κανείς σε προσέγγιση βέλτιστη λύσης πρέπει αρχικά να χαλαρώσει τις απαιτήσεις του προβλήματος. Αυτό μπορεί να γίνει θυσιάζοντας μέρος της αποδοτικότητας αλλά και της σταθερότητας όπως αυτή συσχετίστηκε με τη σταθερά

Nash. Όσον αφορά τη προσέγγιση βέλτιστης σταθερότητας μπορούμε να έχουμε τα εξής: για σταθερά c, θα λέμε ότι το διάνυσμα κατανομής r είναι c-προσεγγιστικά σταθερό, αν δεν υπάρχει τρόπος να αυξήσουμε μια συντεταγμένη του r_i χωρίς να μειώσουμε μια άλλη r_j ώστε $r_j \leqslant cr_i$. Επομένως ένα 1-προσεγγιστικά σταθερό διάνυσμα κατανομής είναι εξορισμού αδέκαστο.

Για το γενικό πρόβλημα δρομολόγησης υπάρχει αλγόριθμος που εξασφαλίζει 2-προσεγγιστικά σταθερό διάνυσμα για κάθε στιγμιότυπο του με ροή ακμών 1 και το οποίο είναι 2-προσεγγιστικό κατά σημείο έναντι τις βέλτιστης κλασματικής κατανομής ροών. Ο αλγόριθμος βασίζεται στη λύση ενός ειδικού προβλήματος που περιλαμβάνει στιγμιότυπα στα οποία δεν υπάρχει ακμή που να την μοιράζονται πάνω από δύο μονοπάτια. Τέτοια μονοπάτια θα λέμε ότι έχουν συμφόρηση 2.

Θεώρημα 16. *Θεωρούμε ένα στιγμιότυπο του γενικού προβλήματος δρομολόγησης που όλα τα μονοπάτια έχουν συμφόρηση 2. Τότε υπάρχει σύνολο μονοπατιών με επίσης συμφόρηση 2, στα οποία αντιστοιχεί κατανομή εύρους ζώνης αδέκαστη. Το σύνολο των μονοπατιών είναι μέγιστο ως προς την ιδιότητα των ξένων μονοπατιών και επίσης μπορεί να βρεθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Βασισμένοι σε αυτό το αποτέλεσμα μπορούμε να κατασκευάσουμε βέλτιστο αλγόριθμο και πάλι για το γενικό πρόβλημα δρομολόγησης με τον περιορισμό ότι το εύρος ζώνης κάθε μονοπατιού θα είναι ένα ποσοστό εκφρασμένο σα δύναμη του 2 από τη μονάδα (2^{-c} για κάποιο c). Το ενδιαφέρον είναι ότι αυτός ο αλγόριθμος εφαρμοσμένος σε ένα γενικό στιγμιότυπο με μοναδιαίες ροές ακμών, παράγει κατανομή 2-προσεγγιστικά σταθερή. Τέλος να αναφέρουμε φορμαλιστικά και την πρόταση που αποδεικνύει το μέγεθος δυσκολίας του προβλήματος. Ήδη έχουμε αναφέρει πως το πρόβλημα είναι NP-πλήρες χωρίς να είμαστε όμως αυστηροί μια και όπως το ορίσαμε δεν είναι πρόβλημα απόφασης. Μπορούμε να το μετατρέψουμε σε τέτοιο ως εξής: *Έστω το γενικευμένο πρόβλημα δρομολόγησης, μίας πηγής και με μοναδιαίες χωρητικότητες ροών ακμών ενός κατευθυνόμενου γράφου. Δεδομένης κατανομής εύρους ζώνης r', υπάρχει δρομολόγηση της οποίας η κατανομή που χαρακτηρίζεται από σταθερότητα r, που να ικανοποιεί τη σχέση $r' \preceq r$; (Είναι δηλαδή η κατανομή r όσο δίκαιη είναι η r';)* Το πρόβλημα αυτό αποδεικνύεται NP-πλήρες με αναγωγή από το πρόβλημα ισορροπίας φόρτου εργασίας (load balancing).

10.2 Δρομολόγηση ως πρόβλημα άμεσης απόφασης

Το πρόβλημα της δρομολόγησης έχει μελετηθεί και με τη σκοπιά των προβλημάτων άμεσης απόφασης. Πιο συγκεκριμένα έχει μελετηθεί ένα πιο γενικό πρόβλημα από πού παρουσιάστηκε στην παράγραφο 10.1. Στη νέα εκδοχή του προβλήματος δεν περιοριζόμαστε σε μοναδικό αρχικό κόμβο και πολλαπλούς τελικούς αποδέκτες συνδέσεων. Οι συνδέσεις που εξυπηρετούμε έχουν πλέον πολλαπλούς αρχικούς και τελικούς κόμβους ωστόσο πρέπει να κατευθυνθούμε σε αλλαγή της έννοιας της αδικίας.

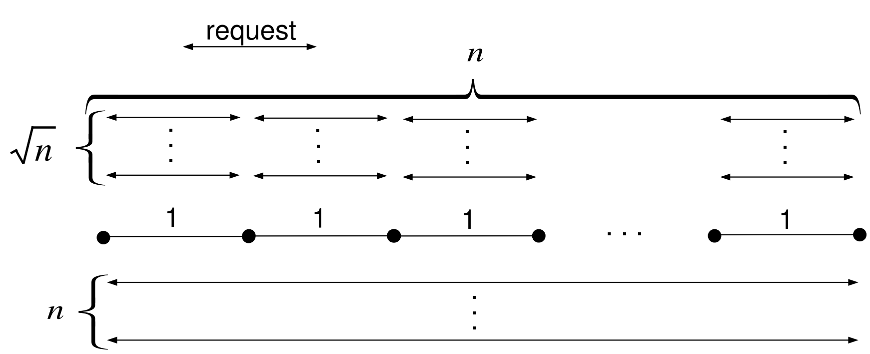
Στα δικτυακά μοντέλα που μελετάμε, έχουμε σα στόχο αφενός να αναθέσουμε εύρος ζώνης σε κάθε αίτησης επικοινωνίας με τρόπο ώστε η ανάθεση να ικανοποιεί κάποιο κριτήριο δικαιοσύνης, και αφετέρου να μεγιστοποιήσουμε το συνολικό εύρος ζώνης που έχει ανατεθεί (βελτιστοποίηση αποδοτικότητας - throughput).Η έννοια της max-min δικαιοσύνης που μελετήσαμε επιφανειακά στην προηγούμενη παράγραφο, θέλει τις "φτωχότερες" συνδέσεις να μην μπορούν να βελτιωθούν χωρίς να μειωθεί το εύρος ζώνης στις πιο "πλούσιες". Αυτή η έννοια προϋποθέτει δεδομένη δρομολόγηση βάσει της οποίας γίνεται ανάθεση εύρους ζώνης για κάθε επικοινωνία. Μελετώντας το πρόβλημα με τη θεωρία προσεγγίσεως, αρχικά υπολογίζεται μια δρομολόγηση και έπειτα μια ανάθεση που σέβεται τον ορισμό της min-max δικαιοσύνης. Λόγω αυτού, είναι αδύνατη η προσέγγιση βέλτιστης αποδοτικότητας. Έτσι φτάνουμε την έννοια της χαλάρωση της max-min δικαιοσύνης.

Στην περίπτωση που επιτρέπουμε, αιτήσεις επικοινωνίας να φτάνουν άμεσα, τις οποίες και πρέπει να εξυπηρετήσουμε, χρειαζόμαστε ένα πιο γενικό ορισμό της έννοιας της δικαιοσύνης που θα αφορά το γενικό πρόβλημα της δρομολόγησης και που θα ταυτίζεται με τον υπάρχον ορισμό, αν οι δρομολογήσεις είναι προκαθορισμένες. Αυτό γίνεται εφικτό με το διάνυσμα ανάθεσης εύρους ζώνης των αιτήσεων, με συντεταγμένες από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη ανάθεση, γνωστό και ως διάνυσμα εύρους ζώνης (bandwidth vector). Μια ανάθεση που θα υπολογίζει ένα διάνυσμα εύρους ζώνης, λεξικογραφικά μέγιστο, θα λέγεται ολικά δίκαιη (global fair). Θέτουμε λοιπόν τυπικά το πρόβλημα άμεσης απόφασης.

Για το γράφημα $G = (V, E)$, θεωρούμε ως αίτηση ένα ζευγάρι κόμβων $v, u \in V$. Για αιτήσεις που πρέπει να τις εξυπηρετήσουμε άμεσα (online), αναζητούμε ανάθεση δρομολόγησης και εύρους ζώνης ώστε η βέλτιστη αποδοτικότητα να είναι το πολύ πολυλογαριθμικά καλύτερη από αυτή που υπολογίζεται. Επίσης θέλουμε οι συντεταγμένες του διανύσματος εύρου ζώνης να είναι το πολύ λογαριθμικά χειρότερες από τις αντίστοιχες του διανύσματος της ολικά δίκαιης ανάθεσης.

Η ανάγκη της τροποποίησης του ορισμού της αδικίας μπορεί να εξηγηθεί τώρα με ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα (συναρτήσει και του επιθυμητού λόγου ανταγωνισμού).

Παράδειγμα 5. *Σε ένα σειριακό δίκτυο από $n+1$ κόμβους έχουμε να εξυπηρετήσουμε n αιτήσεις μεταξύ των ακριανών κόμβων που συνδέονται με ακμές χωρητικότητας 1. Μεταξύ κάθε δύο γειτονικών κόμβων υπάρχουν επίσης $\sqrt(n)$ αιτήσεις (σχήμα 37).*



Σχήμα 37: Στιγμιότυπο μεγάλης αδικίας στη min-max δικαιοσύνη

Προφανώς για το παραπάνω δίκτυο, η μέγιστη αποδοτικότητα είναι n. Μια ανάθεση που σέβεται τη min-max δικαιοσύνη αναθέτει σε κάθε επικοινωνία-

αίτηση εύρος ζώνης $\frac{1}{n+\sqrt{n}}$. *Η αποδοτικότητα τότε είναι*

$$n\sqrt{n}\frac{1}{n+\sqrt{n}} + n\frac{1}{n+\sqrt{n}} = \frac{n(\sqrt{n}+1)}{n+\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Μια πιο αποδοτική ανάθεση είναι αυτή που αναθέτει στις "σύντομες" αιτήσεις $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ *και στις "μεγάλες"* $\frac{1}{2n}$. *Η αποδοτικότητα τότε είναι*

$$n\sqrt{n}\frac{1}{2\sqrt{n}} + n\frac{1}{2n} = n$$

Τα κυριότερα αποτελέσματα για το πρόβλημα περιγράφονται στην επόμενη πρόταση, για τα οποία παραπέμπουμε στο [7].

Θεώρημα 17. *Υπάρχει άμεσος αλγόριθμος που λύνει το πρόβλημα της άμεσης δρομολόγησης με κατά σημείο λόγο ανταγωνισμού (αδικία)* $O(\log^2 n \log U)$. *Το κάτω φράγμα για το ίδιο πρόβλημα που μέτρο σύγκρισης αδικίας είναι η ολική δικαιοσύνη είναι* $\Omega(\sqrt{\log U})$.

Για την παραλλαγή του προβλήματος άμεσης δρομολόγησης όπου μετά από κάθε δρομολόγηση αίτησης ακολουθεί η ανάθεση εύρους ζώνης, μπορεί να εξασφαλιστεί λόγος ανταγωνισμού κατά σημείο (αδικία) $O(\log^2 n \log^{1+\varepsilon} \frac{U}{\varepsilon})$. *Το κάτω φράγμα της αδικίας για το ίδιο πρόβλημα είναι* $\Omega(\log^{1+\varepsilon} \frac{U}{\varepsilon})$.

Αν με SOL *συμβολίσουμε μια λύση ενός προβλήματος και* $load(e)$ *το πλήθος των αιτήσεων που εξυπηρετούνται μέσω από την ακμή* e *τότε*

$$U = \min_{SOL} \max_{e \in E} load(e)$$

11 Βιβλιογραφία - Αναφορές

[1] R. Anderson, L. Lovasz, P. Shor, J. Spencer, E. Tardos, S. Winograd. Disks, Balls and Walls: Analysis of a Combinatorial Game. American Mathematical Monthly vol.96 p. 481-493, July-August 1989.

[2] M. Atjai, J. Aspnes, M. Naor, Y. Rabani, L. Schulman, and O. Waarts. Fairness in scheduling. In Proceedings of the Sixth Annual ACM/SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 477-485, 1995.

[3] S. Ben-David, A. Borodin, R. Karp, G. Tardos A. Wigderson. On the Power of Randomization in Online Algorithms. 22nd ACM STOC Conference Proceedings.

[4] A. Borodin, R. El-Yaniv, Online Computation and Competitive Analysis, Cambridge, 1998.

[5] T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein Introduction to Algorithms, MIT Press 1990.

[6] Ronald Fagin, John H. Williams. A fair carpool scheduling. In IBM Jouranl of Research and Development 27(2):133-139 March 1983.

[7] A. Goel, A. Meyerson, S. Plotikin. Combing Fairness with Throughput: Online Routing with Multiple Objectives. Symposium on Theory of Computing, 2000.

[8] J. Kleinberg, Y. Rabani, and E. Tardos. Fairness in routing and load balancing. Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1999.

[9] Elias Koutsoupias : Προσωπική επικοινωνία. March-August 2004.

[10] R. Motwai and P. Raghavan, Randomized Algorithms, Cambridge, 1995.

[11] Moni Naor. On Fairness in the Carpool Problem, May 4, 2004.

[12] Moni Naor : Προσωπική επικοινωνία. July 2004.

[13] M. J. Osborne and A. Rubinstein, A Course in Game Theory, MIT Press, 1994.

[14] C. Papadimitriou, Computational Complexity, Addison Wesley Longman, 1994.

[15] V. V. Vazirany Approximation Algorithms, Springer, 2001