Θεωρία Ramsey και Εφαρμογές

Τάσος Ματζαβίνος
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Λογικής και Αλγορίθμων
μΠλ∀

Περιεχόμενα

Συμβολισμοί 5

Κεφάλαιο 1. Τα κλασσικά θεωρήματα του Ramsey 7

Κεφάλαιο 2. Θεωρήματα τύπου Ramsey και Εφαρμογές 13
1. Η γλώσσα των υπεργράφων 13
2. Ο ρόλος της πυκνότητας και της συμπάγειας 14
3. Μια εφαρμογή στην Περιγραφική Συνολοθεωρία 15
4. Μια εφαρμογή στη Θεωρία Μοντέλων 24

Κεφάλαιο 3. Οι απαρχές της Θεωρίας Ramsey 29
1. Το θεώρημα του Van der Waerden 29
2. Το θεώρημα των Hales και Jewett 33
3. Η απόδειξη του Shelah 37
4. Εκτιμώντας τα άνω φράγματα 41

Βιβλιογραφία 45

Συμβολισμοί

Οι ακόλουθοι συμβολισμοί χρησιμοποιούνται χωρίς περαιτέρω διευκρινήσεις στο κείμενο.

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ = το σύνολο των θετικών ακεραίων
ON = η κλάση των διατακτικών αριθμών
$|X|$ = ο πληθάριθμος του συνόλου X
$[n] = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$
$[X]^k = \{Y \mid Y \subseteq X \,\&\, |Y| = k\}$
$[X]^{\leq k} = \{Y \mid Y \subseteq X \,\&\, |Y| \leq k\}$

Για λόγους απλότητας θα γράφουμε $[n]^k$ αντί $[[n]]^k$. Επιπλέον, εάν η f αποτελεί μία απεικόνιση με πεδίο ορισμού το $[A]^k$, θα προτιμούμε τη γραφή $f(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ αντί της τυπικά ορθότερης $f(\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\})$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Τα κλασσικά θεωρήματα του Ramsey

Εάν κάποιος επιχειρήσει να εντοπίσει ιστορικά τα θεωρήματα τα οποία διαμόρφωσαν την εξέλιξη της σύγχρονης συνδυαστικής, τότε αργά ή γρήγορα θα διαπιστώσει ότι μεταξύ άλλων οφείλει να εξοικειωθεί με τη δημοσίευση του F.P.Ramsey στα 1930, [**Ram30**] καθώς και με τη δουλειά των Erdös και Szekerés όπως αυτή παρουσιάζεται στο [**ES35**]. Τα θεωρήματα του Ramsey, τα οποία διατυπώθηκαν και αποδείχτηκαν στο [**Ram30**] με σκοπό τη διαλεύκανση ενός θέματος τυπικής λογικής, έγιναν ευρέως γνωστά μέσω της κατ' ουσίαν επαναπόδειξής τους στα πλαίσια των γεωμετρικών διερευνήσεων του [**ES35**]. Έκτοτε, οι διάφορες σύγχρονες εκφάνσεις τους, έχουν αναδειχτεί σε ένα εξαιρετικά γόνιμο εργαλείο για την αντιμετώπιση συνδυαστικών -και όχι μόνο- προβλημάτων.

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την απόδειξη των εν λόγω θεωρημάτων. Ακολουθούν οι βασικοί ορισμοί και οι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιήσουμε.

Ορισμος 1. Έστω $r \in \mathbb{N}$. Κάθε απεικόνιση $\chi : S \longrightarrow [r]$ θα καλείται r-χρωματισμός του συνόλου S. Για κάθε $s \in S$, ο φυσικός αριθμός $\chi(s)$ θα καλείται το χρώμα του s. Ένα $T \subseteq S$ θα καλείται (χ-)μονοχρωματικό αν υπάρχει $i \in [r]$ τέτοιο ώστε για κάθε $t \in T$, $\chi(t) = i$.

Ορισμος 2 (arrow notation). Θα γράφουμε $n \to (l_1, \dots, l_r)^k$ αν για κάθε r-χρωματισμό χ του $[n]^k$ υπάρχει φυσικός αριθμός i, $1 \leq i \leq r$ για τον οποίο ισχύει ότι υπάρχει $T \subseteq [n]$, $|T| = l_i$ τέτοιο ώστε το $[T]^k$ να αποτελεί χ-μονοχρωματικό σύνολο χρώματος i.

Έχει καθιερωθεί να αγνοείται ο δείκτης k όταν $k = 2$. Συγκεκριμένα $n \to (l_1, \dots, l_r)^2 \Leftrightarrow n \to (l_1, \dots, l_r)$. Επιπλέον, εάν $l_1 = \dots = l_r = l$ τότε συνηθίζουμε να γράφουμε $n \to (l)^k_r$ αντί του $n \to (l_1, \dots, l_r)^k$ καθώς και $n \to (l)_r$ αντί του $n \to (l_1, \dots, l_r)$. Ο δείκτης r κατά κανόνα αγνοείται όταν $r = 2$, οπότε $n \to (l)^k \Leftrightarrow n \to (l)^k_2 \Leftrightarrow n \to (l, l)^k$.

Αξίζει να επισημανθεί η γραφοθεωρητική ερμηνεία του δεύτερου ορισμού στην περίπτωση όπου $k = 2$. Ο ισχυρισμός $n \to (l)$ παρέχει ουσιαστικά την πληροφορία ότι κάθε χρωματισμός με δύο χρώματα των ακμών ενός πλήρους γραφήματος n κόμβων έπεται την ύπαρξη l κόμβων, οι προσπίπτουσες ακμές των οποίων αποτελούν μονοχρωματικό υποσύνολο του $[n]^2$. Ο αναγνώστης καλείται να ερμηνεύσει ανάλογα τον ισχυρισμό $n \to (l_1, \dots, l_r)^2$.

Ορισμος 3. Δοθέντων $k, r \in \mathbb{N}$, ορίζουμε

$$R_k(l_1, \dots, l_r) = \begin{cases} \min\{n_0 \mid (\forall n \geq n_0)[n \to (l_1, \dots, l_r)^k]\}, \\ \text{εάν } \{n_0 \mid (\forall n \geq n_0)[n \to (l_1, \dots, l_r)^k]\} \neq \emptyset \\ \\ \perp, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

Οι R_k ονομάζονται συναρτήσεις Ramsey. Το ακόλουθο, αποτελεί την αποκαλούμενη πεπερασμένη εκδοχή του θεωρήματος του Ramsey.

Θεωρημα 1. *Για κάθε $k, l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}$, $R_k(l_1, \dots, l_r) \neq \perp$. Ισοδύναμα, για κάθε $k, l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_o$, $n \to (l_1, \dots, l_r)^k$.*

Παραθέτουμε αρχικά δύο αποδείξεις του θεωρήματος 1 στην ειδική περίπτωση όπου $r = k = 2$.

Πρωτη Αποδειξη ($r = k = 2$). Παρατηρούμε ότι για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $R_2(l, 2) = R_2(2, l) = l \neq \perp$. Δουλεύοντας επαγωγικά υποθέτουμε ότι $R_2(l_1, l_2 - 1) \neq \perp \neq R_2(l_1 - 1, l_2)$. Θα δείξουμε ότι

$$R_2(l_1, l_2 - 1) + R_2(l_1 - 1, l_2) \to (l_1, l_2)$$

Έστω χ ένας 2-χρωματισμός του $[n]^2$ όπου

$$n = R_2(l_1, l_2 - 1) + R_2(l_1 - 1, l_2)$$

Επιλέγουμε $x \in [n]$ αυθαίρετα και θέτουμε

$$\begin{aligned} A &= \{y \in [n] \mid \chi(x, y) = 1\} \\ B &= \{y \in [n] \mid \chi(x, y) = 2\} = ([n] \setminus A) \setminus \{x\} \end{aligned}$$

Εξ ορισμού, $|A| + |B| = n - 1$ και άρα είτε $|A| \geq R_2(l_1 - 1, l_2)$ ή $|B| \geq R_2(l_1, l_2 - 1)$. Έστω ότι $|A| \geq R_2(l_1 - 1, l_2)$. Τότε από τον ορισμό της R_2 γνωρίζουμε ότι είτε

- υπάρχει $T \subseteq A$, $|T| = l_2$ τέτοιο ώστε το $[T]^2$ να αποτελεί μονοχρωματικό σύνολο χρώματος 2, οπότε το ζητούμενο ισχύει, ή
- υπάρχει $S \subseteq A$, $|S| = l_1 - 1$ τέτοιο ώστε το $[S]^2$ να αποτελεί μονοχρωματικό σύνολο χρώματος 1.

Στην τελευταία περίπτωση θέτουμε $S^* = S \cup \{x\}$. Παρατηρούμε ότι $|S^*| = l_1$. Δεδομένου ότι $S \subseteq A$, γνωρίζουμε ότι για κάθε $s \in S$ $\chi(\{x, s\}) = 1$. Έπεται ότι το $[S^*]^2$ αποτελεί μονοχρωματικό σύνολο χρώματος 1.

Ομοίως δουλεύουμε και στη περίπτωση όπου $|B| \geq R_2(l_1, l_2 - 1)$. □

Δευτερη Αποδειξη ($r = k = 2$). Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $2^{2l-1} - 1 \to (l)$. Θεωρούμε σύνολο S_1, $|S_1| \geq 2^{2l-1} - 1$ και σταθεροποιούμε ένα 2-χρωματισμό χ του $[S_1]^2$. Ορίζουμε σύνολα S_i και στοιχεία $x_i \in S_i$, $1 \leq i \leq 2l-1$, μέσω της ακόλουθης διαδικασίας

1. Εάν το S_i έχει οριστεί, επιλέγουμε $x_i \in S_i$ αυθαίρετα.
2. Εάν το $x_i \in S_i$ έχει οριστεί, θέτουμε

$$T_j^i = \{u \in S_i \mid \chi(x_i, u) = j\},\ j = 1, 2$$

3. Θέτουμε S_{i+1} να είναι το μεγαλύτερο σε πληθικότητα από τα T_1^i και T_2^i.

Δεδομένου ότι $|T_1^i| + |T_2^i| = |S_i| - 1$, έπεται ότι

$$|S_{i+1}| \geq \frac{|S_i| - 1}{2}$$

Συμπεραίνουμε ότι το $|S_1|$ είναι αρκετά μεγάλο ώστε να ορίζονται τα $x_1, \ldots, x_{2l-1}$ προτού η παραπάνω διαδικασία τερματίσει ($S_i = \emptyset$).

Ορίζουμε χρωματισμό $\chi^* : \{x_1, \ldots, x_{2l-1}\} \longrightarrow \{1, 2\}$ έτσι ώστε

$$\chi^*(x_i) = j \Leftrightarrow \chi(x_i, y) = j \text{ για } y \in S_{i+1}$$

Ο χ^* διαμερίζει τους $2l-1$ αριθμούς σε δύο σύνολα. Συνεπώς υπάρχουν l αριθμοί $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ τέτοιοι ώστε το $\chi^*(x_{i_s})$ να παραμένει σταθερό για κάθε $1 \leq s \leq l$. Έπεται άμεσα ότι το $[\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}\}]^2$ είναι χ-μονοχρωματικό. □

Η πρώτη απόδειξη πλεονεκτεί έναντι της δεύτερης ως προς την εκτίμηση ακριβέστερου άνω φράγματος της R_2. Η βασική όμως ιδέα της δεύτερης απόδειξης, η οποία έγκειται στην αναγωγή του χρωματισμού ακμών σε χρωματισμό κόμβων, αναδεικνύεται χρήσιμη σε ένα ευρύτερο φάσμα προβλημάτων.

Αποδειξη Θεωρηματος 1. Δουλεύουμε με επαγωγή στο k. Αν $k = 1$ τότε προφανώς

$$1 + \sum_{i=1}^{r} (l_i - 1) \to (l_1, \ldots, l_r)^1$$

Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για $k-1$. Αρκεί για το τυχαίο l να βρούμε n τέτοιο ώστε $n \to (l)_r^k$. Έστω n "αρκετά μεγάλο" (θα γίνουμε περισσότερο σαφείς παρακάτω) και χ ένας r-χρωματισμός του $[n]^k$. Επιλέγουμε $a_1, \ldots, a_{k-2} \in [n]$ αυθαίρετα και θέτουμε $S_{k-2} = [n] \setminus \{a_1, \ldots, a_{k-2}\}$. Ορίζουμε σύνολα S_i και στοιχεία $a_i \in S_i$, $i \geq k-2$ ως ακολούθως

1. Αν το S_i έχει οριστεί, επιλέγουμε $a_{i+1} \in S_i$ αυθαίρετα.
2. Διαμερίζουμε το $S_i \setminus \{a_{i+1}\}$ μέσω της σχέσης $\sim_i$

$$x \sim_i y \quad \Leftrightarrow \quad \text{για κάθε } T \subseteq \{a_1, \ldots, a_{i+1}\} \text{ πληθικότητας } k-1,\ \chi(T \cup \{x\}) = \chi(T \cup \{y\})$$

3. Θέτουμε S_{i+1} να είναι η μεγαλύτερη (ως προς την πληθικότητα) κλάση ισοδυναμίας.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $i \geq k-2$, η σχέση $\sim_i$ παράγει το πολύ $r^{\binom{i+1}{k-1}}$ κλάσεις ισοδυναμίας. Είναι εμφανές ότι

$$S_{i+1} \subseteq S_i \setminus \{a_{i+1}\} \text{ και } |S_{i+1}| \geq \frac{|S_i - 1|}{r^{\binom{i+1}{k-1}}}$$

Θέτουμε $t = R_{k-1}(\overbrace{l, \ldots, l}^{r})$ (χρήση επαγωγικής υπόθεσης) και επιλέγουμε το n αρκούντως μεγάλο ώστε η παραπάνω διαδικασία να συνεχιστεί τουλάχιστον μέχρι να οριστεί το a_t. Συγκεκριμένα, η επιλογή του n είναι τέτοια ώστε αν θεωρήσουμε την ακολουθία

$$\begin{cases} u_{k-2} = n - (k-2) \\ \\ u_{i+1} = (u_i - 1) r^{\binom{i+1}{k-1}} \end{cases}$$

να αληθεύει ότι $u_t \geq 1$. Αρκεί να θέσουμε $n = 2r^c$ όπου $c = \sum_{i=k-1}^{t-1} \binom{i+1}{k-1}$.

Επικεντρώνουμε την προσοχή μας στην ακολουθία $a_1, \ldots, a_t$. Εάν $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1} < s \leq t$, τότε $a_s \in S_{s-1} \subseteq S_{i_{k-1}}$ και άρα

$$\chi(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k-1}}, a_s\}) = \chi(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k-1}}, a_j\}),$$

για κάθε j τέτοιο ώστε $i_{k-1} < j \leq t$. Ορίζουμε χρωματισμό χ^* πάνω από το $[\{a_1, \ldots, a_t\}]^{k-1}$ ως εξής,

$$\chi^*(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k-1}}\}) = \chi(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k-1}}, a_s\}) \text{ όπου } i_{k-1} < s \leq t$$

Όταν $i_{k-1} = t$ ορίζουμε το χ^* αυθαίρετα. Από τον ορισμό του t έπεται ότι υπάρχει υποακολουθία $b_1, \ldots, b_l$ η οποία είναι μονοχρωματική υπό τον χ^*. Για κάθε $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{k-1} < j_k \leq l$, $\chi(\{b_{j_1}, \ldots, b_{j_{k-1}}, b_{j_k}\}) = \chi^*(\{b_{j_1}, \ldots, b_{j_{k-1}}\})$ και άρα το $[\{b_1, \ldots, b_l\}]^k$ αποτελεί χ-μονοχρωματικό σύνολο. □

Ορισμος 4 (Erdös-Rado relation). Έστω λ, μ, ν πληθάριθμοι και $k \in \mathbb{N}$. Θα γράφουμε $\lambda \to (\mu)^k_\nu$ αν για κάθε σύνολο X πληθικότητας λ και κάθε απεικόνιση $\chi : [X]^k \longrightarrow \nu$, υπάρχει $Y \subseteq X$, $|Y| = \mu$ τέτοιο ώστε η χ να είναι σταθερή πάνω από το $[Y]^k$.

Το ακόλουθο αποτελεί ειδική περίπτωση της άπειρης εκδοχής του θεωρήματος του Ramsey.

Θεωρημα 2. *Για κάθε $r \in \mathbb{N}$, $\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_r$. Ισοδύναμα για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό χ του $[\mathbb{N}]^2$, υπάρχει άπειρο $A \subseteq \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το $[A]^2$ να είναι μονοχρωματικό.*

Αποδειξη. Έστω χ ένας r-χρωματισμός του $[\mathbb{N}]^2$. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, ορίζουμε σύνολο S_i και $x_i \in S_i$ ως εξής

1. $S_1 = \mathbb{N}$
2. Εάν το S_i έχει οριστεί, επιλέγουμε $x_i \in S_i$ αυθαίρετα.
3. Εάν το x_i έχει οριστεί, θέτουμε

$$T^i_j = \{u \in S_i \mid \chi(x_i, u) = j\},\ j = 1, \ldots , r$$

4. Θέτουμε S_{i+1} να είναι ένα από τα T^i_j άπειρης πληθικότητας.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $i < j \leq k$, $\chi(x_i, x_j) = \chi(x_i, x_k)$. Ορίζουμε χρωματισμό χ^* πάνω από το $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ως εξής

$$\chi^*(x_i) = \chi(x_i, x_{i+1})$$

Ο χ^* παρέχει μια πεπερασμένη διαμέριση του $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ και άρα υπάρχει χρώμα c και (άπειρη) υποακολουθία $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots$ έτσι ώστε

$$\chi^*(x_{i_s}) = c \text{ για κάθε } s \in \mathbb{N}$$

Συμπεραίνουμε ότι για κάθε $1 \leq s < t$, $\chi(x_{i_s}, x_{i_t}) = \chi^*(x_{i_s}) = c$, οπότε το $[\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\}]^2$ είναι μονοχρωματικό. $\square$

Το θεώρημα 2 γενικεύεται ως ακολούθως.

Θεωρημα 3 (Erdös-Rado). *Για κάθε μ, ν πληθαρίθμους και κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει πληθάριθμος λ τέτοιος ώστε $\lambda \to (\mu)^k_\nu$.*

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το θεώρημα 3, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [**Kun77**] καθώς και στις εκεί αναφερόμενες παραπομπές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Θεωρήματα τύπου Ramsey και Εφαρμογές

1. Η γλώσσα των υπεργράφων

Το 1973 οι φιλοσοφικές διερευνήσεις των H.Burkill και L.Mirsky ανέδειξαν ως ουσιώδες γνώρισμα της μαθηματικής επιστήμης τον εντοπισμό “κανονικών” υποδομών. Η κανονικότητα αφορά, βεβαίως, την ύπαρξη σημαντικότερης οργάνωσης της υποδομής ως προς την αρχική δομή.

Από τεχνικής άποψης και ασχέτως φιλοσοφικής τοποθέτησης, τα θεωρήματα του Ramsey εντάσσονται άμεσα στο εν λόγω πλαίσιο. Το ίδιο ισχύει και για μία ευρύτερη κατηγορία ισχυρισμών όπου δηλώνεται ότι για n αρκετά μεγάλο, κάθε r-χρωματισμός του $[n]^k$ - ή κάποιας δομής που εξαρτάται από το n - παρέχει ένα μονοχρωματικό υπόχωρο, εφοδιασμένο με ορισμένες ιδιότητες. Οι εκάστοτε ιδιότητες καθορίζουν και τον εκάστοτε ισχυρισμό, ο οποίος, εφόσον έχει αποδειχτεί, συνηθίζεται να αποκαλείται θεώρημα τύπου Ramsey. Τα ακόλουθα αποτελούν παραδείγματα θεωρημάτων τύπου Ramsey.

Ramsey: Για κάθε l, r, k υπάρχει n_0 τ.ω. για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε r-χρωματισμό του $[n]^k$ να υπάρχει μονοχρωματικό $[l]^k$.

Van der Waerden: Για κάθε l, r υπάρχει n_0 τ.ω. για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε r-χρωματισμό του $[n]$ να υπάρχει μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος $\{a, a+d, \ldots, a+(l-1)d\} \subseteq [n]$ μήκους l.

Schur: Για κάθε r, υπάρχει n_0 τ.ω. για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε r χρωματισμό του $[n]$ να υπάρχουν $x, y, z \in [n]$ ίδιου χρώματος τέτοια ώστε $x + y = z$.

Hales-Jewett: Για κάθε r, k υπάρχει n_0 τ.ω. για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε r-χρωματισμό του n-διάστατου κύβου

$$C_k^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}, 1 \leq i \leq n\}$$

να υπάρχει μονοχρωματική “ευθεία” εντός του C_k^n.

Η έννοια της “ευθείας” που παρουσιάζεται στο θεώρημα των Hales και Jewett θα αποσαφηνιστεί στο κεφάλαιο 3.

Οριοθετείται στη συνέχεια ένα εκφραστικό πλαίσιο το οποίο μας παρέχει τη δυνατότητα τυποποίησης και ως εκ τούτου μαθηματικής επεξεργασίας των ισχυρισμών τύπου Ramsey.

Ορισμος 5. Ένας υπεργράφος $H = (V, E)$ αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών V και ένα σύνολο $E \subseteq \mathcal{P}(V)$. Τα $X \in E$ καλούνται υπερακμές του V.

Ορισμος 6. Μία απεικόνιση $\chi : V \longrightarrow [r]$ καλείται r-χρωματισμός του υπεργράφου H αν για κάθε $X \in E$, υπάρχουν $x_1, x_2 \in X$ τέτοια ώστε $\chi(x_1) \neq \chi(x_2)$.

Ορισμος 7. Ο χρωματικός αριθμός $\chi(H)$ ενός υπεργράφου H ορίζεται ως ο ελάχιστος $r \in \mathbb{N}$ για τον οποίο υπάρχει ένας r-χρωματισμός του H.

Τα διάφορα θεωρήματα τύπου Ramsey εκφράζονται στη γλώσσα των υπεργράφων ως οριακές συνθήκες χρωματικών αριθμών. Τα ακόλουθα παραδείγματα υποδεικνύουν τον τρόπο και ο αναγνώστης καλείται να τον ανακαλύψει.

Ramsey: Θέτουμε $H_{n,k,l} = (V_{n,k,l}, E_{n,k,l})$ όπου $V_{n,k,l} = [n]^k$ και $E_{n,k,l} = \{[S]^k \mid S \in [n]^l\}$. Τότε για κάθε l, r, k υπάρχει n_0 τ.ω. για κάθε $n \geq n_0$, $\chi(H_{n,k,l}) > r$. Ισοδύναμα,

$$\lim_{n\to\infty} \chi(H_{n,k,l}) = \infty \text{ για κάθε } k, l$$

Hales-Jewett: Θέτουμε $H_{n,k} = (V_{n,k}, E_{n,k})$ όπου $V_{n,k} = C_k^n$ και $E_{n,k}$ είναι το σύνολο των "ευθειών" του C_k^n. Τότε για κάθε k, r υπάρχει n_0 τ.ω. για κάθε $n \geq n_0$, $\chi(H_{n,k}) > r$. Ισοδύναμα,

$$\lim_{n\to\infty} \chi(H_{n,k}) = \infty \text{ για κάθε k}$$

2. Ο ρόλος της πυκνότητας και της συμπάγειας

Ορισμος 8. Έστω $H = (V, E)$ ένας υπεργράφος. Ορίζουμε ως $T(H)$ (συνάρτηση Turán) τον ελάχιστο φυσικό αριθμό T για τον οποίο ισχύει ότι κάθε $W \subseteq V$ πληθικότητας T, περιέχει μία υπερακμή.

Δοθέντος υπεργράφου $H = (V, E)$, θέτουμε

$$\tau(H) = \frac{T(H)}{|V|}$$

Θεωρημα 4. $\tau(H) \leq r^{-1} \Rightarrow \chi(H) > r$

Αποδειξη. Έστω $r \in \mathbb{N}$ και $H = (V, E)$ ένας υπεργράφος τέτοιος ώστε $\tau(H) \leq r^{-1}$. Θεωρούμε χ τυχαίο r-χρωματισμό του συνόλου V. Σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα, ο χ παραμένει σταθερός πάνω από τουλάχιστον $|V| \cdot r^{-1}$ κορυφές οπότε, κάνοντας χρήση της υπόθεσης μας, συμπεραίνουμε ότι $\chi(H) > r$. $\square$

Θεωρημα 5. $\lim_{n\to\infty} \tau(H_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \chi(H_n) = \infty$

Αποδειξη. Έπεται άμεσα από το θεώρημα 4. □

Ορισμος 9. Έστω $H = (V, E)$ ένας υπεργράφος και $W \subseteq V$. Ως περιορισμό του H στο W ορίζουμε τον υπεργράφο $H_W = (W, E_W)$ όπου $E_W = \{X \in E \mid X \subseteq W\}$.

Θεωρημα 6. *Έστω $H = (V, E)$ ένας υπεργράφος τέτοιος ώστε κάθε $X \in E$ να είναι πεπερασμένο (αλλά το V ενδέχεται να είναι άπειρο). Υποθέτουμε ότι για κάθε πεπερασμένο $W \subseteq V$ αληθεύει ότι $\chi(H_W) \leq r$. Τότε $\chi(H) \leq r$.*

Αποδειξη. Έστω $T = \{f \mid f : V \longrightarrow [r]\}$. Εφοδιάζουμε το $[r]$ με τη διακριτή τοπολογία και το T με την επαγόμενη τοπολογία γινόμενο. Για κάθε $u_1, \ldots, u_n \in V$ και $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in [r]$, θέτουμε

$$S_{u_1,\ldots,u_n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \{f \mid f(u_i) = \varepsilon_i, 1 \leq i \leq n\}$$

Τα παραπάνω S είναι κλειστανοιχτά και σχηματίζουν μία βάση για την τοπολογία του T. Το $[r]$, προφανώς, αποτελεί συμπαγή τοπολογικό χώρο και άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Tychonoff, ο T είναι συμπαγής. Για κάθε πεπερασμένο, μη-κενό $W \subseteq V$ θέτουμε

$$F_W = \{f \in T \mid (\forall X \in E)\,[X \subseteq W \to (\exists x_1, x_2 \in X) f(x_1) \neq f(x_2)]\}$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του θεωρήματος, κάθε F_W είναι κλειστανοιχτό και διάφορο του κενού. Επιπλέον, αν $W \subseteq W'$ τότε $F_W \supseteq F_{W'}$. Συνεπώς, εάν τα $W_1, \ldots, W_m$ είναι πεπερασμένα, μη-κενά υποσύνολα του V τότε $F_{W_1} \cap \ldots \cap F_{W_m} \supseteq F_{W_1 \cup \ldots \cup W_m} \neq \emptyset$. Συνυπολογίζοντας τη συμπάγεια του T, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει

$$f \in \bigcap \{F_W \mid W \subseteq V, W \text{ πεπερασμένο, μη-κενό}\}$$

Έπεται άμεσα ότι η απεικόνιση f αποτελεί τον ζητούμενο r-χρωματισμό του H. □

3. Μια εφαρμογή στην Περιγραφική Συνολοθεωρία

Στη παρούσα ενότητα θα θίξουμε το θέμα των πληθαρίθμων Ramsey με σκοπό τη μελέτη της τοπολογίας του χώρου του Baire και ιδιαίτερα της προβολικής ιεραρχίας. Ειδικότερα, δεδομένης της ύπαρξης μετρήσιμων πληθαρίθμων, θα αποδείξουμε μία παιγνιοθεωρητική ιδιότητα των αναλυτικών συνόλων, τη λεγόμενη προσδιοριστότητα. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα διέπεται από έντονα θεμελιακό χαρακτήρα καθώς αναδεικνύει ορισμένα στοιχεία της αλληλεπίδρασης που παρουσιάζουν τα διάφορα αξιώματα υψηλών πληθαρίθμων με τη περιγραφική συνολοθεωρία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10. Ως φίλτρο πάνω από ένα σύνολο X ορίζουμε μια οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του X για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$
2. εάν $A \in \mathcal{F}$ και $A \subseteq B$, τότε $B \in \mathcal{F}$
3. εάν $A, B \in \mathcal{F}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{F}$

Για κάθε πληθάριθμο $\varkappa$, το τυχαίο φίλτρο $\mathcal{F}$ πάνω από το σύνολο X θα καλείται $\varkappa$-πλήρες αν για κάθε $\lambda < \varkappa$ και κάθε οικογένεια $(A_\xi)_{\xi<\lambda}$ υποσυνόλων του X, αληθεύει ότι

$$(\forall \xi < \lambda) A_\xi \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{\xi<\lambda} A_\xi \in \mathcal{F}$$

Ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ θα καλείται υπερφίλτρο αν για κάθε $A \subseteq X$, είτε $A \in \mathcal{F}$ είτε $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ θα καλείται τετριμμένο αν υπάρχει $x_0 \in X$ τ.ω. $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x_0) = \{A \subseteq X \mid x_0 \in A\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11. Ένας πληθάριθμος $\varkappa > \aleph_0$ θα καλείται μετρήσιμος αν επιδέχεται ένα μη-τετριμμένο, $\varkappa$-πλήρες υπερφίλτρο.

Η ύπαρξη μετρήσιμων πληθαρίθμων είναι ανεξάρτητη από τα αξιώματα της ZFC και συνιστά τη λεγόμενη υπόθεση των μετρήσιμων πληθαρίθμων (MC).

$$MC \Leftrightarrow \text{ υπάρχει τουλάχιστον ένας μετρήσιμος πληθάριθμος}$$

Σε κάθε υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ πάνω από τον πληθάριθμο $\varkappa$ αντιστοιχούμε ένα μέτρο $\mu_{\mathcal{U}} : \mathcal{P}(\varkappa) \longrightarrow \{0, 1\}$ ως εξής

$$\mu_{\mathcal{U}}(A) = \begin{cases} 1 \text{ αν } A \in \mathcal{U} \\ 0 \text{ αν } \varkappa\text{-}A \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Εάν το $\mathcal{U}$ είναι $\varkappa$-πλήρες, τότε το $\mu_{\mathcal{U}}$ είναι $\varkappa$-προσθετικό, δηλαδή για κάθε $\lambda < \varkappa$ και κάθε οικογένεια $\{A_\xi\}_{\xi<\lambda}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\varkappa$, ισχύει ότι

$$\mu_{\mathcal{U}}(\bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi) = \sum_{\xi<\lambda} \mu(A_\xi)$$

Αντίστροφα, εάν το μ είναι ένα $\varkappa$-προσθετικό δίτιμο μέτρο πάνω από το δυναμοσύνολο του $\varkappa$, τέτοιο ώστε για κάθε ξ, $\mu(\{\xi\}) = 0$ και $\mu(\varkappa) = 1$, τότε η οικογένεια $\mathcal{U}_\mu = \{A \mid \mu(A) = 1\}$ αποτελεί ένα μη-τετριμμένο, $\varkappa$-πλήρες υπερφίλτρο του πληθαρίθμου $\varkappa$.

Δοθέντος πληθαρίθμου $\varkappa$ και υπερφίλτρου $\mathcal{U}$ πάνω από το $\varkappa$, ορίζουμε μία σχέση $\preceq$ μεταξύ των στοιχείων του $\varkappa^\varkappa$ ως εξής

$$f \preceq g \Leftrightarrow \{\xi \mid f(\xi) \leq g(\xi)\} \in \mathcal{U}$$

Λημμα 1. *Εάν το $\mathcal{U}$ είναι ένα $\aleph_1$-πλήρες υπερφίλτρο του $\varkappa$, τότε η σχέση $\preceq$ αποτελεί μία καλή προδιάταξη του συνόλου $\varkappa^\varkappa$.*

Αποδειξη. Προφανώς $f \preceq f$. Η μεταβατική ιδιότητα αληθεύει καθότι $\{\xi \mid f(\xi) \leq h(\xi)\} \supseteq \{\xi \mid f(\xi) \leq g(\xi)\} \cap \{\xi \mid g(\xi) \leq h(\xi)\}$. Επιπλέον, εάν $\neg(f \preceq g)$, τότε $\{\xi \mid f(\xi) \leq g(\xi)\} \notin \mathcal{U}$ και άρα $g \preceq f$. Συνεπώς η $\preceq$ αποτελεί σχέση προδιάταξης.

Εάν $f_0 \succ f_1 \succ \ldots \succ f_n \succ \ldots$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $A_n = \{\xi \mid f_n(\xi) > f_{n+1}(\xi)\}$ έχει μέτρο 1. Συμπεραίνουμε ότι και η τομή $\bigcap_n A_n$ έχει μέτρο 1 και άρα $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$. Το τελευταίο όμως είναι άτοπο δεδομένου ότι για κάθε $\lambda \in \bigcap_n A_n$, $f_0(\lambda) > f_1(\lambda) > f_2(\lambda) > \ldots$ □

Σύμφωνα με το λήμμα 1, για κάθε $\aleph_1$-πλήρες υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ πάνω απο τον πληθάριθμο $\varkappa$, υπάρχει κατάλληλη $\rho : \varkappa^\varkappa \longrightarrow ON$ τ.ω.

$$\rho(f) \leq \rho(g) \Leftrightarrow \{\xi \in \varkappa \mid f(\xi) \leq g(\xi)\} \in \mathcal{U}$$

Η ρ καλείται *απεικόνιση τάξης*. Ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ πάνω από τον πληθάριθμο $\varkappa$ θα καλείται *κανονικό* αν είναι $\varkappa$-πλήρες, μη-τετριμμένο και τέτοιο ώστε για κάθε απεικόνιση $f \in \varkappa^\varkappa$ να αληθεύει ότι

$$\{\xi \in \varkappa \mid f(\xi) < \xi\} \in \mathcal{U} \Rightarrow \text{υπάρχει } \lambda_0 < \varkappa \text{ τ.ω. } \{\xi \in \varkappa \mid f(\xi) = \lambda_0\} \in \mathcal{U}$$

Λημμα 2. *Κάθε μετρήσιμος πληθάριθμος επιδέχεται ένα κανονικό υπερφίλτρο.*

Αποδειξη. Έστω $\mathcal{U}$ ένα $\varkappa$-πλήρες, μη-τετριμμένο υπερφίλτρο του πληθαρίθμου $\varkappa$ και $\rho : \varkappa^\varkappa \longrightarrow ON$ η αντίστοιχη απεικόνιση τάξης. Για κάθε $\lambda < \varkappa$, θέτουμε ως C_λ την σταθερή απεικόνιση με τιμή λ.

$$C_\lambda(\xi) = \lambda, \text{ για κάθε } \xi < \varkappa$$

Προφανώς, $\lambda < \lambda' \Rightarrow \rho(C_\lambda) < \rho(C_{\lambda'})$ και άρα $\rho(C_\lambda) \geq \lambda$. Εάν συμβολίσουμε με id την ταυτοτική απεικόνιση, τότε για κάθε λ,

$$\{\xi \mid C_\lambda(\xi) \leq id(\xi)\} = \varkappa \setminus \lambda = \bigcap_{\xi<\lambda}(\varkappa \setminus \{\xi\}) \in \mathcal{U}$$

Έπεται ότι για κάθε λ, $\rho(C_\lambda) \leq \rho(id)$ και άρα $\rho(id) \geq \varkappa$. Συνεπώς υπάρχει $f_0 \in \varkappa^\varkappa$ τ.ω. $\rho(f_0) = \varkappa$. Ορίζουμε υπερφίλτρο $\mathcal{U}^*$ ως εξής,

$$A \in \mathcal{U}^* \Leftrightarrow f_0^{-1}[A] \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{\xi \mid f_0(\xi) \in A\} \in \mathcal{U}$$

Το $\mathcal{U}^*$ αποδεικνύεται άμεσα μη-τετριμμένο και $\varkappa$-πλήρες. Σε ό,τι αφορά την κανονικότητα, θεωρούμε $f \in \varkappa^\varkappa$ τ.ω. $\{\xi \mid f(\xi) < \xi\} \in \mathcal{U}^*$. Όμως,

$$\{\xi \mid f(\xi) < \xi\} \in \mathcal{U}^* \Leftrightarrow \{\xi \mid f(f_0(\xi)) < f_0(\xi)\} \in \mathcal{U}$$

Παρατηρούμε ότι $\rho(f \circ f_0) < \rho(f_0) = \varkappa$ και άρα για κάποιο $\lambda < \varkappa$, $\{\xi \mid f(f_0(\xi)) = \lambda\} \in \mathcal{U}$. Συμπεραίνουμε ότι $\{\xi \mid f(\xi) = \lambda\} \in \mathcal{U}^*$. □

Έστω $\{A_\xi\}_{\xi<\varkappa}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του πληθαρίθμου $\varkappa$. Η *διαγώνια τομή* της $\{A_\xi\}_{\xi<\varkappa}$ ορίζεται ως εξής,

$$\lambda \in A \Leftrightarrow (\forall \xi < \lambda)[\lambda \in A_\xi]$$

ΛΗΜΜΑ 3. *Έστω $\mathcal{U}$ ένα κανονικό υπερφίλτρο του πληθαρίθμου $\varkappa$ και $\{A_\xi\}_{\xi<\varkappa}$ μία ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{U}$. Η διαγώνια τομή της $\{A_\xi\}_{\xi<\varkappa}$ ανήκει στο $\mathcal{U}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $A = \{\lambda \mid (\forall \xi < \lambda)[\lambda \in A_\xi]\}$. Προς άτοπο, υποθέτουμε ότι $A \notin \mathcal{U}$ και άρα $(\varkappa \setminus A) \in \mathcal{U}$. Ορίζουμε $f \in \varkappa^\varkappa$ ως εξής,

$$f(\lambda) = \min\{\xi \mid \lambda \notin A_\xi\}, \text{ για κάθε } \lambda \in (\varkappa \setminus A)$$

Εάν $\lambda \in A$, τότε θέτουμε $f(\lambda) = 0$. Προφανώς, $\mu_{\mathcal{U}}(\{\lambda \mid f(\lambda) < \lambda\}) = 1$. Από τη κανονικότητα του $\mathcal{U}$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\lambda_0 < \varkappa$ τ.ω. $\{\lambda \in \varkappa \mid f(\lambda) = \lambda_0\} \in \mathcal{U}$. Όμως,

$$\{\lambda \in \varkappa \mid f(\lambda) = \lambda_0\} \cap A_{\lambda_0} \in \mathcal{U}$$

Συνεπώς, υπάρχει $\lambda_1 > \lambda_0$ τ.ω. $\lambda_1 \in A_{\lambda_0} \,\&\, f(\lambda_1) = \lambda_0 \,\&\, \lambda_1 \in (\varkappa \setminus A)$. Έπεται ότι $\lambda_1 \notin A_{f(\lambda_1)}$ και άρα $\lambda_1 \notin A_{\lambda_0}$ - άτοπο. □

Για κάθε $n \geq 1$, θέτουμε

$$\varkappa^{[n]} = \text{ όλα τα υποσύνολα του } \varkappa \text{ πληθικότητας } n$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 12. Κάθε απεικόνιση $F : \varkappa^{[n]} \longrightarrow \lambda$ θα καλείται *διαμέριση* του $\varkappa^{[n]}$ σε λ μέρη. Ένα υποσύνολο $I \subseteq \varkappa$ θα καλείται *ομογενές* για τη διαμέριση F αν για κάθε $A, B \in \varkappa^{[n]}$,

$$A \subseteq I \;\&\; B \subseteq I \Rightarrow F(A) = F(B)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 (Rowbottom, 1971). *Εάν το $\mathcal{U}$ αποτελεί ένα κανονικό υπερφίλτρο του πληθαρίθμου $\varkappa$ και η F είναι μία διαμέριση του $\varkappa^{[n]}$ σε λ μέρη, τότε υπάρχει ένα ομογενές σύνολο I για την F τ.ω. $I \in \mathcal{U}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Δουλεύουμε με επαγωγή στο n. Για $n = 1$ το ζητούμενο έπεται άμεσα από το γεγονός ότι το $\mathcal{U}$ είναι $\varkappa$-πλήρες.

Σε ό,τι αφορά το επαγωγικό βήμα θεωρούμε

$$F : \varkappa^{[n+1]} \longrightarrow \lambda$$

και για κάθε $\xi < \varkappa$, ορίζουμε $F_\xi : \varkappa^{[n]} \longrightarrow \lambda$ μέσω των σχέσεων

$$\begin{array}{ll} F_\xi(A) = F(\{\xi\} \cup A) & \text{αν } \xi \notin A \\ F_\xi(A) = 0 & \text{αν } \xi \in A \end{array}$$

Από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι για κάθε $\xi < \varkappa$, υπάρχει σύνολο I_ξ ομογενές για την F_ξ τ.ω. $I_\xi \in \mathcal{U}$. Θέτουμε

$$G(\xi) = F_\xi(A), \text{ για κάθε } A \subseteq I_\xi \text{ πληθικότητας } n$$

Δεδομένου ότι $G \in \lambda^\varkappa$ και λόγω της $\varkappa$-πληρότητας του $\mathcal{U}$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $J \subseteq \varkappa$, $J \in \mathcal{U}$ τ.ω. για κάποιο $\lambda_0 < \lambda$ να αληθεύει ότι

$$\xi \in J \Rightarrow G(\xi) = \lambda_0$$

Θέτουμε $I_\xi^* = J \cap I_\xi$ και συμβολίζουμε ως I τη διαγώνια τομή των $\{I_\xi^*\}_\xi$.

$$\lambda \in I \Leftrightarrow \lambda \in J \ \& \ (\forall \xi < \lambda)[\lambda \in I_\xi]$$

Θα αποδείξουμε ότι το I αποτελεί ομογενές σύνολο για την F. Πράγματι, έστω $A \subseteq I$ πληθικότητας n και ξ το ελάχιστο στοιχείο του A. Θεωρούμε $B = A \setminus \{\xi\}$. Παρατηρούμε ότι $B \subseteq I_\xi$, οπότε

$$F(B) = F_\xi(A) = G(\xi) = \lambda_0$$

και άρα το ζητούμενο αληθεύει. □

Ως $\varkappa^{<\omega}$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των πεπερασμένων, μη-κενών υποσυνόλων του $\varkappa$.

$$\varkappa^{<\omega} = \bigcup_{n \geq 1} \varkappa^{[n]}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 13. Κάθε απεικόνιση $F : \varkappa^{<\omega} \longrightarrow \lambda$ θα καλείται *διαμέριση* του $\varkappa^{<\omega}$ σε λ μέρη. Ένα υποσύνολο $I \subseteq \varkappa$ θα καλείται *ομογενές* για τη διαμέριση F αν για κάθε $A, B \in \varkappa^{<\omega}$,

$$A \subseteq I \ \& \ B \subseteq I \ \& \ card(A) = card(B) < \aleph_0 \Rightarrow F(A) = F(B)$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Έστω $\{F_i\}_{i \in \omega}$ μία οικογένεια διαμερίσεων του $\varkappa^{<\omega}$ σε λ μέρη. Εάν το $\mathcal{U}$ αποτελεί ένα κανονικό υπερφίλτρο του πληθαρίθμου $\varkappa$, τότε υπάρχει $I \in \mathcal{U}$, ομογενές για όλες τις διαμερίσεις F_i.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε $F_{i,n} : \varkappa^{[n]} \longrightarrow \lambda$ ως εξής,

$$F_{i,n}(A) = F_i(A), \ A \in \varkappa^{[n]}$$

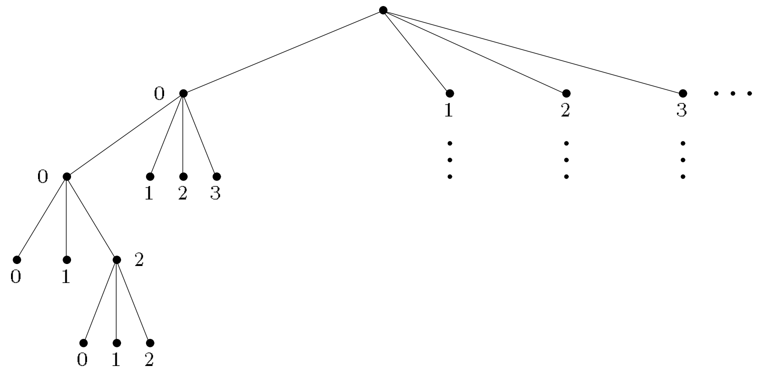
Κάνοντας χρήση του θεωρήματος 7, θεωρούμε σύνολα $I_{i,n} \in \mathcal{U}$ ομογενή για τις αντίστοιχες διαμερίσεις $F_{i,n}$ και θέτουμε $I = \bigcap_{i,n} I_{i,n}$. Το ζητούμενο έπεται άμεσα. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 14. Έστω $\varkappa, \lambda$ πληθάριθμοι τ.ω. $\varkappa \geq \lambda$. Θα γράφουμε $\varkappa \rightarrow (\lambda)^{<\omega}$ αν για κάθε ακολουθία $\{F_i\}_{i \in \omega}$ διαμερίσεων $F_i : \varkappa^{<\omega} \longrightarrow \omega$ υπάρχει σύνολο $I \subseteq \varkappa$ πληθικότητας λ, ομογενές για όλες τις F_i.

Ο $\varkappa$ θα καλείται πληθάριθμος Ramsey αν $\varkappa \rightarrow (\varkappa)^{<\omega}$. Αποδεικνύεται ότι κάθε μετρήσιμος πληθάριθμος είναι πληθάριθμος Ramsey και άρα

$$\varkappa \text{ μετρήσιμος} \Rightarrow \varkappa \rightarrow (\aleph_1)^{<\omega}$$

Μία ενδιαφέρουσα παραπομπή σε σχέση με το συγκεκριμένο αποτέλεσμα αποτελεί το [**Kan97**].



Σχημα 1. Ο χώρος του Baire

Σε ό,τι ακολουθεί, το ω θεωρείται εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία. Ο χώρος του Baire $\mathcal{N}$ ορίζεται ως το σύνολο ω^ω εφοδιασμένο με τη τοπολογία γινόμενο. Τα υποσύνολα του χώρου του Baire θα καλούνται και σημειοσύνολα ενώ οι κλάσεις σημειοσυνόλων, σημειοκλάσεις.

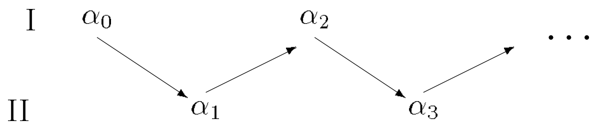
Ιδιαίτερα θα μας απασχολήσει η σημειοκλάση των αναλυτικών συνόλων (συμβ. $\mathbf{\Sigma^1_1}$) καθώς και η σημειοκλάση των συμπληρωμάτων αναλυτικών συνόλων (συμβ. $\mathbf{\Pi^1_1}$). Συγκεκριμένα,

$$\mathbf{\Sigma^1_1} =_{\text{ορσ.}} \{A \subseteq \mathcal{N} \mid A = \emptyset \vee (\exists \text{ συνεχής } f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N})[A = f[\mathcal{N}]]\}$$

$$A \in \mathbf{\Pi^1_1} \Leftrightarrow_{\text{ορσ.}} A^c \in \mathbf{\Sigma^1_1}$$

Η χρηστικότητα του χώρου του Baire έγκειται στην αποτελεσματική αντιμετώπιση ερωτημάτων σχετικών με τη τοπολογία του συνεχούς μέσω συνδυαστικών και παιγνιοθεωρητικών μεθόδων. Ως εκ τούτου, θα εισάγουμε ορισμένες έννοιες της θεωρίας παιγνίων. Σε κάθε $A \subseteq \mathcal{N}$, $A \neq \emptyset$ αντιστοιχούμε ένα παιχνίδι ως ακολούθως. Οι παίχτες I και II επιλέγουν φυσικούς αριθμούς εναλλάξ, όπως φαίνεται στο σχήμα 2, σχηματίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο μία ακολουθία $f = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathcal{N}$. Θεωρούμε ότι τόσο ο I όσο και ο II κατά την επιλογή ενός $\alpha_n \in \mathbb{N}$ έχουν γνώση όλων των προηγούμενων επιλογών του αντιπάλου. Ο παίχτης I κερδίζει τη παρτίδα αν η άπειρη ακολουθία που σχηματίζεται ανήκει στο A, διαφορετικά κερδίζει ο II.

Ως στρατηγική του παίχτη I ορίζουμε κάθε απεικόνιση σ με πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των ακολουθιών άρτιου μήκους από το ω (συμπεριλαμβανομένης και της κενής ακολουθίας) και τιμές στο ω. Θα λέμε ότι ο I ακολουθεί τη στρατηγική σ σε κάποια παρτίδα αν η άπειρη



Σχημα 2

ακολουθία $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ που προκύπτει ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \sigma(\emptyset) \\ \alpha_2 &= \sigma(\alpha_0, \alpha_1) \\ &\vdots \\ \alpha_{2n} &= \sigma(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ομοίως, ως στρατηγική του παίχτη II ορίζουμε κάθε απεικόνιση τ με πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των ακολουθιών περιττού μήκους από το ω και τιμές στο ω.

Εάν σε κάποια παρτίδα οι παίχτες I και II ακολουθούν τις στρατηγικές σ και τ αντίστοιχα, τότε η προκύπτουσα ακολουθία συμβολίζεται ως $\sigma * \tau$. Συγκεκριμένα, $\sigma * \tau = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ όπου

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \sigma(\emptyset) \\ \alpha_1 &= \tau(\alpha_0) \\ &\vdots \\ \alpha_{2n} &= \sigma(\alpha_0, \dots, \alpha_{2n-1}) \\ \alpha_{2n+1} &= \tau(\alpha_0, \dots, \alpha_{2n}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Θα καλούμε τη στρατηγική σ νικητήρια για τον I αν για κάθε τ, $\sigma * \tau \in A$. Αντίστοιχα, θα καλούμε τη στρατηγική τ νικητήρια για τον II αν για κάθε σ, αληθεύει ότι $\sigma * \tau \notin A$. Ένα σημειοσύνολο καλείται προσδιοριστό αν στο αντίστοιχο παιχνίδι, είτε ο παίχτης I ή ο παίχτης II διαθέτει νικητήρια στρατηγική. Μια σημειοκλάση καλείται προσδιοριστή αν κάθε μέλος της είναι προσδιοριστό.

Η απόδειξη της προσδιοριστότητας κάποιας σημειοκλάσης επιφέρει μία πληθώρα ιδιοτήτων κανονικότητας για τα μέλη αυτής.[1] Ωστόσο τα κλασσικά μαθηματικά αποδεικνύονται ανεπαρκή σε αυτή τη κατεύθυνση καθότι οι ενδιαφέρουσες σημειοκλάσεις, στη συντριπτική τους πλειοψηφία, επιδέχονται μη-προσδιοριστές ερμηνείες σε non-standard μοντέλα

[1] Παράβαλλε [**Mos80**]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I} & \alpha_0 \arrow[dr] & & \alpha_2 \arrow[dr] & & \cdots \\
\mathrm{II} & & \alpha_1, \xi_1 \arrow[ur] & & \alpha_3, \xi_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Σχημα 3

της ZFC. Ως εκ τούτου η αξιωματική παραδοχή ορισμένων ισχυρισμών προσδιοριστότητας αποτελεί συνήθη πρακτική στα πλαίσια της σύγχρονης συνολοθεωρίας. Η τάση αυτή εδραιώνεται εν μέρει μέσω της συσχέτισης των εν λόγω ισχυρισμών με υποθέσεις υψηλών πληθαρίθμων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το θεώρημα του Martin, το οποίο και πρόκειται να αποδείξουμε.

Ορίζουμε μία έννοια κωδικοποίησης πεπερασμένων ακολουθιών του ω από στοιχεία του ω. Έστω $p_i =$ ο i-οστός πρώτος αριθμός. Για κάθε $n \in \omega$, θέτουμε $\langle t_0, \ldots, t_{n-1} \rangle = p_0^{t_0+1} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{t_{n-1}+1}$ και $\langle \emptyset \rangle = 1$. Ορίζουμε σχέση $Seq \subseteq \omega$ ως εξής,

$$Seq(u) \Leftrightarrow u = 1 \text{ ή } u = \langle t_0, \ldots, t_{n-1} \rangle \text{ για κάποια } t_0, \ldots, t_{n-1}$$

Επιπλέον, δοθέντος $\langle t_0, \ldots, t_{n-1} \rangle \in \omega$, θέτουμε

$$lh(\langle t_0, \ldots, t_{n-1} \rangle) = n \;\text{ και }\; (\langle t_0, \ldots, t_{n-1} \rangle)_i = t_i$$

Οι τιμές των $lh(u)$ και $(u)_i$ όταν $\neg Seq(u)$ ή $i \geq lh(u)$ είναι άνευ σημασίας και μπορούν να οριστούν συμβατικά ίσες με 0. Για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$, θέτουμε $\overline{\alpha}(n) = \langle \alpha(0), \ldots, \alpha(n-1) \rangle$.

Το ακόλουθο λήμμα κανονικής μορφής των $\mathbf{\Pi^1_1}$ συνόλων αποδεικνύεται στο [**Mos80**].

Λημμα 4. *Εάν $A \in \mathbf{\Pi^1_1}$, τότε υπάρχει κατάλληλη απεικόνιση D που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Το πεδίο ορισμού της D αποτελείται από τους κωδικούς πεπερασμένων ακολουθιών άρτιου μήκους. Συγκεκριμένα,*

$$domain(D) = \{u \mid Seq(u) \,\&\, lh(u) = \textit{άρτιος}\}$$

2. *Εάν $Seq(u) \,\&\, lh(u) = 2n$, τότε η εικόνα $D(u)$ αποτελεί διάταξη με πεδίο ένα σύνολο n ακεραίων.*
3. *Εάν $t < s$, τότε η $D(\overline{\alpha}(2\tau))$ αποτελεί υποδιάταξη της $D(\overline{\alpha}(2s))$.*
4. *Η ακόλουθη ισοδυναμία αληθεύει,*

$$\alpha \in A \Leftrightarrow \eta \bigcup_{t \in \omega} D(\overline{\alpha}(2t)) \textit{ αποτελεί καλή διάταξη}$$

$$\begin{array}{llllllll}
\mathrm{I} & \alpha_0 & & \alpha_2 & & \cdots & \alpha_{2t-2} & \\
\mathrm{II} & & \alpha_1, \xi_{n(1)} & & \alpha_3, \xi_{n(2)} & \cdots & & \alpha_{2t-1}, \xi_{n(t)}
\end{array}$$

Σχημα 4

Θεωρημα 8 (Martin, 1970). *Εάν υπάρχει πληθάριθμος κ τέτοιος ώστε $\kappa \to (\aleph_1)^{<\omega}$, τότε η σημειοκλάση $\mathbf{\Sigma}^1_1$ είναι προσδιοριστή.*

Αποδειξη. Έστω $A \subseteq \mathcal{N}$, $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1$. Σύμφωνα με το λήμμα 4, υπάρχει κατάλληλη απεικόνιση D τ.ω.

$$\alpha \notin A \Leftrightarrow \text{η} \bigcup_{t \in \omega} D(\overline{\alpha}(2t)) \text{ αποτελεί καλή διάταξη}$$

Ορίζουμε ένα νέο παιχνίδι A^* στο οποίο ο παίχτης ΙΙ κάνει επιπρόσθετες κινήσεις παίζοντας στοιχεία του πληθαρίθμου κ όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Στο τέλος κάθε παρτίδας έχει σχηματιστεί ένας άρρητος[2] $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ καθώς και μία άπειρη ακολουθία διατακτικών $\xi_0, \xi_1, \dots$ μικρότερων του κ. Θεωρούμε ότι για κάθε t,

$$Field(D(\overline{\alpha}(2t))) = \{x_1, \dots, x_t\}$$

και άρα

$$Field(\bigcup_{t \in \omega} D(\overline{\alpha}(2t))) = \{x_1, x_2, \dots\}$$

Ο παίχτης ΙΙ κερδίζει την παρτίδα αν η απεικόνιση $x_t \mapsto \xi_t$ σέβεται τη διάταξη. Προφανώς, το παιχνίδι A^* είναι ανοιχτό και άρα προσδιοριστό. Επιπλέον, εάν ο παίχτης ΙΙ κερδίζει το A^*, τότε κερδίζει και το A.

Υποθέτουμε ότι ο παίχτης Ι κερδίζει το A^* μέσω κατάλληλης στρατηγικής σ^*. Θα αποδείξουμε ότι ο Ι κερδίζει και το A. Θεωρούμε διατακτικούς $\xi_1, \dots, \xi_t$ και έναν κωδικό ακολουθίας $u = \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{2t-1} \rangle$. Συμβολίζουμε με $\xi_{n(1)}, \dots, \xi_{n(t)}$ την τυχαία αναδιάταξη των $\xi_1, \dots, \xi_t$ και αντιλαμβανόμαστε την ακολουθία κινήσεων που παρουσιάζεται στο σχήμα 4 ως ένα αρχικό τμήμα κάποιας παρτίδας του A^*. Προφανώς, υπάρχει ακριβώς μία αναδιάταξη των $\xi_1, \dots, \xi_t$ τέτοια ώστε ο ΙΙ να μην έχει χάσει την παρτίδα ήδη από τις πρώτες t κινήσεις. Συμβολίζουμε την εν λόγω αναδιάταξη με $\xi_{n(u,1)}, \dots, \xi_{n(u,t)}$. Για κάθε κωδικό ακολουθίας $u = \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{2t-1} \rangle$ μήκους $2t$, ορίζουμε διαμέριση $F_u : \kappa^{[t]} \longrightarrow \omega$ ως εξής,

$$F_u(\{\xi_1, \dots, \xi_t\}) = \sigma^*(\alpha_0, (\alpha_1, \xi_{n(u,1)}), \dots, \alpha_{2t-2}, (\alpha_{2t-1}, \xi_{n(u,t)}))$$

[2]Τα στοιχεία του χώρου του Baire καλούνται και άρρητοι.

Έστω $J \subseteq \kappa$ σύνολο πληθικότητας $\aleph_1$, ομογενές για όλες τις διαμερίσεις F_u. Θέτουμε

$$\sigma(\alpha_0, \ldots, \alpha_{2t-1}) = F_u(\{\xi_1, \ldots, \xi_t\})$$

όπου $u = \langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{2t-1} \rangle$ και οι διατακτικοί $\xi_1, \ldots, \xi_t$ ανήκουν στο J.

Θα αποδείξουμε ότι η σ αποτελεί νικητήρια στρατηγική για τον παίχτη I στο παιχνίδι A. Προς άτοπο, υποθέτουμε ότι ο I ακολουθεί τη σ σε κάποια παρτίδα του A, αλλά σχηματίζεται κατ' αυτόν τον τρόπο ένας άρρητος $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ τέτοιος ώστε $\alpha \notin A$. Εξ ορισμού, η ένωση $\bigcup_t D(\overline{\alpha}(2t))$ αποτελεί μία καλή διάταξη αριθμήσιμης τάξης. Εάν

$$Field(\bigcup_{t \in \omega} D(\overline{\alpha}(2t))) = \{x_1, x_2, \ldots\},$$

τότε υπάρχει κατάλληλη απεικόνιση $x_t \mapsto \xi_t$ η οποία σέβεται τη διάταξη και για την οποία αληθεύει ότι κάθε ξ_t ανήκει στο J. Είναι εμφανές ότι στη παρτίδα που απεικονίζεται στο σχήμα 3, ο παίχτης I παίζει σύμφωνα με τη σ^* και όμως χάνει - άτοπο. □

4. Μια εφαρμογή στη Θεωρία Μοντέλων

Η ακόλουθη εκδοχή του θεωρήματος του Ramsey αποδεικνύεται άμεσα με τις τεχνικές που αναλύσαμε στο κεφάλαιο 1.

Θεωρημα 9. *Έστω I ένα άπειρο σύνολο και $n \in \omega$. Υποθέτουμε ότι $[I]^n \subseteq A_0 \cup A_1$. Τότε υπάρχει άπειρο $J \subseteq I$ τέτοιο ώστε είτε $[J]^n \subseteq A_0$ ή $[J]^n \subseteq A_1$.*

Έστω $\mathcal{L}$ μία πρωτοβάθμια γλώσσα και T ένα σύνολο προτάσεων της $\mathcal{L}$ το οποίο ικανοποιείται σε κάποιο άπειρο μοντέλο. Θεωρούμε ένα αριθμήσιμο πλήθος νέων συμβόλων σταθερών $\{c_n\}_{n \in \omega}$ και θέτουμε $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_n \mid n \in \omega\}$. Ορίζουμε σύνολο T' ως εξής,

$$\begin{aligned} T' = T \cup \{\varphi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(c_{j_1}, \ldots, c_{j_n}) \mid \varphi \in FM(\mathcal{L}) \\ \& \, i_1 < \ldots < i_n \, \& \, j_1 < \ldots < j_n\} \\ \cup \{\neg(c_{i_1} = c_{i_2}) \mid i_1 \neq i_2\} \end{aligned}$$

Λημμα 5. *Το T' αποτελεί ένα συνεπές σύνολο προτάσεων της $\mathcal{L}'$.*

Αποδειξη. Έστω $\mathcal{A}$ ένα άπειρο μοντέλο του T και I ένα αριθμήσιμα άπειρο υποσύνολο του σύμπαντος A. Αναπαριστούμε τα στοιχεία του I μέσω κατάλληλης διάταξης ως

$$i_0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_n < \ldots$$

Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε πεπερασμένο $\Delta \subseteq T'$, υπάρχει ένα άπειρο $J_\Delta \subseteq I$ τέτοιο ώστε για κάθε άπειρο υποσύνολο $j_0 < j_1 < \ldots < j_n < \ldots$ του J_Δ, η δομή $(\mathcal{A}, j_n)_{n \in \omega}$ να αποτελεί μοντέλο του Δ.

Πράγματι, κάνοντας χρήση επαγωγής στη πληθικότητα του Δ υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για κάποιο πεπερασμένο $\Delta \subsetneq T'$. Θεωρούμε τύπο $\varphi(v_1, \ldots, v_m)$ της $\mathcal{L}$ και διαμερίζουμε το $[J_\Delta]^m$ σε δύο τμήματα,

$$\begin{aligned} A_0 &= \{x_1 < \ldots < x_m \mid x_i \in J_\Delta \,\&\, \mathcal{A} \models \varphi[x_1, \ldots, x_m]\} \text{ και} \\ A_1 &= \{x_1 < \ldots < x_m \mid x_i \in J_\Delta \,\&\, \mathcal{A} \models \neg\varphi[x_1, \ldots, x_m]\} \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 9, υπάρχει άπειρο $K \subseteq J_\Delta$ τέτοιο ώστε είτε $[K]^m \subseteq A_0$ ή $[K]^m \subseteq A_1$. Έστω $k_0 < \ldots < k_n < \ldots$ ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του K. Είναι εμφανές ότι σε κάθε περίπτωση η δομή $(\mathcal{A}, k_n)_{n \in \omega}$ ικανοποιεί όλες τις προτάσεις της μορφής

$$\varphi(c_{s_1}, \ldots, c_{s_m}) \leftrightarrow \varphi(c_{t_1}, \ldots, c_{t_m}),$$

όπου $s_1 < \ldots < s_m$ και $t_1 < \ldots < t_m$. Επιπλέον η $(\mathcal{A}, k_n)_{n \in \omega}$ αποτελεί μοντέλο του Δ και άρα ο ισχυρισμός αληθεύει. Το ζητούμενο έπεται άμεσα μέσω του θεωρήματος συμπάγειας του κατηγορηματικού λογισμού. □

Έστω $\mathcal{A}$ μία $\mathcal{L}$-δομή με σύμπαν το σύνολο A. Το τυχαίο γραμμικά διατεταγμένο $X \subseteq A$ θα καλείται *σύνολο μη διακριτών στοιχείων στην* $\mathcal{A}$ αν για κάθε $n \in \omega$, κάθε $\varphi(u_1, \ldots, u_n) \in FM(\mathcal{L})$ και όλες τις ακολουθίες $x_1 < \ldots < x_n$ και $y_1 < \ldots < y_n$ από το X, αληθεύει ότι

$$\mathcal{A} \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[y_1, \ldots, y_n]$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 10. *Έστω $\mathcal{L}$ μία πρωτοβάθμια γλώσσα και T ένα σύνολο προτάσεων της $\mathcal{L}$ το οποίο ικανοποιείται σε κάποιο άπειρο μοντέλο. Για κάθε γραμμικά διατεταγμένο σύνολο X, υπάρχει μοντέλο $\mathcal{A} \models T$ τέτοιο ώστε το X να αποτελεί σύνολο μη διακριτών στοιχείων στο $\mathcal{A}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από το λήμμα 5. □

Το θεώρημα 10 αποδεικνύεται στη γενικότητά του στα πλαίσια του [**EM56**]. Αξίζει όμως να επισημανθεί ότι μία ειδική περίπτωση αυτού παρουσιάζεται στο [**Ram30**] με σκοπό την απόδειξη της αποκρισιμότητας των λεγόμενων *καθολικών νόμων.*[3]

Στη σύγχρονη θεωρία μοντέλων αποτελεί συνήθη πρακτική η χρήση μη διακριτών στοιχείων, ιδιαίτερα σε συνδυασμό με την καλά καθιερωμένη έννοια των απεικονίσεων Skolem. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο διατυπώνεται στη δημοσίευση του Morley, [**Mor65**] και σχετίζεται με την απόδειξη του περίφημου

[3]Οι καθολικοί νόμοι μίας πρωτοβάθμιας γλώσσας $\mathcal{L}$ ορίζονται ως οι προτάσεις της $\mathcal{L}$ οι οποίες στη κανονική τους μορφή δεν περιέχουν υπαρξιακούς ποσοδείκτες.

θεωρήματος κατηγορικότητας. Η ανάγνωση του προϋποθέτει ορισμένες στοιχειώδεις γνώσεις θεωρίας μοντέλων.

Θεωρημα 11. *Έστω $\mathcal{L}$ μία πρωτοβάθμια αριθμήσιμη γλώσσα και T ένα σύνολο προτάσεων της $\mathcal{L}$ το οποίο ικανοποιείται σε κάποια άπειρη δομή. Για κάθε άπειρο πληθάριθμο λ, υπάρχει μοντέλο $\mathcal{A} \models T$ πληθικότητας λ τέτοιο ώστε για κάθε $B \subseteq A$, η δομή $(\mathcal{A}, b)_{b \in B}$ να ικανοποιεί το πολύ* $\mathrm{card}(B) \cup \omega$ *types στην επεκτεταμένη γλώσσα* $\mathcal{L} \cup \{c_b \mid b \in B\}$.

Αποδειξη. Επεκτείνουμε τη γλώσσα $\mathcal{L}$ σε $\overline{\mathcal{L}}$ και τη θεωρία T σε $\overline{T}$ έτσι ώστε η $\overline{T}$ να έχει ενσωματωμένες συναρτήσεις Skolem στην $\overline{\mathcal{L}}$. Έστω $(X, <)$ ένα γραμμικά διατεταγμένο σύνολο πληθικότητας λ. Σύμφωνα με το θεώρημα 10, το X μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύνολο μη διακριτών στοιχείων σε κατάλληλη δομή $\mathcal{B}$ της $\overline{\mathcal{L}}$ τέτοια ώστε $\mathcal{B} \models \overline{T}$. Επιπλέον, εάν $\mathcal{H}(X)$ είναι η δομή που παράγεται από το X στη $\mathcal{B}$, τότε $\mathcal{H}(X) \prec \mathcal{B}$ (γιατί εφόσον η $\overline{T}$ έχει ενσωματωμένες συναρτήσεις Skolem, η $\mathcal{H}(X)$ ταυτίζεται με την υποδομή της $\mathcal{B}$ που παράγεται από το κέλυφος Skolem του X και γνωρίζουμε ότι η τελευταία αποτελεί στοιχειώδη υποδομή της $\mathcal{B}$). Άρα $\mathcal{H}(X) \models \overline{T}$. Δεδομένου ότι η $\overline{\mathcal{L}}$ παραμένει αριθμήσιμη, έπεται ότι η πληθικότητα του σύμπαντος της $\mathcal{H}(X)$ είναι λ.

Ορίζουμε ως $\mathcal{A}$ τον περιορισμό της $\mathcal{H}(X)$ πάνω από τη γλώσσα $\mathcal{L}$. Η δομή $\mathcal{A}$ αποτελεί το ζητούμενο μοντέλο της T. Πράγματι, έστω $B \subseteq A$. Επιλέγουμε κανονικές αναπαραστάσεις[4] για όλα τα $b \in B$ και θεωρούμε ως Y το σύνολο όλων των $y \in X$ τα οποία εμφανίζονται σε κάποιες από αυτές τις αναπαραστάσεις. Προφανώς, $\mathrm{card}(Y) \leq card(B) \cup \omega$. Στα πλαίσια της απόδειξης δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμος. Δύο ακολουθίες $x_1 < \ldots < x_n$ και $y_1 < \ldots < y_n$ στοιχείων του X καλούνται ισοδύναμες πάνω από το $Y \subseteq X$ αν για κάθε $k \leq n$ και κάθε $z \in Y$, ισχύει ότι $x_k \neq z \,\&\, y_k \neq z \,\&\, (x_k < z \leftrightarrow y_k < z)$.

Όταν οι $x_1 < \ldots < x_n$ και $y_1 < \ldots, y_n$ είναι ισοδύναμες πάνω από το Y, τότε ικανοποιούν τους ίδιους τύπους στη δομή $(\mathcal{H}(X), z)_{z \in Y}$. Άρα αν οι $x_1 < \ldots < x_n$ και $y_1 < \ldots < y_n$ είναι ισοδύναμες πάνω από το Y έπεται ότι για κάθε όρο $t(v_1, \ldots, v_n)$ της $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_z \mid z \in Y\}$, τα στοιχεία $t(x_1, \ldots, x_n)$ και $t(y_1, \ldots, y_n)$ ικανοποιούν το ίδιο type στη δομή $(\mathcal{H}(X), z)_{z \in Y}$. Κάθε στοιχείο του συνόλου A εκφράζεται στη δομή $(\mathcal{H}(X), z)_{z \in Y}$ ως $t(x_1, \ldots, x_n)$ όπου ο t είναι κατάλληλος όρος της $\mathcal{L}'$, $x_1 < \ldots < x_n$ και $x_1 \notin Y, \ldots, x_n \notin Y$. Όμως υπάρχουν το πολύ $\mathrm{card}(Y) \cup \omega$ όροι στη γλώσσα $\mathcal{L}'$ και επιπλέον για κάθε $n < \omega$ υπάρχουν το πολύ $\mathrm{card}(Y) \cup \omega$ μη-ισοδύναμες n-άδες πάνω από το Y. Πράγματι,

[4]Κάθε στοιχείο $b \in B$ αναπαρίσταται ως $t(x_1, \ldots, x_n)$ όπου $x_1 < \ldots < x_n$ και $x_1 \in X, \ldots, x_n \in X$.

αν για κάθε $x \in X$ θέσουμε

$$x' = \begin{cases} (\mu z \in Y)[x < z] \text{ αν } (\exists z \in Y)[x < z] \\ \\ \infty \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

τότε οι $x_1 < \ldots < x_n$ και $y_1 < \ldots < y_n$ είναι ισοδύναμες πάνω από το Y αν και μόνο αν για κάθε $k \leq n$ και κάθε $z \in Z$, αληθεύει ότι $x_k \neq z \,\&\, y_k \neq z \,\&\, x'_k \neq y'_k$. Συμπεραινουμε ότι η δομή $(\mathcal{H}(X), z)_{z \in Y}$ ικανοποιεί το πολύ $\mathrm{card}(Y) \cup \omega \leq \mathrm{card}(B) \cup \omega$ types και άρα οι δομές $(\mathcal{H}(X), b)_{b \in B}$ και $(\mathcal{A}, b)_{b \in B}$ ικανοποιούν το πολύ $\mathrm{card}(B) \cup \omega$ types η κάθε μία. □

Η συμβολή του θεωρήματος 11 στη θεωρία μοντέλων έγκειται στη διαλεύκανση της εξάρτησης που παρουσιάζουν οι έννοιες της κατηγορικότητας και της μοντελοθεωρητικής ευστάθειας.

Ορισμος 15. Η θεωρία T θα καλείται λ-κατηγορική αν διαθέτει ακριβώς ένα μοντέλο πληθικότητας λ, modulo ισομορφισμού.

Ορισμος 16 (Rowbottom). Η θεωρία T ονομάζεται λ-ευσταθής αν για κάθε μοντέλο $\mathcal{A}$ της T και κάθε $X \subseteq A$ πληθικότητας λ, η δομή $(\mathcal{A}, x)_{x \in X}$ ικανοποιεί ακριβώς λ types μίας συγκεκριμένης μεταβλητής.

Θεωρημα 12 (Morley). *Αν μία θεωρία T σε αριθμήσιμη γλώσσα είναι λ-κατηγορική για κάποιον υπεραριθμήσιμο πληθάριθμο λ, τότε η T είναι $\aleph_0$-ευσταθής.*

Αποδειξη. Προς άτοπο έστω ότι η T δεν είναι $\aleph_0$-ευσταθής. Τότε υπάρχει $\mathcal{A} \models T$ πληθικότητας $\aleph_1$ και $X \subseteq A$ πληθικότητας $\aleph_0$ έτσι ώστε η δομή $(\mathcal{A}, x)_{x \in X}$ να ικανοποιεί ακριβώς $\aleph_1$ types. Σύμφωνα με το θεώρημα 11, υπάρχει $\mathcal{B} \models T$ πληθικότητας λ τέτοιο ώστε για κάθε $Y \subseteq B$, η δομή $(\mathcal{B}, y)_{y \in Y}$ να ικανοποιεί το πολύ $\mathrm{card}(Y) \cup \omega$ types. Αλλά δεδομένου ότι η T είναι λ-κατηγορική, έπεται ότι όλα τα μοντέλα της T πληθικότητας λ έχουν την παραπάνω ιδιότητα. Επιπλέον, σύμφωνα με το ανοδικό Löwenheim-Skolem θεώρημα, η δομή $\mathcal{A}$ έχει μια στοιχειώδη επέκταση $\mathcal{C}$ πληθικότητας λ. Συνεπώς η δομή $(\mathcal{C}, x)_{x \in X}$ ικανοποιεί το πολύ $\mathrm{card}(X) \cup \omega = \omega$ types, ενώ η $(\mathcal{A}, x)_{x \in X}$ ικανοποιεί $\aleph_1$ types. Άτοπο, αφού κάθε στοιχείο του A ικανοποιεί το ίδιο type στην $(\mathcal{A}, x)_{x \in X}$ και στην $(\mathcal{C}, x)_{x \in X}$.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Οι απαρχές της Θεωρίας Ramsey

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την απόδειξη δύο θεωρημάτων τα οποία διαδραμάτισαν σημαίνοντα ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας Ramsey. Το υλικό που παραθέτουμε καθιστά εφικτή τη γενίκευση των αποτελεσμάτων του κεφαλαίου 1 σε εξαιρετικά ενδιαφέρουσες συνδυαστικές δομές.[1]

1. Το θεώρημα του Van der Waerden

ΘΕΩΡΗΜΑ 13 (B.L. van der Waerden, 1927). *Αν διαμερίσουμε τους φυσικούς αριθμούς σε δύο σύνολα, τότε τουλάχιστον ένα από αυτά πρέπει να περιέχει αριθμητικές προόδους τυχαίου μήκους.*

Σε ό,τι αφορά την απόδειξη του θεωρήματος 13, παρατηρούμε ότι αρκεί να ασχοληθούμε με την ακόλουθη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. *Για κάθε $k, r \in \mathbb{N}$, υπάρχει $W(k,r) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε αν το σύνολο $\{1, 2, \ldots, W(k,r)\}$ διαμεριστεί σε r κλάσεις ισοδυναμίας τότε τουλάχιστον μία από αυτές να περιέχει μία αριθμητική πρόοδο μήκους k.*

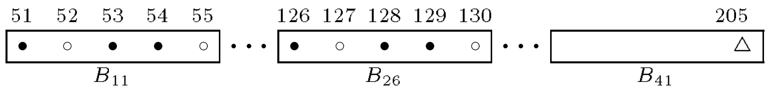
Η πρόταση 1 είναι προφανής για $k = 2$, $r \in \mathbb{N}$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $W(2,r) = r + 1$ τότε το ζητούμενο έπεται άμεσα.

Ας ασχοληθούμε προς στιγμήν με την περίπτωση $k = 3, r = 2$. Ισχυριζόμαστε ότι αρκεί να θεωρήσουμε $W(3,2) = 5 \cdot (2 \cdot 2^5 + 1) = 325$. Χρωματίζουμε το σύνολο $[1, 325] := \{1, \ldots, 325\}$ με δύο χρώματα και επιπλέον διαμερίζουμε αυτό σε 65 τμήματα μήκους 5 το καθένα ως εξής,

$$[1, 325] = [1, 5] \cup [6, 10] \cup \ldots \cup [321, 325]$$

Υπάρχουν $2^5 = 32$ πιθανοί τρόποι 2-χρωματισμού κάθε τμήματος. Συνεπώς ανάμεσα στα 33 πρώτα τμήματα υπάρχουν 2 τα οποία χρωματίζονται με τον ίδιο τρόπο. Έστω ότι είναι τα $B_{11} = \{51, 52, 53, 54, 55\}$ και $B_{26} = \{126, 127, 128, 129, 130\}$. Δύο από τα πρώτα τρία στοιχεία του B_{11} πρέπει να έχουν το ίδιο χρώμα. Έστω j και $j + d$ τα στοιχεία αυτά. Δεδομένου ότι $j, j + d \in \{51, 52, 53\}$ έπεται ότι $j + 2d \in B_{11}$

[1] Σχετικές παραπομπές αποτελούν τα [**GR71**] και [**NR90**].



ΣΧΗΜΑ 1

(αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο επιλέγουμε τα blocks να έχουν μήκος 5). Αν το $j+2d$ έχει το ίδιο χρώμα με το j τότε έχουμε τελειώσει. Υποθέτουμε ότι το $j+2d$ έχει διαφορετικό χρώμα από το j. Έστω ότι το j είναι κόκκινο ενώ το $j+2d$ μπλε. Μία αντιπροσωπευτική εικόνα παρουσιάζεται στο σχήμα 1, όπου έχουμε θεωρήσει ότι $j=51$ και $d=2$. Αν ο $205 \in B_{41}$ είναι μπλε τότε τα $55, 130, 205$ σχηματίζουν μια μονοχρωματική αριθμητική πρόοδο μήκους 3. Ομοίως αν ο 205 είναι κόκκινος τότε τα $51, 128, 205$ σχηματίζουν μία κόκκινη αριθμητική πρόοδο μήκους 3.

Ας ασχοληθούμε στη συνέχεια με την περίπτωση $k=3, r=3$. Ισχυριζόμαστε ότι αρκεί να θέσουμε

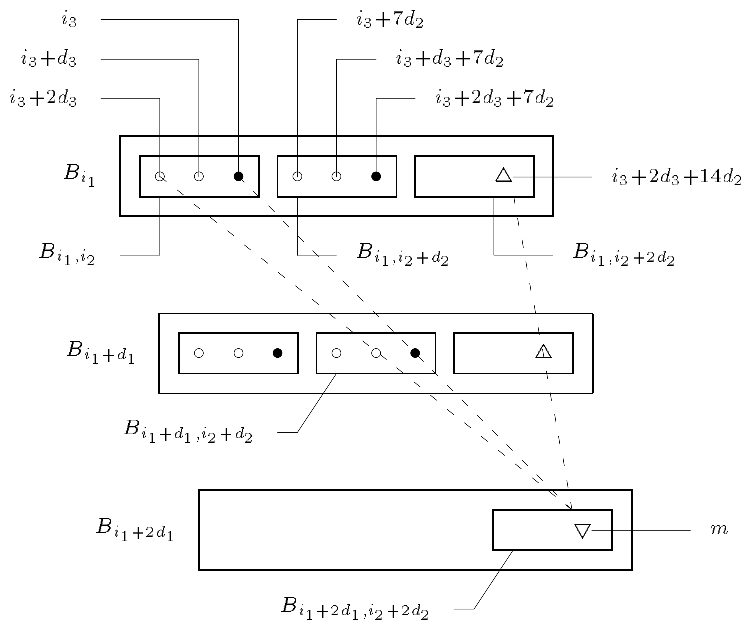
$$W(3,3) = 7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1) \cdot (2 \cdot 3^{7\cdot(2\cdot 3^7+1)} + 1)$$

Χρωματίζουμε το σύνολο $\{1, 2, \ldots, 7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1) \cdot (2 \cdot 3^{7\cdot(2\cdot 3^7+1)} + 1)\}$ με 3 χρώματα. Διαμερίζουμε το παραπάνω σύνολο σε $2 \cdot 3^{7\cdot(2\cdot 3^7+1)} + 1$ τμήματα B_i πληθικότητας $7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1)$ το καθένα. Υπάρχουν $3^{7\cdot(2\cdot 3^7+1)}$ τρόποι να χρωματιστεί (με 3 χρώματα) κάθε B_i. Συνεπώς ανάμεσα στα $3^{7\cdot(2\cdot 3^7+1)} + 1$ πρώτα τμήματα υπάρχουν δύο, έστω B_{i_1} και $B_{i_1+d_1}$, που χρωματίζονται με τον ίδιο τρόπο. Για κάθε i, διαμερίζουμε το B_i σε $2 \cdot 3^7 + 1$ υποτμήματα $B_{i,j}$ πληθικότητας 7 το καθένα. Υπάρχουν 3^7 τρόποι να χρωματιστεί (με 3 χρώματα) κάθε $B_{i,j}$. Έπεται ότι ανάμεσα στα 3^7+1 πρώτα υποτμήματα $B_{i,j}$ υπάρχουν δύο, έστω B_{i_1,i_2} και B_{i_1,i_2+d_2}, που χρωματίζονται με τον ίδιο τρόπο. Τα πρώτα τέσσερα στοιχεία του B_{i_1,i_2} περιέχουν δύο, έστω i_3 και i_3+d_3, ίδιου χρώματος (π.χ. κόκκινου). Παρατηρούμε ότι $i_3 + 2d_3 \in B_{i_1,i_2}$. Υποθέτουμε ότι το $i_3 + 2d_3$ είναι μπλε (αν ήταν κόκκινο θα είχαμε τελειώσει). Από την επιλογή των i_2, d_2, έπεται ότι $B_{i_1,i_2+d_2} \subseteq B_{i_1}$. Δεδομένου ότι τα B_{i_1,i_2} και B_{i_1,i_2+d_2} χρωματίζονται με τον ίδιο τρόπο, έπεται ότι οι αριθμοί $i_3 + 7d_2$ και $i_3 + d_3 + 7d_2$ είναι κόκκινοι ενώ ο αριθμός $i_3 + 2d_3 + 7d_2$ είναι μπλε. Αν το $i_3 + 2d_3 + 14d_2 \in B_{i_1,i_2+2d_2}$ είναι μπλε τότε τα

$$i_3 + 2d_3,\ i_3 + 2d_3 + 7d_2,\ i_3 + 2d_3 + 14d_2$$

σχηματίζουν μονοχρωματική αριθμητική πρόοδο. Αν το $i_3 + 2d_3 + 14d_2$ είναι κόκκινο τότε τα

$$i_3,\ i_3 + d_3 + 7d_2,\ i_3 + 2d_3 + 14d_2$$



Σχημα 2

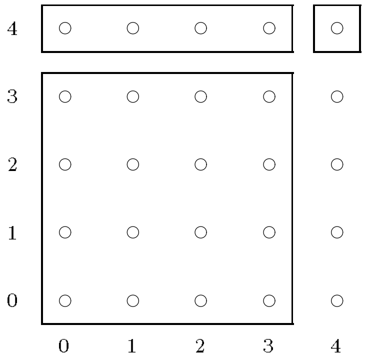
σχηματίζουν μονοχρωματική αριθμητική πρόοδο. Υποθέτουμε ότι το $i_3 + 2d_3 + 14d_2$ είναι κίτρινο. Προφανώς (αφού τα B_{i_1} και $B_{i_1+d_1}$ χρωματίζονται με τον ίδιο τρόπο)

- οι αριθμοί $i_3 + 7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1) \cdot d_1$, $i_3 + d_3 + 7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1) \cdot d_1$ και $i_3 + 7 \cdot d_2 + 7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1) \cdot d_1$ είναι κόκκινοι
- οι αριθμοί $i_3+2d_3+7\cdot(2\cdot 3^7+1)\cdot d_1$, $i_3+2d_3+7d_2+7\cdot(2\cdot 3^7+1)\cdot d_1$ είναι μπλε και
- ο αριθμός $i_3 + 2d_3 + 14d_2 + 7 \cdot (3^7 + 1) \cdot d_1$ είναι κίτρινος

Θέτουμε $m = i_3 + 2d_3 + 14d_2 + 14 \cdot (3^7 + 1) \cdot d_1 \in B_{i_1+2d_1}$. Τότε

- αν ο m είναι κόκκινος, η ζητούμενη αριθμητική πρόοδος είναι η
$$i_3,\ i_3 + d_3 + 7d_2 + 7(3^7 + 1)d_1,\ m$$
- αν ο m είναι μπλε, η ζητούμενη αριθμητική πρόοδος είναι η
$$i_3 + 2d_3,\ i_3 + 2d_3 + 7d_2 + 7(3^7 + 1)d_1,\ m$$
- αν ο m είναι κίτρινος, η ζητούμενη αριθμητική πρόοδος είναι η
$$i_3 + 2d_3 + 14d_2,\ i_3 + 2d_3 + 14d_2 + 7(3^7 + 1)d_1,\ m$$

Εκμεταλλευόμενοι τις πληροφορίες που παρέχουν τα ανωτέρω παραδείγματα, προχωρούμε προς τη γενική απόδειξη.



Σχημα 3

Ορισμος 17. Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $0 \leq i \leq m$. Το σύνολο των m-άδων $(x_1, \ldots, x_m) \in [0, l]^m$ για τις οποίες ισχύει ότι το l εμφανίζεται στις i δεξιότερες συντεταγμένες και μόνο, καλείται κλάση l-ισοδυναμίας.

Δοθέντος m υπάρχουν $m + 1$ κλάσεις l-ισοδυναμίας οι οποίες διαμερίζουν ένα γνήσιο υποσύνολο του $[0, l]^m$. Στο σχήμα 3 φαίνονται οι κλάσεις l-ισοδυναμίας για $l = 4$ και $m = 2$.

Δοθέντων $l, m \geq 1$, ορίζουμε ισχυρισμό $S(l, m)$ ως εξής
$S(l, m) \Leftrightarrow$ για κάθε r, υπάρχει $N(l, m, r)$ τέτοιο ώστε για κάθε απεικόνιση $C : [1, N(l, m, r)] \longrightarrow [1, r]$ να υπάρχουν θετικοί ακέραιοι a, $d_1, \ldots, d_m$ τέτοιοι ώστε το $C(a + \sum_{i=1}^{m} m_i d_i)$ να είναι σταθερό πάνω από κάθε κλάση l-ισοδυναμίας του $[0, l]^m$.

Είναι εμφανές ότι η πρόταση $(\forall l) S(l, 1)$ είναι ισοδύναμη με το θεώρημα του Van der Waerden[2].

Θεωρημα 14. *Για κάθε* $l, m \geq 1$, $S(l, m)$.

Αποδειξη. Δουλεύουμε επαγωγικά ως προς l και m. Προφανώς, ο ισχυρισμός $S(1, 1)$ αληθεύει. Αποδεικνύουμε ότι

$$S(l, m) \Rightarrow S(l, m + 1)$$

Έστω $r \in \mathbb{N}$, $M = N(l, m, r)$ και $M' = N(l, 1, r^M)$. Θεωρούμε χρωματισμό $C : [1, M \cdot M'] \longrightarrow [1, r]$ και ορίζουμε $C' : [1, M'] \longrightarrow [1, r^M]$ έτσι ώστε

$$C'(k) = C'(k') \Leftrightarrow C(kM - j) = C(k'M - j) \text{ για κάθε } 0 \leq j < M$$

Από την επαγωγική υπόθεση συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν a', d' τέτοια ώστε το $C'(a' + xd')$ να παραμένει σταθερό για κάθε $x \in [0, l - 1]$.

[2] στη μορφή της πρότασης 1

Θεωρούμε $I = [a'M - (M-1), a'M]$. Εφαρμόζοντας την $S(l,m)$ στο I έπεται ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $a, d_2, \ldots, d_{m+1}$ τέτοιοι ώστε

1. $a + \sum_{i=2}^{m+1} x_i d_i \in I$ για $x_i \in [0,l]$, $2 \leq i \leq m+1$
2. $C(a + \sum_{i=2}^{m+1} x_i d_i)$ =σταθερό πάνω από κλάσεις l-ισοδυναμίας

Θέτουμε $d'_i = d_i$ για κάθε $2 \leq i \leq m+1$ και $d'_1 = d'M$. Έστω $(x_1, \ldots, x_{m+1})$, $(y_1 \ldots, y_{m+1})$ στοιχεία κάποιας κλάσης l-ισοδυναμίας. Τότε, σύμφωνα με το (2), $C(a+\sum_{i=2}^{m+1} x_i d_i) = C(a+\sum_{i=2}^{m+1} y_i d_i)$. Λόγω του (1) έπεται ότι

$$a + \sum_{i=2}^{m+1} x_i d_i = a'M - j_1,\ 0 \leq j_1 < M$$

$$a + \sum_{i=2}^{m+1} y_i d_i = a'M - j_2,\ 0 \leq j_2 < M$$

και άρα $C(a'M - j_1) = C(a'M - j_2)$. Όμως $C'(a') = C'(a' + x_1 d')$ και $C'(a') = C'(a' + y_1 d')$. Συνεπώς

$$C(a'M - j_1) = C((a' + x_1 d')M - j_1) = C(a + \sum_{i=1}^{m+1} x_i d'_i)$$

$$C(a'M - j_2) = C((a' + y_1 d')M - j_2) = C(a + \sum_{i=1}^{m+1} y_i d'_i)$$

Συμπεραίνουμε ότι $C(a + \sum_{i=1}^{m+1} x_i d'_i) = C(a + \sum_{i=1}^{m+1} y_i d'_i)$.

Δείχνουμε στη συνέχεια ότι $(\forall m \geq 1) S(l,m) \Rightarrow S(l+1,1)$. Θεωρούμε $r \in \mathbb{N}$ και $C : [1, N(l,r,r)] \longrightarrow [1,r]$. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $a, d_1, \ldots, d_r$ τέτοιοι ώστε το $C(a + \sum_{i=1}^{r} x_i d_i)$ να είναι σταθερό πάνω από κλάσεις l-ισοδυναμίας. Από την αρχή του περιστερώνα έπεται ότι υπάρχουν $1 \leq u < v \leq r+1$ τ.ω.

$$C(a + \sum_{i=u}^{r} l \cdot d_i) = C(a + \sum_{i=v}^{r} l \cdot d_i)$$

Συνεπώς το $C((a + \sum_{i=v}^{r} l \cdot d_i) + x \cdot (\sum_{i=u}^{v-1} d_i))$ παραμένει σταθερό για κάθε $x \in [0,l]$, οπότε αληθεύει η πρόταση $S(l+1,1)$. $\square$

2. Το θεώρημα των Hales και Jewett

Ορίζουμε ως n-διάστατο κύβο πάνω από t στοιχεία το σύνολο

$$C_t^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 18. Ευθεία του C_t^n ονομάζεται κάθε ακολουθία $\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_{t-1}}$, $\mathbf{x_i} = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, τέτοια ώστε για κάθε $j, 1 \leq j \leq n$

$$\text{είτε } x_{0j} = x_{1j} = \ldots = x_{t-1,j}$$

$$\text{ή } x_{sj} = s \text{ για κάθε } 0 \leq s < t$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι η δεύτερη συνθήκη αληθεύει για ένα τουλάχιστον j (αλλιώς η ευθεία εκφυλίζεται σε σημείο).

Επί παραδείγματι, τα σύνολα $\{020, 121, 222, 323\}$ και $\{031, 131, 231, 331\}$ αποτελούν ευθείες του C_4^3.

ΘΕΩΡΗΜΑ 15 (A.W.Hales-R.I.Jewett, 1963). *Για κάθε r, t υπάρχει $N' = HJ(r,t)$ τέτοιο ώστε για κάθε $N \geq N'$ και κάθε r-χρωματισμό του C_t^N, ο C_t^N να περιέχει μία μονοχρωματική ευθεία.*

Στα πλαίσια του ακόλουθου ορισμού, ο συμβολισμός $A + B$ ερμηνεύεται ως η ξένη ένωση των συνόλων A και B.

ΟΡΙΣΜΟΣ 19. Έστω $1 \leq k \leq n$ και $\{1, \ldots, n\} = B_0 + B_1 + \ldots + B_k$ όπου $B_i \neq \emptyset$ για κάθε $1 \leq i \leq k$. Εάν $B_0 \neq \emptyset$ θεωρούμε δεδομένη απεικόνιση $f : B_0 \longrightarrow \{0, \ldots, t-1\}$. Ορίζουμε $\widehat{f} : C_t^k \longrightarrow C_t^n$ ως εξής

$$\widehat{f}(y_1, \ldots, y_k) = (x_1, \ldots, x_n) \text{ όπου } \begin{cases} x_i = f(i) & \text{αν } i \in B_0 \\ x_i = y_j & \text{αν } i \in B_j \end{cases}$$

Η εικόνα της $\widehat{f}$ ονομάζεται k-διάστατος υπόχωρος του C_t^n.

Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό 19 κάθε ευθεία αποτελεί μονοδιάστατο υπόχωρο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (δισδιάστατος υπόχωρος του C_3^7). Θεωρούμε $t = 3$, $n = 7$, $k = 2$, $B_1 = \{1, 2\}$, $B_2 = \{3, 4, 5\}$, $B_0 = \{6, 7\}$ και $f(6) = 2$, $f(7) = 0$. Το ακόλουθο αποτελεί το πεδίο τιμών της $\widehat{f}$

0000020	1100020	2200020
0011120	1111120	2211120
0022220	1122220	2222220

Το σύνολο των n-άδων $(x_1, \ldots, x_n) \in C_{t+1}^n$ στις οποίες το t εμφανίζεται στις i δεξιότερες συντεταγμένες και μόνο, σχηματίζει μία κλάση t-ισοδυναμίας (ορισμός 17). Σε ό,τι ακολουθεί οι κλάσεις t-ισοδυναμίας θα αναφέρονται απλά ως κλάσεις ισοδυναμίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 20. Ένας χρωματισμός του C_{t+1}^n θα ονομάζεται τμηματοποιημένος αν είναι σταθερός πάνω από κάθε κλάση ισοδυναμίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 21. Ένας χρωματισμός χ ενός k-διάστατου υπόχωρου του C_{t+1}^n θα ονομάζεται τμηματοποιημένος αν ο επαγόμενος χρωματισμός $\chi \circ \widehat{f}$ του C_{t+1}^k είναι τμηματοποιημένος.

Παρατηρούμε ότι μία ευθεία του C_{t+1}^n είναι τμηματοποιημένη αν και μόνο αν τα πρώτα t σημεία της σχηματίζουν μονοχρωματικό σύνολο.

Δοθέντος $t \in \mathbb{N}$ ορίζουμε ισχυρισμούς $HJ(t)$ και $LHJ(t)$ ως εξής.

$HJ(t) \Leftrightarrow$ για κάθε r υπάρχει $N' = HJ(r,t)$ τέτοιο ώστε για κάθε $N \geq N'$ και κάθε r-χρωματισμό του C_t^N, ο C_t^N να περιέχει μία μονοχρωματική γραμμή.

$LHJ(t) \Leftrightarrow$ για κάθε r, k υπάρχει $M' = LHJ(r,t,k)$ τέτοιο ώστε για κάθε $M \geq M'$ και κάθε r-χρωματισμό του C_{t+1}^M να υπάρχει ένας τμηματοποιημένος k-διάστατος υπόχωρος του C_{t+1}^M.

Η απόδειξη του θεωρήματος των Hales και Jewett θα γίνει επαγωγικά ως προς t. Σε ό,τι αφορά τη βάση της επαγωγής παρατηρούμε ότι η πρόταση $HJ(1)$ είναι προφανώς αληθής. Το επαγωγικό βήμα θα αποδειχτεί μέσω δύο λημμάτων.

$$\begin{array}{ll} HJ(t) \Rightarrow LHJ(t) & \text{(λήμμα 6)} \\ LHJ(t) \Rightarrow HJ(t+1) & \text{(πόρισμα λήμματος 7)} \end{array}$$

Λημμα 6. $HJ(t) \Rightarrow LHJ(t)$.

Αποδειξη. Δεχόμαστε ότι αληθεύει η $HJ(t)$. Αποδεικνύουμε την $LHJ(t)$ με επαγωγή στο k.

$\mathbf{k = 1}$. Έστω $r \in \mathbb{N}$ και $M' = HJ(r,t)$. Θεωρούμε $M \geq M'$ και σταθεροποιούμε έναν r-χρωματισμό του C_{t+1}^M. Προφανώς $C_t^M \subseteq C_{t+1}^M$ και άρα υπάρχει μία μονοχρωματική ευθεία στον C_t^M η οποία εξ ορισμού αποτελεί τμηματοποιημένο μονοδιάστατο υπόχωρο του C_{t+1}^M.

$\mathbf{k \Rightarrow k+1}$. Έστω $r \in \mathbb{N}$ και $m = LHJ(r,t,k)$. Έστω $s = r^{(t+1)^m}$ το πλήθος των r-χρωματισμών του C_{t+1}^m. Θέτουμε $m' = HJ(s,t)$. Ισχυριζόμαστε ότι αρκεί να θεωρήσουμε

$$LHJ(r,t,k+1) = m' + m$$

Έστω χ ένας r-χρωματισμός του $C_{t+1}^{m'+m} = C_{t+1}^{m'} \times C_{t+1}^m$. Εάν $x \in C_{t+1}^{m'}$ και $y \in C_{t+1}^m$, συμβολίζουμε με xy την παράθεση των διανυσμάτων x και y [π.χ. $(2,7,5)(3,6) = (2,7,5,3,6)$]. Ορίζουμε χρωματισμό χ^* πάνω από το $C_{t+1}^{m'}$ ως εξής: χρωματίζουμε κάθε $x \in C_{t+1}^{m'}$ μέσω κατάλληλης κωδικοποίησης των χρωμάτων των xy, $y \in C_{t+1}^m$ ώστε

$$\chi^*(x) = \chi^*(x') \Leftrightarrow \chi(xy) = \chi(x'y) \text{ για κάθε } y \in C_{t+1}^m$$

Ο χ^* είναι s-χρωματισμός και άρα υπάρχει μία χ^*-τμηματοποιημένη ευθεία $x_0, x_1, \ldots, x_{t-1}, x_t \in C_{t+1}^{m'}$. Ορίζουμε χρωματισμό χ^{**} του C_{t+1}^m ως εξής

$$\chi^{**}(y) = \chi(x_i, y),\ 0 \leq i \leq t$$

Από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι υπάρχει χ^{**}-τμηματοποιημένος k-διάστατος υπόχωρος $S \subseteq C_{t+1}^{m}$. Θέτουμε

$$T = \{x_i s \mid 0 \leq i \leq t, s \in S\} \subseteq C_{t+1}^{m'+m}$$

Αν οι κλάσεις ισοδυναμίας του S είναι οι $S_0, \ldots, S_k$ τότε οι κλάσεις ισοδυναμίας του T είναι οι

$$T_j = \{x_i s \mid 0 \leq i < t, s \in S_j\},\ 0 \leq j \leq k$$

καθώς και κάποια T_{k+1} η οποία αποτελείται από ένα σημείο $x_t s$. Έστω $x_i s, x_i s' \in T_j$, $0 \leq j \leq k$. Τότε $\chi(x_i s) = \chi^{**}(s) = \chi^{**}(s') = \chi(x_i, s')$. Συμπεραίνουμε ότι ο T είναι χ^{**}-τμηματοποιημένος $(k+1)$-διάστατος υπόχωρος. □

Λημμα 7. *Κάθε τμηματοποιημένος k-διάστατος χώρος, χρωματισμένος με k το πολύ χρώματα περιέχει μία μονοχρωματική ευθεία.*

Αποδειξη. Αρκεί να ασχοληθούμε με τον C_{t+1}^{k}. Έστω χ ένας τμηματοποιημένος χρωματισμός του C_{t+1}^{k}. Θεωρούμε την ακολουθία $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik})$, $0 \leq i \leq k$ όπου

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ αν } j \leq i \\ \\ t \text{ αν } j > i \end{cases}$$

Από την αρχή του περιστερώνα έπεται ότι υπάρχουν $u < v$ τ.ω. τα x_u και x_v να έχουν το ίδιο χρώμα. Συμπεραίνουμε ότι η ευθεία $\{y_s\}_{0 \leq s \leq t}$

$$y_s = (y_{s1}, \ldots, y_{sk}),\ y_{si} = \begin{cases} 0 \text{ αν } i \leq u \\ s \text{ αν } u < i \leq v \\ t \text{ αν } v < i \end{cases}$$

αποτελεί μονοχρωματικό σύνολο. □

Πορισμα. $LHJ(t) \Rightarrow HJ(t+1)$

Αποδειξη. Δοθέντος $r \in \mathbb{N}$, επιλέγουμε N' τέτοιο ώστε για κάθε $N \geq N'$ και κάθε r-χρωματισμό του C_{t+1}^{N} να υπάρχει τμηματοποιημένος r-διάστατος υπόχωρος. Από το λήμμα 7 έπεται ότι υπάρχει μονοχρωματική ευθεία μήκους $t+1$. □

Θεωρημα 16. *Hales-Jewett $\Rightarrow$ van der Waerden*

Αποδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$C_t^N \ni (a_1, \ldots, a_N) \mapsto \sum_{i=1}^{N} a_i t^{i-1} \in \{a \mid 0 \leq a < t^N\}$$

η οποία απεικονίζει ευθείες σε αριθμητικές προόδους μήκους t. Το ζητούμενο έπεται άμεσα. □

Το θεώρημα των Hales και Jewett γενικεύεται άμεσα ως ακολούθως.

Θεωρημα 17. *Για κάθε n, t, r υπάρχει N' τ.ω. για κάθε $N \geq N'$ και κάθε r-χρωματισμό του C_t^N να υπάρχει ένας μονοχρωματικός υπόχωρος του C_t^N διάστασης n.*

Αποδειξη. Απεικονίζουμε τον $C_t^{n \cdot s}$ στον $C_{t^n}^s$ ως εξής. Διαμερίζουμε κάθε $(x_1, \dots, x_{n \cdot s}) \in C_t^{n \cdot s}$ σε s διαδοχικά blocks μήκους n το καθένα και κωδικοποιούμε κάθε s-άδα από blocks με κατάλληλη s-άδα $(y_1, \dots, y_s) \in C_{t^n}^s$. Κάθε ευθεία του $C_{t^n}^s$ απεικονίζεται μέσω της κωδικοποίησης σε έναν n-διάστατο υπόχωρο του $C_t^{n \cdot s}$ (π.χ. η ευθεία $00, 11, 22, 33$ του C_4^2 απεικονίζεται στο επίπεδο $0000, 0101, 1010, 1111$ του C_2^4).

Θέτουμε $s = HJ(r, t^n)$ και $N' = n \cdot s$. Κάθε r-χρωματισμός του $C_t^{n \cdot s}$ επάγει έναν r-χρωματισμό του $C_{t^n}^s$. Εξ ορισμού του s, υπάρχει μία μονοχρωματική ευθεία του $C_{t^n}^s$ η οποία απεικονίζεται μέσω της κωδικοποίησης σε ένα μονοχρωματικό n-διάστατο υπόχωρο του $C_t^{n \cdot s}$. Για κάθε $N \geq N'$, ο C_t^N περιέχει τον $C_t^{N'}$ και άρα ισχύει το ζητούμενο. □

3. Η απόδειξη του Shelah

Στα πλαίσια αυτής της ενότητας θέτουμε

$$C_t^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \{1, \dots, t\}\}$$

Ορισμος 22. Ένα σύνολο $L \subseteq C_t^n$ θα καλείται Shelah-ευθεία αν υπάρχει μία αρίθμηση $l_1, \dots, l_t$ του L, $l_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$, $1 \leq k \leq t$ και υπάρχουν i, j, $0 \leq i < j \leq n$ τέτοια ώστε

$$x_{ks} = \begin{cases} t-1 & \text{αν} \quad s \leq i \\ k & \text{αν} \quad i < s \leq j \\ t & \text{αν} \quad j < s \end{cases}$$

Παραδειγμα 2. Όλα τα παραδείγματα στην παρούσα ενότητα ταυτίζουν το Αγγλικό αλφάβητο $\mathcal{A} = \{A, B, C, \dots, X, Y, Z\}$ (εφοδιασμένο με τη συνήθη διάταξη) με το σύνολο $\{1, 2, \dots, 26\}$.

Οι παράμετροι $t = 26, n = 9, i = 2, j = 5$ καθορίζουν την ακόλουθη Shelah-ευθεία.

$$\begin{array}{c} YY\,ZZZ\,ZZZZ \\ YY\,YYY\,ZZZZ \\ YY\,XXX\,ZZZZ \\ \vdots \\ YY\,BBB\,ZZZZ \\ YY\,AAA\,ZZZZ \end{array}$$

Κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in C_t^n$ το οποίο ανήκει σε κάποια Shelah-ευθεία, καλείται Shelah-σημείο. Προφανώς, κάθε Shelah-σημείο έχει τη μορφή

$$(\underbrace{t-1, \ldots, t-1}_{\text{πιθανώς } \emptyset}, \underbrace{k, \ldots, k}_{\neq \emptyset}, \underbrace{t, \ldots, t}_{\text{πιθανώς } \emptyset})$$

Παρατηρούμε ότι κάθε Shelah-σημείο καθορίζεται από τους ακέραιους i, j, k όπου $0 \leq i < j \leq n$ και $1 \leq k \leq t$. Συνεπώς ο C_t^n περιέχει το πολύ $\binom{n+1}{2} \cdot t$ Shelah-σημεία.

Ορισμος 23. Έστω $C_t^n = C_t^{n_1} \times \ldots \times C_t^{n_s}$. Για κάθε $1 \leq j \leq s$, θεωρούμε L_j μία Shelah-ευθεία του $C_t^{n_j}$. Το σύνολο $L_1 \times \ldots \times L_s$ καλείται Shelah s-χώρος του C_t^n.

Ο κανονικός ισομορφισμός ενός Shelah s-χώρου με τον s-διάστατο κύβο ορίζεται ως εξής

$$\varphi : L_1 \times \ldots \times L_s \longrightarrow C_t^s, \ L_1 \times \ldots \times L_s \ni \xi \mapsto (a_1, \ldots, a_s) \in C_t^s$$

όπου $a_j =$ η τιμή των μεταβλητών συντεταγμένων του j-οστού block.

Παραδειγμα 3. Για $n_1 = 5, n_2 = 9$ και $t = 26$, το ακόλουθο αποτελεί ένα Shelah-επίπεδο.

$$\{YaaZZYYbbbZZZZ \mid a, b \in \mathcal{A}\}$$

Ο κανονικός ισομορφισμός του συγκεκριμένου επιπέδου με τον C_{26}^2 δίνεται από τη σχέση

$$\varphi(YaaZZYYbbbZZZZ) = ab$$

Ορισμος 24. Ένας χρωματισμός χ του C_t^s καλείται fliptop αν για κάθε δύο σημεία P και Q του C_t^s για τα οποία ισχύει ότι

1. διαφέρουν σε μία συντεταγμένη και μόνο και
2. στη συντεταγμένη στην οποία διαφέρουν εμφανίζουν τις τιμές $t-1$ και t αντίστοιχα,

αληθεύει ότι $\chi(P) = \chi(Q)$.

Ορισμος 25. Έστω $\varphi : L_1 \times \ldots \times L_s \longrightarrow C_t^s$ ο κανονικός ισομορφισμός ενός τυχαίου Shelah s-χώρου με τον s-διάστατο κύβο. Ένας χρωματισμός χ του $L_1 \times \ldots \times L_s$ καλείται fliptop αν ο επαγόμενος χρωματισμός χ' του C_t^s που δίνεται από τη σχέση $\chi'(P) = \chi(\varphi^{-1}(P))$ είναι fliptop.

Παραδειγμα 4. Εάν θεωρήσουμε έναν fliptop χρωματισμό του επιπέδου του παραδείγματος 3 τότε τα ακόλουθα σημεία σχηματίζουν ένα μονοχρωματικό σύνολο.

$$\begin{array}{l} YYY\,ZZYY\,YYY\,ZZZZ \\ Y\,ZZ\,ZZYY\,YYY\,ZZZZ \\ YYY\,ZZYY\,ZZZ\,ZZZZ \\ Y\,ZZ\,ZZYY\,ZZZ\,ZZZZ \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι μία Shelah-ευθεία L είναι fliptop υπό κάποιο χρωματισμό χ αν και μόνο αν ο χ είναι σταθερός πάνω από τα δύο τελευταία σημεία της L.

Παραδειγμα 5. Ένας χρωματισμός χ της ευθείας του παραδείγματος 2 είναι fliptop αν $\chi(YYYYYZZZZ) = \chi(YYZZZZZZZ)$.

Λημμα 8. *Για κάθε $n \geq r$ και κάθε r-χρωματισμό του C_t^n, ο C_t^n περιέχει μία fliptop Shelah-ευθεία.*

Αποδειξη. Για κάθε $0 \leq i \leq n$, θέτουμε $P_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$ ώστε

$$x_{ij} = \begin{cases} t-1 & \text{αν} \quad j \leq i \\ t & \text{αν} \quad j > i \end{cases}$$

Δεδομένου ότι $n+1 > r$, έπεται ότι υπάρχουν P_i, P_j τα οποία έχουν το ίδιο χρώμα. Ορίζουμε fliptop Shelah-ευθεία ως εξής

$$l_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn}),\ 1 \leq k \leq t,\ x_{ks} = \begin{cases} t-1 & \text{αν} \quad s \leq i \\ k & \text{αν} \quad i < s \leq j \\ t & \text{αν} \quad j < s \end{cases}$$

□

Θεωρημα 18. *Έστω r, s, t θετικοί ακέραιοι. Ορίζουμε αναδρομικά $n_1, \ldots, n_s$ ως εξής*

$$\begin{cases} n_1 = r^{t^{s-1}} \\ \\ n_{i+1} = r^{A_i} \text{ όπου } A_i = \left[\prod_{j \leq i} \binom{n_j+1}{2}\right] \cdot t^{s-1} \end{cases}$$

Εάν $n = n_1 + \ldots + n_s$, τότε κάθε r-χρωματισμός του C_t^n επάγει την ύπαρξη ενός fliptop Shelah s-χώρου εντός του C_t^n.

Αποδειξη. Έστω χ ένας r-χρωματισμός του $C_t^n = C_t^{n_1} \times \ldots \times C_t^{n_s}$. Συμβολίζουμε κάθε $y \in C_t^n$ ως $y = y_1 y_2 \ldots y_s$ όπου $y_j \in C_t^{n_j}$. Ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας $\sim_s$ στον $C_t^{n_s}$ ως εξής

$$\begin{array}{rcl} y_s \sim_s y_s' & \Leftrightarrow & \chi(y_1, \ldots, y_{s-1}, y_s) = \chi(y_1, \ldots, y_{s-1}, y_s'), \\ & & \text{για όλα τα Shelah-σημεία } y_1, \ldots, y_{s-1} \end{array}$$

Υπάρχουν το πολύ A_{s-1} επιλογές για τα $y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}$ και άρα το πολύ $n_s = r^{A_{s-1}}$ κλάσεις ισοδυναμίας. Η σχέση ισοδυναμίας $\sim_s$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας n_s-χρωματισμός $\widehat{\chi}_s$ του $C_t^{n_s}$. Σύμφωνα με το λήμμα 8, υπάρχει μία Shelah-ευθεία $L_s \subseteq C_t^{n_s}$ η οποία είναι fliptop υπό τον $\widehat{\chi}_s$.

Στη συνέχεια δουλεύουμε με αντίστροφη επαγωγή. Υποθέτουμε ότι έχουμε απομονώσει ευθείες $L_s, L_{s-1}, \ldots, L_{i+1}$ και ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας $\sim_i$ πάνω από τον $C_t^{n_i}$ ως εξής: $y_i \sim_i y_i' \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \chi(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, z_{i+1}, \ldots, z_s) = \chi(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i', z_{i+1}, \ldots, z_s),$$

για όλα τα Shelah-σημεία $y_1, \ldots, y_{i-1}$ και όλες τις πιθανές επιλογές των $z_{i+1} \in L_{i+1}, \ldots, z_s \in L_s$. Υπάρχουν $\binom{n_j+1}{2} \cdot t$ επιλογές για κάθε y_j, $1 \leq j \leq i-1$ και t επιλογές για κάθε z_j, $i+1 \leq j \leq s$. Συνεπώς υπάρχουν A_{i-1} επιλογές για τα σημεία $y_1, \ldots, y_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_s$ και άρα υπάρχουν $n_i = r^{A_{i-1}}$ το πολύ κλάσεις ισοδυναμίας, οι οποίες καθορίζουν έναν n_i-χρωματισμό $\widehat{\chi}_i$ του $C_t^{n_i}$. Κάνοντας χρήση του λήμματος 8 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μία Shelah-ευθεία $L_i \subset C_t^{n_i}$ fliptop υπό τον χρωματισμό $\widehat{\chi}_i$.

Ισχυριζόμαστε ότι ο $L_1 \times \cdots \times L_s$ είναι ένας fliptop Shelah s-χώρος. Έστω $1 \leq i \leq s$ και y_i, y_i' τα δύο τελευταία σημεία της L_i. Προφανώς $y_i \sim_i y_i'$ και άρα

$$\chi(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, z_{i+1}, \ldots, z_s) = \chi(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i', z_{i+1}, \ldots, z_s),$$

για όλα τα Shelah-σημεία $y_1, \ldots, y_{i-1}$ και όλες τις πιθανές επιλογές των $z_{i+1} \in L_{i+1}, \ldots, z_s \in L_s$. Όμως για κάθε $1 \leq j < i$, το $y_j \in L_j$ είναι Shelah-σημείο και άρα

$$\chi(z_1, \ldots, z_{i-1}, y_i, z_{i+1}, \ldots, z_s) = \chi(z_1, \ldots, z_{i-1}, y_i', z_{i+1}, \ldots, z_s),$$

για κάθε $z_j \in L_j$, $1 \leq j \leq s$, $j \neq i$. □

Λημμα 9. *Έστω s τέτοιο ώστε για κάθε r-χρωματισμό του C_{t-1}^s, ο C_{t-1}^s να περιέχει μία μονοχρωματική ευθεία. Τότε για κάθε fliptop r-χρωματισμό του C_t^s, ο C_t^s περιέχει μία μονοχρωματική ευθεία.*

Αποδειξη. Έστω χ ένας fliptop r-χρωματισμός του C_t^s. Προφανώς, $C_{t-1}^s \subseteq C_t^s$. Έστω $l_1, \ldots, l_{t-1}$ μία μονοχρωματική ευθεία του C_{t-1}^s. Θεωρούμε l_t τ.ω. η ακολουθία $l_1, \ldots, l_{t-1}, l_t$ να αποτελεί ευθεία του C_t^s. Δεδομένου ότι ο χ είναι fliptop, τα σημεία l_{t-1} και l_t έχουν το ίδιο χρώμα και άρα η ευθεία $l_1, \ldots, l_t$ είναι μονοχρωματική. □

Η Αποδειξη του Shelah για το Θεωρημα 15.
Έστω $r \in \mathbb{N}$. Δουλεύουμε με επαγωγή στο t. Για $t = 1$, προφανώς $HJ(r, 1) = 1$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $s = HJ(r, t-1)$. Έστω n ο φυσικός αριθμός που ορίζεται στη διατύπωση του θεωρήματος 16 και χ ένας r-χρωματισμός του C_t^n. Ο C_t^n περιέχει έναν fliptop Shelah s-χώρο $L_1 \times \ldots \times L_s$. Ορίζουμε χρωματισμό χ' του C_t^s ως εξής

$$\chi' = \chi \circ \varphi^{-1}$$

όπου $\varphi : L_1 \times \ldots \times L_s \longrightarrow C_t^s$ είναι ο κανονικός ισομορφισμός του $L_1 \times \ldots \times L_s$ με τον C_t^s. Ο χ' είναι fliptop και άρα, σύμφωνα με το λήμμα 9, υπάρχει χ'-μονοχρωματική ευθεία $L \subseteq C_t^s$. Η $\varphi^{-1}(L) \subseteq L_1 \times \cdots \times L_s$ είναι η ζητούμενη χ-μονοχρωματική ευθεία του C_t^n. □

4. Εκτιμώντας τα άνω φράγματα

Η αξία της απόδειξης του Shelah έγκειται στην εκτίμηση ακριβέστερου άνω φράγματος της ποσότητας $HJ(r,t)$. Δεδομένου ότι στο διακριτό επίπεδο αποτελεί συνήθη πρακτική η απόδειξη θεωρημάτων τύπου Ramsey μέσω αναγωγής στο θεώρημα των Hales και Jewett, η ακριβής εκτίμηση του άνω φράγματος επηρεάζει την πολυπλοκότητα μιας πληθώρας αποτελεσμάτων στα πλαίσια της θεωρίας Ramsey.

Στη παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με το άνω φράγμα που παρέχει η απόδειξη του Van der Waerden στην ειδική περίπτωση όπου $r = 2$, καθώς και με τη βελτίωση που επιφέρει η απόδειξη του Shelah.

Ορισμος 26. Η *ιεραρχία του Ackermann* ορίζεται ως η ακολουθία απεικονίσεων $f_i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$ όπου

$$\begin{cases} f_1(x) = \mathrm{DOUBLE}(x) = 2x \\ f_{i+1}(x) = f_i^{(x)}(1) \end{cases}$$

Η διαγωνοποίηση της ιεραρχίας του Ackermann οδηγεί στη λεγόμενη *συνάρτηση του Ackermann*,

$$f_\omega(x) = \mathrm{ACKERMANN}(x) = f_x(x)$$

Έστω $W_k(r)$ το άνω φράγμα που κατασκευάζεται στη κλασσική απόδειξη του van der Waerden. Εξ ορισμού, $W_2(r) = r + 1$. Υπολογίζουμε το $W_{k+1}(r)$ ως εξής. Θέτουμε $c_1 = 2 \cdot W_k(r) - 1$ έτσι ώστε κάθε block μήκους c_1 να περιέχει μία τμηματοποιημένη αριθμητική πρόοδο μήκους $k + 1$. Ορίζουμε αναδρομικά $c_{i+1} = 2 \cdot W_k(r^{c_i}) - 1$ και θέτουμε

$$W_{k+1}(r) = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_r$$

Λημμα 10. *Για κάθε $r \geq 2$, $f_3(r+1) \leq W_3(r) \leq f_3(3r-1)$.*

Αποδειξη. Δεδομένου ότι $W_2(r+1) = r+1$, θέτουμε

$$\begin{cases} c_1 = 2r + 1 \\ c_{i+1} = g(c_i) \end{cases}$$

όπου $g(x) = 2r^x + 1$. Εξ ορισμού, $W_3(r) = c_1 \cdot \ldots \cdot c_r$. Παρατηρούμε ότι $c_1 \geq 4 = f_3(2)$ και $g(x) \geq 2^x$. Μέσω επαγωγής αποδεικνύεται άμεσα ότι για κάθε i, $c_i \geq f_3(i+1)$ και άρα $W_3(r) \geq c_r \geq f_3(r+1)$. Για $r = 2$ το άνω φράγμα είναι προφανές. Για κάθε $r \geq 3$,

$$c_1 \leq 2^r = f_2(r) \leq f_3(r)$$

Επιπλέον, δεδομένου ότι $c_i \geq r$, αληθεύει ότι $g(c_i) \leq 2c_i^{c_i} + 1 \leq 2^{2^{c_i}}$ και άρα $c_i \leq f_3(\alpha) \Rightarrow c_{i+1} \leq f_3(\alpha+2)$. Έπεται άμεσα ότι $c_r \leq f_3(3r-2)$. Συνεπώς, $W_3(r) \leq c_r^r \leq 2^{c_r} \leq f_3(3r-1)$. $\square$

Λημμα 11. *Για κάθε $k \geq 3$ και $r \geq 2$, $f_k(r+1) \leq W_k(r) \leq f_k(5r)$.*

Αποδειξη. Δουλεύουμε με επαγωγή στο k. Η βάση της επαγωγής έχει δειχτεί στο λήμμα 10. Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για κάποιο $k > 3$. Τότε $c_1 \geq W_k(r) \geq f_k(r+1)$. Προφανώς για κάθε i,

$$c_{i+1} \geq W_k(r^{c_i}) \geq W_k(c_i) \geq f_k(c_i)$$

και άρα $c_i \geq f_k^{(i)}(r+1)$. Συνεπώς,

$$W_k(r) \geq c_r \geq f_k^{(r)}(r+1) \geq f_k^{(r)}(2) = f_k^{(r+1)}(1) = f_{k+1}(r+1)$$

Σχετικά με το άνω φράγμα, δεδομένου ότι $f_k(x) > 2x$, αληθεύει ότι $c_1 < 2W_k(r) < f_k(f_k(5r))$. Προφανώς $c_i < r$ και άρα

$$c_{i+1} \leq 2W_k(r^{c_i}) \leq 2W_k(c_i^{c_i}) \leq 2f_k(5c_i^{c_i}) \leq f_k(f_k(f_k(c_i)))$$

Συμπεραίνουμε ότι $c_r \leq f_k^{(3r-1)}(5r)$ οπότε

$$W_k(r) \leq c_r^r \leq f_k(c_r) \leq f_k^{(3r)}(5r)$$

Όμως για κάθε $r \geq 2$, $f_{k+1}(r+1) \geq 5r$ και άρα

$$W_k(r) \leq f_k^{(3r)}(f_{k+1}(r+1)) = f_{k+1}(4r+1) < f_{k+1}(5r)$$

$\square$

Θεωρημα 19. *Για κάθε $k \geq 10$,*

$$\text{ACKERMANN}(k-2) \leq W_k(2) \leq \text{ACKERMANN}(k)$$

Αποδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$W_k(2) \leq f_k(10) \leq f_k(k) = \text{ACKERMANN}(k)$$

Επιπλέον, σε ό,τι αφορά το κάτω φράγμα,

$$W_k(2) \geq f_k(3) = f_{k-1}(f_{k-1}(f_{k-1}(1))) = f_{k-1}(4),$$

όπου $f_{k-1}(4) = f_{k-2}(f_{k-2}(f_{k-2}(1))) = f_{k-2}(f_{k-2}(4))$. Όμως $f_t(4) \geq t$ και άρα $W_k(2) \geq f_{k-2}(k-2) = \text{ACKERMANN}(k-2)$. $\square$

Έστω $S(t)$ το άνω φράγμα που κατασκευάζεται από την απόδειξη του Shelah στην ειδική περίπτωση $r = 2$. Εξ ορισμού, $S(1) = 1$. Υπολογίζουμε αναδρομικά το $S(t)$ ως εξής: Θέτουμε $s = S(t-1)$ και ορίζουμε ακολουθία $\{n_i\}_{i \leq s}$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} n_1 = 2^{t^{s-1}} \\ \\ n_{i+1} = 2^{A_i} \text{ όπου } A_i = \left[\prod_{j \leq i} \binom{n_j+1}{2}\right] \cdot t^{s-1} \end{cases}$$

Τότε $S(t) = n_1 + \ldots + n_s$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 20. *Για κάθε* $t \geq 3$, $f_4(t) \leq S(t) \leq f_4(t+1)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ασχολούμαστε αρχικά με το κάτω φράγμα. Δουλεύουμε επαγωγικά. Η βάση της επαγωγής είναι προφανής. Υποθέτουμε την ύπαρξη του συγκεκριμένου κάτω φράγματος για $t-1$ και θεωρούμε $n_1, \ldots, n_s$ ορισμένα όπως παραπάνω. Προφανώς, $n_1 \geq 2 = f_3(1)$. Δεδομένου ότι $A_i \geq n_i$ και $n_{i+1} \geq 2^{n_i}$, συμπεραίνουμε ότι για κάθε i, $n_i \geq f_3(i)$. Συνεπώς, $S(t) \geq n_s \geq f_3(s) \geq f_3(f_4(t-1)) = f_4(t)$.

Σε ό,τι αφορά το άνω φράγμα αποδεικνύουμε την ισχυρότερη ανισότητα $S(t) \leq f_4(t+1)/6$. Δουλεύουμε επαγωγικά ως προς t. Η βάση της επαγωγής είναι προφανής.Υποθέτουμε ότι η ισχυροποιημένη ανισότητα αληθεύει για $t-1$ και παρατηρούμε ότι $n_1 = 2^{t^{s-1}} < s^{s^s} < f_3(s)$. Προφανώς για κάθε i, αληθεύει ότι $A_i \leq n_i^s n_i^{2s} \leq n_i^{3n_i} < 2^{2^{n_i}}$. Συνεπώς, $n_i \leq f_3(\alpha) \Rightarrow n_{i+1} \leq f_3(\alpha+3)$ και άρα $n_s \leq f_3(s+3(s-1)) = f_3(4s-2)$. Έπεται ότι $S(t) = n_1 + \ldots + n_s < s \cdot n_s < 2^{n_s} \leq f_3(4s-1)$. Αλλά από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι $s \leq f_4(t+1)/6$ και άρα

$$S(t) \leq f_3(f_4(t+1)-1) = \log_2(f_4(t+2)) < \frac{f_4(t+2)}{6}$$

$\square$

Βιβλιογραφία

[BM73] H. Burkill and L. Mirsky, *Monotonicity*, J. Math. Anal. Appl. **41** (1973), 391–410.

[CK90] C.C. Chang and H.J. Keisler, *Model Theory*, North Holland, 1990.

[EM56] A. Ehrenfeucht and A. Mostowski, *Models of axiomatic theories admitting automorphisms*, Fund. Math. **43** (1956), 50–68.

[ES35] P. Erdös and G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*, Composito Math. **2** (1935), 464–470.

[GR71] R.L. Graham and B.L. Rothschild, *Ramsey's theorem for n-parameter sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **159** (1971), 257–292.

[GR74] R.L. Graham and B.L. Rothschild, *A short proof of van der Waerden's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **42** (1974), 385–386.

[GRS90] R.L. Graham, B.L. Rothschild, and J.H. Spencer, *Ramsey Theory*, J. Wiley & Sons, 1990.

[HJ63] A.W. Hales and R.I. Jewett, *Regularity and positional games*, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963), 222–229.

[Kan97] A. Kanamori, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, 1997.

[Kun77] Kenneth Kunen, *Combinatorics*, Handbook of Mathematical Logic (J. Barwise, ed.), North Holland, 1977, pp. 371–402.

[Mar70] D.A. Martin, *Measurable cardinals and analytic games*, Fund. Math. **66** (1970), 287–291.

[Mor65] M.D. Morley, *Categoricity in power*, Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965), 514–538.

[Mos80] Yiannis N. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*, North Holland, 1980.

[NR90] Jaroslav Nešetřil and Vojtěch Rödl (eds.), *Mathematics of Ramsey Theory*, Springer-Verlag, 1990.

[Ram30] Frank P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. **30** (1930), 264–286.

[She88] S. Shelah, *Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 683–697.

[vdW27] B.L. van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen vermutung*, Nieuw Arch. Wisk. **15** (1927), 212–216.

[vdW71] B.L. van der Waerden, *How the proof of Baudet's conjecture was found*, Studies in Pure Mathematics (L. Mirsky, ed.), Academic Press, 1971, pp. 251–260.