ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΥΛΟΠΟΙΗΣΕΙΣ

Βασίλης Σ. Πασχάλης
Επιβλέπων καθηγητής: Γιάννης Ν. Μοσχοβάκης

μΠλ∀
14 Δεκεμβρίου, 2006

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου ***κ. Γιάννη Μοσχοβάκη*** *που με την ουσιαστική συμβολή του στην παιδεία μου, άνοιξε δρόμους και με το παράδειγμά του, μου έδειξε πως να τους βαδίσω. Επίσης ιδιαίτερα ευχαριστώ τον* ***κ. Κωνσταντίνο Δημητρακόπουλο*** *καθώς και όλους μου τους καθηγητές στο* **μΠλ∀**. *Τέλος ξεχωριστά θα ήθελα να ευχαριστήσω* **τους γονείς μου** *για όλα όσα έχουν κάνει για μένα.*

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

$$
\begin{aligned}
\gcd(\alpha,\beta) &= \gcd(\alpha-\beta,\beta) && \text{αν } \beta<\alpha\\
\gcd(\alpha,\beta) &= \gcd(\beta,\beta-\alpha) && \text{αν } \alpha<\beta\\
\gcd(\alpha,\beta) &= \alpha && \text{αν } \alpha=\beta
\end{aligned}
$$

Οι περισσότεροι άνθρωποι θα συμφωνήσουν ότι οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν τον Ευκλείδειο αλγόριθμο για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη. Οι αλγόριθμοι, όπως ο Ευκλείδειος, έχουν χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα κατά τη διάρκεια της ανθρώπινης ιστορίας και παίζουν κεντρικό ρόλο σήμερα. Εφόσον λοιπόν χρησιμοποιούμε αλγόριθμους τόσο πολύ και για τόσο πολύ, θα μπορούσε κάποιος να θέσει το ακόλουθο απλό ερώτημα:

> Τι είναι ο αλγόριθμος;

Όσο απλό και αν φαίνεται αυτό το ερώτημα, δεν υπάρχει ευρύτατα αποδεκτή απάντηση του και αν αυτό δεν είναι αρκετό κάποιοι υποστηρίζουν ότι η απάντηση είναι, ότι δεν μπορούμε να απαντήσουμε το ερώτημα αυτό. Ανεξάρτητα από το αν υπάρχει η δεν υπάρχει απάντηση, όλοι θα συμφωνήσουν ότι πρόκειται για ένα από τα θεμελειωδέστερα ερωτήματα της πληροφορικής και των μαθηματικών.

Για να πούμε ότι έχουμε απαντήσει στο ερώτημα αυτό αυστηρά, θα πρέπει να ακολουθήσουμε έναν από τους ακόλουθους δρόμους:

(1) Να ορίσουμε τους αλγόριθμους στη συνολοθεωρία.
(2) Να αξιωματικοποιήσουμε την θεωρία τους.

Βέβαια υπάρχουν και αυτοί που υποστηρίζουν ότι τα παραπάνω είναι άχρηστα, καθώς οι αλγόριθμοι είναι οι μηχανές Turing. Πρόκειται για σοβαρό επιχείρημα και φαίνεται να είναι σωστό μέχρι να αναρωτηθεί κανείς την ερώτηση:

> Ποια μηχανή Turing είναι ο Ευκλείδειος;

Η μηχανή Turing με μια ταινία, δύο ταινίες ή με πόσες ταινίες; Είναι πιο λογικό να θεωρήσουμε ότι οι μηχανές Turing για τον Ευκλείδειο, είναι υλοποιήσεις του Ευκλείδειου.

Τα περισσότερα βιβλία πληροφορικής, που δεν αποφεύγουν το ερώτημα, έχουν «ορισμούς» της μορφής:

> An algorithm is a detailed step by step method for solving a problem

ή

> An algorithm is a procedure (a finite set of well-defined instructions) for accomplishing some task which given an initial state, will terminate in a defined end-state.

Προσέξτε τις λέξεις μέθοδος (method) στον πρώτο ορισμό και διαδικασία (procedure) στο δεύτερο. Το πρόβλημα με αυτούς τους ορισμούς είναι ότι δεν είναι ορισμοί. Πρόκειται για περιγραφές οι οποίες χρησιμοποιούν συνώνυμα του αλγόριθμου.

Εκτός από αυτές τις περιγραφές, έχουν γίνει και σοβαρές προσπάθειες για τον ορισμό του αλγόριθμου. Στο άρθρο του [**1**] ο Robin Milner ορίζει την έννοια της αμοιβαίας προσομοίωσης μεταξύ προγραμμάτων, η οποία αποδεικνύεται να είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι οι αλγόριθμοι.

Ωστόσο η έννοια του αλγόριθμου φαίνεται να είναι προαπαιτούμενο για την έννοια της προσομοίωσης. Έτσι αν κατανοούσαμε το πρόβλημα τόσο βαθιά ώστε να μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της προσομοίωσης, θα είχαμε ορίσει την έννοια του αλγόριθμου σε προηγούμενο βήμα.

Σε μια σειρά άρθρων ο Γιάννης Ν. Μοσχοβάκης προσπαθεί να αντιμετωπίσει κατά μέτωπο το ερώτημα για το τι είναι ο αλγόριθμος. Σε αυτά τα άρθρα προτείνει μια μαθηματική μοντελοποίηση της έννοιας του αλγόριθμου, έναν συνολοθεωριτικό «ορισμό» του αλγόριθμου, παρόμοιο με τον «ορισμό» τον πραγματικών αριθμών ως τομές Dedekind επί των ρητών ή παρόμοιο με τον «ορισμό» των τυχαίων μεταβλητών ως μετρήσιμες συναρτήσεις επί του δειγματικού χώρου.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τις συνέπειες της μοντελοποίησης του Μοσχοβάκη. Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε κάποιους από τους ισχυρισμούς του [**2**] που πιστοποιούν την ορθότητα των ιδεών. Με απλά λόγια θα προσπαθήσουμε να ελέγξουμε αν οι διαισθήσεις μας για τους αλγόριθμους αντανακλώνται στον ορισμό του Μοσχοβάκη.

Αρχικά θα εισαγάγουμε τις βασικές έννοιες και θα ξεκινήσουμε με το υπολογιστικό μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε, στη συνέχεια, για την υλοποίηση των πρωτοβάθμιων (υλοποιήσιμων) αλγορίθμων. Η περιγραφή του μοντέλου αυτού θα είναι περιληπτική αλλά αρκετή για να κατανοηθούν οι αποδείξεις και τα θεωρήματα.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τους αναδρομείς, το συνολοθεωριτικό αντικείμενο που μοντελοποιεί τους αλγόριθμους και θα ορίσουμε τις βασικές έννοιες που απορρέουν από αυτόν τον ορισμό.

Η πρώτη έννοια που θα ορίσουμε είναι αυτή του ισομορφισμού αναδρομέων. Μια πρωταρχική έννοια σε όλα τα μαθηματικά που στην προκειμένη περίπτωση μας βοηθάει να ταυτοποιήσουμε τους αναδρομείς που πρακτικά πηγάζουν από τον ίδιο, κατά βάση, αλγόριθμο.

Με τη βοήθεια αυτής της έννοιας θα αποδείξουμε και το πρώτο Θεώρημα, που λέει ότι ο αλγόριθμος κάθε αφηρημένης μηχανής εκφράζει πιστά την αφηρημένη μηχανή μέχρι ισομορφισμού.

Είναι εμφανές ότι ένα από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά του αλγόριθμου είναι χωρίς αμφιβολία οι υλοποιήσεις του. Οι υλοποιήσεις είναι η σάρκα και τα οστά του αλγόριθμου, ενώ ο αλγόριθμος είναι το πνεύμα κάθε υλοποίησής του. Οι μηχανές Turing, τα RAMs, τα προγράμματα C, είναι όλα υλοποιήσεις αλγορίθμων.

Κάθε αλγόριθμος επιδέχεται πολλές υλοποιήσεις. Κάθε τέτοια υλοποίηση επάγει έναν αλγόριθμο από την κατασκευή της, δηλαδή, τον τρόπο με τον οποίο γίνεται ο υπολογισμός. Όλοι αυτοί οι αλγόριθμοι υλοποιήσεων έχουν ένα κοινό συνδεσμό, τον αρχικό αλγόριθμο.

Μια σωστή μοντελοποίηση θα πρέπει να έχει τρόπο να εκφράζει την σύνδεση αυτή. Στην περίπτωση της μοντελοποίησης Μοσχοβάκη, η έννοια της αναγωγής εισάγεται για να κάνει την παραπάνω έννοια μαθηματικά αυστηρή. Ωστόσο η έννοια της αναγωγής δεν μελετάται στο άρθρο αυτό, επειδή σκοπός του είναι ο ορισμός του αλγόριθμου.

Αν έχουμε την υλοποίηση ενός αλγόριθμου, μπορούμε να ορίσουμε με φυσικό τρόπο τον αλγόριθμο της υλοποίησης. Θα δείξουμε ότι ο αρχικός αλγόριθμος ανάγεται στον αλγόριθμος της υλοποίησης.

Η έννοια της αναγωγής δεν θα πρέπει να συγχέεται με την έννοια της αναγωγής στην θεωρία πολυπλοκότητας. Στη θεωρία πολυπλοκότητας η έννοια της αναγωγής χρησιμοποιείται για την σύγκρισή της δυσκολίας δυο προβλημάτων. Η έννοια της αναγωγής στη θεωρία αλγορίθμων, μας λέει κάτι πιο βαθύ για δύο αλγόριθμους. Διαισθητικά μας λέει ότι οι υπολογισμοί του ενός αλγόριθμου ανάγονται στους υπολογισμούς του άλλου, που μας φέρνει στην επόμενη πολύ σημαντική έννοια των αλγορίθμων και των υλοποιήσεών τους, την έννοια της προσομοίωσης.

Πρόκειται για μια ακόμα έννοια που δεν έχει οριστεί αυστηρά. Διαισθητικά, όπως γράφει και ο Peter van Emde Boas στο [**5**],

> A simulation of P by P' is some construction which shows that everything P can do on inputs x can be performed by P' on the same inputs as well.

Όπως αναφέραμε νωρίτερα, αν μπορούσαμε να ορίσουμε την έννοια της προσομοίωσης, θα είχαμε και ορισμό του αλγόριθμου. Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε έναν αρκετά φυσικό και συγκεκριμένο μαθηματικό ορισμό για την προσομοίωση (που δεν λύνει το πρόβλημα του ορισμού της προσομοίωσης) και θα δείξουμε ότι αυτή η έννοια της προσομοίωσης συνεπάγεται την αναγωγή.

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρατίθεται μια εναλλακτική απόδειξη για το ότι η προσομοίωση συνεπάγεται την αναγωγή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Αφηρημένες μηχανές και προσομοίωση

Σε αυτή την ενότητα θα εισαγάγουμε το μοντέλο υπολογισμού που θα χρησιμοποιήσουμε για την υλοποίηση αλγορίθμων. Θα ορίσουμε τις έννοιες της αφηρημένης μηχανής και των αναδρομικών προγραμμάτων και θα δούμε πως αντιστοιχούμε μια αναδρομική μηχανή σε κάθε αναδρομικό πρόγραμμα. Τα αναδρομικά προγράμματα εισήχθησαν στη βιβλιογραφία από τον John McCarthy. Αναλυτική περιγραφή του μοντέλου υλοποίησης μπορεί να βρει κανείς στο [**6**].

2.1. Αφηρημένες μηχανές (Iterators)

Τα περισσότερα υπολογιστικά μοντέλα για μερικές συναρτήσεις $f : X \rightharpoonup W$ από ένα σύνολο σε ένα άλλο σύνολο, καλύπτονται από την ακόλουθη γενική έννοια

Ορισμος 1. *Για δύο τυχαία σύνολο X και W, μια* **αφηρημένη (αιτιοκρατική) μηχανή (iterator)** $\phi : X \rightsquigarrow W$ *είναι μια πεντάδα* $(\mathrm{in}, S, \tau, T, \mathrm{out})$, *όπου:*

(1) *Το S είναι ένα τυχαίο (μη κενό) σύνολο, το* **σύνολο καταστάσεων** *του ϕ·*
(2) $\mathrm{in} : X \to S$ *είναι η* **συνάρτηση εισόδου** *του ϕ·*
(3) $\tau : S \to S$ *είναι η* **συνάρτηση μετάβασης** *του ϕ·*
(4) $T \subseteq S$ *είναι το σύνολο των* **τερματικών καταστάσεων** *του ϕ και $s \in T \Longrightarrow \tau(s) = s$· και*
(5) $\mathrm{out} : T \to W$ *είναι η* **συνάρτηση εξόδου** *του ϕ.*

Ο **υπολογισμός** του ϕ για ένα $x \in X$ είναι η ακολουθία καταστάσεων $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ που ορίζετε αναδρομικά:

$$s_0(x), = \mathrm{in}(x),$$
$$s_{n+1}(x) = \begin{cases} s_n(x) & \text{αν } s_n(x) \in T, \\ \sigma(s_n(x)), & \text{αλλιώς·} \end{cases}$$

το **μήκος υπολογισμού** για την είσοδο x (αν είναι πεπερασμένο) είναι

$$l(x) = (\text{το ελάχιστο } n \text{ τέτοιο ώστε } s_n(x) \in T) + 1\cdot$$

και η μερική συνάρτηση $\bar{\phi} : X \rightharpoonup W$ που **υπολογίζεται** από τον ϕ ορίζεται από τον τύπο

$$\bar{\phi}(x) = \mathrm{out}(s_{l(x)}(x)).$$

Ορισμος 2. *Δύο αφηρημένες μηχανές* $\phi_i = (\mathrm{in}_i, S_i, \tau_i, T_i, \mathrm{out}_i)$, $i = 1, 2$ *από το X στο W είναι* **ισόμορφες** *αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $\rho : S_1 \to S_2$ από το S_1 επί του S_2, τέτοια ώστε*

(1) $\rho[T_1] = T_2$·
(2) $\rho(\mathrm{in}_1(x)) = \mathrm{in}_2(x)$·
(3) $\rho(\tau_1(s)) = \tau_2(\rho(s))$, *για κάθε $s \in S_1$· και*

(4) $\mathrm{out}_1(s) = \mathrm{out}_2(\rho(s))$, *για κάθε* $s \in T_1$ *το οποίο είναι* **εισόδου προσπελάσιμο,** *δηλαδή, τέτοιο ώστε για κάποιο* $x \in X$ *και ένα* $n, s = \tau_1^n(\mathrm{in}_1(x))$.

Θα περίμενε κανείς το τέταρτο μέρος του ισομορφισμού να είναι λίγο πιο γενικό, δηλαδή, να ισχύει για όλες τις τερματικές καταστάσεις. Ωστόσο επειδή θα ασχοληθούμε με υλοποιείσεις αλγορίθμων και όχι γενικά με τις ιδιότητες των αφηρημένων μηχανών είναι φυσικό να ορίσουμε τον ισομορφισμό κατά αυτόν τον τρόπο. Άλλωστε οι αφηρημένες μηχανές που είναι ισόμορφες σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, συμφωνούν στο κομμάτι του υπολογισμού που υλοποιεί κάποιον αλγόριθμο ενώ μπορεί να έχουν και κάποιες καταστάσεις οι οποίες δεν μας δίνουν καμία επιπλέον πληροφορία για την υλοποίηση του αλγορίθμου.

2.2. (Μερικές) άλγεβρες

Ορισμος 3. **(Μερική) άλγεβρα** *είναι η τυχαία δομή*

$$\mathbf{M} = (M, 0, 1, f_1, \dots . f_K),$$

όπου το M *είναι σύνολο·* $0, 1 \in M$ *και* $0 \neq 1$· *και για* $i = 1, \dots, K$, *η*

$$f_i : M^{n_i} \rightharpoonup M$$

είναι μερική συνάρτηση πλειομέλειας n_i.

Επιτρέπουμε $n_i = 0$ που σημαίνει ότι η f_i είναι 0-μελής μερική συνάρτηση στο M δηλαδή σταθερά, κάποιο μέλος του M ή ο πάτος $\bot$. Η **χαρακτηριστική** (ή **υπογραφή**) της $\mathbf{M}$ είναι η ακολουθία αριθμών

$$\chi(\mathbf{M}) = \langle n_1, \dots n_K \rangle$$

που κωδικοποιεί τις πλειομέλειες των δοσμένων της $\mathbf{M}$. Μια (μερική) άλγεβρα είναι ολική αν οι δοσμένες $f_1, \dots, f_K$ είναι ολικές συναρτήσεις.

Π.χ. η standard δομή της (Peano) αριθμητικής.

$$\mathbf{N}_0 = (\mathbb{N}, 0, 1, +.\cdot)$$

είναι μια μερική άλγεβρα. Αν $g : M^m \rightharpoonup M$, τότε η (μερική) άλγεβρα

$$(\mathbf{M}, g) = (M, 0, 1, f_1, \dots, f_K, g)$$

είναι η **επέκταση** της $\mathbf{M}$ με την g, και έχει χαρακτηριστική

$$\chi(\mathbf{M}, g) = \tau * \langle m \rangle = \langle n_1, \dots, n_K, m \rangle$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε μια άλγεβρα $\mathbf{M}$ με οποιοδήποτε πλήθος μερικών συναρτήσεων με το ίδιο σύμπαν.

2.3. Η τυπική γλώσσα όρων $\mathbf{R}(\tau)$

Κατά τα γνωστά σε κάθε χαρακτηριστική $\tau = \langle n_1, \dots, n_K \rangle$ θα αντιστοιχίσουμε την τυπική γλώσσα $\mathbf{R}(\tau)$ με **αλφάβητο** τα **σύμβολα**:

ατομικές μεταβλητές:	$v_0, v_1, \dots,$
ατομικές σταθερές:	$0, 1$
συναρτησιακές σταθερές	$\mathrm{f}_1, \dots, \mathrm{f}_K \quad (\mathrm{arity}(f_i) = n_i)$
σύμβολα για τη διακλάδωση:	if then else
σημεία στίξεως:	, ( )
το σύμβολο της ισότητας:	=

Εδώ θα επιτρέψουμε ορισμούς με διακλάδωση στους όρους της $\mathbf{R}$. Ο A είναι **όρος (explicit term)** της $\mathbf{R}(\tau)$ αν:

(1) $A :\equiv 0$ ή $A \equiv 1$ ή $A :\equiv v_i$,
(2) $A :\equiv \mathrm{f}_i(A_1, \ldots, A_{n_i})$.
(3) $A :\equiv (\text{if } (A_1 = 0) \text{ then } A_2 \text{ else } A_3)$

όπου τα A_j είναι όροι. Το σύνολο των όρων $T(\tau)$ είναι το ελάχιστο σύνολο με τις παραπάνω ιδιότητες.

Κλειστοί όροι είναι αυτοί που δεν περιέχουν ατομικές μεταβλητές.

Οι όροι είναι σε μια και μόνο μια από τις μορφές (1)-(3), και κατασκευάζονται από μοναδικά καθορισμένους **υποόρους** μικρότερου μήκους. Οπότε και αποδεικνύουμε ιδιότητες με επαγωγή στην πολυπλοκότητα και ορίζουμε πράξεις στους όρους με αναδρομή.

Όταν γράφουμε όρους δε θα είμαστε αυστηροί με τον τυπικό συμβολισμό. Θα χρησιμοποιήσουμε τον προσφιλή μαθηματικό συμβολισμό, παραλείποντας παρενθέσεις ή χρησιμοποιώντας αγκύλες για να κάνουμε το κείμενο, κατά το δυνατόν, ευανάγνωστο. Για παράδειγμα θα προτιμήσουμε τον in-fix συμβολισμό

$$x \cdot y + z$$

αντί του pre-fix συμβολισμού

$$+(\cdot(x, y), z)$$

για τις γνωστές συναρτήσεις.

Οι όροι της $\mathbf{R}(\tau)$ ερμηνεύονται σε τυχαία τ-**άλγεβρα** $\mathbf{M}$ με $\chi(\mathbf{M}) = \tau$. Αυτό γίνεται με το συνήθη μοντελοθεωριτικό τρόπο· μια **αποτίμηση** στην τ-άλγεβρα $\mathbf{M}$ είναι μια απεικόνιση

$$\pi : \{v_0, v_1, \ldots\} \to M$$

η οποία απεικονίζει κάθε μεταβλητή σε ένα στοιχείο της M.

Μπορούμε να δώσουμε μια **τιμή** (ή **denotation**)

$$\mathrm{den}(A, \pi) = \mathrm{den}(\mathbf{M}, A, \pi)$$

της $\mathbf{M}$ σε κάθε όρο A της $\mathbf{R}(\tau)$ με την ακόλουθη αναδρομή στους όρους:

- $\mathrm{den}(0, \pi) = 0 \cdot \mathrm{den}(1, \pi) = 1 \cdot \mathrm{den}(v_i, \pi) = \pi(v_i)$
- $\mathrm{den}(f_i(A_1, \ldots, A_{n_i}), \pi) = f_i(\mathrm{den}(A_1, \pi), \ldots, \mathrm{den}(A_{n_i}, \pi))$
- $\mathrm{den}(\text{if } (A_1 = 0) \text{ then } A_2 \text{ else } A_3, \pi)$

$$= \begin{cases} \mathrm{den}(A_2, \pi), & \text{αν } \mathrm{den}(A_1, \pi) = 0, \\ \mathrm{den}(A_3, \pi), & \text{αν } \mathrm{den}(A_1, \pi) \neq 0, \\ \perp, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Εφόσον έχουμε επιτρέψει κάποιες από τις δοσμένες της $\mathbf{M}$ να είναι μερικές συναρτήσεις, δεν είναι απαραίτητο ότι η $\mathrm{den}(A, \pi)$ συγκλίνει. Χρησιμοποιώντας μοντελοθεωριτικό συμβολισμό γράφουμε

$$\mathbf{M}, \pi \models A = B \iff \mathrm{den}(\mathbf{M}, A, \pi) = \mathrm{den}(\mathbf{M}, B, \pi),$$
$$\mathbf{M} \models A = B \iff \text{για κάθε αποτίμηση } \pi,\ \mathbf{M}, \pi \models A = B$$

Αν $\mathbf{M} \models A = B$, λέμε ότι η εξίσωση όρων $A = B$ είναι έγκυρη στην $\mathbf{M}$.

2.4. Η προγραμματική γλώσσα $\mathbf{R}(\tau)$

Η $\mathbf{R}(\tau)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προγραμματική γλώσσα αν την εμπλουτίσουμε με μεταβλητές (μερικών) συναρτήσεων, άπειρες το πλήθος για κάθε πλειομέλεια n,

$$\mathrm{p}_0^n, \mathrm{p}_1^n, \ldots \qquad (n = 0, 1, \ldots\ , \mathrm{arity}(\mathrm{p}_i^n) = n).$$

Οι συναρτησιακές μεταβλητές έχουν την ίδια χρήση στην σύνταξη της γλώσσας με τις συναρτησιακές σταθερές, οπότε ο ορισμός όρων με αναδρομή γίνεται ως εξής:

$$(1) \quad A :\equiv 0|1|v_i|\mathrm{f}_i(A_1, \ldots, A_{n_i})|\mathrm{p}_i^n(A_1, \ldots, A_n)|(\text{if } (A_1 = 0) \text{ then } A_2 \text{ else } A_3)$$

και ισχύουν οι ίδιες με πριν ιδιότητες, μοναδική αναγνωσιμότητα κ.τ.λ. Η επεκτεταμένη γλώσσα

$$\mathbf{R}(\tau, \mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n) = \mathbf{R}(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_{\mathrm{K}}, \mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n),$$

περιέχει όλους τους όρους που για τον ορισμό τους χρησιμοποιούν συναρτησιακές μεταβλητές, μόνο κάποιες από τις $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_{\mathrm{K}}, \mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$ και ερμηνεύεται σε επεκτάσεις

$$(\mathbf{M}, p_1, \ldots, p_n) = (M, 0, 1, f_1, \ldots, f_k, p_1, \ldots, p_n)$$

της τ-άλγεβρας $\mathbf{M}$.

Για να είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε την $\mathbf{R}(\tau)$ ως προγραμματική γλώσσα θα εισάγουμε ακόμα δύο συντακτικά αντικείμενα, τις αναδρομικές εξισώσεις και τα αναδρομικά προγράμματα.

Μια **αναδρομική εξίσωση** της $\mathbf{R}(\tau)$ είναι μια εξίσωση όρων της μορφής:

$$(2) \qquad \mathrm{p}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) = A,$$

όπου η p είναι συναρτησιακή μεταβλητή, τα $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$ είναι ατομικές μεταβλητές και ο A είναι όρος της $\mathbf{R}(\tau)$ που οι ατομικές μεταβλητές που περιέχει είναι υποσύνολο των $\{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}\}$. Ο A ενδέχεται να περιέχει και άλλες συναρτησιακές μεταβλητές εκτός της p. Αν στον A, δεν εμφανίζονται συναρτησιακές μεταβλητές τότε η αναδρομική εξίσωση καλείται **ρητή (explicit)**.

Τέλος **αναδρομικό πρόγραμμα** της $\mathbf{R}(\tau)$ καλείται κάθε σύστημα αναδρομικών εξισώσεων

$$(\mathrm{E}) \qquad \begin{array}{ll} (e_o) & \mathrm{p}_0(\vec{x}_0) = E_0 \\ & \vdots \\ (e_k) & \mathrm{p}_k(\vec{x}_k) = E_k \end{array}$$

όπου οι συναρτησιακές μεταβλητές $\mathrm{p}_0, \ldots, \mathrm{p}_k$ είναι διαφορετικές και οι $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_k$ είναι οι μόνες συναρτησιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στους όρους $E_0, \ldots, E_k$. Οι εξισώσεις του E καλούνται (αναδρομικοί) **ορισμοί** των συναρτησιακών μεταβλητών $\mathrm{p}_0, \ldots, \mathrm{p}_k$.

Όταν για κάποιο όρο E γράφουμε $E(\vec{\mathrm{x}}, \vec{\mathrm{p}})$ εννοούμε ότι οι ατομικές και συναρτησιακές μεταβλητές του όρου E είναι υποσύνολα των $\{\vec{\mathrm{x}}\}$ και $\{\vec{\mathrm{p}}\}$ αντίστοιχα, ενώ ο συμβολισμός $[\![E]\!](\vec{x}, \vec{p})$ υποδηλώνει την τιμή του $E(\vec{\mathrm{x}}, \vec{\mathrm{p}})$ για $\vec{\mathrm{x}} = \vec{x}$ και $\vec{\mathrm{p}} = \vec{p}$.

Για την ερμηνία του προγράμματος (E) στην τ-άλγεβρα $\mathbf{M}$ θεωρούμε το σύστημα αναδρομικών εξισώσεων

$$\begin{cases} p_0(\vec{x_0}) &= [\![E_0]\!](\vec{x}, \vec{p}) \\ & \vdots \\ p_k(\vec{x_k}) &= [\![E_k]\!](\vec{x}, \vec{p}) \end{cases}$$

το οποίο από το Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου, έχει ένα σύνολο ελάχιστων λύσεων

$$\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_k$$

Στη συνεχεία για κάθε τ-άλγεβρα $\mathbf{M}$, θέλουμε να αντιστοιχίσουμε μια αναδρομική μηχανή για κάθε αλγόριθμο που εκφράζεται μέσω ενός αναδρομικού προγράμματος E της $\mathbf{R}(\tau)$ και κάθε και για να το πετύχουμε αυτό θα εμπλουτίσουμε την $\mathbf{R}(\tau)$ με ονόματα για κάθε στοιχείο της M. Θα είναι προφανές από την υλοποίηση ότι οι αναδρομικές μηχανές είναι ειδική περίπτωση των αφηρημένων μηχανών.

Για κάθε τ-άλγεβρα $\mathbf{M}$, οι $\mathbf{M}$-όροι ορίζονται από την αναδρομή

(3) $\quad A :\equiv 0|1|x|v_i|\mathrm{f}_i(A_1, \dots, A_{n_i})|\mathrm{p}_i^n(A_1, \dots, A_n)|(\text{ if } (A_1 = 0) \text{ then } A_2 \text{ else } A_3)$

όπου $x \in M\cdot$ οπότε χρησιμοποιούμε τα στοιχεία της M και ως ονόματα του εαυτού τους, και θα τα καλούμε **ατομικές σταθερές.** Ένας M-όρος είναι **κλειστός** αν δεν περιέχει ατομικές σταθερές.

Για κάθε τ-άλγεβρα $\mathbf{M}$ και κάθε πρόγραμμα E της $\mathbf{R}(\tau)$, ορίζουμε μια αναδρομική μηχανή ως εξής:

(α) οι καταστάσεις της αναδρομικής μηχανής, είναι όλες οι λέξεις s της μορφής

$$\alpha_0 \dots \alpha_{m-1} : \beta_0 \dots \beta_{n-1}$$

όπου τα «σύμβολα» $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}, \beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ της s ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες

- Κάθε α_i είναι συναρτησιακό σύμβολο (σταθερά ή μεταβλητή), ή κλειστός $\mathbf{M}$-όρος ή το ειδικό σύμβολο ?, και
- κάθε β_j είναι ατομική σταθερά, δηλαδή, στοιχείο της M.

Οι καταστάσεις των αναδρομικών μηχανών είναι ίδιες για όλα τα προγράμματα της $\mathbf{M}$, και για αυτό τις καλούμε **M-καταστάσεις.**

(β) Οι τερματικές καταστάσεις της αναδρομικής μηχανής, είναι όλες οι καταστάσεις της μορφής

$$: w$$

δηλαδή, αυτές που δεν έχουν σύμβολα στα αριστερά του : και μόνο μία σταθερά στα δεξιά. Οι αναδρομικές μηχανές που θα αντιστοιχούν στα προγράμματα της $\mathbf{M}$ θα έχουν όλες την ίδια συνάρτηση εξόδου,

$$\mathrm{out}(: w) = w.$$

(γ) Η συνάρτηση μετάβασης της αναδρομικής μηχανής, ορίζεται σε επτά περιπτώσεις από τον Πινακα Μεταβάσεων 1: δηλαδή, $s \to s'$ αν είναι κάποια από τις ειδικές περιπτώσεις του πίνακα, Παρατηρούμε ότι οι **εξωτερικές κλήσεις (e-calls)** είναι οι μόνες μεταβάσεις που εξαρτώνται από την $\mathbf{M}$ («καλούν» τις δοσμένες), ενώ οι **εσωτερικές κλήσεις (i-calls)** είναι οι μόνες μεταβάσεις που εξαρτώνται από το πρόγραμμα E.

Για κάθε n-αδική συναρτησιακή μεταβλητή p_i του E, η **αναδρομική μηχανή** παράγεται με την προσθήκη της συνάρτησης εισόδου

$$\mathrm{in}(\vec{x}) \equiv \mathrm{p}_i : \vec{x}$$

και υπολογίζει τη μερική συνάρτηση $\bar{\mathrm{p}}_i : M^{n_i} \rightharpoonup M$, όπου

(4) $$\bar{\mathrm{p}}_i(\vec{x}) = w \iff \mathrm{p}_i : \vec{x} \to s_1 \to \dots \to : w.$$

Επίσης χρήσιμος είναι και ο συμβολισμός

(5) $$\mathbf{M}, E \vdash \mathrm{p}_i(\vec{x}) = w \iff \bar{\mathrm{p}}(\vec{x}) = w$$

(pass)	$\alpha\ \underline{x :\ }\ \beta \quad\to\quad \alpha\ \underline{\ : x}\ \beta \quad (x \in M)$
(e-call)	$\alpha\ \underline{\mathrm{f}_i : \vec{x}}\ \beta \quad\to\quad \alpha\ \underline{\ : \mathrm{f}_i(\vec{x})}\ \beta$
(i-call)	$\alpha\ \underline{\mathrm{p}_i : \vec{x}}\ \beta \quad\to\quad \alpha\ \underline{E_i\{\vec{x}_i :\equiv \vec{x}\} :\ }\ \beta$
(comp)	$\alpha\ \underline{h(A_1, \ldots, A_n) :\ }\ \beta \quad\to\quad \alpha\ \underline{hA_1 \cdots A_n :\ }\ \beta$
(br)	$\alpha\ \underline{(\mathrm{if}(A = 0)\mathrm{then}\ B\ \mathrm{else}\ C) :\ }\ \beta \quad\to\quad \alpha\ \underline{B\ C\ ?\ A :\ }\ \beta$
(br0)	$\alpha\ \underline{B\ C\ ? : 0}\ \beta \quad\to\quad \alpha\ \underline{B :\ }\ \beta$
(br1)	$\alpha\ \underline{B\ C\ ? : y \neq 0}\ \beta \quad\to\quad \alpha\ \underline{C :\ }\ \beta$

- Οι υπογραμμισμένες λέξεις είναι αυτές που αλλάζουν σε κάθε μετάβαση.
- $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$ είναι n-άδα ατομικών σταθερών.
- Στην **εξωτερική κλήση** (e-call), η f_i είναι δοσμένη μερική συνάρτηση της $\chi(\mathbf{M})$, με $\mathrm{arity}(\mathrm{f}_i) = n_i = n$.
- Στην **εσωτερική κλήση** (i-call), η p_i είναι n-μελής συναρτησιακή μεταβλητή του προγράμματος E που ορίζεται από την εξίσωση $\mathrm{p}_i(\vec{x}) = E_i$.
- Στη **μετάβαση σύνθεσης** (comp), η h είναι συναρτησιακό σύμβολο (σταθερά ή μεταβλητή) με $\mathrm{arity}(h) = n$.

Πινακας 1. Μεταβάσεις αναδρομικής μηχανής.

που φανερώνει την εξάρτηση της $\bar{\mathrm{p}}_\iota$ από την τ-άλγεβρα $\mathbf{M}$ και το πρόγραμμα E. Θα παραλείπουμε τις επιπλέον αναφορές και θα λέμε απλά η μερική συνάρτηση $\bar{\mathrm{p}}_i$, όταν η μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$ και το πρόγραμμα E είναι προφανή από τα συμφραζόμενα.

Το **κύριο σύμβολο** του προγράμματος E είναι η συναρτησιακή μεταβλητή p που ορίζεται στην πρώτη εξίσωση του E και το E **υπολογίζει** την $\bar{\mathrm{p}}$ στην $\mathbf{M}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αλγόριθμοι ως αναδρομείς

Όπως είπαμε και στην εισαγωγή, ο Μοσχοβάκης στα άρθρα του [**2**] [**3**] προτείνει ένα μαθηματικό ορισμό για την έννοια του αλγορίθμου. Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τον ορισμό αυτό καθώς και τους ορισμούς και τις ιδιότητες που είναι φυσική συνέπεια του.

Η προσπάθεια να μοντελοποιήσουμε τους αλγόριθμους, είναι ουσιαστικά η προσπάθεια να απαντήσουμε στην ερώτηση: Τι είναι ο αλγόριθμος; Ποια είναι η ειδοποιός διαφορά που κάνει κάθε αλγόριθμο ξεχωριστό ή με άλλα λόγια πως καταλαβαίνουμε ότι ο αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε ή που βλέπουμε γραμμένο είναι ο Ευκλείδειος;

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα, κατά τη γνώμη μου, είναι: Το σύνολο των αναδρομικών εξισώσεων του. Αυτό όμως δεν είναι αρκετό. Χρειάζονται ακόμα δύο πράγματα. Το σύνολο λύσεων και το σύνολο των διαθέσιμων συναρτήσεων. Το σύνολο των λύσεων είναι το σύνολο στο οποίο ανήκουν οι συναρτήσεις που ο αλγόριθμος υπολογίζει. Ενώ το σύνολο των διαθέσιμων συναρτήσεων είναι οι πόροι του υπολογισμού.

Αρχικά θα δώσουμε τον ορισμό του συναρτησιακού και στη συνέχεια θα ορίσουμε τους αναδρομείς.

3.1. Συναρτησιακά

Ορισμος 4. *Ένα* **συναρτησιακό επί** *μιας συλλογής συνόλων $\mathcal{M}$ είναι κάθε μονότονη, μερική συνάρτηση*

$$h : X_1 \times \ldots \times X_n \rightharpoonup W,$$

όπου $W \in \mathcal{M}$ ή $W = \{true, false\}$· κάθε X_i είτε είναι σύνολο που ανήκει στο $\mathcal{M}$, ή είναι χώρος μερικών συναρτήσεων $X_i = (U \rightharpoonup V)$, όπου $U = U_1 \times \ldots \times U_l$ είναι ένα καρτεσιανό γινόμενο συνόλων του $\mathcal{M}$ και $V \in \mathcal{M}$ ή $V = \{true, false\}$.

Π.χ., η πράξη της εφαρμογής της m-μελούς μερικής συνάρτησης

$$\mathrm{ap}_m(x_1, \ldots, x_m, p) = p(x_1, \ldots, x_m)$$

όπου $x_1, \ldots, x_m \in M, p : M^m \rightharpoonup W$, είναι ένα συναρτησιακό επί των συνόλων M, W και η πράξη

$$\exists_M(p) = \begin{cases} true & \text{if } (\exists x \in M)[p(x) = true], \\ false & \text{if } (\forall x \in M)[p(x) = false], \end{cases}$$

είναι ένα συναρτησιακό επί του M το οποίο «ενσωματώνει» την υπαρξιακή ποσόδειξη επί του M. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, οι μερικές συναρτήσεις καθώς και οι μερικές σχέσεις επί του M είναι συναρτησιακά.

3.2. Αναδρομείς

ΟΡΙΣΜΟΣ 5. *Για κάθε μερικά διατεταγμένο χώρο (μ.δ.χ.) X και κάθε πλήρη μερικά διατεταγμένο W, ένας* **μονότονος αναδρομέας** $\alpha : X \rightsquigarrow W$ *είναι μια πλειάδα*

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k),$$

τέτοια ώστε για κατάλληλους, πλήρης μ.δ.χ. $D_1, \ldots, D_k$:

(1) *Κάθε* $\alpha_i : X \times D_1 \times \ldots \times D_k \to D_i, (i = 1, \ldots, k)$ *είναι μονότονη συνάρτηση.*
(2) *η* **συνάρτηση εξόδου** *ή* **συνάρτηση τιμής** $\alpha_0 : X \times D_1 \times \ldots \times D_k \to W$ *είναι επίσης μονότονη.*

Το γινόμενο $D_\alpha = D_1 \times \ldots \times D_k$ *είναι το* **σύνολο λύσεων** *του* α· *το* k *είναι η διάσταση του* α· *η* συνάρτηση μετάβασής *του είναι η*

$$\mu_\alpha(x, \vec{d}) = (\alpha_1(x, \vec{d}), \ldots, \alpha_k(x, \vec{d})),$$

από το $X \times D_\alpha$ *στο* D_α· *και η συνάρτηση* $\bar{\alpha} : X \to W$ *που* υπολογίζεται *από τον* α *είναι η*

$$\bar{\alpha}(x) = \alpha_0(x, \vec{d}_x) = \mathrm{value}(x, \vec{d}_x) \qquad (x \in X),$$

όπου $\vec{d}_x$ *είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο του συστήματος εξισώσεων*

$$\vec{d} = \mu_\alpha(x, \vec{d}).$$

Ο α είναι συνεχής αν οι $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ είναι συνεχείς.

Η μοντελοποίηση των αλγορίθμων από αναδρομείς, δίνει πολύ φυσικά τον ορισμό του ισομορφισμού:

ΟΡΙΣΜΟΣ 6. *Δύο αναδρομείς* $\alpha, \beta : X \rightsquigarrow W$ *είναι* **ισόμορφοι** *αν έχουν την ίδια διάσταση, έστω* k, *και υπάρχει μια μετάθεση* $(l_1, \ldots, l_k)$ *του* $(1, \ldots, k)$ *και ισομορφισμοί μερικά διατεταγμένων χώρων* $\pi_i : D_{\alpha, l_i} \to D_{\beta, i}$, *έτσι ώστε ο επαγώμενος ισομορφισμός* $\pi : D_\alpha \to D_\beta$ *επί των σύνολων λύσεων, να σέβεται τις δομές, δηλαδή για κάθε* $x \in X, \vec{d} \in D_\alpha$,

$$\pi(\mu_\alpha(x, \vec{d})) = \mu_\beta(x, \pi(\vec{d}))$$
$$\alpha_0(x, \vec{d}) = \beta_0(x, \pi(\vec{d})).$$

Ενώ όταν έχουμε αναδρομείς διάστασης 1: Δύο αναδρομείς $\alpha_1 = (D_1, \mathrm{value}_1, \mu_1)$, $\alpha_2 = (D_2, \mathrm{value}_2, \mu_2) : X \rightsquigarrow W$ (επί των ίδιων συνόλων) είναι **ισόμορφοι**, αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία που διατηρεί τη διάταξη

$$\pi : D_1 \to D_2$$

και σέβεται τις συναρτήσεις μετάβασης και τιμής, δηλαδή, για κάθε $x \in X$ και $d \in D_1$,

$$\pi(\mu_1(x, d)) = \mu_2(x, \pi(d)),$$
$$\mathrm{value}_1(x, d) = \mathrm{value}_2(x, \pi(d)).$$

Ισόμορφοι αναδρομείς προσδιορίζουν τις ίδιες μερικές συναρτήσεις, $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$.

Ο ορισμός και η μεταχείριση αναδρομέων διευκολύνεται με τη χρήση του συμβολισμού `where`, έναν από τις πολλές παραλλαγές στο συμβολισμό των αναδρομικών ορισμών που χρησιμοποιούνται στις γλώσσες προγραμματισμού: Για να δηλώσουμε ότι $\alpha = (D, \mu, \mathrm{value}) : X \rightsquigarrow W$, γράφουμε

$$\alpha(x) = \mathrm{value}(x, d) \ \texttt{where} \ \{d = \mu(x, d)\}, \tag{6}$$

που δηλώνει ότι για να υπολογίσουμε την τιμή $\bar{\alpha}(x)$ χρησιμοποιώντας τον α, παίρνουμε πρώτα τη ελάχιστη λύση των εξισώσεων μέσα στα άγκιστρα { } και στη συνέχεια τη χρησιμοποιούμε αντί της μερικής συνάρτησης που βρίσκεται μπροστά. Μπορούμε να έχουμε περισσότερες της μιας εξισώσεις μέσα στα άγκιστρα με αυτών τον συμβολισμό,

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \mathrm{value}(x, d_1, d_2) \texttt{ where } \{d_1 = \mu_1(x, d_1, d_2), d_2 = \mu_2(x, d_1, d_2)\}\\ &=_{\mathrm{df}} \mathrm{value}(x, \langle d_1, d_2\rangle) \texttt{ where } \{\langle d_1, d_2\rangle = \langle \mu_1(x, d_1, d_2), \mu_2(x, d_1, d_2)\rangle\}\end{aligned}$$

όπου οι γωνιώδεις αγκύλες δηλώνουν ότι το σύνολο λύσεων του α είναι το γινόμενο των μ.δ.χ. $D_1 \times D_2$. Επίσης επιτρέπουμε στις αναδρομικές εξισώσεις, που βρίσκονται μέσα στις αγκύλες, να περιέχουν (μερικές) συναρτήσεις,

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \mathrm{value}(x, p) \texttt{ where } \{p(u) = \mu(x, u, p)\}\\ &=_{\mathrm{df}} \mathrm{value}(x, p) \texttt{ where } \{p = \lambda(u)\, \mu(x, u, p)\},\end{aligned}$$

σε αυτή την περίπτωση το σύνολο λύσεων του α είναι ο μ.δ.χ. μερικών συναρτήσεων $(U \rightharpoonup W)$, το σύνολο τιμών της μεταβλητής p.

Η έλλογη χρήση και ο συνδυασμός αυτών των συνθηκών διευκολύνει σημαντικά τον ορισμό και τη μεταχείριση των αναδρομέων. Για παράδειγμα, κάθε μερική συνάρτηση $f : X \rightharpoonup W$ (και γενικότερα κάθε συναρτησιακό) αναπαρίσταται από τον «εκφυλισμένο» αναδρομέα

$$\mathbf{r}_f(x) =_{\mathrm{df}} f(x) \texttt{ where } \{d = d\},$$

με σύνολο λύσεων το $\{\perp\}$ και έτσι ώστε $\bar{\mathbf{r}}_f = f$. Ένα πιο ενδιαφέρον παράδειγμα, με το οποίο θα ασχοληθούμε ενδελεχώς στη συνέχεια, προκύπτει από τον αναδρομέα, που αναπαριστά την αφηρημένη μηχανή $\phi = (\mathrm{in}, S, \tau, T, \mathrm{out})$ από το X στο W. Συγκεκριμένα

Ορισμος 7. *Ο* **αντίστοιχος αναδρομέας**, *που αναπαριστά την αφηρημένη μηχανή* $\phi = (\mathrm{in}, S, \tau, T, \mathrm{out})$ *από το* X *στο* W, *δίνεται από την*

$$\mathbf{r}_\phi(x) =_{\mathrm{df}} p(\mathrm{in}(x)) \texttt{ where} \{p(s) = \text{if } s \in T \text{ then } \mathrm{out}(s) \text{ else } p(\tau(s))\} \tag{7}$$

με σύνολο λύσεων το μ.δ.χ. των μερικών συναρτήσεων $D = (S \rightharpoonup W)$.

Η συνάρτηση μετάβασης του παραπάνω αναδρομέα είναι η

$$\mu_\phi(x, d) = \begin{cases} \mathrm{out}(s), & \text{αν } s \in T\\ d(\tau(s)), & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

και η συνάρτηση τιμής είναι η

$$\mathrm{value}_\phi(x, d) = d(\mathrm{in}(x)).$$

3.3. Σχέση αναδρομέα με αφηρημένη μηχανή

Ο αντίστοιχος αναδρομέας, υπολογίζει την ίδια μερική συνάρτηση $\bar{\mathbf{r}}_\phi(x) = \bar{\phi}(x)$ ως ϕ και κωδικοποιεί τον ϕ μέχρι ισομορφισμού. Για να δείξουμε το ακριβές αποτέλεσμα πρέπει πρώτα να δείξουμε την:

Προταση 1 ([**4**]). *Για όλα τα σύνολα* S_1, S_2, Y_1, Y_2, *έστω* $\rho : S_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow S_2$ *και για κάθε* $s \in S_1$, *οι* $\sigma_s : Y_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y_2$ *είναι δοσμένοι ισομορφισμοί. Θέτουμε*

$$\pi(p)(\rho s) = \sigma_s(p(s)) \qquad (p : S_1 \rightharpoonup Y_1, \pi(p) : S_2 \rightharpoonup Y_2). \tag{8}$$

Τότε η π είναι ισομορφισμός μ.δ.χ. και κάθε ισομορφισμός μ.δ.χ.

$$\pi : (S_1 \rightharpoonup Y_1) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (S_2 \rightharpoonup Y_2)$$

ικανοποιεί την (8) για τις κατάλληλες ρ, $\{\sigma_s\}_{(s \in S_1)}$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο τη μια κατεύθυνση καθώς το ευθύ, δηλαδή ότι η συνάρτηση που ορίζεται από την (8) είναι ισομορφισμός μ.δ.χ., είναι προφανές.

Για το αντίστροφο, έστω ο ισομορφισμός $\pi : (S_1 \rightharpoonup Y_1) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (S_2 \rightharpoonup Y_2)$, και για κάθε $s \in S_1$ και κάθε $y \in Y_1$, έστω

$$p_s^y(t) = \begin{cases} y, & \text{αν } t = s, \\ \perp, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

έτσι ώστε $p_s^y : S_1 \rightharpoonup Y_1$. Παρατηρούμε ότι κάθε p_s^y είναι ελαχιστικό (minimal) σημείο στον $(S_1 \rightharpoonup Y_1)$, αλλά και κάθε ελαχιστικό σημείο του $(S_1 \rightharpoonup Y_1)$ είναι κάποια p_s^y για κάποιο s και κάποιοι t. Έπεται ότι κάθε εικόνα τις π $\pi(p_s^y) : S_2 \rightharpoonup Y_2$ είναι μια ελαχιστική μερική συνάρτηση στο $(S_2 \rightharpoonup Y_2)$ η οποία συγκλίνει σε μοναδικό σημείο του S_2 και έτσι έχουμε τις συναρτήσεις $\rho : S_1 \times Y_1 \to S_2$ και $\sigma : S_1 \times Y_1 \to Y_2$ ώστε

$$\pi(p_s^y)(t) = q_{\rho(s,y)}^{\sigma(s,y)}(t) = \begin{cases} \sigma(s,y), & \text{αν } t = \rho(s,y), \\ \perp, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{9}$$

(1) *Για κάθε s, y_1, y_2, $\rho(s, y_1) = \rho(s, y_2)$.*

Απόδειξη. Αν $\rho(s, y_1) \neq \rho(s, y_2)$ για κάποια $s, y_1 \neq y_2$, τότε οι μερικές συναρτήσεις $q_{\rho(s,y_1)}^{\sigma(s,y_1)}$ και $q_{\rho(s,y_2)}^{\sigma(s,y_2)}$ είναι συμβατές[1] (αφού έχουν ξένα μεταξύ τους πεδία σύγκλισης) με ελάχιστο άνω φράγμα την ένωσή τους

$$q = q_{\rho(s,y_1)}^{\sigma(s,y_1)} \cup q_{\rho(s,y_2)}^{\sigma(s,y_2)}.$$

αλλά η αντίστροφη εικόνα $\pi^{-1}(q)$ θα περιέχει την $p_s^{y_1}$ και την $p_s^{y_2}$, οι οποίες είναι ασύμβατες. Άτοπο. $\diamond$ **(1)**

Έστω $\rho(s) = \rho(s, y)$ για κάθε $y \in Y_1$ και θέτουμε $\sigma_s(y) = \sigma(s, y)$, ώστε ο ορισμός (9) γίνεται

$$\pi(p_s^y) = q_{\rho(s)}^{\sigma_s(y)}, \qquad (\rho : S_1 \to S_2, s \in S_1, \sigma_s : Y_1 \to Y_2, y \in Y_1). \tag{10}$$

(2) *Η απεικόνιση $\rho : S_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow S_2$ είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η ρ είναι 1-1, υποθέτουμε ότι $\rho(s_1) = \rho(s_2)$ και σταθεροποιούμε ένα $y \in Y_1$. Αν $\sigma_{s_1}(y) = \sigma_{s_2}(y)$, τότε $q_{\rho(s_1)}^{\sigma_{s_1}(y)} = q_{\rho(s_2)}^{\sigma_{s_2}(y)}$, και άρα $p_{s_1}^y = p_{s_2}^y$, που συνεπάγεται ότι $s_1 = s_2$, επειδή οι δύο αυτές μερικές συναρτήσεις έχουν αντίστοιχα πεδίο ορισμού το μονοσύνολο $\{s_1\}$ και το μονοσύνολο $\{s_2\}$. Αν $\sigma_{s_1}(y) \neq \sigma_{s_2}(y)$, τότε οι δύο αυτές μερικές συναρτήσεις $q_{\rho(s_1)}^{\sigma_{s_1}(y)}$ και $q_{\rho(s_2)}^{\sigma_{s_2}(y)}$ είναι ασύμβατες, που σημαίνει ότι τα αρχέτυπα τους μέσω της π $p_{s_1}^y$ και $p_{s_2}^y$ θα πρέπει να είναι ασύμβατα—το οποίο συμβαίνει μόνο αν $s_1 = s_2$.

Για να δείξουμε ότι η ρ είναι επιμορφισμός, έστω $t \in S_2$, σταθεροποιούμε ένα $w \in Y_2$, και θέτουμε

$$r(u) = \begin{cases} w, & \text{αν } u = t, \\ \perp, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \qquad (u \in S_2).$$

[1] Τα x, y είναι συμβατά αν υπάρχει z τέτοιο που $x \le z$ και $y \le z$.

Το παραπάνω είναι ελαχιστικό στοιχείο στο $(S_2 \rightharpoonup Y_2)$, οπότε υπάρχουν $s \in S_1$, $y \in Y_1$ τέτοια ώστε $\pi(p_s^y) = r$—που σημαίνει ότι $q_{\rho(s)}^{\sigma_s(y)} = r$, και άρα $t = \rho(s)$, επειδή τα αντίστοιχα πεδία σύγκλισης αυτών των δύο μερικών συναρτήσεων είναι το $\{\rho(s)\}$ και το $\{t\}$. $\diamond$ **(2)**

(3) *Για κάθε $s \in S_1$, η απεικόνιση $\sigma_s : Y_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y_2$ είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία.*

Απόδειξη. Αν $\sigma_s(y_1) = \sigma_s(y_2)$, τότε $q_{\rho(s)}^{\sigma_s(y_1)} = q_{\rho(s)}^{\sigma_s(y_2)}$, έτσι ώστε $p_s^{y_1} = p_s^{y_2}$, που συνεπάγεται ότι $y_1 = y_2$· οπότε η σ_s είναι 1-1. Τέλος, για κάθε $w \in Y_2$, έστω

$$r(t) = \begin{cases} w, & \text{αν } t = \rho(s), \\ \perp, & \text{αλλιώς}\cdot \end{cases}$$

αυτό είναι ελαχιστικό στοιχείο στο $(S_2 \rightharpoonup Y_2)$ και άρα υπάρχουν s', y τέτοια ώστε

$$\pi(p_{s'}^y) = q_{\rho(s')}^{\sigma_{s'}(y)} = r\cdot$$

από τα πεδία σύγκλισης των δύο αυτών στοιχείων συμπεραίνουμε, όπως και προηγουμένως, ότι $\rho(s') = \rho(s)$, άρα $s' = s$ από το **(2)** και από τις τιμές τους παίρνουμε το επιθυμητό $t = \sigma_s(y)$. $\diamond$ **(3)**

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της Πρότασης. $\Diamond$

Είμαστε πλέον σε θέση να δείξουμε το πρώτο σημαντικό

Θεωρημα 1 ([**4**]). *Οι αντίστοιχοι αναδρομείς $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ των αφηρημένων μηχανών ϕ_1 και ϕ_2 είναι ισόμορφοι αν και μόνο αν οι ϕ_1 και ϕ_2 είναι ισόμορφοι.*

Απόδειξη. Από την (7), για κάθε ζεύγος αφηρημένων μηχανών ϕ_1, ϕ_2,

$$\mathrm{r}_i = \mathrm{r}(\phi_i) = (\mathrm{value}_i, \mu_i),$$

όπου για κάθε $p \in D_i = (S_i \rightharpoonup Y)$ και κάθε $x \in X$,

$$\mathrm{value}_i(x, p) = p(\mathrm{in}_i(x)),$$

$$\mu_i(x, p) = \mu_i(p) = \lambda(s)[\text{if } (s \in T_i) \text{ then } \mathrm{out}_i(s) \text{ else } p(\tau_i(s))] : S_2 \rightharpoonup Y.$$

Μέρος 1ο. Έστω ότι η $\rho : S_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow S_2$ είναι ένας ισομορφισμός του ϕ_1 με τον ϕ_2, και έστω $f_i : S_i \rightharpoonup Y$ τα ελάχιστα σταθερά σημεία των συναρτήσεων μετάβασης των αφηρημένων μηχανών, ώστε

$$f_i(s) = \mathrm{out}_i(\tau_i^{|s|}(s)) \text{ όπου } |s| = \text{το ελάχιστο } n \text{ ώστε } \tau_i^n(s) \in T_i.$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δίνει ότι

$$f_1(s) = f_2(\rho(s)).$$

Ο απαιτούμενος ισομορφισμός του r_1 με τον r_2 προσδιορίζετε από τον ισομορφισμό μ.δ.χ. των αντίστοιχων συνόλων λύσεων $(S_1 \rightharpoonup Y)$ και $(S_2 \rightharpoonup Y)$, που πρέπει να είναι της μορφής

$$\pi(p)(\rho(s)) = \sigma_s(p(s)) \quad (s \in S_1), \tag{11}$$

από την Πρόταση 1. Θα επιστρατεύσουμε τον ισομορφισμό $\rho : S_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow S_2$ της υπόθεσης και τους ισομορφισμούς $\sigma_s : Y \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ που προσδιορίζονται από τα παρακάτω.

Αρχικά διαλέγουμε για κάθε $t \in T_1$ έναν ισομορφισμό $\sigma_t^* : Y \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ τέτοιον ώστε

$$\sigma_t^*(\mathrm{out}_1(t)) = \mathrm{out}_2(\rho(t)) \quad (t \in T_1),$$

και εξετάζουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $f_1(s)\uparrow$ ή υπάρχει εισόδου προσπελάσιμη s' τέτοια ώστε $s \to^* s'$, τότε $\sigma_s(y) = y$.

(β) Αν $f_1(s)\downarrow$ και δεν υπάρχει εισόδου προσπελάσιμη s' τέτοια ώστε $s \to^* s'$, τότε $\sigma_s = \sigma_t^*$, όπου $t = \tau_1^{|s|}(s) \in T_1$ είναι «η προβολή» του s στο σύνολο T_1.

Λημμα 1. *Για κάθε* $s \in S_1$,

$$\sigma_{\tau_1(s)} = \sigma_s \quad (s \in S_1). \tag{12}$$

Αποδειξη. Αν $f_1(s)\uparrow$ ή υπάρχει εισόδου προσπελάσιμη s' τέτοια ώστε $s \to^* s'$, τότε η $\tau_1(s)$ έχει την ίδια ιδιότητα και άρα η σ_s και η $\sigma_{\tau_1(s)}$ είναι οι ταυτοτικές και αν $f_1(s)\downarrow$ και δεν υπάρχει εισόδου προσπελάσιμη s' τέτοια ώστε $s \to^* s'$, τότε η $\tau_1(s)$ έχει τις ίδιες ιδιότητες, και «προβάλλεται» στο ίδιο $t = \tau_1^n(s) \in T_1$, έτσι ώστε $\sigma_s = \sigma_{\tau_1(s)} = \sigma_t^*$. ◇ (Λήμματος)

Τώρα η π της (11) είναι ένας ισομορφισμός του $(S_1 \rightharpoonup Y)$ με τον $(S_2 \rightharpoonup Y)$ από την Πρόταση 1 και μένει να δείξουμε τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

(i) $\mathrm{value}_1(x,p) = \mathrm{value}(x, \pi(p))$, δηλαδή, $p(\mathrm{in}_1(x)) = \pi(p)(\mathrm{in}_2(x))$. Αυτό ισχύει επειδή $s = \mathrm{in}_1(x)$ είναι εισόδου προσπελάσιμη και άρα η σ_s είναι ταυτοτική με

$$\pi(p)(\mathrm{in}_2(x)) = \pi(p)(\rho(\mathrm{in}_1(x)) = \sigma_s(p(\mathrm{in}_1(x))) = p(\mathrm{in}_1(x)).$$

(ii) $\pi(\mu_1(p)) = \mu_2(\pi(p))$, δηλαδή, για κάθε $s \in S_1$,

$$\pi(\mu_1(p))(\rho(s)) = \mu_2(\pi(p))(\rho(s)). \tag{13}$$

Για αυτήν την περίπτωση διακρίνουμε τρεις υποπεριπτώσεις:

(iiα) Η $s \in T_1$ και είναι εισόδου προσπελάσιμη. Από το (α) η σ_s είναι η ταυτοτική και άρα μπορούμε να υπολογίσουμε και τα δύο μέλη της (13) ως εξής:

$$\begin{aligned} \pi(\mu_1(p))(\rho(s)) &= \mu_1(p)(s) = \mathrm{out}_1(s), \\ \mu_2(\pi(p))(\rho(s)) &= \mathrm{out}_2(\rho(s)), \end{aligned}$$

και άρα τα δύο μέλη είναι ίσα από τον ορισμό 2.

(iiβ) Η $s \in T_1$ αλλά δεν είναι εισόδου προσπελάσιμη, οπότε από το (β) έχουμε

$$\begin{aligned} \pi(\mu_1(p))(\rho(s)) &= \sigma_s(\mu_1(p)(s)) = \sigma_s(\mathrm{out}_1(s)), \\ \mu_2(\pi(p))(\rho(s)) &= \mathrm{out}_2(\rho(s)), \end{aligned}$$

και τα δύο μέλη είναι ίσα από την επιλογή της $\sigma_s = \sigma_s^*$.

(iiγ) Η $s \notin T_1$. Στην συγκεκριμένη περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (12):

$$\begin{aligned} \pi(\mu_1(p))(\rho(s)) &= \sigma_s(\mu_1(p)(s)) = \sigma_s(p(\tau_1(s))), \\ \mu_2(\pi(p))(\rho(s)) &= \pi(p)(\tau_2(\rho(s))) = \pi(p)(\rho(\tau_1(s))) = \sigma_{\tau_1(s)}(p(\tau_1(s)), \end{aligned}$$

και τα δύο μέλη είναι ίσα από την (12).

Με αυτά ολοκληρώνεται η απόδειξη του **1ου Μέρους**.

Μέρος 2ο. Έστω τώρα ότι οι $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ είναι ισόμορφοι, δηλαδή υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία

$$\pi : D_1 \to D_2$$

που διατηρεί την διάταξη και σέβεται τις συναρτήσεις μετάβασης και τιμής των αναδρομέων, δηλαδή, δηλαδή, για κάθε $x \in X$ και για κάθε $d \in D_1$

$$\pi(\mu_1(x,d)) = \mu_2(x,\pi(d)),$$
$$\text{value}_1(x,d) = \text{value}_2(x,\pi(d)).$$

ΛΗΜΜΑ 2. *Για κάθε $s \in S_1$, υπάρχει ένα $t \in S_2$ τέτοιο ώστε*

$$\pi(d_s) = e_t$$

όπου $d_s \in D_1, e_t \in D_2$,

$$d_s(x) \downarrow \iff x = s$$

και αν s είναι σε συγκλίνων μονοπάτι , δηλαδή,

$$s \in T^\omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \text{Domain}(\mu_1^n(\perp)),$$

τότε $d_s \leq f_1$ αλλιώς $d_s(s) = w_1$. Παρόμοια

$$e_t(x) \downarrow \iff x = t$$

και αν t είναι στο σε μονοπάτι που συγκλίνει, $e_t \leq f_2$ αλλιώς $e_t(t) = w_1$. όπου f_1 και f_2 είναι τα ελάχιστα σταθερά σημεία των μ_1, μ_2 αντίστοιχα και w_1 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του W. [2]

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η π διατηρεί τη διάταξη και

$$\perp < d_s \implies \perp = \pi(\perp) < \pi(d_s)$$

έχουμε ότι το πεδίο της $\pi(d_s)$ δεν είναι κενό.

Έστω τώρα, προς άτοπο, ότι υπάρχουν $t, t' \in S_2$ τέτοια ώστε

$$\pi(d_s)(t) \downarrow \text{ και ταυτόχρονα } \pi(d_s)(t') \downarrow .$$

Έστω $e_t, e_{t'}$ τέτοια ώστε

$$\perp < e_t < \pi(d_s),\ \perp < e_{t'} < \pi(d_s).$$

Επειδή η π^{-1} διατηρεί την διάταξη, έχουμε ότι

$$\perp < \pi^{-1}(e_t) < d_s,$$

το οποίο είναι αντίφαση στο γεγονός ότι δεν υπάρχει τίποτα μεταξύ των $\perp$ και d_s. ◇ (Λήμματος)

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την $\rho : S_1 \to S_2$. Για κάθε $s \in S_1$ έχουμε

$$\rho(s) = \text{το μοναδικό } t \in S_2 \text{ τέτοιο ώστε } \pi(d_s)(t) \downarrow .$$

Θα δείξουμε ότι η ρ είναι $1-1$ και επί

- Η είναι ρ $1-1$. Αν $s \neq s'$ τότε

  $$d_s \neq d_{s'}$$

  και αφού η π είναι $1-1$ έχουμε

  $$\pi(d_s) \neq \pi(d_{s'}) \implies \rho(s) \neq \rho(s').$$

[2] Από εδώ και πέρα όταν θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό d_s, θα εννοούμε την συνάρτηση που ορίσαμε εδώ, με τις κατάλληλες τροποποιήσεις κάθε φορά.

- Η ρ είναι επί. Για κάθε $t \in S_2$ από το Λήμμα 2 υπάρχει $s \in S_1$ τέτοιο ώστε
$$\pi^{-1}(e_t) = d_s.$$
Για το συγκεκριμένο s και από τον ορισμό της ρ, έχουμε
$$\begin{aligned}\rho(s) &= \text{το μοναδικό } t' \in S_2 \text{ τέτοιο ώστε } \pi(d_s)(t') \downarrow\\ &= \text{το μοναδικό } t' \in S_2 \text{ τέτοιο ώστε } \pi(\pi^{-1}(e_t))(t') \downarrow\\ &= \text{το μοναδικό } t' \in S_2 \text{ τέτοιο ώστε } e_t(t') \downarrow\end{aligned}$$
οπότε $t' = t$ και
$$\rho(s) = t.$$

Το παραπάνω συνεπάγεται επίσης ότι, αν $s \in T^\omega$ τότε

$$\pi(d_s) = e_{\rho(s)}. \tag{14}$$

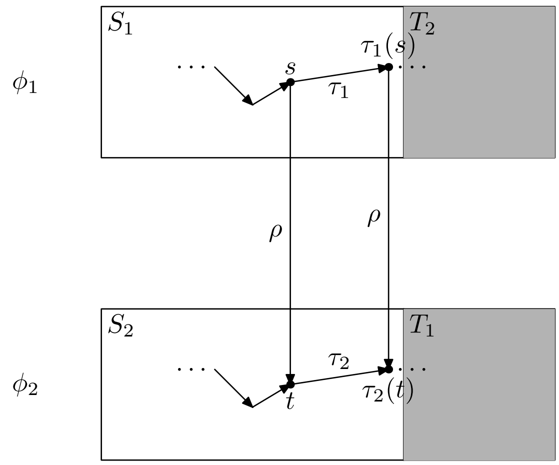
Μένει να δείξουμε ότι η ρ ικανοποιεί τις συνθήκες 1) – 4) του Ορισμού 2.

(1) $\rho[T_1] = T_2$. Για το τυχαίο $s \in T_1$, έστω $\rho(s) = t$. Αφού η s είναι τερματική, από τον ορισμό της μ_1 έχουμε ότι
$$d_s \leq \mu_1(\perp)$$
και επειδή η π είναι μονότονη και ισομορφισμός,
$$\pi(d_s) \leq \pi(\mu_1(\perp)) = \mu_2(\pi(\perp)) = \mu_2(\perp).$$
Άρα από τον ορισμό της ρ
$$t \in \mathrm{Domain}(\pi(d_s)) \subseteq \mathrm{Domain}(\mu_2 \perp) = T_2.$$
Άρα $\rho[T_1] \subseteq T_2$.
Αν $t \in T_2$ τότε
$$e_t \leq \mu_2(\perp)$$
και επειδή π^{-1} είναι μονότονη και ισομορφισμός,
$$\pi^{-1}(e_t) \leq \pi^{-1}(\mu_2(\perp)) = \mu_1(\pi^{-1}(\perp)) = \mu_1(\perp).$$
Άρα από τον ορισμό της ρ
$$s \in \mathrm{Domain}(\pi(e_t)) \subseteq \mathrm{Domain}(\mu_1 \perp) = T_1$$
όπου s είναι το μοναδικό (από το Λήμμα 2) στοιχείο του πεδίου της $\pi^{-1}(e_t)$. Εύκολα συνάγεται ότι $\rho(s) = t$. Άρα $\rho[T_1] \supseteq T_2$.

(2) $\rho(\mathrm{in}_1(x)) = \mathrm{in}_2(x)$. Έστω $s_0 := \mathrm{in}_1(x)$ και $t_0 := \mathrm{in}_2(x)$. Έχουμε ότι
$$\begin{aligned}\pi(d_{s_0})(t_0) &= \mathrm{value}_2(\pi(d_{s_0}), x)\\ &= \mathrm{value}_1(d_{s_0}, x) && (\pi \text{ ισομορφισμός})\\ &= d_{s_0}(s_0).\end{aligned}$$
Αφού $d_{s_0}(s_0) \downarrow$ έχουμε ότι $\pi(d_{s_0})(t_0) \downarrow$, άρα
$$\rho(s_0) = t_0.$$

(3) $\rho(\tau_1(s)) = \tau_2(\rho(s))$. Έστω $s' := \tau_1(s), t := \rho(s)$ και $t' := \rho(\tau_1(s)) = \rho(s')$. Θέλουμε να δείξουμε ότι
$$\tau_2(t) = t'.$$
Επειδή $\tau_1(s) = s'$ έχουμε ότι

$$d_s \leq \mu_1(d_{s'}). \tag{15}$$



Σχημα 1. $\rho(\tau_1(s)) = \tau_2(\rho(s))$.

Πράγματι, θα δείξουμε την (15) διακρίνοντας περιπτώσεις.

- $s \in T^\omega$ τότε $s' \in T^\omega$ και από τον ορισμό της d_s

$$d_s(s) = f_1(s) = d_{s'}(s') = \mu_1(d_{s'})(s).$$

- $s \notin T^\omega$ τότε $s' \notin T^\omega$. Πάλι από τον ορισμό της d_s

$$d_s(s) = w_1 = d_{s'}(s') = \mu_1(d_{s'})(s).$$

Από την (15) και επειδή η π είναι μονότονη, έχουμε ότι

(16) $$\pi(d_s) \leq \pi(\mu_1(d_{s'})) = \mu_2(\pi(d_{s'}))$$

Από τους ορισμούς των ρ και t παίρνουμε ότι $\pi(d_s)(t)\downarrow$, άρα από την (16)

$$\mu_2(\pi(d_{s'}))(t)\downarrow \implies \pi(d_{s'})(\tau_2(t))\downarrow.$$

Οπότε από το Λήμμα 2 και τον ορισμό της ρ, η $\pi(d_{s'})$ συγκλίνει μόνο στο $\rho(s') = t'$, έτσι

$$\tau_2(t) = t'.$$

(4) $\mathrm{out}_1(s) = \mathrm{out}_2(\rho(s))$, για κάθε $s \in T_1$ το οποίο είναι εισόδου προσπελάσιμο, δηλαδή, τέτοιο ώστε για κάποιο $x \in X$ και κάποιο $n, s = \tau_1^n(\mathrm{in}_1(x))$. Αν $s \in T_1$ και υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε για κάποιο $n, s = \tau_1^n(\mathrm{in}_1(x))$, τότε

(17) $$d_s \leq \mu_1(\bot) \leq f_1.$$

Η μονοτονία της π δίνει

(18) $$\pi(d_s) \leq \pi(\mu_1(\bot)) \leq \pi(f_1) = f_2.$$

Επιπλέον

(19) $$\pi(\mu_1(\bot)) = \mu_2(\pi(\bot)) = \mu_2(\bot).$$

Με μια απλή επαγωγή στο n και τις συνθήκες 2, 3 που αποδείξαμε για την ρ έπεται ότι

(20) $$\text{αν } \tau_1^n(x) = s \text{ τότε } \tau_2^n(x) = \rho(s).$$

Οπότε

$$\begin{aligned} d_s(s) &= f_1(s) \\ &= \mathrm{value}_1(f_1, x) \\ &= \mathrm{value}_2(\pi(f_1), x) \\ &= \mathrm{value}_2(f_2, x) \\ &= f_2(\rho(s)) \\ &= \pi(d_s)(\rho(s)) \end{aligned}$$

το αποτέλεσμα έπεται από το γεγονός ότι

$$\mathrm{out}_1(s) = f_1(s) = f_2(\rho(s)) = \mathrm{out}_2(\rho(s)). \qquad \Diamond$$

Για την φορά που μόλις δείξαμε μπορούμε να πούμε και το εξής:

Πρόταση 2. *Από τον αντίστοιχο αναδρομέα μπορούμε να ανακτήσουμε την αφηρημένη μηχανή.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{r} = (D, \mathrm{value}, \mu)$ ο αντίστοιχος αναδρομέας. Αφού $D = (S \rightharpoonup W)$ για το σύνολο των καταστάσεων S έχουμε

$$S := \bigcup_{d \in D} \mathrm{Domain}(d).$$

Για τις το σύνολο των τερματικών καταστάσεων T θα εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι

$$\mu(\perp)(s)\downarrow \iff s \in T$$

αφού από τον ορισμό της συνάρτησης μετάβασης μ έχουμε ότι

$$\mu(\perp)(s) = \begin{cases} \mathrm{out}(s), & \text{if } s \in T \\ \perp, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Άρα

$$T := \mathrm{Domain}(\mu(\perp)).$$

Επιπλέον μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μ για να ορίσουμε την $\mathrm{out} : T \to W$, ώστε, για κάθε $s \in T$

$$\mathrm{out}(s) := \mu(\perp)(s).$$

Έστω $d_s \in D$ τέτοια ώστε

$$d_s(t)\downarrow \iff t = s.$$

τότε για κάθε $x \in X$

$$\mathrm{in}(x) := s \iff \mathrm{value}(x, d_s)\downarrow.$$

και αυτό ισχύει επειδή $\mathrm{value}(x, d_s) = d_s(\mathrm{in}(x))$. Τέλος για κάθε $s \in S$ και για κάθε $s' \in \mathrm{Domain}(\mu(d_s))$

$$\tau(s') := s,$$

το τελευταίο προκύπτει από τον ορισμό της μ και τον ορισμό της d_s. $\Diamond$

3.4. Επαναλήψεις αναδρομής

Ο αριθμός των βημάτων που κάνει ο αναδρομέας α για να «υπολογίσει» την τιμή $\bar{\alpha}(x)$ είναι μια σημαντική ποσότητα σχετική με τον α, μέρος ενός συνόλου εννοιών με τις οποίες ξεκινάει η μαθηματική θεωρία τον αναδρομέων.

Σταθεροποιούμε έναν αναδρομέα $\alpha = (D, \mathrm{value}, \mu) : X \rightsquigarrow W$ και κάποιο $x \in X$, έστω

$$\mu_x(d) = \mu(x, d),$$

για κάθε διατακτικό αριθμό ξ, θέτουμε

$$\begin{aligned} d_\alpha^\xi(x) &=_{\mathrm{df}} \mu_x(\sup\{d_\alpha^\eta(x) | \eta < \xi\}) \quad (\text{με } \sup\emptyset = \perp), \\ \bar{\alpha}^\xi &=_{\mathrm{df}} \mathrm{value}(x, d_\alpha^\xi(x)), \\ ||\alpha|| &=_{\mathrm{df}} \text{ το ελάχιστο } \xi\ (\forall x \in X)[d_\alpha^\xi(x) = \sup\{d_\alpha^\eta(x) | \eta < \xi\}]. \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι αυτοί οι ορισμοί έχουν νόημα και ότι προσδιορίζουν την μερική συνάρτηση που υπολογίζετε από τον α, δηλαδή,

$$\bar{\alpha}(x) = \sup_\xi \bar{\alpha}^\xi(x).$$

Λέμε ότι ο α είναι **περατός** αν $||\alpha|| \leq \omega$, και **μη περατός** αν $||\alpha|| > \omega$.

Ο **διατακτικός περάτωσης** $||\alpha||$ και η (μερική) **απεικόνιση σταδίου**

$$|\alpha|(x) =_{\mathrm{df}} \mu\xi[\bar{\alpha}^\xi \in W] < ||\alpha||,$$

(που ορίζεται ακριβώς όταν το $\bar{\alpha}$ ορίζεται) είναι θεμελιώδεις αναλλοίωτες του α : Για τον αντίστοιχο του ϕ αναδρομέα $\mathbf{r}_\phi$ της (7), για παράδειγμα, $||\,\mathbf{r}_\phi\,|| \leq \omega$, και

$$|\,\mathbf{r}_\phi\,|(x) = l(x) - 1 = (\text{μήκος του υπολογισμού για το } x) - 1.$$

Θα μπορούσαμε να δούμε την επαναληπτική ακολουθία $\{d^\xi(x) | \xi < ||\alpha||\}$ ως ένα είδος «λογικού υπολογισμού» της $\bar{\alpha}(x)$, του οποίου το μήκος (αν συγκλίνει) είναι ο πιθανόν άπειρος διατακτικός $|\alpha|(x)$. Ανεπίσημα μπορούμε να πούμε ότι κάθε επανάληψη $d^\xi(x)$ προσθέτει «πληροφορία» για την τιμή $\bar{\alpha}(x)$, η οποία εξάγεται με την συνάρτηση τιμής και αυξάνει με το ξ· και όταν έχει συγκεντρωθεί αρκετή πληροφορία τότε η $\bar{\alpha}(x) = \bar{\alpha}^\xi(x) = \mathrm{value}(x, d^\xi(x))$ ορίζεται.

Αυτές οι επαναλήψεις είναι το κλειδί για να κάνουμε αυστηρά πολλά από τα ανεπίσημα συμπεράσματα, για τους αλγόριθμους, που βγαίνουν από τις αναδρομικές εξισώσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αλγόριθμοι και υλοποιήσεις

Στην προηγουμένη ενότητα παρουσιάσαμε την μοντελοποίηση των αλγορίθμων από αναδρομείς. Πολλοί είναι αυτοί που θεωρούν ότι οι αλγόριθμοι είναι οι μηχανές Turing. Το επιχείρημα χρησιμοποιήθηκε ξανά στην εισαγωγή. Αν οι μηχανές Turing είναι οι αλγόριθμοι τότε ποια από όλες είναι ο Ευκλείδειος αλγόριθμος; Προφανώς το ίδιο ερώτημα ισχύει και για όλα τα υπολογιστικά μοντέλα. Οι μηχανές Turing είναι υλοποιήσεις αλγορίθμων αλλά και κάθε μηχανή Turing είναι ένας αλγόριθμος, με την έννοια ότι ταυτίζεται με τον αλγόριθμο που εκτελεί.

Ο καλύτερος τρόπος για να διαπιστώσουμε την ορθότητα της μοντελοποίησης των αλγορίθμων από αναδρομείς, είναι να δούμε το αντίκτυπό της στις έννοιες που σχετίζονται με τους αλγόριθμους. Με την πιο σημαντική ίσως έννοια που σχετίζεται με τους αλγόριθμους, τις υλοποιήσεις, θα ασχοληθούμε σε αυτήν την ενότητα.

Ορισμος 8. *Ένας αναδρομέας $\alpha = (D_\alpha, \mathrm{value}_\alpha, \mu_\alpha) : X \rightsquigarrow W$* **ανάγεται** *σε έναν άλλο $\beta = (D_\beta, \mathrm{value}_\beta, \mu_\beta) : X \rightsquigarrow W$ (για το ίδιο σύνολο τιμών), και γράφουμε $\alpha \leq_r \beta$, αν υπάρχει μονότονη απεικόνιση*

$$\pi : X \times D_\alpha \to D_\beta$$

έτσι ώστε:

(1) *Για κάθε $x \in X$ και $d \in D_\alpha$, $\mu_\beta(x, \pi(x,d)) \leq \pi(x, \mu_\alpha(x,d))$·*
(2) *Για κάθε $x \in X$ και $d \in D_\alpha$, $\mathrm{value}_\beta(x, \pi(x,d)) \leq \mathrm{value}_\alpha(x,d)$ και*
(3) *Για κάθε $x \in X$, $\bar{\alpha}(x) = \bar{\beta}(x)$.*

Το ότι ο α_1 ανάγεται στον α_2 σημαίνει με απλά λόγια ότι οι υπολογισμοί του α_2 είναι πάντα πίσω από τους υπολογισμούς του α_1 και ότι ο α_2 δεν μπορεί ποτέ να υπολογίσει περισσότερες πληροφορίες από τον α_1. Οπότε το «ποσό» της πληροφορίας που έχει υπολογιστεί από τον α_2 σε κάθε βήμα υπολογισμού είναι πάντα φραγμένο από το «ποσό» πληροφορίας που ο α_1 έχει υπολογίσει στο ίδιο βήμα.

Αυστηρά οι (1) και (2) δίνουν ότι για κάθε διατακτικό ξ,

$$\pi(x, d_1^\xi(x)) \geq d_2^\xi(x),$$

από το οποίο έπεται ότι

$$\bar{\alpha}_1^\xi(x) \geq \bar{\alpha}_2^\xi(x), \tag{21}$$

και η (3), τότε λέει απλά ότι τελικά οι υπολογισμοί του α_2 θα «φτάσουν» αυτούς του α_1, έτσι ώστε, στο όριο, να υπολογίζεται ή ίδια μερική συνάρτηση.

Η έννοια της αναγωγής εισάγεται με σκοπό να γενικεύσει την έννοια της προσομοίωσης στους αναδρομείς και για να «αποκαλύψει» σχέσεις μεταξύ αναδρομέων εκτός του ισομορφισμού.

4.1. Προσομοίωση αφηρημένων μηχανών

Μια από τις θεμελιωδέστερες έννοιες στην πληροφορική είναι αυτή της προσομοίωσης. Όπως και οι περισσότερες θεμελιώδεις έννοιες, είναι δύσκολο να ορίσουμε αυστηρά την έννοια της προσομοίωσης. Αυτό δεν συμβαίνει από έλλειψη προσπάθειας ή ενδιαφέροντος. Όπως το θέτει ο Emde van Boas [**5**], η δυσκολία έγκειται στο γεγονός ότι δεν μπορούμε να δώσουμε έναν ορισμό που να είναι τόσο γενικός και εξειδικευμένος ταυτόχρονα ώστε να περιλαμβάνει όλες τις περιπτώσεις που θεωρούμε προσομοιώσεις.

Διαισθητικά, λέμε ότι η μηχανή ψ προσομοιώνει τη μηχανή ϕ αν σε είσοδο x, η ψ κάνει ότι ακριβώς κάνει και η ϕ στην ίδια είσοδο. Δεν είναι αρκετό στην ίδια είσοδο οι δύο μηχανές να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, θα πρέπει η ψ να «αντανακλά» στους υπολογισμούς της, τους υπολογισμούς της ϕ και μάλιστα με την ίδια σειρά. Προφανώς η ψ ενδέχεται να πραγματοποιεί περισσότερα βήματα υπολογισμού για δύο διαδοχικά βήματα της ϕ ή μπορεί ένα υπολογιστικό βήμα της ϕ να αντιστοιχεί σε περισσότερα του ενός βήματα της ψ.

Απορίες εγείρονται ήδη από αυτόν το διαισθητικό ορισμό. Για παράδειγμα, είναι οι δύο μηχανές από το ίδιο υπολογιστικό μοντέλο; Αν όχι, τι συμβαίνει κατά την επεξεργασία της εισόδου; Θα πρέπει η πολυπλοκότητα να διατηρείται; Τι συμβαίνει όταν οι υπολογισμοί είναι αν-αιτιοκρατικοί; Τότε το γράφημα υπολογισμού θα είναι δέντρο, οπότε ποια θα είναι τώρα η σειρά υπολογισμού; Ακόμα ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι αν η προσομοίωση είναι συνάρτηση ή σχέση μεταξύ των καταστάσεων των μηχανών.

Εδώ θα περιοριστούμε στην αιτιοκρατική περίπτωση και θα δώσουμε ακριβείς μαθηματικούς ορισμούς για δύο έννοιες προσομοίωσης, την προς τα πάνω (bottom-up) και την προς τα κάτω (top-down). Οι ορισμοί θα δοθούν στα πλαίσια του υπολογιστικού μοντέλου των αφηρημένων μηχανών. Σκοπός μας δεν είναι να ορίσουμε την έννοια της προσομοίωσης, αλλά να χρησιμοποιήσουμε έναν συγκεκριμένο μαθηματικό ορισμό που υπάγεται στη διαισθητική περιγραφή, που δώσαμε παραπάνω, της προσομοίωσης.

Έστω

$$\phi = (\mathrm{in}_\phi, S_\phi, \tau_\phi, T_\phi, \mathrm{out}_\phi)$$
$$\psi = (\mathrm{in}_\psi, S_\psi, \tau_\psi, T_\psi, \mathrm{out}_\psi)$$

δύο αφηρημένες μηχανές από το X στο W. Στην προς τα πάνω έννοια της προσομοίωση ξεκινάμε από τις καταστάσεις της αφηρημένης μηχανής που προσομοιώνεται και τις αντιστοιχούμε σε καταστάσεις της μηχανής που προσομοιώνει. Είναι προφανές ότι η αντιστοιχία είναι 1-1 αλλά όχι πάντα επί.

Ορισμος 9 (Έννοια 1η). **Προσομοίωση** *του ϕ από τον ψ είναι κάθε απεικόνιση*

$$\sigma_1 : S_\phi \to S_\psi$$

τέτοια ώστε

(1) *αν $s \to_{\tau_\phi} s'$ τότε $\sigma_1(s) \to^*_{\tau_\psi} \sigma_1(s')$.*
(2) *αν $s_0 = \mathrm{in}_\phi(x)$ τότε $\mathrm{in}_\psi(x) \to^* \sigma_1(s_0)$.*
(3) *αν $s \in T_\phi$ τότε υπάρχει $t \in T_\psi : \sigma_1(s) \to^* t$ και $\mathrm{out}_\psi(t) = \mathrm{out}_\phi(s)$.*

Η προς τα κάτω έννοια της προσομοίωσης είναι, κατά κάποιο τρόπο, η αντίστροφη της προς τα πάνω προσομοίωσης. Ξεκινάμε με τις καταστάσεις της μηχανής που προσομοιώνει και τις αντιστοιχούμε σε καταστάσεις της μηχανής που προσομοιώνεται. Η αντιστοιχία αυτή είναι επί αλλά όχι πάντοτε 1-1.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10 (Έννοια 2η). **Προσομοίωση** *του ϕ από τον ψ είναι κάθε συνάρτηση*

$$\sigma_2 : S_\psi \to S_\phi$$

τέτοια ώστε

(1) *Για κάθε κατάσταση $t \in S_\psi$ αν $\sigma_2(t) \to_{\tau_\phi} s$, τότε υπάρχει κατάσταση $t' \in S_\psi$ τέτοια ώστε: $t \to^* t'$ και $\sigma_2(t') = s$*
(2) *αν $t_0 = \mathrm{in}_\psi(x)$ τότε $\sigma_2(t_0) = s_0 = \mathrm{in}_\phi(x)$,*
(3) *αν $t \in T_\psi$ τότε $\sigma_2(t) \in T_\phi$ και $\mathrm{out}_\psi(t) = out_\phi(\sigma_2(t))$,*
(4) *αν $t_k \in S_\psi$ και $\sigma_2(t_k) \in T_\phi$ τότε υπάρχει $t_l \in T_\psi$ τέτοιο ώστε $t_k \to^* t_l$ και $\mathrm{out}_\psi(t_l) = \mathrm{out}_\phi(\sigma_2(t_k))$ και $\sigma_2(t_i) = \sigma_2(t_k),\ k \le i \le l$.*

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη έννοια, κυρίως επειδή η πρώτη δεν δουλεύει καλά με όλες τις αποδείξεις. Παρακάτω θα δείξουμε γιατί.

Όπως αναφέραμε για να δικαιολογήσουμε την μοντελοποίηση του «ο ϕ υλοποιεί τον α», θα πρέπει (τουλάχιστον) να δείξουμε ότι καλύπτει τις γνωστές υλοποιήσεις της αναδρομής και ότι επεκτείνει τον ορισμό της προσομοίωσης μιας αφηρημένης μηχανής από μια άλλη.

Για να δείξουμε τα δύο αποτελέσματα θα χρειαστούμε ακόμα έναν ορισμό και ένα Λήμμα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11. *Ο μ.δ.χ. D είναι* **Scott** *αν για κάθε δύο συμβατά στοιχεία υπάρχει το $\sup\{x, y\}$.*

Βασικό παράδειγμα χώρου Scott είναι ο χώρος μερικών συναρτήσεων $(D \rightharpoonup W)$.

ΛΗΜΜΑ 3. *Για δύο αναδρομείς α_1, α_2, έστω*

$$D_1' = \{d \in D_1 | d \le \mu_1(x, d)\}.$$

Έστω επίσης ότι τα πεδία των αναδρομέων είναι πεδία Scott. Αν υπάρχει μονότονη

$$\sigma : X \times D_1' \to D_2$$

έτσι ώστε:

(1) *Για κάθε $x \in X_1$ και $d \in D_1'$, $\mu_2(x, \sigma(x, d)) \le \sigma(x, \mu_1(x, d))\cdot$*
(2) *Για κάθε $x \in X_1$ και $d \in D_1'$, $\mathrm{value}_2(x, \sigma(x, d)) \le \mathrm{value}_1(x, d)$ και*
(3) *Για κάθε $x \in X_1$, $\bar{\alpha}_1(x) = \bar{\alpha}_2(x)$*

τότε μπορούμε να επεκτείνουμε την σ στην

$$\pi : X_1 \times D_1 \to D_2$$

έτσι που η π να είναι συνάρτηση αναγωγής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι ο D_1' είναι πλήρης μ.δ.χ. και κλειστός ως προς της μ_1 . Θέτουμε

$$\pi(x, d) = \sup\{\sigma(x, d^*) | d^* \le d, d^* \in D_1'\}$$

και το supremum υπάρχει αφού

$$P = \{d^* \in D_1' | d^* \le d\}$$

είναι κατευθυνόμενο σύνολο. Πράγματι, αν $d_1, d_2 \in P$, λόγω της ιδιότητας Scott, θέτουμε

$$d^0 = \sup\{d_1, d_2\},$$

οπότε $d_1, d_2 \leq d^0$ άρα από τη μονοτονία της μ_1 και τον ορισμό του D_1'

$$d_1 \leq \mu_1(x, d_1) \leq \mu_1(x, d^0) \text{ και } d_2 \leq \mu_1(x, d_2) \leq \mu_1(x, d^0)$$

άρα το $\mu_1(x, d^0)$ είναι άνω φράγμα του $\{d_1, d_2\}$, συνεπώς

$$d^0 \leq \mu_1(x, d^0) \text{ άρα } d^0 \in D_1'.$$

Επιπλέον επειδή η σ είναι μονότονη, το

$$\{\sigma(x, d^*) | d \leq d, d^* \in D_1'\}$$

είναι επίσης κατευθυνόμενο, οπότε θα έχει supremum στο D_2.

Για να δείξουμε το πρώτο κριτήριο της αναγωγής, θα χρειαστούμε το ακόλουθο

Ισχυρισμος 1. *Για κάθε $d \in D$.*

$$\mu_2(x, \sup\{\sigma(x, d^*) | d^* \leq d, d^* \in D_1'\} \leq \sigma(x, \mu_1(x, \sup\{d^* \in D_1' | d^* \leq d\})). \tag{22}$$

Αποδειξη. Έχουμε ότι, για κάθε $d^* \in \{d^* \in D_1' | d^* \leq d\}$

$$d^* \leq \sup\{d^* \in D_1' | d^* \leq d\}$$

άρα από τη μονοτονία της σ έχουμε ότι

$$\sigma(x, d^*) \leq \sigma(x, \sup\{d^* \in D_1' | d^* \leq d\})$$

και αυτό ισχύει για κάθε $d^* \in \{d^* \in D_1' | d^* \leq d\}$, άρα

$$\sup\{\sigma(x, d^*) | d^* \leq d, d^* \in D^*\} \leq \sigma(x, \sup\{d^* \in D_1' | d^* \leq d\})$$

και από τη μονοτονία της μ_2, έχουμε ότι

$$\mu_2(x, \sup\{\sigma(x, d^*) | d^* \leq d, d^* \in D^*\}) \leq \mu_2(x, \sigma(x, \sup\{d^* \in D_1' | d^* \leq d\})). \tag{23}$$

Τέλος επειδή η σ είναι συνάρτηση αναγωγής θα ισχύει ότι

$$\mu_2(x, \sigma(x, \sup\{d^* \in D_1' | d^* \leq d\})) \leq \sigma(x, \mu_1(x, \sup\{d^* \in D_1' | d^* \leq d\}))$$

οπότε η (23) γίνεται

$$\mu_2(x, \sup\{\sigma(x, d^*) | d^* \leq d, d^* \in D^*\}) \leq \sigma(x, \mu_1(x, \sup\{d^* \in D_1' | d^* \leq d\}))$$

$\diamond$ (Ισχυρισμού)

Θα δείξουμε τώρα το πρώτο κριτήριο της αναγωγής, δηλαδή ότι

$$\mu_2(x, \pi(x, d)) \leq \pi(x, \mu_1(x, d)). \tag{24}$$

Από τον ορισμό της π πρέπει να δείξουμε

$$\mu_2(x, \sup\{\sigma(x, d^*) | d^* \leq d, d^* \in D_1'\})) \leq \sup\{\sigma(x, d') | d' \leq \mu_1(x, d), d' \in D_1'). \tag{25}$$

Από τον Ισχυρισμό 1 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sigma(x, \mu_1(x, \sup\{d^* \in D_1' | d^* \leq d\})) \leq \sup\{\sigma(x, d') | d' \leq \mu_1(x, d), d' \in D_1'). \tag{26}$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $d^* \in \{d^* \in D_1' | d^* \leq d\}$ ισχύει ότι

$$\sigma(x, \mu_1(x, d^*)) \leq \sup\{\sigma(x, d') | d' \leq \mu_1(x, d), d' \in D_1')$$

αλλά $d^* \leq d$ άρα από τη μονοτονία της μ_1 $\mu_1(x, d^*) \leq \mu_1(x, d)$. Οπότε

$$\mu_1(x, d^*) \in \{d' | d' \leq \mu_1(x, d), d' \in D_1')$$

άρα

$$\sigma(x, \mu_1(x, d^*)) \in \{\sigma(x, d') | d' \leq \mu_1(x, d), d' \in D_1')$$

που σημαίνει ότι το $\sigma(x, \mu_1(x, d^*))$ θα είναι μικρότερο ή ίσο από το supremum του συνόλου, δηλαδή

$$\sigma(x, \mu_1(x, d^*)) \le \sup\{\sigma(x, d')|d' \le \mu_1(x, d), d' \in D_1')$$

και αυτό για κάθε $d^* \in \{d^* \in D_1'|d^* \le d\}$, οπότε ισχύει η (26).

Για το δεύτερο κριτήριο έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{value}_2(x, \sup\{\sigma(x, d^*)|d^* \le d, d^* \in D_1'\}) &= \sup\{\mathrm{value}_2(x, \sigma(x, d^*))|d^* \le d, d^* \in D_1'\} \\ &\le \sup\{\mathrm{value}_1(x, d^*)|d^* \le d, d^* \in D_1'\} \\ &\le \mathrm{value}_1(x, d) \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανίσωση ισχύει από τη μονοτονία της value_1 .

Το τρίτο κριτήριο είναι άμεσο. ◊

4.2. Προσομοίωση και αναγωγή

Θα δείξουμε ότι η δεύτερη έννοια της προσομοίωσης συνεπάγεται την αναγωγή, δηλαδή ότι προσομοίωση των αφηρημένων μηχανών συνεπάγεται την αναγωγή των αντίστοιχων αναδρομέων. Για να το δείξουμε θα χρησιμοποιήσουμε την προβολή της συνάρτησης αναγωγής που από το Λήμμα 3 γενικεύεται όταν οι αναδρομείς είναι μονότονοι.

Το ενδιάμεσο βήμα στην απόδειξη είναι από μόνο του αρκετά φυσικό, αλλά όχι τόσο γενικό και δεν είναι και το πρώτο που θα σκεφτόμασταν για να χρησιμοποιήσουμε. Με απλά λόγια λέει ότι για να δείξουμε την αναγωγή, αρκεί να το κάνουμε για το κομμάτι του πεδίου του αναδρομέα που είναι σημαντικός για τον υπολογισμό. Άλλωστε ο ορισμός του αναδρομέα είναι τόσο γενικός ώστε περιλαμβάνει μερικές συναρτήσεις που δεν έχουν σχέση με τον υπολογισμό της $\bar{\alpha}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. *Έστω ϕ_i $i = 1, 2$ δύο αφηρημένες μηχανές και $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2$ οι αντίστοιχοι αναδρομείς. Αν ο ϕ_2 προσομοιώνει, με τη δεύτερη έννοια, τον ϕ_1, τότε $\mathbf{r}_1 \le_r \mathbf{r}_2$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πριν ξεκινήσουμε την απόδειξη παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις μετάβασης των αντίστοιχων αναδρομέων είναι ανεξάρτητες του x. Έτσι όπου το x δεν παίζει σημαντικό ρόλο θα το παραλείπουμε.

Αφού ο ϕ_2 προσομοιώνει τον ϕ_1, υπάρχει $\sigma_2 : S_2 \to S_1$ όπως στον ορισμό 10. Έστω $d \in D_1$ ορίζουμε $\pi(d) = b$ ως εξής: για κάθε $t \in S_2$

$$\pi(d)(t) = b(t) = d(\sigma_2(t)).$$

Η π είναι μονότονη, δηλαδή.

$$d \le d' \Longrightarrow \pi(d) \le \pi(d').$$

Έστω ότι $d \le d'$, δηλαδή, για κάθε $s \in S_1$

$$d(s) \downarrow \Longrightarrow d'(s) \downarrow \;\; \& \; d(s) = d'(s),$$

τότε για κάθε $t \in S_2$

$$\begin{aligned} \pi(d)(t) &= d(\sigma_2(t)) && (\text{ορισμός της } \pi) \\ &\le d'(\sigma_2(t)) && (d \le d') \\ &= \pi(d')(t) && (\text{ορισμός της } \pi). \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι $\mathbf{r}_1 \leq_r \mathbf{r}_2$, πρέπει να δείξουμε τις τρεις συνθήκες του ορισμού της αναγωγής. Για την πρώτη πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $t \in S_2$

$$\mu_2(\pi(d))(t) \downarrow \Rightarrow \pi(\mu_1(d))(t) \downarrow \ \& \ \mu_2(\pi(d))(t) = \pi(\mu_1(d))(t)$$

Έστω ότι

$$\mu_2(\pi(d))(t) \downarrow \ \& \ \mu_2(\pi(d))(t) = w$$

- Αν $t \in T_2$ τότε $\sigma_2(t) \in T_1$ οπότε

  $$\mu_2(\pi(d))(t) = \mathrm{out}_2(t)$$

  από τον ορισμό της μ_2 έχουμε

  $$\begin{aligned} \pi(\mu_1(d))(t) &= \mu_1(d)(\sigma_2(t)) && (\text{ορισμός της } \pi) \\ &= \mathrm{out}_1(\sigma_2(t)) && (\text{ορισμός της } \mu_1) \end{aligned}$$

  οπότε από τον Ορισμό 10, της σ_2

  $$\mu_2(\pi(d))(t) = \pi(\mu_1(d))(t).$$

- Αν $t \notin T_2$ ενώ $\sigma_2(t) \in T_1$ τότε

  $$\mu_2(\pi(d))(t) = \pi(d)(\tau_2(t)) = d(\sigma_2(\tau_2(t))) = d(\sigma_2(t))$$

  αφού από τον ορισμό 10, $\sigma_2(t) = \sigma_2(\tau_2(t)) \in T_1$.

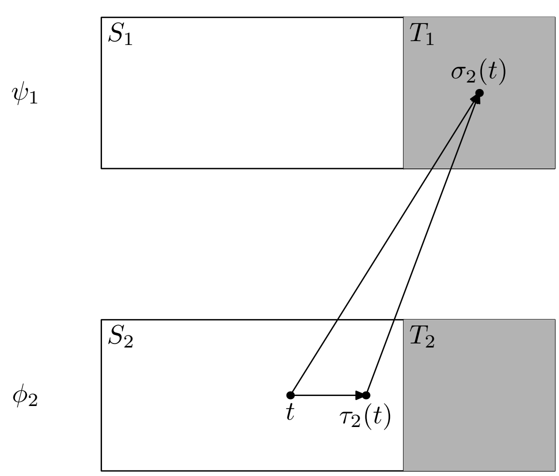
  $$\pi(\mu_1(d))(t) = \mu_1(d)(\sigma_2(t)) \qquad (\text{ορισμός της } \pi)$$

  οπότε επειδή $d \leq \mu_1(x, d)$ θα έχουμε ότι

  $$d(\sigma_2(t)) = \mu_1(d)(\sigma_2(t))$$

  οπότε

  $$\mu_2(\pi(d))(t) = \pi(\mu_1(d))(t).$$



Σχημα 1

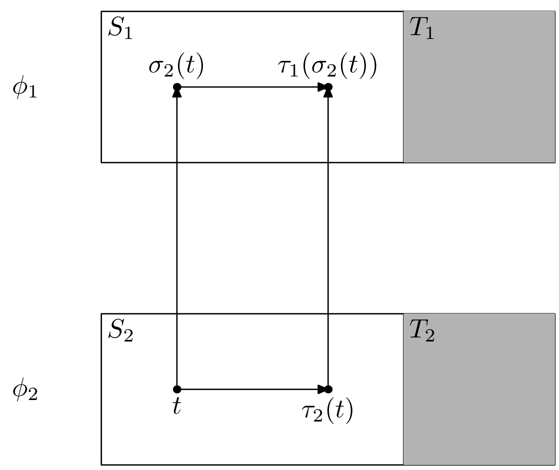
- Αν $t \notin T_2$ και $\sigma_2(t) \notin T_1$ τότε

(27) $$\mu_2(\pi(d))(t) = \pi(d)(\tau_2(t)) = d(\sigma_2(\tau_2(t)))$$

και

(28) $$\pi(\mu_1(d))(t) = \mu_1(d)(\sigma_2(t)) = d(\tau_1(\sigma_2(t))).$$

  – Αν $\tau_1(\sigma_2(t)) = \sigma_2(\tau_2(t))$ τότε από την προηγούμενη σχέση
$$\mu_2(\pi(d))(t) = \pi(\mu_1(d))(t).$$



Σχημα 2

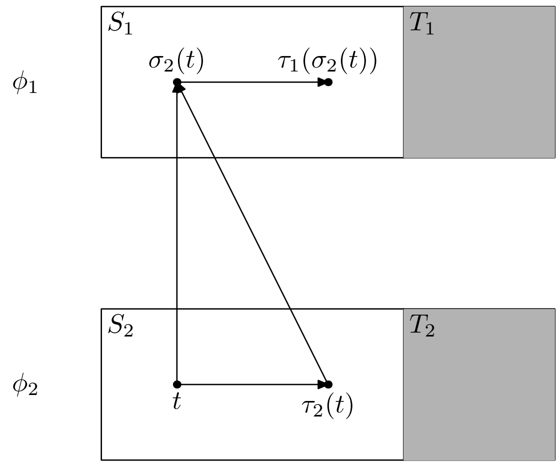
  – Αν $\tau_1(\sigma_2(t)) \neq \sigma_2(\tau_2(t))$ τότε $\sigma_2(\tau_2(t)) = \sigma_2(t)$ οπότε
$$d(\sigma_2(\tau_2(t))) = d(\sigma_2(t))$$
  και επειδή $d \leq \mu_1(x,d)$ έχουμε ότι
$$d(\sigma_2(t)) = \mu_1(d)(\sigma_2(t))$$
  Οπότε από τις (27), (28) έχουμε
$$\mu_2(\pi(d))(t) = \pi(\mu_1(d))(t).$$

- Από τον ορισμό 10, της σ_2 δεν γίνεται $t \in T_2$ και $\sigma_2(t) \notin T_1$.

Για να δείξουμε τη δεύτερη συνθήκη της αναγωγής, παρατηρούμε ότι,
$$\mathrm{value}_1(x,d) = d(\mathrm{in}_1(x)) \text{ και } \mathrm{value}_2(x,b) = b(\mathrm{in}_2(x))$$
οπότε αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $x \in X$ και για κάθε $d \in D_1$,

(29) $$\mathrm{value}_2(x, \pi(x,d)) \leq \mathrm{value}_1(x,d).$$

Οπότε
$$\mathrm{value}_2(x, \pi(d)) = \pi(d)(\mathrm{in}_2(x)) = d(\sigma_2(\mathrm{in}_2(x))$$
και
$$\mathrm{value}_1(x,d) = d(\mathrm{in}_1(x))$$



Σχημα 3

και από τον ορισμό της σ_2, παίρνουμε ότι

$$\text{value}_2(x, \pi(d)) = \text{value}_1(x, d).$$

Για να δείξουμε τη δεύτερη συνθήκη της αναγωγής, πρέπει να δείξουμε ότι

$$\bar{r}_1(x) = \bar{r}_2(x).$$

Αν $\bar{r}_1(x) = w$ τότε $\bar{\phi}_1(x) = w$ και $\bar{\phi}_1(x) = \text{out}_1(s_{l(x)})$. Από τον ορισμό του $s_{l(x)}$ έχουμε ότι $s_{l(x)} \in T_1$. Οπότε από τον ορισμό της σ_2 και επαγωγή στο $s_{l(x)}$ υπάρχει $t \in T_2 : \ \sigma_2(t) = s_{l(x)} \in T_1$ και

$$\begin{aligned}\text{out}_1(s_{l(x)}(x)) &= \text{out}_2(t)\\ &= \text{out}_2(s'_{l(x)}(x))\\ &= \bar{\phi}_2(x)\\ &= \bar{r}_2(x).\end{aligned}$$

Οπότε

$$\bar{r}_1(x) = \bar{r}_2(x). \qquad \Diamond$$

Η αντίστροφη φορά, δηλαδή ότι η αναγωγή συνεπάγεται την προσομοίωση, παραμένει ένα ανοικτό πρόβλημα.

Η προσπάθεια να αποδειχτεί το Θεώρημα 2 με την πρώτη έννοια της προσομοίωσης, Ορισμός 9 , «σκοντάφτει» και έτσι είναι επίσης ανοικτή η συνεπαγωγή.

4.3. Σχέση αναδρομέα με αναδρομέα υλοποίησης

Στη συνέχεια θα δείξουμε τη σχέση, μεταξύ αναδρομέων και των υλοποιήσεων τους. Θα δείξουμε ότι για κάθε αναδρομικό πρόγραμμα A, ο αναδρομέας $\mathbf{r}(A, \mathbf{M})$ που εκφράζεται από το A στην τυχαία άλγεβρα $\mathbf{M}$ ανάγεται στην αναδρομική μηχανή $\phi(A, \mathbf{M})$ που υλοποιεί το A.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το πρόγραμμα

$$(A)\begin{cases} f(\vec{x}_0) = & A_0(\vec{x}_0, \mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_m) \\ \mathrm{p}_1(\vec{x}_1) = & A_1(\vec{x}_1, \mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_m) \\ \vdots & \\ \mathrm{p}_m(\vec{x}_m) = & A_m(\vec{x}_m, \mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_m) \end{cases}$$

στην άλγεβρα $\mathbf{M} = (M, f_1, \ldots, f_m)$ με υπογραφή $\tau = \langle n_1, \ldots, n_m \rangle$. Αν

$$\alpha_0(\vec{x}_0, \mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_m) = [\![A_0]\!](\vec{x}_0, \vec{\mathrm{p}})$$
$$\alpha_1(\vec{x}_1, \mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_m) = [\![A_1]\!](\vec{x}_1, \vec{\mathrm{p}})$$
$$\vdots$$
$$\alpha_m(\vec{x}_m, \mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_m) = [\![A_m]\!](\vec{x}_m, \vec{\mathrm{p}})$$

τότε $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ είναι ο αναδρομέας $\mathbf{r}(A, \mathbf{M})$.

Όπως είδαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια αναδρομική μηχανή ϕ στο πρόγραμμα A. Έστω $\phi(A, \mathbf{M})$ ο αντίστοιχος αναδρομέας, δηλαδή:

$$\phi(A, \mathbf{M})(x) = p(\mathrm{in}(x)) \ \texttt{where}\{p(s) = \text{if } s \in T \text{ then } \mathrm{out}(s) \text{ else } p(\tau(s))\}$$

με σύνολο λύσεων το μ.δ.χ. των μερικών συναρτήσεων $D = (S \rightharpoonup W)$.

Για να δείξουμε το αποτέλεσμα θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα. Με το συμβολισμό

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha & : \beta \\ \vdots & \\ & : w \end{array}\right] [\vec{\mathrm{p}} := \vec{d}]$$

δηλώνουμε ότι, οι συναρτησιακές μεταβλητές της $\alpha : \beta$ ανήκουν στο σύνολο

$$\{\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_m\}$$

και ότι ο υπολογισμός λαμβάνει χώρα στην επεκτεταμένη άλγεβρα $(\mathbf{M}, \vec{d})$. Ουσιαστικά οι συναρτησιακές μεταβλητές αντικαθίστανται από συναρτησιακές σταθερές και το πρόγραμμα A δεν χρησιμοποιείται πλέον.

Λημμα 4. *Για κάθε κλειστό όρο A με συναρτησιακές μεταβλητές από το σύνολο $\{\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n\}$, ισχύει ότι*

$$\left.\begin{array}{ll} A(\vec{x}, \vec{\mathrm{p}}) & : \\ \vdots & \\ & : w \end{array}\right] [\vec{\mathrm{p}} := \vec{d}]$$

αν και μόνο αν $[\![A]\!](\vec{x}, \vec{d}) = w$.

Αποδειξη. Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω υπολογισμός γίνεται στην επεκτεταμένη άλγεβρα όπου πλέον οι $\vec{p}$ είναι συναρτησιακές σταθερές. Θα δείξουμε το αποτέλεσμα με επαγωγή στον όρο $A(\vec{x}, \vec{\mathrm{p}})$.

- Αν $A \equiv 0, 1, x$ τότε δε θα γίνει καμία κλήση και $: w$ θα είναι $: 0, : 1$ ή $: x$. Αλλά και $[\![A]\!](\vec{x}, \vec{d}) = 0, 1$ ή x.

- Αν $A \equiv f_i(A_1, \ldots, A_{n_i})$ τότε

$$\left.\begin{array}{rl} f_i(A_1(\vec{x},\vec{\mathrm{p}}),\ldots,A_{n_i}(\vec{x},\vec{\mathrm{p}})) & : \\ f_i A_1(\vec{x},\vec{\mathrm{p}}),\ldots,A_{n_i}(\vec{x},\vec{\mathrm{p}}) & : \\ \vdots & \\ & : w \end{array}\right] [\vec{\mathrm{p}} := \vec{d}]$$

  που με βάση την επαγωγική υπόθεση αφού A_{n_i} είναι μικρότερης πολυπλοκότητας, θα έχει το ίδιο αποτέλεσμα με τον υπολογισμό

$$\left.\begin{array}{rl} f_i(A_1(\vec{x},\vec{\mathrm{p}}),\ldots,A_{n_i}(\vec{x},\vec{\mathrm{p}})) & : \\ f_i A_1(\vec{x},\vec{\mathrm{p}})\ldots & : [\![A_{n_i}]\!](\vec{x},\vec{d}) \\ \vdots & \\ & : w \end{array}\right] [\vec{\mathrm{p}} := \vec{d}]$$

  που τελικά θα έχει το ίδιο αποτέλεσμα με τον υπολογισμό

$$\left.\begin{array}{rl} f_i(A_1(\vec{x},\vec{\mathrm{p}}),\ldots,A_{n_i}(\vec{x},\vec{\mathrm{p}})) & : \\ f_i A_1(\vec{x},\vec{\mathrm{p}})\ldots & : [\![A_{n_i}]\!](\vec{x},\vec{d}) \\ \vdots & \\ f_i & : [\![A_1]\!](\vec{x},\vec{d})\ldots[\![A_{n_i}]\!](\vec{x},\vec{d}) \\ & : f_i([\![A_1]\!](\vec{x},\vec{d})\ldots[\![A_{n_i}]\!](\vec{x},\vec{d})) \end{array}\right] [\vec{\mathrm{p}} := \vec{d}]$$

  Άρα δηλαδή $w = f_i([\![A_1]\!](\vec{x},\vec{d})\ldots[\![A_{n_i}]\!](\vec{x},\vec{d})) = [\![A]\!](\vec{x},\vec{d})$.
- Παρόμοια δείχνουμε και τις άλλες δύο περιπτώσεις για την διακλάδωση και για την περίπτωση που $A \equiv p_i(A_1, \ldots, A_{k_i})$. Για τη δεύτερη περίπτωση ειδικά, δουλεύει απαράλλακτη η παραπάνω απόδειξη, αφού στην επεκτεταμένη άλγεβρα που γίνεται ο υπολογισμός, οι p_i είναι συναρτησιακές σταθερές.

$\diamondsuit$

Είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το εξής:

Θεωρημα 3 ([**4**]). *Για κάθε πρόγραμμα A και κάθε μερική άλγεβρα* $\mathbf{M}$

$$\mathbf{r}(A, \mathbf{M}) \leq_r \phi(A, \mathbf{M}).$$

Αποδειξη. Από το Λήμμα 3 αρκεί να ορίσουμε μια μονότονη συνάρτηση $\pi : D'_\alpha \to D_\phi$ έτσι ώστε:

(1) Για κάθε $\vec{d} \in D'_\alpha,\ \mu_\phi(\pi(\vec{d})) \leq \pi(\mu_\alpha(\vec{d}))$.
(2) Για κάθε $x \in M, \vec{d} \in D'_\alpha,\ \mathrm{value}_\phi(x, \pi(\vec{d})) \leq \mathrm{value}_\alpha(x, \vec{d})$ και
(3) Για κάθε $x \in M,\ \bar{\alpha}(x) = \overline{\phi(A, \mathbf{M})}(x)$.

Όπου $D_\alpha = \{d \in D_\alpha | d \leq \mu_\alpha(d)\}$.

Για κάθε $\vec{d} \in D'_\alpha$ έστω

$\pi(\vec{d})(\alpha : \beta)$= το αποτέλεσμα του υπολογισμού, με αρχική κατάσταση $(\alpha : \beta)[\vec{p} := \vec{d}]$

όπου $(\alpha : \beta)[\vec{p} := \vec{d}]$ είναι η κατάσταση $\alpha : \beta$ στην επεκτεταμένη άλγεβρα $(\mathbf{M}, \vec{d})$.

Η π είναι μονότονη. Πράγματι αν $\vec{d} \leq \vec{d}'$ τότε $\pi(\vec{d}) \leq \pi(\vec{d}')$ επειδή αν

$$\pi(\vec{d})(\alpha : \beta) = w$$

τότε ο υπολογισμός στην άλγεβρα $(\mathbf{M}, \vec{d})$ με αρχική κατάσταση την $(\alpha : \beta)[\vec{p} := \vec{d}]$ συγκλίνει με έξοδο w. Οπότε οι τιμές τις $\vec{d}$ που ζητήθηκαν κατά τη διάρκεια του υπολογισμού, έχουν δοθεί, άρα το ίδιο θα συμβεί αν ό υπολογισμός γίνει στην άλγεβρα $(\mathbf{M}, \vec{d})$ που περιέχει την $(\mathbf{M}, \vec{d})$. Άρα ο υπολογισμός στην άλγεβρα $(\mathbf{M}, \vec{d'})$ με αρχική κατάσταση την $(\alpha : \beta)[\vec{p} := \vec{d'}]$ συγκλίνει με έξοδο w. Πράγμα που σημαίνει ότι

$$\pi(\vec{d'})(\alpha : \beta) = w.$$

Για κάθε $\vec{d} \in D'_\alpha, \mu_\phi(\pi(\vec{d})) \leq \pi(\mu_\alpha(\vec{d}))$. Πρέπει να δείξουμε ότι για ένα τυχαίο $\vec{d} \in D'_\alpha$

$$\mu_\phi(\pi(\vec{d}))(\alpha : \beta) = w \Longrightarrow \pi(\mu_\alpha(\vec{d}))(\alpha : \beta) = w. \tag{30}$$

- Αν η $\alpha : \beta \equiv: w$ (η $\alpha : \beta$ είναι τερματική) τότε από τον ορισμό της μ_ϕ

  $$\mu_\phi(\pi(\vec{d}))(: w) = w$$

  και από τον ορισμό της π αφού δεν υπάρχει αντικατάσταση

  $$\pi(\mu_\alpha(\vec{d}))(: w) = \overline{\mathrm{out}}((: w)[\vec{p} := \tau_\alpha(\vec{d})]) = w$$

  όπου $\overline{\mathrm{out}}(x) :=$ είναι το αποτέλεσμα του υπολογισμού με αρχική κατάσταση x. Οπότε

  $$\mu_\phi(\pi(\vec{d}))(: w) = \pi(\mu_\alpha(\vec{d}))(: w).$$

- Αν η $\alpha : \beta$ δεν είναι τερματική τότε από τον ορισμό της μ_ϕ το αριστερό μέλος της (30) γίνεται

  $$\pi(\vec{d})(\tau(\alpha : \beta)) = w.$$

  Αυτό σημαίνει ότι το αποτέλεσμα του υπολογισμού, για το πρόγραμμα A, με αρχική κατάσταση την $\tau(\alpha : \beta)[\vec{p} := \vec{d}]$ είναι w, ή ότι

  $$\begin{array}{c} \alpha : \beta \\ \left.\begin{array}{c} \tau(\alpha : \beta) \\ \vdots \\ : w \end{array}\right] \quad [\vec{p} := \vec{d}] \end{array}$$

  Μένει να δείξουμε ότι (το δεξί μέλος της (30))

  $$\pi(\mu_\alpha(d))(\alpha : \beta) = w$$

  ή

  $$\left.\begin{array}{c} \alpha : \beta \\ \tau(\alpha : \beta) \\ \vdots \\ : w \end{array}\right] [\vec{p} := \mu_\alpha(\vec{d})]$$

  Θα πρέπει να εξετάσουμε δύο περιπτώσεις για την $\alpha : \beta$:
  - Αν ή $\alpha : \beta$ δεν είναι εσωτερική κλήση (i-call) του προγράμματος A, τότε προφανώς ο υπολογισμός

    $$\begin{array}{c} \alpha : \beta \\ \left.\begin{array}{c} \tau(\alpha : \beta) \\ \vdots \\ : w \end{array}\right] \quad [\vec{p} := \vec{d}] \end{array}$$

έχει το ίδιο αποτέλεσμα με τον

$$\left.\begin{array}{c}\alpha:\beta\\ \tau(\alpha:\beta)\\ \vdots\\ :w\end{array}\right][\vec{p}:=\vec{d}]$$

και αφού $\vec{d}\leq\mu_\alpha(\vec{d})$ (επειδή $\vec{d}\in D'_\alpha$) ο τελευταίος υπολογισμός θα έχει το ίδιο αποτέλεσμα με τον

$$\left.\begin{array}{c}\alpha:\beta\\ \tau(\alpha:\beta)\\ \vdots\\ :w\end{array}\right][\vec{p}:=\mu_\alpha(\vec{d})]$$

επειδή κάθε φορά που ο υπολογισμός με αρχική κατάσταση την $\alpha:\beta$ ζητά μια τιμή της $\vec{d}$, η $\mu_\alpha(\vec{d})$ μπορεί να την παρέχει (αφού $\vec{d}\leq\mu_\alpha(\vec{d})$). Οπότε

$$\mu_\phi(\pi(\vec{d}))(\alpha:\beta)=\pi(\mu_\alpha(\vec{d}))(\alpha:\beta).$$

– Αν $\alpha:\beta\equiv\alpha' p_i:x\beta'$ τότε

$$\tau(\alpha' p_i:x\beta')=\alpha':A_i(x,\vec{p})\beta'.$$

Άρα $\pi(\vec{d})(\tau(\alpha:\beta))$ είναι το αποτέλεσμα του υπολογισμού

$$\begin{array}{c}\alpha' p_i:x\beta'\\ \left.\begin{array}{c}\alpha' A_i(x,\vec{p}):\beta'\\ \vdots\\ :w\end{array}\right]\quad[\vec{p}:=\vec{d}]\end{array}$$

που από το Λήμμα 4 είναι ίσο με

(31)
$$\begin{array}{c}\alpha' p_i:x\beta'\\ \left.\begin{array}{c}\alpha':[\![A_i(x,\vec{d})]\!]\beta'\\ \vdots\\ :w\end{array}\right]\quad[\vec{p}:=\vec{d}].\end{array}$$

Ενώ για το $\pi(\mu_\alpha(\vec{d}))(\alpha' p_i:x\beta')$ έχουμε ότι είναι ίσο με το αποτέλεσμα του υπολογισμού με αρχική κατάσταση $(\alpha' p_i:x\beta')[\vec{p}:=\mu_\alpha(\vec{d})]$ η το αποτέλεσμα του υπολογισμού

$$\left.\begin{array}{c}\alpha' p_i:x\beta'\\ \vdots\end{array}\right][\vec{p}:=\mu_\alpha(\vec{d})]$$

το οποίο με τη σειρά του είναι ίσο με το αποτέλεσμα του υπολογισμού

$$\left.\begin{array}{c}\alpha'(\mu_\alpha(\vec{d}))_i:x\beta'\\ \vdots\end{array}\right][\vec{p}:=\mu_\alpha(\vec{d})]$$

που από το ορισμό του α είναι ίσο με το αποτέλεσμα του υπολογισμού

$$\left.\begin{array}{c}\alpha':[\![A_i(x,\vec{d})]\!]\beta'\\ \vdots\end{array}\right][\vec{p}:=\mu_\alpha(\vec{d})]$$

και από την (31) είναι ίσο με w. Οπότε

$$\mu_\phi(\pi(\vec{d}))(\alpha' p_i : x\beta') = \pi(\mu_\alpha(\vec{d}))(\alpha' p_i : x\beta').$$

Για το δεύτερο κριτήριο, της αναγωγής, πρέπει να δείξουμε ότι, για κάθε $x \in X$ και κάθε $\vec{d} \in D'_\alpha$,

$$\text{value}_\phi(x, \pi(\vec{d})) = \text{value}_\alpha(x, \vec{d}). \tag{32}$$

Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\text{value}_\phi(x, \pi(\vec{d})) &= \pi(\vec{d})(\text{in}(x)) \\
&= \overline{\text{out}}(\text{in}(x)[\vec{p} := \vec{d}]) \\
&= \overline{\text{out}}\left((f : x)[\vec{p} := \vec{d}]\right) \\
&= [\![A_0]\!](x, \vec{d})
\end{aligned}$$

ενώ

$$\text{value}_\alpha(x, \vec{d}) = \alpha_0(x, \vec{d}) = [\![A_0]\!](x, \vec{d}).$$

Για το τελευταίο κριτήριο, της αναγωγής, πρέπει να δείξουμε ότι

$$\overline{\alpha}(x) = \overline{\phi}(x).$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}(x) &= \text{value}(x, (\mu \vec{d} \in D)[\vec{d} = \mu_\alpha(x, \vec{d})]) \\
&= \alpha_0^*(\vec{d}_x) \\
&= [\![A_0]\!](x, \vec{d}_x) \\
&= \bar{p}_0(\bar{x})
\end{aligned}$$

και από το Λήμμα 4

$$\begin{aligned}
\overline{\phi}(x) &= \text{value}(x, (\mu \vec{d} \in D)[\vec{d} = \mu_\phi(x, \vec{d})]) \\
&= f^*(\text{in}(x)) \\
&= \overline{\text{out}}(A_0\{\text{x} := x\}) \\
&= \bar{p}_0(\bar{x})
\end{aligned}$$

◊

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Μια εναλλακτική απόδειξη για το Θεώρημα 2

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος 2 που δεν επικαλείται το Λήμμα 3 για τη γενίκευση της προβολής. Ωστόσο δεν είναι απολύτως ξεκάθαρο η συνάρτηση αναγωγής που χρησιμοποιείται είναι πολύ διαφορετική από αυτήν του Θεωρήματος 2 καθώς η μια είναι περιορισμένη στον χώρο D_1' ενώ η παρακάτω συνάρτηση αναγωγής είναι ορισμένη μόνο σε ορισμένες συναρτήσεις. Για την ακρίβεια είναι ορισμένη στις μερικές συναρτήσεις με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν η μερική συνάρτηση συγκλίνει σε μια κατάσταση και η τιμή της συμφωνεί με την τιμή του σταθερού σημείου, τότε θα πρέπει να συγκλίνει και στις επόμενες καταστάσεις και μάλιστα με την ίδια τιμή.

Θεωρημα 2. *Έστω ϕ_i $i = 1, 2$ δύο αφηρημένες μηχανές και $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2$ οι αντίστοιχοι αναδρομείς. Αν ο ϕ_2 προσομοιώνει, με τη δεύτερη έννοια, τον ϕ_1, τότε* $\mathbf{r}_1 \leq_r \mathbf{r}_2$.

Αποδειξη. Έστω $f_0 \in D_\phi$ τέτοιο ώστε

$$f_0 = \mu(x, f_0) \text{ και } (\forall f \in D_\phi)[f = \mu(x, f) \implies f_0 \leq f].$$

Για κάθε $\vec{d} \in D_\phi$ η $\pi : D_\phi \to D_\psi$ ορίζεται ως ακολούθως:

$$\pi(d)(s) = \begin{cases} d(\sigma_2(s)) & \text{, αν } d(\sigma_2(s)) = f_0(\sigma_2(s))\ \& \\ & \quad \forall n \in \mathbb{N}\ d(\tau_\phi^n(\sigma_2(s))) = d(\sigma_2(s)) \\ \perp & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

π μονότονη. Έστω $d \leq d'$ τότε $\forall s \in S_\phi$

$$d(s) \downarrow \Longrightarrow d'(s) \downarrow \ \&\ d(s) = d'(s).$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\pi(d) \leq \pi(d')$ ή ότι για κάθε $t \in S_\psi$

$$\pi(d)(t) \downarrow \Longrightarrow \pi(d')(t) \downarrow \ \&\ \pi(d)(t) = \pi(d')(t).$$

Αν $\pi(d)(t) \downarrow$ τότε από τον ορισμό της π

$$\pi(d)(t) = d(\sigma_2(t)) = f_0(\sigma_2(t)) \text{ και για κάθε } n \in \mathbb{N},\ d(\tau_\phi^n(\sigma_2(t))) = f_0(\sigma_2(t))$$

και επειδή $d \leq d'$

$$d'(\sigma_2(t)) = d(\sigma_2(t)) = f_0(\sigma_2(t))$$

και για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$d'(\tau_\phi^n(\sigma_2(t))) = d(\tau_\phi^n(\sigma_2(t))) = f_0(\sigma_2(t)).$$

Οπότε $\pi(d)(t) = \pi(d')(t)$ και άρα

$$\pi(d) \leq \pi(d').$$

Τώρα θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\mu_\psi(\pi(d)) \leq \pi(\mu_\phi(d))$$

δηλαδή, ότι για κάθε $t \in S_\psi$

$$\mu_\psi(\pi(d))(t)\downarrow \Longrightarrow \pi(\mu_\phi(d))(t)\downarrow \ \ \& \ \ \mu_\psi(\pi(d))(t) = \pi(\mu_\phi(d))(t).$$

Έστω ότι $\mu_\psi(\pi(d))(t) = w$, τότε θα πρέπει να πάρουμε περιπτώσεις για το t

- $t \in T_\psi$, τότε $\sigma_2(t) \in T_\phi$ και από τον ορισμό της μ_ψ και τον ορισμό της σ_2 έχουμε ότι

$$\mu_\psi(\pi(d))(t) = \mathrm{out}_\psi(t) = \mathrm{out}_\phi(\sigma_2(t)) = f_0(\sigma_2(t)).$$

Ενώ για την $\pi(\mu_\phi(d))(t)$ από τον ορισμό της μ_ϕ και το γεγονός ότι $\sigma_2(t) \in T_\phi$ έχουμε ότι

$$\mu_\phi(d)(\sigma_2(t)) = \mathrm{out}_\phi(\sigma_2(t)) = f_0(\sigma_2(t))$$

και επειδή $\sigma_2(t) \in T_\phi$ έχουμε ότι ${\tau_\phi}^n(\sigma_2(t)) = \sigma_2(t)$. Οπότε

$$\pi(\mu_\phi(d))(t) = f_0(\sigma_2(t)) = \mu_\psi(\pi(d))(t).$$

- $t \notin T_\psi,\ \sigma_2(t) \in T_\phi$, τότε από τον ορισμό της μ_ψ έχουμε ότι

$$\mu_\psi(\pi(d))(t) = \pi(d)(\tau_\psi(t))$$

επειδή $\mu_\psi(\pi(d))\downarrow$ από τον ορισμό της π

$$\pi(d)(\tau_\psi(t)) = d(\sigma_2(\tau_\psi(t))) = f_0(\sigma_2(\tau_\psi(t))) = d(\sigma_2({\tau_\psi}^n(t)))$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\sigma_2(t) \in T_\phi$ έχουμε ότι $\sigma_2(\tau_\psi(t)) \in T_\phi$ (Σχήμα 1) και ακόμα ότι $\sigma_2(t) = \sigma_2(\tau_\psi(t))$, οπότε

$$f_0(\sigma_2(\tau_\psi(t))) = f_0(\sigma_2(t)).$$

Ενώ για την $\pi(\mu_\phi(d))(t)$ έχουμε ότι

$$\mu_\phi(d)(\sigma_2(t)) = \mathrm{out}_\phi(\sigma_2(t)) = f_0(\sigma_2(t))$$

και επειδή η $\sigma_2(t)$ είναι τερματική κατάσταση έχουμε επίσης ότι

$$\sigma_2(t) = {\tau_\phi}^n(\sigma_2(t))$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\mu_\phi(d)({\tau_\phi}^n(\sigma_2(t)) = \mu_\phi(d)(\sigma_2(t)).$$

Οπότε

$$\pi(\mu_\phi(d))(t) = f_0(\sigma_2(t)) = \mu_\psi(\pi(d))(t).$$

- $t \notin T_\psi,\ \sigma_2(t) \notin T_\phi$. Όπως και προηγούμενος από τον ορισμό της μ_ψ έχουμε ότι

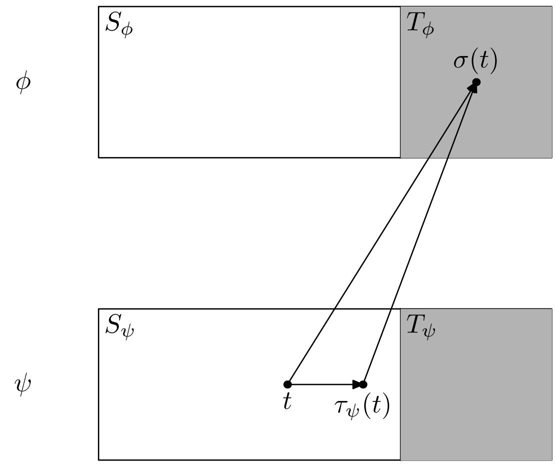
$$\mu_\psi(\pi(d))(t) = \pi(d)(\tau_\psi(t))$$

επειδή $\mu_\psi(\pi(d))\downarrow$ από τον ορισμό της π

$$\pi(d)(\tau_\psi(t)) = d(\sigma_2(\tau_\psi(t))) = f_0(\sigma_2(\tau_\psi(t))) = d(\sigma_2({\tau_\psi}^n(t))) \tag{33}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ενώ για την $\pi(\mu_\phi(d))(t)$ έχουμε ότι

$$\mu_\phi(d)(\sigma_2(t)) = d(\tau_\phi(\sigma_2(t))) \tag{34}$$



Σχημα 1

– Αν $\sigma_2(\tau_\psi(t)) = \sigma_2(t)$ (Σχήμα 3) τότε η (33) γίνεται

$$\mu_\psi(\pi(d))(t) = f_0(\sigma_2(t)) = d({\tau_\phi}^n(\sigma_2(t)))$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για την $\pi(\mu_\phi(d))$ έχουμε ότι

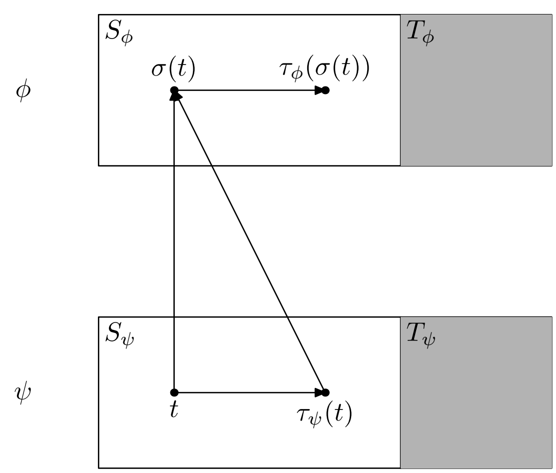
$$\mu_\phi(d)(\sigma_2(t)) = d(\tau_\phi(\sigma_2(t)))$$

και από την (33) έχουμε ότι

$$d(\tau_\phi(\sigma_2(t))) = f_0(\sigma_2(t)) = d({\tau_\phi}^n(\sigma_2(t)))$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Οπότε

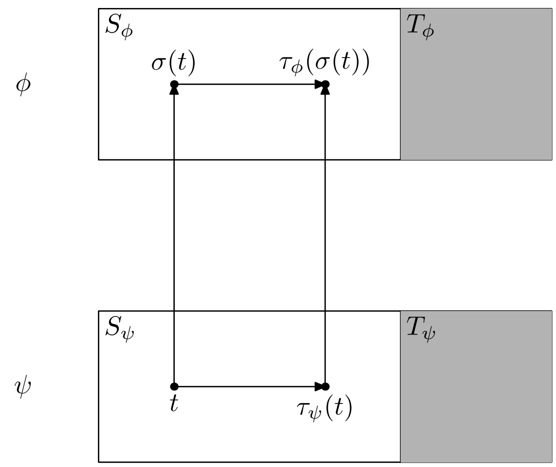
$$\pi(\mu_\phi(d))(t) = f_0(\sigma_2(t)) = \mu_\psi(\pi(d))(t).$$



Σχημα 2

– Αλλιώς (Σχήμα 2) έχουμε ότι $\sigma_2(\tau_\psi(t)) = \tau_\phi(\sigma_2(t))$ οπότε από την (33) και την (34) έχουμε ότι $\pi(\mu_\phi(d))(t)\downarrow$ και επιπλέον ότι

$$\mu_\psi(\pi(d))(t) = d(\sigma_2(\tau_\psi(t))) = d(\tau_\phi(\sigma_2(t))) = \pi(\mu_\phi(d))(t).$$



Σχημα 3

Για το δεύτερο κριτήριο, της αναγωγής αναδρομέων πρέπει να δείξουμε ότι

$$\text{value}_\psi(x, \pi(d)) \leq \text{value}_\phi(x, d),$$

ή ισοδύναμα

$$[\text{value}_\psi(x, \pi(d))\downarrow] \Longrightarrow [\text{value}_\phi(x, d)\downarrow \;\; \& \;\; \text{value}_\psi(x, \pi(d)) = \text{value}_\phi(x, d)].$$

Έστω $\text{value}_\psi(x, \pi(d))\downarrow$ τότε επειδή

$$\text{value}_\psi(x, \pi(d)) = \pi(d)(\text{in}_\psi(x))$$

παίρνουμε ότι $\pi(d)(\text{in}_\psi(x))\downarrow$ και από τον ορισμό της π

$$d(\sigma_2(\text{in}_\psi(x))) = f_0(\sigma_2(\text{in}_\psi(x)))$$

όμως από τον ορισμό της σ_2 έχουμε ότι

$$\sigma_2(\text{in}_\psi(x)) = \text{in}_\phi(x)$$

οπότε

$$d(\sigma_2(\text{in}_\psi(x))) = d(\text{in}_\phi(x)) = f_0(\sigma_2(\text{in}_\psi(x))) = f_0(\text{in}_\phi(x))$$

Το παραπάνω δίνει ότι

$$\text{value}_\phi(x, d) = d(\text{in}_\phi(x)) = f_0(\sigma_2(\text{in}_\psi(x))) = \text{value}_\psi(x, \pi(d)).$$

Για το δεύτερο κριτήριο, της αναγωγής αναδρομέων πρέπει να δείξουμε ότι

$$\bar{r}_\phi(x) = \bar{r}_\psi(x)$$

Αν $\bar{r}_\phi(x) = w$ τότε $\bar{\phi}(x) = w$ και $\bar{\phi}(x) = \text{out}_\phi(s_{l(x)})$. Από τον ορισμό της $s_{l(x)}$ έχουμε ότι $s_{l(x)} \in T_\phi$. Οπότε από τον ορισμό της σ_2 και επαγωγή για την $s_{l(x)}$ υπάρχει

$t \in T_\psi : \ \sigma_2(t) = s_{l(x)} \in T_\phi$ και επίσης τέτοιο ώστε η t να είναι μεταγενέστερη κατάσταση της $\mathrm{in}_\psi(x)$, δηλαδή, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\tau_\psi(\mathrm{in}_\psi(x)) = t$. Οπότε

$$\begin{aligned}
\mathrm{out}_\phi(s_{l(x)}(x)) &= \mathrm{out}_\psi(t) \\
&= \mathrm{out}_\psi(s'_{l(x)}(x)) \\
&= \bar{\psi}(x) \\
&= \bar{r}_\psi(x).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\bar{r}_\phi(x) = \bar{r}_\psi(x). \qquad \Diamond$$

Δείκτης

Βιβλιογραφία

[1] Robin Milner. An algebraic definition of simulation between programs. Technical report, Stanford University, 1971.

[2] Yiannis N. Moschovakis. *Truth in mathematics*, chapter On founding the theory of algorithms, pages 71–104. Clarendon Press, Oxford, 1998.

[3] Yiannis N. Moschovakis. What is an algorithm? *Mathematics Unlimited - 2001 and beyond*, 2001.

[4] Yiannis N. Moschovakis and Vasilis S. Paschalis. *Elementary algorithms and their implementations*. προς δημοσίευση.

[5] Peter van Emde Boas. *Handbook of theoetical computer science*, chapter Machine models and simulations. Elsevier Science Publishers B.V., 1990.

[6] Γιάννης Ν. Μοσχοβάκης. *Αναδρομή και υπολογισιμότητα*. 2η Προκαταρκτική έκδοση, 2005.