Παίγνια Συμφόρησης και Κόστος Αναρχίας

Διπλωματική Εργασία

Ευστράτιος Περουτσέας

Υπότροφος Κοινωφελούς Ιδρύματος
Αλέξανδρος Σ. Ωνάσης

Επιβλέπων
Καθηγητής Ηλίας Κουτσουπιάς

Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών
Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα
Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
Λογική και Θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού

$\mu\Pi\lambda\forall$

Ιούνιος 2004

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

1 Εισαγωγή

Είναι δεδομένο πλέον ότι ο πάγος που χώριζε τη *Θεωρία Παιγνίων* από τη Θεωρητική Πληροφορική έχει ήδη αρχίσει να λιώνει. Πολλοί επιστήμονες της Πληροφορικής που μελετούν τα προβλήματα που παρουσιάζονται στα δίκτυα και στο διαδίκτυο ειδικότερα, όπως είναι και η *συμφόρηση*, έχουν στραφεί στη Θεωρία Παιγνίων. Αντιμετωπίζουν πλέον τους χρήστες ενός δικτύου ως παίκτες και τη διαδικασία συμφόρησης του δικτύου ως ένα *παίγνιο συμφόρησης*. Κάνουν δηλαδή χρήση της *Θεωρίας Παιγνίων χωρίς Συνεργασία* ενώ παλαιότερα χρησιμοποιούσαν τη *Θεωρία Παιγνίων με Συνεργασία*, μιας και θεωρούσαν ότι μπορούσαν να πείσουν τους παίκτες (χρήστες) να συνεργαστούν με σκοπό τη βέλτιστη λειτουργία του δικτύου.

Στη Θεωρία Παιγνίων με Συνεργασία δύο ή περισσότεροι παίκτες (ακόμα και το σύνολο των παικτών) μπορούν να συμφωνήσουν να συνεργαστούν και να δεσμευτούν για τη στρατηγική που θα επιλέξουν. Αυτή η ενέργεια στοχεύει στο συνολικό και όχι ατομικό όφελος. Ωστόσο υπάρχει πάντα η εκδοχή κάποιος ή κάποιοι να φερθούν εγωιστικά αλλάζοντας τη στρατηγική για την οποία είχαν δεσμευτεί, με κάποια άλλη που αυξάνει το ατομικό τους όφελος. Αυτή, προφανώς, μειώνει το κοινωνικό (συνολικό) όφελος γιατί στην αντίθετη περίπτωση ο παίκτης που διαφοροποιείται θα είχε εξαρχής δεσμευτεί για τη διαφοροποιημένη στρατηγική μιας και είναι *λογικός*.

Το γεγονός ότι όλοι οι παίκτες είναι λογικοί είναι μια απαράβατη παραδοχή στη Θεωρία Παιγνίων. Πιο συγκεκριμένα έχουμε παραδεχθεί ότι οι παίκτες είναι γνώστες των εναλλακτικών τους λύσεων, έχουν ξεκάθαρες προτιμήσεις για την επιλογή της στρατηγικής τους και επιλέγουν σκόπιμα εκείνη που βελτιστοποιεί το κέρδος τους.

Ωστόσο στην εποχή μας έχουν δημιουργηθεί μεγάλα δίκτυα όπως είναι και το διαδίκτυο, των οποίων η πολυπλοκότητα είναι πολύ σύνθετη και επιπλέον ακολουθούν αυθαίρετους μηχανισμούς και κανόνες. Η πολύπλοκη δομή τους δημιουργείται από την διαρκή αύξηση ή αυξομείωση του μεγέθους τους, τη σχεδόν *αυτογενή ανάδυσή* τους, την ανοιχτή, χωρίς περιορισμούς αρχιτεκτονική τους και την έλλειψη οποιασδήποτε εξουσίας που να εποπτεύει και να ρυθμίζει τις λειτουργίες του δικτύου. Όπως προείπαμε η κλασσική ανάλυση αυτών των δικτύων δεν έχει θετικά αποτελέσματα μιας και οι παραδοχές είτε μιας κεντρικής ρυθμιστικής αρχής είτε της συνεργασίας των χρηστών δεν είναι εφικτές σε αυτή τη νέα γενιά δικτύων. Έτσι αναδύθηκε ένα αυξανόμενο ενδιαφέρον για την ανάλυση μεγάλων δικτύων χωρίς συνεργασία, όπου όλοι οι χρήστες αποφασίζουν αυτόβουλα.

Στη Θεωρία Παιγνίων χωρίς Συνεργασία δεχόμαστε ότι οι παίκτες είναι *εγωιστές* και δεν αποβλέπουν σε τίποτε άλλο εκτός από το ατομικό τους συμφέρον (*κέρδος*). Σε ένα δίκτυο για παράδειγμα θα διαλέξουν το συντομότερο μονοπάτι. Θα δείξουμε εκτενώς ότι αυτό μειώνει το κοινωνικό όφελος, όπως αυτό σαφώς ορίζεται κάθε φορά. Για το δίκτυο έχουμε για παράδειγμα το άθροισμα των συνολικών καθυστερήσεων όλων των παικτών.

Μία θεμελιώδης έννοια που κυριαρχεί στη Θεωρία Παιγνίων είναι η Nash ισορροπία, η οποία, εδώ όχι αυστηρά, είναι η κατάσταση όπου κανένας παίκτης δεν βρίσκει επικερδές το να διαφοροποιήσει την επιλογή του ενώ όλοι οι άλλοι παραμείνουν σταθεροί στις επιλογές τους. Θεωρητικά μοντέλα παιγνίων έχουν δημιουργηθεί για την επίλυση προβλημάτων δικτύων όπως είναι, εκτός από την συμφόρηση, ο καταμερισμός της κυκλοφοριακής κίνησης, ο έλεγχος ροής, η δρομολόγηση κλπ. Αυτές οι μελέτες ανακαλύπτουν τις ιδιότητες των Nash σημείων ισορροπίας (NE) και προβλέπουν την εξέλιξη που πρόκειται να πραγματοποιηθεί κάτω από συνθήκες μη κεντρικού ελέγχου και απουσίας οποιασδήποτε συνεργασίας.

Όπως θα αναλύσουμε παρακάτω η Nash ισορροπία δεν βελτιστοποιεί πάντα συνολικά το σύστημα αλλά μπορεί να μας δώσει υποβέλτιστη απόδοση του συστήματος. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το αποκαλούμενο «Το Δίλλημα του Φυλακισμένου», που επίσης θα αναλύσουμε παρακάτω. Με σκοπό την κατανόηση του φαινομένου των συστημάτων χωρίς συνεργασία, οι Κουτσουπιάς και Παπαδημητρίου [20] εισήγαγαν τον *λόγο συντονισμού*, ο οποίος είναι ο λόγος του χειρότερου δυνατού NE προς το *κοινωνικό* (ολικά) *βέλτιστο*. Άρα αυτή η ανάλυση επιδιώκει να βρει το τίμημα των εγωιστικών, χωρίς συνεργασία, αποφάσεων των χρηστών, δηλαδή το *κόστος της αναρχίας* όπως αυτό πρωτοαναφέρθηκε στο [20] και μετέπειτα στο [34]. Ο λόγος συντονισμού και το κόστος της αναρχίας είναι ισοδύναμες έννοιες που τις συναντάμε και τις δύο στη βιβλιογραφία.

Οι Κουτσουπιάς και Παπαδημητρίου έθεσαν προς διερεύνηση το λόγο συντονισμού για τα προβλήματα δρομολόγησης και αποφυγής συμφόρησης, στα οποία ένα σύνολο χρηστών στέλνει κυκλοφοριακή κίνηση σε ένα σύνολο παράλληλων ακμών με γραμμικές συναρτήσεις κόστους. Αργότερα αυτό το μοντέλο επεκτάθηκε σε πιο ρεαλιστικά μοντέλα, δηλαδή σε πιο γενικής δομής δίκτυα και με πιο γενικές συναρτήσεις κόστους. Αυτή η έρευνα μας οδήγησε στη μελέτη των ιδιοτήτων των NE έναντι αυτών των κοινωνικών βέλτιστων. Και επομένως την αναζήτηση μεθόδων για να επιτευχθούν μείωση του κόστους των NE, τροποποίηση της δομής του δικτύου έτσι ώστε να διασφαλιστεί ότι ο λόγος συντονισμού θα είναι μικρός και τέλος σύγκλιση προς ένα «καλό» NE. Αυτήν την ανάλυση θα παρουσιάσουμε στην εργασία αυτή, πάνω σε δύο συγκεκριμένα μοντέλα.

1.1 Τα Μοντέλα

Ο κύριος στόχος των επιστημόνων είναι η μελέτη του κόστους αναρχίας της μοντελοποιημένης πλέον κυκλοφοριακής κίνησης στα δίκτυα. Η μοντελοποίηση της κυκλοφοριακής κίνησης μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πρόβλημα αποστολής, ενός συνόλου πακέτων (ή εργασιών) διαμέσου ενός δικτύου, στον προορισμό τους. Η απόδοση του δικτύου εξαρτάται από δύο κύριους παράγοντες (παραμέτρους): τον χρόνο εξυπηρέτησης (ή χρόνο αναμονής) που παρατηρείται στην κατάληξη και την επίδοση του πακέτου στην πορεία του από την *πηγή* στην *κατάληξη*. Αυτοί οι δύο παράμετροι της απόδοσης του δικτύου διαχωρίζουν τα δύο μοντέλα που θα αναπτύξουμε στην παρούσα εργασία, το *μοντέλο ανάθεσης εργασιών* και το *μοντέλο της εγωιστικά δρομολογούμενης ροής*. Κατά κάποιο τρόπο, μπορούμε να πούμε ότι το μοντέλο ανάθεσης εργασιών είναι εκείνο στο οποίο επικεντρώνεται η προσοχή μας μόνο στην παράμετρο της συμφόρησης της κατάληξης, ενώ στο μοντέλο της εγωιστικά δρομολογούμενης ροής επικεντρωνόμαστε γύρω από το σενάριο όπου η κυκλοφοριακή κίνηση μπορεί να μοντελοποιηθεί από μία ροή δικτύου. Και τα δύο μοντέλα ανήκουν στην πιο γενική κατηγορία παιγνίων, τα παίγνια συμφόρησης.

Στο μοντέλο ανάθεσης εργασιών [20], θεωρούμε το πρόβλημα της ανάθεσης εργασιών σε μηχανές σύμφωνα πάντα με κάποιες θεωρητικές παραδοχές της Θεωρίας Παιγνίων. Το σημαντικό στοιχείο αυτών των αναθέσεων είναι ότι κάθε εργασία θεωρείται ως μια ολότητα που δεν μπορεί να διαχωριστεί και να ανατεθεί σε διαφορετικες μηχανές. Μπορούμε, επομένως να δούμε αυτό το μοντέλο ως ένα μοντέλο δρομολόγησης όπου το δίκτυο αποτελείται από δύο κόμβους, μια *πηγή* και μια *κατάληξη*, και ένα σύνολο από παράλληλες *ακμές* (συνδέσμους) από την πηγή προς την κατάληξη. Σε αυτό το μοντέλο η κύρια παράμετρος που ερευνούμε είναι η συμφόρηση του καθενός συνδέσμου, που σημαίνει το μέγιστο κόστος για την κάθε μηχανή (ή ακμή). Ισοδύναμα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μοντέλο αυτό εστιάζει μόνο στον χρόνο εξυπηρέτησης, μελετάμε δηλαδή την απόδοση του συστήματος μόνο ως προς το φόρτο που παρατηρείται στις καταλήξεις.

Στο μοντέλο της εγωιστικά δρομολογούμενης ροής [41, 42], θεωρούμε ότι οι «εργασίες» πρόκειται να δρομολογηθούν στους εξυπηρετητές (μηχανές) και το πρόβλημα εστιάζεται στην αποτελεσματική δρομολόγηση των εργασιών, στην άλλη δηλαδή βασική παράμετρο από την οποία εξαρτάται η απόδοση του δικτύου. Επιπρόσθετα, στο μοντέλο αυτό, εκτός και αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό, θεωρούμε ότι υπάρχει ένας άπειρος αριθμός εργασιών και ότι κάθε εργασία αντιστοιχεί σε ένα αμελητέο κλάσμα της συνολικής κυκλοφοριακής κίνησης του δικτύου και επομένως μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μία ροή.

Μέσα από την εισαγωγή αυτή επιδιώξαμε τη σύντομη μνεία όλων των βασικών στοιχείων που απαρτίζουν την εργασία. Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναπτύξουμε τη Θεωρία Παιγνίων χωρίς Συνεργασία. Στο κεφάλαιο 3 θα εξετάσουμε τα Παίγνια Συμφόρησης και στα κεφάλαια 4 και 5 τα μοντέλα ανάθεσης εργασιών και της εγωιστικά δρομολογούμενης ροής αντίστοιχα. Στο κεφάλαιο 6 θα δούμε κάποιες μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί για τη βελτίωση του κόστους αναρχίας (λόγου συντονισμού) για τα δύο παραπάνω μοντέλα και για τα παίγνια συμφόρησης γενικότερα.

2 Θεωρία Παιγνίων χωρίς Συνεργασία

Οι Von Neumann και Morgenstern ήταν οι πρώτοι που αναφέρθηκαν στα παίγνια το 1944 στο βιβλίο τους *Theory of Games and Economic Behaviour*[30]. Το βιβλίο αυτό έχει επανεκδοθεί. Σε αυτό περιλαμβάνεται η θεωρία παιγνίων με συνεργασία, η θεωρία που βασίζεται στην ανάλυση των αλληλοεξαρτήσεων που προκύπτουν από το *συνασπισμό* (συνεργασία) που επιτυγχάνεται μεταξύ των παικτών. Ο John Nash το 1950 στη δημοσίευσή του με τον τίτλο *Παίγνια χωρίς Συνεργασία* [29] ανέπτυξε μια νέα θεωρία όπου δεχόμαστε την απουσία οποιασδήποτε μορφής σύμπραξης και επικοινωνίας μεταξύ των παικτών. Ο κάθε παίκτης ενεργεί και αποφασίζει ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους.

2.1 Παίγνια χωρίς Συνεργασία

Σε ένα παίγνιο λαμβάνουν μέρος $n \geq 2$ παίκτες. Ο κάθε παίκτης έχει ένα σύνολο κινήσεων (επιλογών) που τις ονομάζουμε γνήσιες στρατηγικές και μία συνάρτηση κέρδους. Το κέρδος του εξαρτάται τόσο από την επιλογή της δικής του στρατηγικής όσο και από τις στρατηγικές που επέλεξαν οι υπόλοιποι παίκτες. Στη γενική περίπτωση θεωρούμε ότι το σύνολο των γνήσιων στρατηγικών και η συνάρτηση κέρδους του κάθε παίκτη είναι γνωστά σε όλους τους υπόλοιπους. Επικρατεί πλήρης πληροφόρηση. Επιπλέον οι παίκτες είναι λογικοί. Προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν το όφελός τους χωρίς να ενδιαφέρονται αν το όφελος των υπόλοιπων παικτών είναι μεγαλύτερο. Δεν ενυπάρχουν ψυχολογικοί παράγοντες όπως είναι η ζήλεια. Θεωρούν καλύτερη μια γνήσια στρατηγική από τη στιγμή που βελτιώνει το όφελός τους. Τέλος μπορούν να υπολογίσουν τα οφέλη όλων των παικτών σε οποιαδήποτε συνδυασμό γνήσιων στρατηγικών μιας και έχουν πλήρη πληροφόρηση.

Τα παίγνια συμφόρησης ανήκουν σε μια γενική ομάδα παιγνίων, τα (Στρατηγικά) Παίγνια χωρίς Συνεργασία.

Ορισμός 2.1 Ένα πεπερασμένο στρατηγικό παίγνιο αποτελείται από:

- ένα πεπερασμένο σύνολο N που είναι το σύνολο των παικτών,
- ένα μη κενό σύνολο S_i για κάθε παίκτη i, που είναι το σύνολο των γνήσιων στρατηγικών (pure strategies) του παίκτη αυτού ή πιο απλά το σύνολο των διαθέσιμων κινήσεων (επιλογών)
- και ένα σύνολο συναρτήσεων κέρδους $u_i : S \to \mathbb{R}$ μία για κάθε παίκτη i, όπου ισχύει $S = S_1 \times \cdots \times S_n$.

Παράδειγμα 2.2 Ας θεωρήσουμε ένα παίγνιο με δύο παίκτες, όπου: $S_1 = \{a_1, a_2\}$, $S_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$ και $u_1(a_1, b_1) = 3$, $u_1(a_1, b_2) = 3$, $u_1(a_1, b_3) =$

1, $u_1(a_2, b_1) = 4$, $u_1(a_2, b_2) = 2$, $u_1(a_2, b_3) = 10$ και $u_2(a_1, b_1) = 2$, $u_2(a_1, b_2) = 6$, $u_2(a_1, b_3) = 7$, $u_2(a_2, b_1) = 3$, $u_2(a_2, b_2) = 1$, $u_2(a_2, b_3) = 3$.
Τα παραπάνω δεδομένα απεικονίζονται στον παρακάτω πίνακα που γενικά ονομάζεται *κανονική μορφή* παιγνίου.

	b_1	b_2	b_3
a_1	3, 2	3, 6	1, 7
a_2	4, 3	2, 1	10, 3

Είναι εύκολο να δούμε ότι η απεικόνιση αυτή γίνεται πιο πολύπλοκη για $n \geq 3$.

Έχοντας μοντελοποιήσει το παίγνιο στην κανονική μορφή, ο επόμενος στόχος μας είναι να αναλύσουμε το μοντέλο έτσι ώστε να κάνουμε προβλέψεις για το τι θα συμβεί στην εξέλιξή του. Γενικότερα λέμε ότι στοχεύουμε στην αναζήτηση της λύσης του παιγνίου.

2.2 Κυριαρχία

Η πρώτη μέθοδος επίλυσης ενός παιγνίου που θα αναφέρουμε είναι η *κυριαρχία*. Κυριαρχία υπάρχει όταν για κάποιο παίκτη i και κάποια γνήσια στρατηγική του s_i ισχύει:

$$u_i(s_{-i}, s_i) \geq u_i(s_{-i}, s_i') \tag{1}$$

για κάθε $s_i' \neq s_i \in S_i$ και για κάθε $s_{-i} \in S_{-i}$ όπου ισχύει $S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$. Έτσι ο παίκτης i δεν έχει κανένα λόγο για να μην επιλέξει τη στρατηγική s_i μιας και οτιδήποτε και αν διαλέξουν οι υπόλοιποι παίκτες εκείνος μεγιστοποιεί το κέρδος του σε κάθε περίπτωση. Βέβαια υπάρχουν διάφορες εκδοχές κυριαρχίας όπως για παράδειγμα η ισχυρή και η ασθενής ή η έννοια της *κυριαρχούμενης* στρατηγικής, όμως σκοπός μας ήταν να δείξουμε την κεντρική ιδέα. Το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι η σπάνια παρουσία της και αυτή σε εξειδικευμένα (πολύ συγκεκριμένα) και όχι γενικά παίγνια λόγω της ισχυρής σχέσης που την εκφράζει. Πιο αναλυτικά παρουσιάζεται στο [21]. Στο παράδειγμα 1 ισχύει $u_2(a_x, b_3) \geq u_2(a_x, b_y)$ όπου $x \in \{1, 2\}$ και επίσης $y \in \{1, 2\}$. Άρα η γνήσια στρατηγική b_3 είναι κυρίαρχη για τον δεύτερο παίκτη. Επειδή οι παίκτες είναι λογικοί και έχουν πλήρη πληροφόρηση ο πρώτος παίκτης θα δώσει την προτιμότερη για τον εαυτό του απάντηση επιλέγοντας τη γνήσια στρατηγική a_2 μιας και $10 > 1$. Έτσι καθορίζεται το κέρδος του πρώτου παίκτη σε 10 και του δεύτερου σε 3. Μια ενδεχόμενη απορία είναι, γιατί ο παίκτης 2 ενώ έχει κυρίαρχη γνήσια στρατηγική κερδίζει πολύ λιγότερα από τον παίκτη 1. Μια δεύτερη ίσως, γιατί κερδίζει «μόνο» 3 και όχι 7 ή 6 στα (a_1, b_2) και (a_1, b_3) αντίστοιχα.

Καταρχάς ο κάθε παίκτης προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το δικό του όφελος και ποτέ συγκρινόμενο με αυτό των υπολοίπων. Αυτός είναι καθαρά ψυχολογικός παράγοντας και δεν σχετίζεται με τα Μαθηματικά και τη Θεωρία Παιγνίων. Δεύτερον το κέρδος κάθε παίκτη συνκαθορίζεται από τις επιλογές των υπόλοιπων παικτών οι οποίοι βελτιστοποιούν το όφελός τους. Άρα ο παίκτης 2 δεν θα μπορούσε ποτέ να κερδίσει 7. Τρίτον οι παίκτες είναι λογικοί και δεν ρισκάρουν. Θα ήταν καθαρό ρίσκο και όχι λογική σκέψη του παίκτη 2 αν προσπαθούσε με τη γνήσια στρατηγική b_2 να κερδίσει 6 και όχι 1. Αυτή είναι η τελευταία φορά που διευκρινίζουμε κάτι τέτοιο.

2.3 Γνήσιο Nash σημείο ισορροπίας

Η επόμενη και κύρια, «κυρίαρχη», μέθοδος επίλυσης ενός παιγνίου είναι η *Nash* ισορροπία. Είναι εκείνη που εισήγαγε ο John Nash στο [28]. Οι επιστήμονες τη χρησιμοποιούν κατά κόρον μιας και θεωρείται θεμελιώδης στη Θεωρία Παιγνίων και ως η αντιπροσωπευτικότερη λύση ενός παιγνίου, μολονότι σε ορισμένες περιπτώσεις (Δίλλημμα των Φυλακισμένων) δημιουργεί αντιφάσεις και μη ικανοποιητικά αποτελέσματα. Ένα n-διάστατο διάνυσμα γνήσιων στρατηγικών (n παικτών) s είναι *γνήσιο Nash σημείο ισορροπίας* (NE) αν και μόνο αν για κάθε παίκτη i ισχύει:

$$u_i(s) = \max_{s_i}[u_i(s_{-i}, s_i)] \tag{2}$$

με u_i συνάρτηση κέρδους του παίκτη i, $s \in S$, $s_{-i} \in S_{-i}$ και $s_i \in S_i$.
Η προηγούμενη σχέση υποδηλώνει ότι κανένας παίκτης δεν μπορεί να αυξήσει το κέρδος του αλλάζοντας στρατηγική μόνο εκείνος, διατηρώντας σταθερές τις στρατηγικές των υπόλοιπων παικτών όταν το s είναι γνήσιο Nash σημείο ισορροπίας. Στο παράδειγμα 1 το $s = (a_2, b_3)$ είναι γνήσιο NE μιας και αν διαφοροποιηθεί ο παίκτης 1 από a_2 σε a_1 κερδίζει $1 < 10$ ενώ αν ο παίκτης 2 διαφοροποιηθεί σε b_1 κερδίζει $3 \leq 3$ και σε b_2, $1 < 3$. Άρα ισχύει η παραπάνω σχέση. Όμοια επαληθεύεται ότι και το σημείο $s' = (a_2, b_1)$ είναι γνήσιο NE. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι τα υπόλοιπα σημεία δεν είναι γνήσια NE. Γενικά δεν υπάρχει περιορισμός στο πλήθος των γνήσιων NE σε ένα παίγνιο.

2.4 Μικτό Nash σημείο ισορροπίας

Μέχρι τώρα θεωρούσαμε δεδομένο ότι ο κάθε παίκτης διαλέγει μία και μόνο στρατηγική. Επεκτείνουμε το μοντέλο αυτό υιοθετώντας πιθανοτικές κατανομές. Η κάθε μία αντιστοιχεί σε έναν παίκτη και η κάθε πιθανότητα σε μία στρατηγική του, εκφράζοντας την πιθανότητα επιλογής της στρατηγικής του αυτής. Το μέχρι τώρα μοντέλο είχε πιθανότητα 1 σε μία γνήσια στρατηγική και 0 σε όλες τις υπόλοιπες για κάθε παίκτη. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι για τον παίκτη i η στρατηγική (πλέον) s_i είναι *μικτή στρατηγική* αν $s_i = \sum_\alpha p_{i\alpha}\pi_{i\alpha}$ με $p_{i\alpha} \geq 0$ και $\sum_\alpha p_{i\alpha} = 1$, όπου $\pi_{i\alpha}$ οι γνήσιες στρατηγικές του παίκτη i και $p_{i\alpha}$ οι πιθανότητες με τις οποίες τις διαλέγει. Λέμε ότι ο παίκτης i χρησιμοποιεί τη γνήσια στρατηγική $\pi_{i\alpha}$ όταν $p_{i\alpha} > 0$. Έτσι ο παραπάνω ορισμός του γνήσιου NE μπορεί να γενικευθεί σε ορισμό NE (είτε γνήσιου είτε μικτού) με την τοποθέτηση μικτών στρατηγικών και με την θεώρηση των γνήσιων ως υποπερίπτωσή τους. Ισχύει:

$$u_i(s) = \max_{s_i}[u_i(s_{-i}, s_i)] \tag{3}$$

με s_i μικτή στρατηγική και s_{-i} και s διανύσματα μικτών στρατηγικών.

Κάθε παίκτης έχει λόγο να παίξει με μη μηδενική πιθανότητα τις γνήσιες στρατηγικές εκείνες που μεγιστοποιούν το κέρδος του, με δεδομένες τις σ-τρατηγικές των υπόλοιπων παικτών. Καμία δηλαδή στρατηγική δεν υστερεί έναντι των άλλων εφόσον επιλεχθεί. Λόγω της γραμμικότητας μεταξύ της συνάρτησης κέρδους $u_i(s)$ και της s_i και σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει:

$$\max_{s_i}[u_i(s_{-i}, s_i)] = \max_{\alpha}[u_i(s_{-i}, \pi_{i\alpha})] \tag{4}$$

Άρα η μικτή στρατηγική ενός οποιουδήποτε παίκτη σε ένα μικτό NE μπορεί να αντικατασταθεί με μία οποιαδήποτε γνήσια στρατηγική του με μη μηδενική πιθανότητα και να εξακολουθεί να έχει το ίδιο κέρδος, ο παίκτης αυτός, με δεδομένη τη μη διαφοροποίηση των υπόλοιπων παικτών. Άρα για να είναι το s NE πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$u_i(s) = \max_{\alpha}[u_i(s_{-i}, \pi_{i\alpha})] \tag{5}$$

Στο εξής με NE θα εννοούμε ένα Nash σημείο ισορροπίας είτε γνήσιο είτε μικτό. Οπουδήποτε χρειαστεί να γίνει διαχωρισμός θα αναφέρονται ως γνήσιο NE και ως μικτό NE.

2.5 Ύπαρξη Nash σημείου ισορροπίας

Η πρώτη απόδειξη της ύπαρξης ενός NE σε ένα οποιοδήποτε παίγνιο, που δημοσιεύθηκε από τον John Nash [28] βασιζόταν στο γενικευμένο θεώρημα του *οριστικά αμετάβλητου σημείου* του Kakutani [18]. Αργότερα ο ίδιος δημοσίευσε την απόδειξη [29] βασισμένη στο θεώρημα του Brouwer [4]. Αυτήν πρόκειται να δείξουμε εδώ.

Θεώρημα 2.3 **J. Nash [29]** Κάθε πεπερασμένο παίγνιο έχει ένα τουλάχιστον Nash σημείο ισορροπίας (NE).

Απόδειξη: Έστω s ένα n-δίαστατο διάνυσμα από μικτές στρατηγικές, $u_i(s)$ το προσδιοριζόμενο κέρδος του παίκτη i και $u_{ia}(s) = u_i(s_{-i}, \pi_{ia})$ το κέρδος του παίκτη i αν διαφοροποιηθεί από τη μικτή στρατηγική του s_i στην α-οστή γνήσια στρατηγική του π_{ia} ενώ οι υπόλοιποι παραμείνουν στις μικτές στρατηγικές τους που είχαν επιλέξει στο s (αυτό είναι το s_{-i}). Ορίζουμε τώρα το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων του s ως εξής:

$$\varphi_{ia}(s) = \max(0, u_{ia}(s) - u_i(s)) \tag{6}$$

Είναι προφανές ότι μπορεί να είναι οποιαδήποτε η σχέση μεταξύ των $u_{ia}(s)$ και $u_i(s)$: $u_{ia}(s) > u_i(s)$ ή $u_{ia}(s) = u_i(s)$ ή $u_{ia}(s) < u_i(s)$. Η $\varphi_{ia}(s)$ δεν παίρνει αρνητικές τιμές μιας και όταν ισχύει $u_{ia}(s) < u_i(s)$ παίρνει την τιμή 0.
Για κάθε συνιστώσα s_i του s ορίζουμε την μετατροπή της σε s'_i ως εξής:

$$s'_i = \frac{s_i + \sum_a \varphi_{ia}(s)\pi_{ia}}{1 + \sum_a \varphi_{ia}(s)} \tag{7}$$

ορίζοντας ως s' το n-διάστατο διάνυσμα $(s'_1, s'_2, ..., s'_n)$.
Υπενθυμίζουμε ότι τα s_i, s'_i και $\sum_a \varphi_{ia}(s)\pi_{ia}$ είναι n-διάστατα διανύσματα ενώ ο παρονομαστής είναι πραγματικός αριθμός. Άρα η μετατροπή γίνεται πάνω στην πιθανοτική κατανομή του κάθε παίκτη.

Αρκεί να δείξουμε ότι τα οριστικά αμετάβλητα σημεία της συναρτησιακής απεικόνισης $T : s \to s'$ είναι τα ζητούμενα NE. Ως οριστικά αμετάβλητα σημεία εννοούμε εκείνα που μέσω της συναρτησιακής απεικόνισης T δείχνουν στον εαυτό τους $(s = s')$.

Αρχικά ας θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε n-άδα s. Στο διάνυσμα s ο i-οστός παίκτης, με τη στρατηγική του s_i, θα χρησιμοποιεί κάποιες από τις γνήσιες στρατηγικές του. Επειδή το s είναι τυχαίο γενικά περιμένουμε να υπάρχουν κάποιες στρατηγικές π_{ia} λιγότερο επικερδής, $u_{ia}(s) \leq u_i(s)$ και κάποιες περισσότερο επικερδής, $u_{ia}(s) > u_i(s)$. Για τις μεν πρώτες ισχύει $\varphi_{ia}(s) = 0$ ενώ για τις δε δεύτερες $\varphi_{ia}(s) > 0$.

Αν θεωρήσουμε ότι η n-άδα s είναι οριστικά αμετάβλητο σημείο ως προς τη συναρτησιακή απεικόνιση T ο λόγος της π_{ia} που χρησιμοποιείται στη s_i δεν πρέπει να ελαττώνεται από τη T, αλλά πρέπει να παραμένει σταθερός (από τον ορισμό του οριστικά αμετάβλητου σημείου). Από την (7) φαίνεται ότι για όλα τα β πρέπει να ισχύει $\varphi_{i\beta}(s) = 0$ για να παραμείνει ο παρονομαστής του s'_i ίσος με τη μονάδα.

Άρα, αν η n-άδα s είναι οριστικά αμετάβλητο σημείο ως προς τη συναρτησιακή απεικόνιση T, τότε για οποιαδήποτε i και β ισχύει $\varphi_{i\beta}(s) = 0$. Ή διαφορετικά δεν υπάρχει καμία στρατηγική $\pi_{i\beta}$ που να είναι περισσότερο επικερδής, δηλαδή κανένας παίκτης δεν μπορεί να αυξήσει το κέρδος του μετακινούμενος στη στρατηγική $\pi_{i\beta}$. Επομένως σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ένα μικτό ΝΕ.

Αντίστροφα, αν το s είναι ένα μικτό ΝΕ τότε προφανώς όλα τα φ μηδενίζονται κάνοντας το s οριστικά αμετάβλητο σημείο ως προς τη συναρτησιακή απεικόνιση T.

Αφού ο χώρος των n-άδων είναι *cell*, από το θεώρημα του οριστικά αμετάβλητου σημείου του Brouwer προκύπτει ότι η συναρτησιακή απεικόνιση T πρέπει να έχει ένα οριστικά αμετάβλητο σημείο s, το οποίο είναι το ζητούμενο ΝΕ.

□

2.6 Παράδοξα

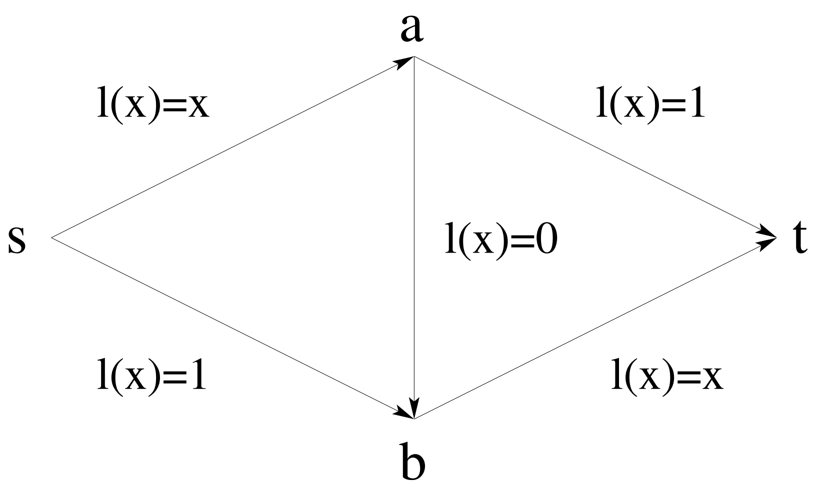
Η Nash ισορροπία είναι η επικρατέστερη μέθοδος επίλυσης ενός παιγνίου. Ωστόσο κάποιες φορές δεν είναι η καλύτερη. Εμφανίζονται δηλαδή παίγνια όπου κάποιο διάνυσμα στρατηγικών είναι ΝΕ ενώ υπάρχει κάποιο άλλο διάνυσμα στρατηγικών το οποίο δεν είναι ΝΕ παρόλο που βελτιώνει το κέρδος όλων των παικτών σε σχέση με το υπάρχον ΝΕ. Ο ορισμός του ΝΕ αφήνει τα περιθώρια εμφάνισης αυτών των παράδοξων φαινομένων. Εμείς εδώ θα παρουσιάσουμε δύο (ίσως τα πιο δημοφιλή) από αυτά.

2.6.1 Το Παράδοξο του Braess

Το παράδοξο του Braess παρουσιάζεται σε ένα δίκτυο 5 ακμών και τεσσάρων κόμβων s, t, a και b όπως αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Στη δημοσίευση [14] αναφέρονται περισσότερα για την πολυπλοκότητα του προβλήματος αυτού καθώς και για πιθανούς τρόπους εντοπισμού του παράδοξου του Braess.

Το θεωρούμε ως ένα παίγνιο άπειρων παικτών, οι οποίοι αποτελούν την απειροστή ροή που πρέπει να μετακινηθεί από τον κόμβο s στον κόμβο t. Το παράδοξο είναι ότι το κόστος της αναρχίας είναι μεγαλύτερο στο σχήμα αυτό παρά όταν δεν υπάρχει η ακμή (a,b), η οποία, πρέπει να τονίσουμε, έχει μηδενική καθυστέρηση ($l(x) = 0$). Κι αυτό συμβαίνει γιατί η καθυστέρηση στο ΝΕ με την ύπαρξη της ακμής αυτής είναι 2 (μονοπάτι $s \to a \to b \to t$) ενώ χωρίς αυτή είναι 1,5 μιας και μισοί επιλέγουν την πάνω διαδρομή και μισοί την κάτω.



Σχήμα 1: Το Παράδοξο του Braess

Θα ασχοληθούμε με τα παίγνια άπειρων παικτών στο 5ο κεφάλαιο. Επιλύονται και αυτά με NE επεκτείνοντας τον αρχικό ορισμό.

3 Παίγνια Συμφόρησης

Είναι τα παίγνια στα οποία επικεντρώνεται η εργασία αυτή. Πρώτα όμως θα κάνουμε μία αναφορά στα παίγνια δυναμικού και στην ιδιότητα της πεπερασμένης βελτίωσης και ύστερα θα ορίσουμε τα παίγνια συμφόρησης αυστηρά.

3.1 Παίγνια δυναμικού

Θεωρούμε ένα παίγνιο $\Gamma(u_1, u_2, ..., u_n)$ (για συντομία Γ) σε στρατηγική μορφή με πεπερασμένο αριθμό παικτών. Το σύνολο των παικτών είναι $N = \{1, 2, ..., n\}$, το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη i είναι S_i και η συνάρτηση κέρδους του, $u_i : S \to R$, όπου $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ είναι το σύνολο των στρατηγικών συνδυασμών και R το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Επίσης $S_{-i} = S_1 \times ...S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n$.
Η συνάρτηση $\phi : S \to R$ είναι μια ακριβής συνάρτηση δυναμικού (ή για συντομία συνάρτηση δυναμικού) για το παίγνιο Γ αν για κάθε $i \in N$ και για κάθε $s_{-i} \in S_{-i}$

$$u_i(s_{-i}, x) - u_i(s_{-i}, z) = \phi(s_{-i}, x) - \phi(s_{-i}, z)$$
$$\text{για κάθε } x, z \in S_i \ .$$

Το παίγνιο Γ όπως και κάθε παίγνιο που επιδέχεται συνάρτηση δυναμικού ονομάζεται ακριβές παίγνιο δυναμικού ή πιο απλά παίγνιο δυναμικού. Το Δίλλημα του Φυλακισμένου G όπως περιγράφεται είναι ένα παίγνιο δυναμικού. Η συνάρτηση δυναμικού είναι η ϕ' και εύκολα επαληθεύεται.

$$G = \begin{pmatrix} (1,1) & (9,0) \\ (0,9) & (6,6) \end{pmatrix}, \quad \phi' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι Monderer και Shapley [40] απέδειξαν ότι αν ϕ_1 και ϕ_2 είναι δύο συναρτήσεις δυναμικού για το παίγνιο Γ τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια που για κάθε $s \in S$ να ισχύει $\phi_1(s) - \phi_2(s) = c$.

3.2 Η ιδιότητα της πεπερασμένης βελτίωσης

Η *ιδιότητα της πεπερασμένης βελτίωσης* (FIP) ορίστηκε από τους Monderer και Shapley το 1991 σε μια εργασία τους που δημοσιεύτηκε τελικά το 1996 [24] και υποδηλώνει το εξής: Οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία από διανύσματα στρατηγικών στην οποία κάθε διάνυσμα διαφέρει από το προηγούμενό του σε μόνο μία συνιστώσα (μια τέτοια ακολουθία καλείται μονοπάτι) και ο μοναδικός διαφοροποιός παίκτης του κάθε βήματος αυξάνει αυστηρά το κέρδος του, περιγράφει την αναφερόμενη ιδιότητα. Πιο αυστηρά ορίζουμε ως μονοπάτι στο S την ακολουθία $\gamma = (y^0, y^1, y^2, ...)$ τέτοια που για κάθε $k \geq 1$ υπάρχει μοναδικός παίκτης, ας είναι ο Παίκτης i, τέτοιος που για κάποιο $x \neq y_i^{k-1}$ στο S_i, να ισχύει $y^k = (y_{-i}^{k-1}, x)$. Το y^0 ονομάζεται *αρχικό σημείο* του γ, και αν το γ είναι πεπερασμένο, τότε το τελευταίο του στοιχείο ονομάζεται *τερματικό σημείο* του γ. Η ακολουθία $\gamma = (y^0, y^1, y^2, ...)$ καλείται *μονοπάτι βελτίωσης* αναφορικά με το παίγνιο Γ αν για όλα τα $k \geq 1$, $u_i(y^k) > u_i(y^{k-1})$, όπου i είναι ο μοναδικός διαφοροποιός παίκτης του k βήματος. Ως εκ τούτου, ένα μονοπάτι βελτίωσης είναι το μονοπάτι που παράγεται από *κοντόφθαλμους* παίκτες. Το παίγνιο Γ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης βελτίωσης αν κάθε μονοπάτι βελτίωσης είναι πεπερασμένο.

Δίνεται ως παράδειγμα ένα απλό παίγνιο G δύο παικτών με δύο στρατηγικές που έχει την αναφερόμενη ιδιότητα. Ο Παίκτης 1 διαλέγει γραμμές (στρατηγικές α,β) και ο Παίκτης 2 στήλες (στρατηγικές γ,δ).

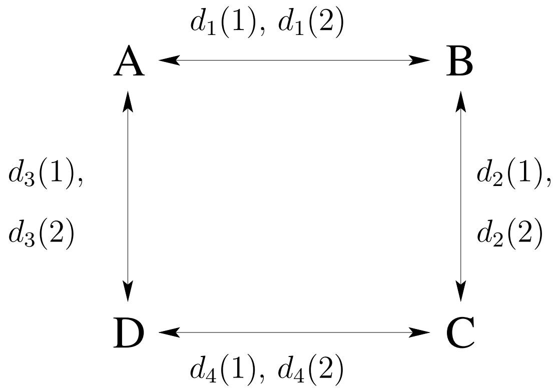
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \{\gamma\} & \{\delta\} \end{array} \\ G = & \left(\begin{array}{cc} (1,0) & (2,0) \\ (2,0) & (0,1) \end{array} \right) \begin{array}{c} \{\alpha\} \\ \{\beta\} \end{array} \end{array}$$

Το (α,γ), (β,γ), (β,δ), (α,δ) είναι ένα πεπερασμένο μονοπάτι βελτίωσης. Κάθε φορά ένας από τους δύο παίκτες διαφοροποιείται (αλλάζει στρατηγική), και εύκολα διαπιστώνεται ότι αυξάνει αυστηρά το κέρδος του. Το αρχικό σημείο y^0 =(α,γ) είναι τυχαίο. Μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε από το σύνολο των στρατηγικών συνδυασμών. Τερματικό σημείο είναι το (α,δ) αφού κανένας παίκτης δεν μπορεί να αυξήσει αυστηρά το κέρδος του διαφοροποιώντας τη στρατηγική του.

3.3 Ορισμός

Τα παίγνια συμφόρησης ορίστηκαν από τον Rosenthal το 1973 [38]. Κατά κύριο λόγο έχουν εφαρμογή στα δίκτυα. Διαισθητικά, κάθε παίγνιο όπου μια συλλογή από ομοιογενείς παίκτες διαλέγουν από ένα σύνολο εναλλακτικών επιλογών και όπου το κέρδος κάθε παίκτη εξαρτάται από τον αριθμό των παικτών που διαλέγουν την ίδια με αυτόν επιλογή, είναι παίγνιο συμφόρησης. Θα αναφέρουμε ένα επεξηγηματικό παράδειγμα.

Στο παρακάτω μοντέλο συμφόρησης ο οδηγός a πρέπει να πάει από το σημείο A στο C και ο b από το B στο D. Συμβολίζουμε τα κομμάτια του δρόμου AB, BC, AD και DC με τους αριθμούς 1, 2, 3 και 4 αντίστοιχα. Με $d_e(1)$ ορίζουμε το κόστος ή καλύτερα την καθυστέρηση του μοναδικού οδηγού που χρησιμοποιεί το e κομμάτι του δρόμου, όπου $e \in \{1, 2, 3, 4\}$. Το $d_e(2)$



Σχήμα 2: Παράδειγμα Παίγνιου Συμφόρησης

δείχνει το αντίστοιχο μέγεθος για κάθε οδηγό, στην περίπτωση που δύο οδηγοί χρησιμοποιούν το e. Το κέρδος στο κάθε κομμάτι δρόμου είναι $q_e = -d_e$. Επομένως, οι οδηγοί έχουν συμπεριληφθεί σε ένα παίγνιο (πιο συγκεκριμένα σε παίγνιο συμφόρησης) CG, του οποίου η στρατηγική μορφή δίνεται παρακάτω. Οι γραμμές αντιστοιχούν στις στρατηγικές του οδηγού (παίκτη πλέον) α και οι στήλες του β.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \qquad\{1,3\}\qquad\qquad & \qquad\qquad\{2,4\}\qquad \end{array} \\ CG = & \left(\begin{array}{cc} (q_1(2)+q_2(1), q_1(2)+q_3(1)) & (q_2(2)+q_1(1), q_2(2)+q_4(1)) \\ (q_3(2)+q_4(1), q_3(2)+q_1(1)) & (q_4(2)+q_3(1), q_4(2)+q_2(1)) \end{array}\right) \begin{array}{c} \{1,2\} \\ \{3,4\} \end{array} \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι το παίγνιο που παρουσιάσαμε επιδέχεται συνάρτηση δυναμικού:

$$\phi = \left(\begin{array}{cc} q_1(1)+q_1(2)+q_2(1)+q_3(1) & q_2(1)+q_2(2)+q_1(1)+q_4(1) \\ q_3(1)+q_3(2)+q_4(1)+q_1(1) & q_4(1)+q_4(2)+q_3(1)+q_2(1) \end{array}\right)$$

Αν από το στρατηγικό συνδυασμό ({3,4},{2,4}) ο Παίκτης a άλλαζε στρατηγική θα είχαμε το συνδυασμό ({1,2},{2,4}) και μεταβολή στο κέρδος του

$$u_I(\{1,2\},\{2,4\}) - u_I(\{3,4\},\{2,4\}) = (q_2(2)+q_1(1)) - (q_4(2)+q_3(1))$$

ενώ εύκολα προκύπτει το παρακάτω

$$\phi(\{1,2\},\{2,4\}) - \phi(\{3,4\},\{2,4\}) = (q_2(2)+q_1(1)) - (q_4(2)+q_3(1))$$

και επομένως ισχύει η ζητούμενη ισότητα. Το ίδιο ισχύει για κάθε άλλη περίπτωση στρατηγικού συνδυασμού και για αυτό η ϕ είναι συνάρτηση δυναμικού στο παράδειγμα αυτό.

Θα αναφερθούμε στα παίγνια συμφόρησης πιο αυστηρά. Θεωρούμε παίγνια στα οποία οι συναρτήσεις κέρδους u_i υπολογίζονται πλήρως από αποτελεσματικούς αλγορίθμους που βασίζονται στην είσοδο και στην κατάσταση. Πιο συγκεκριμένα, σε ένα παίγνιο συμφόρησης η είσοδος $(N, E, (S_i)_{i \in N}, (d_e)_{e \in E})$ είναι η συλλογή από 1)το σύνολο N των n παικτών, 2)ένα πεπερασμένο σύνολο E από *συνιστώσες στρατηγικών* και 3)τα σύνολα δράσης (στρατηγικές) S_i καθώς επίσης και 4) τη συνάρτηση καθυστέρησης d που απεικονίζει το $E \times \{1, ..., n\}$ στους ακέραιους. Η $d_e(j)$ είναι μη φθίνουσα στο j. Η κατάσταση (διάνυσμα στρατηγικών) είναι το $s = (s_1, ..., s_n)$. Ορίζουμε με $f_s(e) = |\{i : e \in s_i\}|$ το πλήθος των παικτών που χρησιμοποιούν τη συνιστώσα στρατηγικής e σύμφωνα με το διάνυσμα στρατηγικών s. Τα κέρδη των παικτών υπολογίζονται ως ακολούθως: $c_i(s) = -u_i(s) = \sum_{e \in S_i} d_e(f_s(e))$. Με άλλα λόγια, κάθε παίκτης i διαλέγει ένα σύνολο συνιστωσών στρατηγικών, από εκείνα που είναι διαθέσιμα σε αυτόν, και σχηματίζει μια στρατηγική s_i. Το κόστος που χρεώνεται ο παίκτης αυτός (το αρνητικό του κέρδους του) υπολογίζεται προσθέτοντας την καθυστέρηση της κάθε συνιστώσας που χρησιμοποιεί, λαμβάνοντας υπόψη ότι η καθυστέρηση της συνιστώσας e εξαρτάται από τη συμφόρηση $f_s(e)$.

Σε ένα δικτυακό παίγνιο συμφόρησης οι οικογένειες των συνόλων S_i παρουσιάζονται επακριβώς ως μονοπάτια σε ένα δίκτυο. Δοσμένου ενός δικτύου (V, E), δύο κόμβων $a_i, b_i \in V$ για κάθε παίκτη i και, όπως προηγουμένως, μιας συνάρτησης καθυστέρησης, με τις ακμές να παίζουν το ρόλο των συνιστωσών στρατηγικών, το υποσύνολο του E που είναι διαθέσιμο ως ενέργειες (στρατηγικές) στον παίκτη i είναι το σύνολο όλων των μονοπατιών από το a_i στο b_i. Θα θεωρούμε ότι το δίκτυο είναι κατευθυνόμενο.

Θεώρημα 3.1 (Rosenthal, [38]) Κάθε παίγνιο συμφόρησης έχει γνήσιο ΝΕ.

Απόδειξη: Η συνάρτηση δυναμικού που παράγει το αποτέλεσμα είναι η $\phi(s) = \sum_e \sum_{j=1}^{f_s(e)} d_e(j)$. Για την απόδειξη αντιστρέφουμε τα αθροίσματα: $\phi(s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in s_i} d_e(f_s^{\leq i}(e))$, όπου το $f_s^{\leq i}(e)$ σημαίνει τον συνολικό αριθμό των παικτών $j \leq i$ που χρησιμοποιούν την e. Υποθέτουμε ότι το (s, s') είναι μια βελτιωτική διαφοροποίηση και επιπλέον (χωρίς βλάβη της γενικότητας μιας και οι παίκτες συντάχθηκαν αυθαίρετα) ότι ο n παίκτης είναι αυτός που διαφοροποιήθηκε. Τότε $\phi(s') - \phi(s) =$

$$= \sum_{e \in s_n} d_e(f_{s'}^{\leq n}(e)) - \sum_{e \in s_n} d_e(f_s^{\leq n}(e)) = \sum_{e \in s_n} d_e(f_{s'}(e)) - \sum_{e \in s_n} d_e(f_s(e)) =$$

$= c_n(s') - c_n(s)$ που είναι το ζητούμενο. Άρα η ϕ μειώνεται κατά μήκος όλων των ακμών του γράφου εξέλιξης της Nash δυναμικής και ως εκ τούτου η Nash δυναμική συγκλίνει.

□

Επισημαίνουμε ότι η συνάρτηση $\phi(s)$ δεν μπορεί να μεταφραστεί, έστω διαισθητικά, ώς «κοινωνική ευημερία» ή κάτι σχετικό. Απλά δηλώνει επακριβώς την εξέλιξη, όπως θα έπρεπε να κάνει ως συνάρτηση δυναμικού.

Θεώρημα 3.2 (Monderer & Shapley, [24]) Κάθε παίγνιο συμφόρησης είναι και παίγνιο δυναμικού.

Απόδειξη: Συνάγεται από το θεώρημα 3.1.

□

Στο κεφάλαιο της θεωρίας παιγνίων χωρίς συνεργασία αναφερθήκαμε στη θεωρία του Nash, ο οποίος απέδειξε ότι κάθε παίγνιο έχει μικτό Nash σημείο ισορροπίας και στο ότι υπάρχουν παίγνια χωρίς γνήσιο ΝΕ. Τα παίγνια συμφόρησης έχουν αναγνωριστεί ως μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα κλάση παιγνίων, λόγω των παρακάτω ιδιοτήτων τους και κυρίως της πρώτης από αυτές: 1) Τα παίγνα συμφόρησης έχουν πάντα γνήσιο ΝΕ. 2) Στα παίγνια συμφόρησης δικτύων συμμετέχουν πολλοί παίκτες. 3) Γενικά ο αριθμός των στρατηγικών ενός παίκτη είναι εκθετικός αφού το πλήθος των μονοπατιών στο δίκτυο δύναται να είναι εκθετικό. 4) Η καθυστέρηση της κάθε ακμής είναι μια σαφώς ορισμένη συνάρτηση από το σύνολο των στρατηγικών στους πραγματικούς (ή ακέραιους). 5) Για οποιοδήποτε στρατηγικό συνδυασμό υπάρχει αποτελεσματικός αλγόριθμος που να υπολογίζει το κέρδος του κάθε παίκτη.

3.4 Πολυπλοκότητα

Τα παίγνια συμφόρησης μπορούν να χωριστούν σε διάφορες κατηγορίες ανάλογα με τις χαρακτηριστικές ιδιότητές τους. Στη γενική τους μορφή ονομάζονται Γενικά Παίγνια συμφόρησης, ενώ στη συμμετρική τους (όλοι οι παίκτες έχουν το ίδιο σύνολο στρατηγικών) Συμμετρικά Παίγνια Συμφόρησης. Ο ίδιος διαχωρισμός μπορεί να γίνει και στα δικτυακά παίγνια συμφόρησης όπου έχουμε τα Ασυμμετρικά και τα Συμμετρικά Δικτυακά Παίγνια Συμφόρησης. Μέχρι τώρα δεχθήκαμε ότι ο κάθε παίκτης έχει μοναδιαία ροή. Οι παίκτες μπορούν να έχουν διαφορετικές ποσότητες ροής (βάρη) οπότε προκύπτουν τα *Παίγνια Συμφόρησης με Βάρη*. Ένα από αυτά θα αναλύσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Η ανάθεση εργασιών είναι ένα παίγνιο συμφόρησης με βάρη. Επίσης έχει μελετηθεί η περίπτωση όπου οι καθυστερήσεις είναι υποκειμενικές ή αλλιώς καθορισμένες διαφορετικά ανά παίκτη οπότε έχουμε τα *Υποκειμενικά Παίγνια Συμφόρησης*. Σε αυτά δεν υπάρχει μία συνάρτηση κόστους ανά συνιστώσα στρατηγικής (ακμή για παράδειγμα). Έτσι γίνεται προσπάθεια να μελετηθεί η πραγματικότητα πιο ρεαλιστικά. Τελειώνουμε με την αναφορά των *Παιγνίων Συμφόρησης με Εγωιστικά Δρομολογούμενη Ροή* όπου ο αριθμός των παικτών τείνει στο άπειρο. Το πέμπτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο σε αυτή την κατηγορία παιγνίων.

Ένα δικτυακό παίγνιο συμφόρησης είναι συμμετρικό αν όλοι οι παίκτες έχουν τους ίδιους κόμβους a και b ως αφετηρία και προορισμό και επομένως έχουν όλοι τις ίδιες στρατηγικές (επιλεγόμενα μονοπάτια).

Θεώρημα 3.3 Υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος για την εύρεση γνήσιου NE σε ένα Συμμετρικό Δικτυακό Παίγνιο Συμφόρησης.

Απόδειξη: Ο αλγόριθμος υπολογίζει το ολικό βέλτιστο της συνάρτησης δυναμικού $\phi(s)$. Επειδή το ολικό βέλτιστο είναι και τοπικό βέλτιστο, η τελική κατάσταση $\hat{s}$ θα είναι NE. (Το NE μπορεί να θεωρηθεί τοπικό ελάχιστο, όπου γειτονιά είναι όλα τα σημεία όπου μπορούμε να μεταβούμε από το τρέχων σημείο, με τη διαφοροποίηση ενός παίκτη, όπως αυτήν σαφώς την ορίσαμε.) Πιο συγκεκριμένα ο αλγόριθμος είναι μια αναγωγή στο πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους. Δοσμένου ενός δικτύου $N = (V, E, a, b)$ και των συναρτήσεων καθυστέρησης d_e, αντικαθιστούμε στο N κάθε ακμή e με n παράλληλες ακμές μεταξύ των ίδιων κόμβων, κάθε μία με χωρητικότητα 1 και με κόστος $d_e(1)$,...,$d_e(n)$ αντίστοιχα. Εύκολα διακρίνουμε ότι οποιοδήποτε ακέραια ροή ελάχιστου κόστους στο νέο δίκτυο είναι μια κατάσταση του παιγνίου όπου ελαχιστοποιείται η συνάρτηση $\phi(s)$.

□

Η κλάση PLS

Η τοπική αναζήτηση ασχολείται με την εύρεση τοπικά βέλτιστων λύσεων σε NP-δύσκολα προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Ένας αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης προσπαθεί να βρει βελτιωμένες λύσεις, ως προς την τρέχουσα λύση, δημιουργώντας παραλλαγές της, όπου ο τρόπος επιλογής αυτών των παραλλαγών είναι σαφώς ορισμένος. Η κάθε τέτοια λύση-παραλλαγή ονομάζεται γείτονας και το σύνολό τους γειτονιά της τρέχουσας λύσης. Η τρέχουσα λύση είναι τοπικά βέλτιστη αν καμία γειτονική λύση δεν είναι καλύτερή της. Η κλάση PLS ορίστηκε ουσιαστικά για να εκφράσει την πολυπλοκότητα των προβλημάτων τοπικής αναζήτησης, των οποίων η τοπική βελτιστοποίηση αναγνωρίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Ένα *πρόβλημα τοπικής αναζήτησης πολυωνυμικού χρόνου* (PLS) L μπορεί να είναι είτε πρόβλημα μεγιστοποίησης είτε ελαχιστοποίησης και ορίζεται ως εξής: Όπως όλα τα υπολογιστικά προβλήματα το L έχει ένα σύνολο $I = \Sigma^*$ από *καταστάσεις* όπου το Σ^* μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πολυωνυμικώς αναγνωρίσημο υποσύνολο του $\{0,1\}^*$. Για κάθε κατάσταση $x \in I$ (στο πρόβλημα TSP για παράδειγμα, η κωδικοποίηση του πίνακα αποστάσεων), έχουμε ένα πεπερασμένο σύνολο εφικτών λύσεων $F_x \subseteq \Sigma^{p(|x|)}$ (διαδρομές στο TSP), για τις οποίες δεχθήκαμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι έχουν όλες το ίδιο πολυωνυμικό, ως προς το πλήθος των καταστάσεων, μήκος $p(|x|)$. Για κάθε λύση $s \in F_x$ έχουμε μια μη αρνητική συνάρτηση κόστους $c(x,s)$ της s και επίσης καλούμε ως γειτονιά της s ένα υποσύνολο $N_x(s) \subseteq F_x$. Οι υπόλοιποι περιορισμοί εμπεριέχονται στο γεγονός ότι οι παρακάτω τρεις, πολυωνυμικού χρόνου, αλγόριθμοι A_L, B_L και C_L πρέπει να υφίστανται. Ο αλγόριθμος A_L, δοσμένης της $x \in I$, παράγει μια συγκεκριμένη αποδεκτή λύση $A_x \in F_x$. Ο αλγόριθμος B_L, δοσμένων μιας κατάστασης x και μιας συμβολοσειράς s, καθορίζει αν $s \in F_x$ και αν ναι υπολογίζει το κόστος της λύσης $c(x,s)$. Ο αλγόριθμος C_L, δοσμένων μιας κατάστασης x και μιας λύσης $s \in F_x$, έχει δύο πιθανές εξόδους ανάλογα με τη s. Αν υπάρχει οποιαδήποτε λύση $s' \in N_x(s)$ με καλύτερο κόστος από εκείνο της s (στην περίπτωση προβλήματος ελαχιστοποίησης, $c(x,s') < c(x,s)$), ο C παράγει τη λύση αυτή. Διαφορετικά αναφέρει ότι δεν υπάρχει τέτοια λύση και επομένως η s είναι τοπικά βέλτιστη.

Από τον ορισμό των L προκύπτει ο επόμενος Πρότυπος αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης:

1. Δοσμένης της x, χρησιμοποίησε τον A_L για να παράγεις μια λύση εκκίνησης $s = A_x$.
2. Επανέλαβε μέχρι η s να γίνει τοπικά βέλτιστη:
   Εφάρμοσε τον αλγόριθμο C_L στα x και s.
   Αν ο C_L βρει γείτονα s' με καλύτερο κόστος από τη s,
   θέσε $s = s'$.

Λόγω του ότι οι λύσεις είναι πεπερασμένες στον αριθμό και σε κάθε βήμα βελτιώνεται το κόστος της λύσης, δηλαδή πορεύεται πάντα προς τα μία κατεύθυνση (είτε συνεχώς μειώνεται, είτε συνεχώς αυξάνεται ανάλογα με τη βελτιστοποίηση που θέλουμε να πετύχουμε) ο Πρότυπος αλγόριθμος θα τερματίσει. Επομένως υπάρχει πάντα τουλάχιστον ένα τοπικό βέλτιστο για κάθε PLS πρόβλημα L. Βέβαια δεν έχουμε καμία ένδειξη για το αν αυτό (ο τερματισμός) θα επιτευχθεί «γρήγορα». Πράγματι υπάρχουν παραδείγματα, όπως το TSP με γειτονιά 2-ανταλλαγών, όπου ο Πρότυπος αλγόριθμος χρειάζεται εκθετικό χρόνο. Άρα μπορούμε να πούμε ότι η εύρεση τοπικά βέλτιστης λύσης είναι ενδεχομένως ευκολότερη από την εύρεση ολικά βέλτιστης. Στο [17] υπάρχουν περισσότερα για την κατηγοριοποίηση της κλάσης PLS.

Η απόδειξη του Rosenthal [38] παντρεύει τα γνήσια NE στα παίγνια συμφόρησης με την κλάση PLS μιας και η εύρεσή τους είναι ισοδύναμη με την εύρεση τοπικού βέλτιστου στη συνάρτηση δυναμικού ϕ. Έτσι έχουμε ότι οι εφικτές λύσεις είναι τα διανύσματα στρατηγικών και οι γειτονικές λύσεις, τα διανύσματα στρατηγικών που δημιουργούνται από τη διαφοροποίηση ενός μόνο παίκτη από τον τρέχοντα. Όπως προείπαμε οι βελτιώσεις που κάνει ο Πρότυπος αλγόριθμος στη ϕ μπορεί να είναι πολύ μικρές και επομένως εκθετικά πολλές. Άρα, παρόλο που ξέρουμε ότι υπάρχει γνήσιο NE στα παίγνια συμφόρησης, δεν έχουμε βρει και τον τρόπο να τα βρίσκουμε σε πολυωνυμικό χρόνο.

Θεώρημα 3.4 ([9]) Είναι PLS-πλήρες το να βρεθεί ένα γνήσιο NE στα παίγνια συμφόρησης των παρακάτω κατηγοριών:

(1) Γενικά Παίγνια Συμφόρησης.

(2) Συμμετρικά Παίγνια Συμφόρησης.

(3) Ασυμμετρικά Δικτυακά Παίγνια Συμφόρησης.

Σκαρίφημα απόδειξης: Ξεκινάμε με την απλή αναγωγή για την (1) επειδή αποτελεί τον σκελετό για την πολύ δυσκολότερη απόδειξη της (3). Κάνουμε αναγωγή από το πρόβλημα $POSNAE3FLIP$. Έχει δειχθεί ότι το $POSNAE3FLIP$ είναι PLS-πλήρες, στο [44], με μία μεγάλη και σύνθετη απόδειξη όπου γίνεται αναγωγή του προβλήματος $FLIP$ (το οποίο είναι PLS-πλήρες από το [17]) σε αυτό και δεν θα αναφερθούμε περισσότερο στην απόδειξη αυτή.
Ορισμός POSNAE3FLIP: Ένα στιγμιότυπο του weighted POSitive Not All Equal 3SATisfiability, ή POSNAE3FLIP για συντομία, αποτελείται από *όρους* (clauses) με το πολύ 3 θετικά *literals* της μορφής $NAE(x_1, x_2)$ ή $NAE(x_1, x_2, x_3)$ όπου κάθε x_i είναι *literal* ή σταθερά (0 ή 1). Οι όροι αυτοί ικανοποιούνται όταν δεν είναι όλα τα στοιχεία τους ίσα. Για παράδειγμα δεν ικανοποιούνται σε δύο περιπτώσεις, όταν είναι όλα ίσα με 0 και όταν είναι όλα ίσα με 1. Ο τρόπος μέτρησης (των βαρών) και ο ορισμός της γειτονιάς είναι ίδια με εκείνα του SAT, δηλαδή αθροίζουμε τα βάρη μόνο των όρων που ικανοποιούνται και αλλάζουμε ένα μόνο *literal* (για παράδειγμα από 0 σε 1 ή το αντίθετο) για να πάμε σε ένα γειτονικό σημείο. Η αναζήτηση μιας αποτίμησης αλήθειας στο POSNAE3FLIP όπου να μην βελτιώνεται το συνολικό βάρος, ύστερα από την μεταπήδηση σε ένα γειτονικό σημείο, ορίζει το πρόβλημα POSNAE3FLIP .

Η απόδειξη του (1) έχει ως εξής: δοσμένου ενός στιγμιότυπου του POSNAE3FLIP , κατασκευάζουμε ένα παίγνιο συμφόρησης με τον ακόλουθο τρόπο. Για κάθε 3-όρο c με βάρος w έχουμε δύο *πόρους* e_c και e'_c, με καθυστέρηση που είναι μηδέν, αν δεν έχουν διαλέξει και οι τρεις παίκτες τον ίδιο πόρο (είτε e_c είτε e'_c), και w διαφορετικά. Οι παίκτες είναι οι μεταβλητές. Ο παίκτης x έχει δύο στρατηγικές: η μία στρατηγική αντιστοιχεί το e_c (στη θέση του x)

σε όλους τους όρους όπου υπάρχει ο x και η άλλη το e'_c στους ίδιους όρους. Οι 2-όροι μετατρέπονται όμοια. Οποιοδήποτε NE στο παίγνιο συμφόρησης που δημιουργήσαμε είναι τοπικό ελάχιστο για το POSNAE3FLIP. Διαισθητικά οι παίκτες θα προτιμούν ακμές όπου δεν υπάρχουν τρεις παίκτες και αν τελικά δεν μπορούν να κάνουν αλλιώς θα διαλέξουν εκείνη με την μικρότερη καθυστέρηση. Έτσι η αθροιστική καθυστέρηση του συστήματος που αντιστοιχεί στο άθροισμα των βαρών θα είναι τοπικά ελάχιστη μιας και δεν θα μπορεί κανένας παίκτης να ελαττώσει την καθυστέρηση του με ένα «φλιπ» πηγαίνοντας σε ένα γειτονικό σημείο, από τον ορισμό του NE.

Η απόδειξη του (2) είναι αναγωγή της μη συμμετρικής περίπτωσης στην συμμετρική. Δοσμένου ενός παίγνιου συμφόρησης με σύνολα στρατηγικών $S_1, ..., S_n$, κατασκευάζουμε το επόμενο συμμετρικό παίγνιο. Έστω, $S'_i = \{s \cup \{e_i\} : s \in S_i\}$ για κάθε i, όπου τα e_i είναι διαφορετικοί καινούριοι πόροι με συνάρτηση καθυστέρησης $d_{e_i}(j) = 0$ αν $j = 1$ και $d_{e_i}(j) = M$, όπου M ένας πολύ μεγάλος αριθμός, αν $j \geq 2$. Θεωρούμε το συμμετρικό παίγνιο με τις ίδιες ακμές και κοινό σύνολο στρατηγικών $\bigcup_i S'_i$ για όλους τους παίκτες. Οποιοδήποτε NE του παιγνίου αυτού θα έχει έναν μόνο παίκτη να χρησιμοποιεί κάποια στρατηγική από το S'_i για κάθε i και επομένως (αφαιρώντας τις e_i) θα αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο NE του αρχικού παίγνιου. Τη μοναδικότητα του παίκτη που επιλέγει από μια στρατηγική από κάποιο σύνολο S'_i την εξασφαλίζουμε με την επιλογή της συνάρτησης καθυστέρησης στην ακμή e_i όπου η διέλευση δεύτερου παίκτη είναι ουσιαστικά απαγορευτική λόγω του μεγάλου αριθμού M.

Η απόδειξη του (3) θα παρουσιαστεί με ένα πολύ γενικό περίγραμμα, μια περιγραφή της πορείας της απόδειξης. Στο [9] δίνεται μια πολύ πιο εκτενής απόδειξη. Ωστόσο δεν είναι αρκετά λεπτομερής μιας και εκεί αυτό που δίνεται είναι το περίγραμμά της. Το POSNAE3FLIP δεν μας αρκεί εδώ και αυτό που κάνουμε είναι να δημιουργήσουμε ένα νέο πρόβλημα να το αναγάγουμε στο ζητούμενο προς απόδειξη πρόβλημα και τέλος να δείξουμε ότι είναι PLS-πλήρες. Δημιουργούμε το πρόβλημα XPNAE3FLIP (eXtended PosNAE3FLIP) προσθέτοντας επιπλέον όρους (λογικής) στο POSNAE3FLIP. Το μετατρέπουμε σε ένα γράφημα κάνοντας κόμβους τους όρους της λογικής, εισάγοντας κάποιους κανόνες γειτνίασης και προσθέτοντας κάποια κατάλληλα βάρη στις ακμές αυτές. Έτσι δημιουργείται το Witnessed XPNAE3FLIP πρόβλημα που προσπαθεί να βελτιστοποιήσει το ολικό βάρος του παραπάνω νέου γραφήματος. Αυτό είναι το πρόβλημα που αναγάγουμε σε ένα δικτυακό παίγνιο συμφόρησης και που δείχνουμε ότι είναι PLS-πλήρες.

□

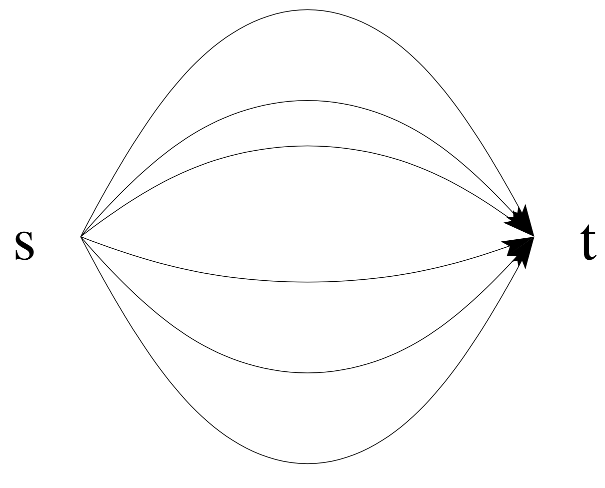
4 Ανάθεση Εργασιών

Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε ένα βασικό μοντέλο δρομολόγησης, το οποίο αρχικά εισήχθηκε από τους Κουτσουπιά και Παπαδημητρίου [20]. Ανήκει στην κατηγορία των Συμμετρικών Δικτυακών Παιγνίων Συμφόρησης με Βάρη. Εδώ το κόστος του κάθε παίκτη δεν εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των παικτών που χρησιμοποιούν τον ίδιο πόρο (μηχανή) αλλά και από τα βάρη των παικτών αυτών (κόστη εργασιών).

4.1 Το μοντέλο ανάθεσης εργασιών με γραμμικές συναρτήσεις κόστους

Θεωρούμε ένα πρόβλημα *χρονοπρογραμματισμού* με m ανεξάρτητες μηχανές με ταχύτητες $a_1, ..., a_m$ και n ανεξάρτητες εργασίες με βάρη $w_1, ..., w_n$. Αν όλες οι εργασίες έχουν *ισοδύναμα* βάρη τότε θα μιλάμε για *ισοδύναμες εργασίες* και αν όλες οι ταχύτητες είναι ισοδύναμες, τότε θα μιλάμε για *ισοδύναμες μηχανές*. Ο στόχος επίτευξης είναι να αναθέσουμε τις εργασίες στις μηχανές ελαχιστοποιώντας το μέγιστο φόρτο στις μηχανές του συστήματος.

Ισοδύναμα μπορούμε να το δούμε ως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης κόστους ενός δικτύου της παρακάτω μορφής, όπου οι n χρήστες θέλουν να μετακινηθούν από την πηγή s στην κατάληξη t και πρέπει να διαλέξουν μία από τις m παράλληλες ακμές του.



Σχήμα 3: Το ισοδύναμο δίκτυο της ανάθεσης εργασιών.

Θεωρούμε ότι κάθε εργασία μπορεί να ανατεθεί σε μία και μόνο μηχανή αλλά η απόφαση για το ποια μηχανή θα αναλάβει μια εργασία καθορίζεται από την στρατηγική του κάθε χρήστη. Αν μια εργασία i ανατεθεί ντετερμινιστικά σε μία μηχανή στο σύνολο $[m]$ τότε λέμε ότι η i ακολουθεί γνήσια στρατηγική. Διαφορετικά, αν ανατεθεί με κάποια πιθανοτική κατανομή στο $[m]$, τότε λέμε ότι ακολουθεί μικτή στρατηγική.

Έστω $(s_1, ..., s_n) \in [m]^n$ η ακολουθία των γνήσιων στρατηγικών, μία για κάθε εργασία, όπου *το κόστος* της εργασίας i είναι

$$\frac{1}{a_{s_i}} \cdot \sum_{s_k = s_i} w_k \quad ,$$

το οποίο αντιπροσωπεύει το χρόνο που χρειάζεται η μηχανή s_i, επιλεγμένη από την εργασία i, για να διεκπεραιώσει όλες τις εργασίες που έχουν ανατεθεί σε αυτή τη μηχανή.

Όμοια, για την ακολουθία από γνήσιες στρατηγικές $(s_1, ..., s_n) \in [m]^n$, *ο φόρτος* της μηχανής j ορίζεται ως εξής

$$\frac{1}{a_j} \cdot \sum_{s_k = j} w_k \quad .$$

Δοσμένων n εργασιών μήκους $w_1, ..., w_n$ και m μηχανών ταχυτήτων $a_1, ..., a_m$, δηλώνουμε ως *opt το κοινωνικό βέλτιστο*, δηλαδή το ελάχιστο κόστος μιας γνήσιας στρατηγικής:

$$opt = \min_{(s_i, \ldots, s_n) \in [m]^n} \max_{j \in [m]} \quad \frac{1}{a_j} \cdot \sum_{i : s_i = j} w_i \quad . \tag{8}$$

Για παράδειγμα, αν όλες οι μηχανές έχουν την ίδια μοναδιαία ταχύτητα ($a_j = 1$ για κάθε $j \in [m]$) και αντίστοιχα για όλα τα βάρη ($w_i = 1$ για κάθε $i \in [n]$), τότε το κοινωνικό βέλτιστο είναι $\lceil \frac{n}{m} \rceil$. Επιπλέον, εύκολα προκύπτει ότι σε οποιοδήποτε σύστημα ισχύει

$$opt \geq \frac{\max_i w_i}{\max_j s_j} \quad . \tag{9}$$

Επισημαίνουμε πάντως ότι ο υπολογισμός του κοινωνικού βέλτιστου είναι NP-δύσκολο ακόμα και για ισοδύναμες ταχύτητες, γιατί τότε, όπως αναφέρεται στο [20], είναι ουσιαστικά το *πρόβλημα διαμέρισης*[1], το οποίο είναι NP-πλήρες.

Έστω p_i^j η πιθανότητα ότι ο χρήστης $i \in [n]$ στέλνει την κυκλοφοριακή κίνηση w_i στη μηχανή $j \in [m]$ (ή διαφορετικά η εργασία $i \in [n]$ με βάρος w_i

[1] Στο πρόβλημα της διαμέρισης έχουμε n βάρη $(c_1, ..., c_n)$ και αναζητούμε ένα υποσύνολό τους S τέτοιο ώστε να ισχύει $\sum_{j \in S} c_j = \sum_{j \notin S} c_j$.

ανατίθεται στη μηχανή $j \in [m]$). Έστω ℓ_j *ο αναμενόμενος φόρτος* στη μηχανή $j \in [m]$,

$$\ell_j = \frac{1}{a_j} \cdot \sum_{i \in [n]} w_i \, p_i^j \quad .$$

Για μια εργασία i, *το αναμενόμενο κόστος* της εργασίας i στη μηχανή j (ή διαφορετικά ο χρόνος τερματισμού της όταν ο φόρτος w_i ανατίθεται στη μηχανή j, [20]) είναι ίσο με

$$c_i^j = \frac{w_i}{a_j} + \frac{1}{a_j} \cdot \sum_{t \neq i} w_t \, p_t^j = \ell_j + (1 - p_i^j) \, \frac{w_i}{a_j} \quad .$$

Με τα όσα ορίσαμε παραπάνω μπορούμε να προχωρήσουμε στον ορισμό του NE για το μοντέλο αυτό. Αναφέρουμε, χωρίς να επεκταθούμε, ότι στη δημοσίευση [10] αναλύεται η πολυπλοκότητα των NE για το μοντέλο αυτό.

Ορισμός 4.1 (Nash σημείο ισορροπίας, NE) Οι πιθανότητες $(p_i^j)_{i \in [n], j \in [m]}$ ορίζουν ένα NE αν και μόνο αν οποιαδήποτε εργασία i εκχωρεί μη-μηδενικές πιθανότητες μόνο στις μηχανές που ελαχιστοποιούν το c_i^j, άρα η σχέση $p_i^j > 0$ υποδηλώνει ότι $c_i^j \leq c_i^q$ για κάθε $q \in [m]$.

Με άλλα λόγια, ένα NE χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι καμία εργασία δεν έχει το κίνητρο να αλλάξει τη στρατηγική της. Ως ένα παράδειγμα, παρατηρούμε ότι στο σύστημα που θεωρήσαμε προηγουμένως, στο οποίο όλες οι μηχανές έχουν την ίδια μοναδιαία ταχύτητα και όλα τα βάρη την ίδια τιμή, οι ομοιόμορφες πιθανότητες $p_i^j = \frac{1}{m}$ για όλα τα $j \in [m]$ και όλα τα $i \in [n]$ ορίζουν ένα NE. Ένα δεύτερο παράδειγμα, για ισοδύναμες εργασίες και μηχανές, θεωρούμε μια ισορροπημένη ντετερμινιστική ανάθεση στην οποία αναθέτουμε την εργασία i στη μηχανή $(i \mod m) + 1$ (δηλαδή, $p_i^j = 1$ για $j = (i \mod m) + 1$ και είναι μηδέν διαφορετικά), όπου και εδώ το σύστημα είναι σε Nash ισορροπία.

Ας ξεκινήσουμε με έναν απλό ισχυρισμό που περιγράφει μια βασική ιδιότητα του NE.

Ισχυρισμός 4.2 Σε ένα αυθαίρετο NE, αν $p_i^q > 0$ για κάποια συγκεκριμένα $i \in [n]$ και $q \in [m]$, τότε $\ell_j + \frac{w_i}{a_j} \geq \ell_q$ για κάθε $j \in [m]$. Πιο συγκεκριμένα, αν $\ell_j + 1 < \ell_q$ τότε $w_i > a_j$.

Επιπλέον, αν $p_i^j > 0$ και $p_i^q > 0$, τότε $|\,\ell_j - \ell_q| \leq opt$.

Απόδειξη: Αρχικά, επισημαίνουμε ότι $c_i^j \leq \ell_j + \frac{w_i}{a_j}$ και $c_i^q = \ell_q + (1 - p_i^q)\,\frac{w_i}{a_q} \geq \ell_q$ όπως εύκολα προκύπτουν από τον ορισμό του αναμενόμενου κόστους c_i^j. Άρα, αφού $p_i^q > 0$, ο ορισμός του NE υποδηλώνει $c_i^q \leq c_i^j$ και έτσι ισχύει $\ell_q \leq \ell_j + \frac{w_i}{a_j}$.

Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει εύκολα από τον πρώτο.

Από τον πρώτο ισχυρισμό με τις υποθέσεις του τρίτου προκύπτουν οι σχέσεις (α) $\ell_j + \frac{w_i}{a_j} \geq \ell_q$ και (β) $\ell_q + \frac{w_i}{a_q} \geq \ell_j$. Αν $\ell_j = \ell_q$ τότε ισχύει ο τρίτος ισχυρισμός. Αν $\ell_j \geq \ell_q$ τότε από τη σχέση (9) και τη (β) προκύπτει ότι $\ell_j - \ell_q \leq opt$. Όμοια δείχνουμε ότι ισχύει $\ell_q - \ell_j \leq opt$ όταν $\ell_q \geq \ell_j$. Επομένως ισχύει ο τρίτος ισχυρισμός, $|\ell_j - \ell_q| \leq opt$.

□

Ας καθορίσουμε ένα αυθαίρετο NE. Καθορίζουμε δηλαδή τις πιθανότητες $(p_i^j)_{i\in[n],j\in[m]}$ που ορίζουν ένα NE. Ας θεωρήσουμε τυχαίες στρατηγικές ανάθεσης στις οποίες κάθε εργασία i ανατίθεται στη μηχανή j με πιθανότητα p_i^j. Έστω C_j, για $j \in [m]$, η τυχαία μεταβλητή που δείχνει *το φόρτο* της μηχανής j στο τυχαίο μας πείραμα. Παρατηρούμε ότι το C_j είναι το άθροισμα των, πολλαπλασιασμένων από το βάρος της αντίστοιχης εργασίας, ανεξάρτητων 0-1 τυχαίων μεταβλητών J_i^j, όπου $Pr[J_i^j = 1] = p_i^j$, έτσι ώστε

$$C_j = \frac{1}{a_j} \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot J_i^j \quad . \tag{10}$$

Έστω $\mathfrak{c}$ *ο μέγιστος αναμενόμενος φόρτος* ανάμεσα σε όλες τις μηχανές. Ισχύει

$$\mathfrak{c} = \max_{j\in[m]} \ell_j \quad . \tag{11}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $E[C_j] = \ell_j$, και επομένως $\mathfrak{c} = \max_{j\in[m]} E[C_j]$.

Τελειώνοντας, ορίζουμε *το κοινωνικό κόστος* $\mathfrak{C}$ να είναι ο αναμενόμενος μέγιστος φόρτος (και όχι ο μέγιστος αναμενόμενος φόρτος), ως εξής

$$\mathfrak{C} = E[\max_{j\in[m]} C_j] \quad . \tag{12}$$

Συγκρίνοντας τα $\mathfrak{c}$ και $\mathfrak{C}$ προκύπτει εύκολα ότι $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{C}$ και πιθανότατα $\mathfrak{c} \ll \mathfrak{C}$. Υπενθυμίζουμε ότι το opt δηλώνει το κοινωνικό βέλτιστο. Θα εστιάσουμε την ανάλυσή μας στο κόστος της αναρχίας ή διαφορετικά στο λόγο συντονισμού ο οποίος είναι ο χειρότερος δυνατόν λόγος

$$\mathfrak{R} = \max \frac{\mathfrak{C}}{opt} \quad , \tag{13}$$

όπου το max είναι ανάμεσα σε όλα τα NE.

Παράδειγμα 4.3 Θεωρούμε ένα απλό σενάριο δύο μηχανών, $m = 2$. Αν οι μηχανές είναι ισοδύναμες, τότε ένα «κακό» σενάριο μπορεί να επιτευχθεί ακόμα και για δύο ισοδύναμες εργασίες, όταν η κάθε εργασία ανατίθεται ομοιόμορφα και τυχαία, δηλαδή ισχύει $p_i^j = \frac{1}{2}$ για κάθε $i, j \in [2]$. Αυτό είναι ένα μικτό NE μιας και καμία εργασία δεν έχει συμφέρον να αλλάξει τη στρατηγική της δεδομένης της μη μεταβολής της άλλης. Εφαρμόζοντας το (12) έχουμε $\mathfrak{C} = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ ενώ το κοινωνικό βέλτιστο είναι προφανώς $opt = 1$. Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι ακόμα και στην περίπτωση ισοδύναμων μηχανών και εργασιών ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα, είναι τουλάχιστον $\frac{3}{2}$.

Ένα δεύτερο πιο πολύπλοκο παράδειγμα όπου το κάτω φράγμα μεγαλώνει είναι το επόμενο. Θεωρούμε το σενάριο όπου $n = m = 2$ με μη ισοδύναμες εργασίες και μηχανές. Έστω $a_1 = 1$ και $a_2 \geq a_1$, και τα βάρη είναι $w_1 = a_1$ και $w_2 = a_2$. Θεωρούμε την εξής κατανομή στις πιθανότητες, $p_1^2 = \frac{a_2^2}{a_1(a_1+a_2)}$, $p_1^1 = 1 - p_1^2$ και $p_2^1 = \frac{a_1^2}{a_2(a_1+a_2)}$, $p_2^2 = 1 - p_2^1$. Επισημαίνουμε ότι αν $a_2 > \phi$, όπου $\phi = (1+\sqrt{5})/2$, τότε οι παραπάνω πιθανότητες είναι εκτός διαστήματος $[0, 1]$, και επομένως υποθέτουμε ότι $a_2 \leq \phi$. Από το θεώρημα 3 του [20] προκύπτει ότι αυτές οι πιθανότητες αποτελούν μικτό NE. Επιπλέον υπολογίζουμε τον αναμενόμενο μέγιστο φόρτο και έχουμε

$$\mathfrak{C} = \left(\frac{p_1^1 \cdot p_2^1}{a_1} + \frac{p_1^2 \cdot p_2^2}{a_2}\right)(w_1 + w_2) + \left(\frac{p_1^2 \cdot p_2^1}{a_1} + \frac{p_1^1 \cdot p_2^2}{a_2}\right) w_2 = \frac{a_1 + 2a_2}{a_1 + a_2} \quad ,$$

ενώ το κοινωνικό βέλτιστο είναι $opt = 1$ μιας και $w_1 = a_1$ και $w_2 = a_2$ και αυτή η αντιστοίχηση είναι η καλύτερη στρατηγική. Αυτά υποδηλώνουν ότι ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού για το παράδειγμα αυτό είναι $\mathfrak{R} = \frac{a_1+2a_2}{a_1+a_2}$. Επειδή ο λόγος αυτός μεγιστοποιείται όταν ο a_2/a_1 μεγιστοποιείται και επειδή δεχθήκαμε $a_2/a_1 \leq \phi$ συμπεραίνουμε ότι ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού για δύο οποιεσδήποτε μηχανές είναι τουλάχιστον $1 + \frac{\phi}{1+\phi} = \phi \approx 1,618$.

4.2 Βασικά αποτελέσματα του λόγου συντονισμού για γραμμικές συναρτήσεις κόστους

Οι Κουτσουπιάς και Παπαδημητρίου [20] ήταν οι πρώτοι που μελέτησαν το χειρότερο δυνατόν λόγο συντονισμού και έδειξαν ορισμένες από τις βασικές ιδιότητες στο μοντέλο της ανάθεσης εργασιών.

- Για δύο ισοδύναμες μηχανές ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού είναι ακριβώς $\frac{3}{2}$.
- Για δύο μηχανές (γενικά με διαφορετικές ταχύτητες) ο χειρότερος δυνατόν λόγος είναι τουλάχιστον $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.

- Για m ισοδύναμες μηχανές ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού είναι $\Omega\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$ και είναι το πολύ $3+\sqrt{4\,m\,\ln m}$.
- Ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού για οποιονδήποτε αριθμό από εργασίες και m (όχι απαραίτητα ισοδύναμες) μηχανές είναι $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{a_1}{a_m}\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{a_m}}\,\sqrt{\log m}\right)$, όπου a_j είναι η ταχύτητα της μηχανής j και έχουμε δεχθεί ότι $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m$.

Αυτά τα όρια δίνουν έναν σχεδόν πλήρη χαρακτηρισμό του προβλήματος με δύο μηχανές. Για μεγαλύτερο αριθμό από μηχανές, δείχνουν ότι μπορεί να επιτευχθεί ένα άνω φράγμα, για το λόγο συντονισμού, που να είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό των εργασιών και ότι ο λόγος αυτός είναι τουλάχιστον $\Omega\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$. Οι Κουτσουπιάς και Παπαδημητρίου [20] διατύπωσαν την εικασία (χωρίς να την αποδείξουν) ότι ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού είναι $\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$ δηλαδή ότι επιπλέον ισχύει $\mathcal{O}\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$ για το άνω φράγμα.

Οι Μαυρονικόλας και Σπυράκης [23] επεκτάθηκαν στο αποκαλούμενο *πλήρως μικτό μοντέλο*. Το πλήρως μικτό μοντέλο είναι μια ειδική κλάση σημείων ισορροπίας NE στα οποία όλες οι πιθανότητες p_i^j είναι διάφορες από το μηδέν. Οι Μαυρονικόλας και Σπυράκης [23] έδειξαν ότι για m ισοδύναμες μηχανές στο πλήρως μικτό NE ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού είναι $\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$. Όμοια, έδειξαν ότι για m (όχι απαραίτητα ισοδύναμες) μηχανές και n ισοδύναμες εργασίες σε πλήρως μικτά NE, αν $m \leq n$, τότε ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού είναι $\Theta\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$.

Αυτά τα αποτελέσματα δείχνουν να επιβεβαιώνουν την εικασία των Κουτσουπιά και Παπαδημητρίου [20] ότι ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού είναι $\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$, αλλά η πλήρης απόδειξη της γενικής περίπτωσης θα ερχόταν αργότερα και την ίδια χρονιά από δύο ξεχωριστές δημοσιεύσεις. Η μία είναι των Κουτσουπιά, Μαυρονικόλα και Σπυράκη [19] και η άλλη των Czumaj και Vocking [8]. Στην εργασία αυτή θα δείξουμε την ανάλυση για την περίπτωση των ισοδύναμων μηχανών, για τη γενική περίπτωση και για το μοντέλο των πλήρως μικτών NE.

4.3 Ισοδύναμες μηχανές

Η ανάλυση που ακολουθεί είναι σύμφωνη με τη δημοσίευση των Czumaj και Vocking [8]. Από τις αποδείξεις των κάτω και άνω φραγμάτων θα προκύψει το θεώρημα που φράσσει *σφιχτά* το κόστος της αναρχίας στο πρόβλημα της ανάθεσης εργασιών με ισοδύναμες μηχανές.

4.3.1 Κάτω φράγμα

Στο θεώρημα 4.5 θα δείξουμε το κάτω φράγμα για την περίπτωση των ισοδύναμων μηχανών κάνοντας τις υποθέσεις ότι $n = m$, ότι όλες οι εργασίες έχουν ισοδύναμα βάρη και ίσα με τη μονάδα και ότι όλες οι ταχύτητες είναι επίσης ίσες με τη μονάδα. Με βάση τις υποθέσεις αυτές μπορούμε να κάνουμε πλήρη αντιστοίχιση του μοντέλου αυτού με τη διεργασία τυχαίας ανάθεσης *μπάλες στα καλάθια* που ανήκει στα *προβλήματα εγκατάστασης* [26]. Συγκεκριμένα, θεωρούμε τους παίκτες ως μπάλες και τις μηχανές ως καλάθια και θέλουμε να τοποθετήσουμε ομοιόμορφα (ισοπίθανα) n μπάλες σε n καλάθια. Το λόγο για τον οποίο η τοποθέτηση γίνεται ομοιόμορφα θα τον εξηγήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος 4.5. Το παραπάνω πρόβλημα έχει μελετηθεί στη θεωρία *τυχαίων αναθέσεων* και το λήμμα που θα χρειαστούμε είναι το εξής:

Λήμμα 4.4 Θεωρούμε ότι κάθε μία από τις n μπάλες τοποθετείται τυχαία και ομοιόμορφα σε ένα εκ των n καλαθιών. Τότε ισχύει:

$$Pr(\max_{\ell \in [n]} \theta_\ell \leq \frac{e \ln n}{\ln \ln n}) \geq 1 - \frac{1}{n} \quad ,$$

όπου θ_ℓ είναι η τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των μπαλών στο καλάθι ℓ.

Το παραπάνω λήμμα δείχνει πιο απλά ότι με μεγάλη πιθανότητα ο μέγιστος αριθμός μπαλών σε ένα καλάθι είναι της τάξης $\Theta(\frac{\log m}{\log \log m})$.

Θεώρημα 4.5 Για m ισοδύναμες μηχανές ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με $\Gamma^{(-1)}(m) - \frac{3}{2} + o(1) = \Theta(\log m / \log \log m)$[2].

Απόδειξη: Θεωρούμε την περίπτωση όπου ισχύει $n = m$, όλες οι εργασίες έχουν ισοδύναμα βάρη και ίσα με τη μονάδα και όλες οι ταχύτητες είναι επίσης ίσες με τη μονάδα. Αναλύουμε το σενάριο όπου η κάθε εργασία επιλέγει κάποια μηχανή ανεξάρτητα και ομοιόμορφα, με τυχαίο τρόπο. Πιο συγκεκριμένα ισχύει $p_i^j = \frac{1}{m}$ για κάθε $i, j \in [m]$.

Καταρχάς πρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι αυτές οι πιθανότητες αποτελούν NE. Παρατηρούμε ότι για κάθε $j \in [m]$, ο αναμενόμενος φόρτος στη μηχανή

[2]Με το συμβολισμό $\Gamma(N)$ δηλώνουμε τη συνάρτηση Γάμμα, η οποία για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό N ορίζεται ως εξής $\Gamma(N+1) = N!$, ενώ για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $x > 0$ ορίζεται ως $\Gamma(x) = \int_o^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt$. Η αντίστροφη της συνάρτησης Γάμμα συμβολίζεται με $\Gamma^{(-1)}(N)$ και ισχύει $\Gamma^{(-1)}(N) = \frac{\log N}{\log \log N}(1 + o(1))$.

j είναι

$$\ell_j = \sum_{i\in[m]} \frac{w_i\, p_i^j}{a_j} = \sum_{i\in[m]} \frac{1}{m} = 1 \quad .$$

Όμοια, για κάθε εργασία $i \in [n]$ και για κάθε μηχανή $j \in [m]$, το αναμενόμενο κόστος της εργασίας i στη μηχανή j είναι

$$c_i^j = \ell_j + (1 - p_i^j)\frac{w_i}{a_j} = 2 - \frac{1}{m} \quad .$$

Επομένως, επειδή όλες οι τιμές των c_i^j είναι ίσες, και σύμφωνα με τον ορισμό 4.1 του NE, προκύπτει ότι η παραπάνω στρατηγική είναι σε Nash ισορροπία.

Είναι εύκολο να δούμε ότι το κοινωνικό βέλτιστο είναι $opt = 1$ που επιτυγχάνεται με την ανάθεση της i εργασίας στην i μηχανή. Για να αναλύσουμε το κοινωνικό κόστος $\mathfrak{C}$ χρειάζεται να ανατρέξουμε στην αρχή της υποενότητας και με βάση το λήμμα 4.4 προκύπτει $\mathfrak{C} = \Theta(\frac{\log m}{\log\log m})$. Ο *Gonnet* [11] έδειξε ότι σε αυτή την περίπτωση ισχύει $\mathfrak{C} = \Gamma^{(-1)}(m) - \frac{3}{2} + o(1)$. Επομένως, ο λόγος συντονισμού είναι τουλάχιστον $\mathfrak{C} = \Gamma^{(-1)}(m) - \frac{3}{2} + o(1) = \frac{\log m}{\log\log m}(1 + o(1))$, μιας και $opt = 1$, αποτέλεσμα το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.

□

4.3.2 Άνω φράγμα

Θεώρημα 4.6 Για m ισοδύναμες μηχανές ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού είναι $\mathcal{O}(\log m/\log\log m)$.

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα δεχθούμε ότι οι ταχύτητες είναι ίσες με τη μονάδα και ότι το κοινωνικό κόστος επίσης $opt = 1$.

Από το (9) και λόγω του ότι $opt = 1$ πρέπει να ισχύει

$$w_i \le 1 \quad \text{για κάθε } i \in [n] \ .$$

Επιπλέον από τον Ισχυρισμό 4.2 και με την παραδοχή ότι το σύστημα βρίσκεται σε Nash ισορροπία προκύπτει ότι

$$\mathfrak{c} = \max_{j\in[m]} \ell_j < 2 \quad \text{για κάθε } j \in [m] \ .$$

Για να υπολογίσουμε το φόρτο C_j μίας οποιασδήποτε μηχανής $j \in [m]$ εφαρμόζουμε στη (10) την *κανονική ανισότητα συγκέντρωσης* που αποδίδεται στον Hoeffding [16] για να πετύχουμε το παρακάτω φράγμα που ισχύει για οποιοδήποτε $t > 0$:

$$Pr[C_j \ge t] \le (e \cdot E[C_j]\,/\,t)^t \le (2\,e/\,t)^t \quad ,$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $E[C_j] = \ell_j$ και $\ell_j < 2$.

Άρα, αν διαλέξουμε το $t \geq 3 \ln m / \ln\ln m$, τότε θα έχουμε $Pr[C_j \geq t] \ll 1/m$. Δηλαδή είναι σχεδόν απίθανο για το φόρτο C_j να πάρει τιμές μεγαλύτερες από το t και τουλάχιστον διαισθητικά μας οδηγεί στο $\mathfrak{C} = E[\max_{j\in[m]} C_j] = \mathcal{O}(t)$. Οι επόμενες ανισότητες το αποδεικνύουν πιο αυστηρά:

$$\mathfrak{C} = E[\max_{j\in[m]} C_j] \leq t + \sum_{\tau=t}^{\infty} Pr[\exists_{j\in[m]} C_j \geq \tau]$$

$$\leq t + \sum_{\tau=t}^{\infty} m \cdot (2e/\tau)^{\tau} \leq t + \sum_{\tau=t}^{\infty} 2^{-\tau} \leq t + 1 \quad .$$

Αυτό το αποτέλεσμα αποδεικνύει ουσιαστικά το θεώρημα, μιας και πήραμε $t \geq 3 \ln m / \ln\ln m$.

□

Στη δημοσίευσή τους οι Czumaj και Vocking [8] προσάρμοσαν το άνω φράγμα να ταιριάζει ακριβώς με το κάτω φράγμα του θεωρήματος 4.1 οπότε και απέδειξαν τελικά το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.7 Ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού για m ισοδύναμες μηχανές είναι ακριβώς $\Gamma^{(-1)}(m) + \Theta(1) = \frac{\log m}{\log\log m}(1 + o(1))$.

4.4 Γενική περίπτωση

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε τον πλήρη χαρακτηρισμό του χειρότερου δυνατόν λόγου συντονισμού για το μοντέλο της ανάθεσης εργασιών όπως αποδείχθηκε στο [8]. Τα παρακάτω όρια είναι ασυμπτωτικά *σφιχτά*. Το κύριο αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.8 Ο λόγος συντονισμού για m μηχανές είναι

$$\Theta\left(\min\left\{\frac{\log m}{\log\log\log m}, \frac{\log m}{\log\left(\frac{\log m}{\log(a_1/a_m)}\right)}\right\}\right) \quad ,$$

όπου έχουμε δεχθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ισχύει $a_1 \geq \ldots \geq a_m$.

Συγκεκριμένα, ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού για m μηχανές είναι

$$\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log\log m}\right) \quad .$$

Το όριο που επιτεύχθηκε με το θεώρημα αυτό είναι μάλλον πρωτοφανές μιας και ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού είναι μια αρκετά ασυνήθιστη συνάρτηση $\mathcal{O}(\frac{\log m}{\log\log\log m})$, αλλά και επειδή ακόμα και αν οι μηχανές έχουν αυθαίρετες τιμές, ο λόγος συντονισμού είναι λίγο (και όχι πολύ) μεγαλύτερος από εκείνον για ισοδύναμες μηχανές όπως αυτό αποδείχθηκε στο θεώρημα 4.7. Επιπλέον, αυτό το όριο δείχνει ότι ο λόγος συντονισμού είναι άνω φραγμένος από μία συνάρτηση εξαρτημένη μόνο από το m και επομένως ανεξάρτητη του αριθμού των εργασιών, των βαρών τους και των ταχυτήτων των μηχανών. Δεν ήταν γνωστό μέχρι τώρα κάποιο ανάλογο όριο.

Η απόδειξη του άνω ορίου στο θεώρημα 4.8 προκύπτει άμεσα από τα ακόλουθα δύο λήμματα:

Λήμμα 4.9 Ο μέγιστος αναμενόμενος φόρτος $\mathfrak{c}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathfrak{c} \leq \min\left\{opt\cdot(\Gamma^{(-1)}(m)+1),\, opt\cdot(2\,\log(a_1/a_m)+\mathcal{O}(1))\right\} \quad ,$$

όπου έχουμε δεχθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ισχύει $a_1 \geq \ldots \geq a_m$.

Συγκεκριμένα,

$$\mathfrak{c} = opt\cdot\mathcal{O}\left(\min\left\{\frac{\log m}{\log\log m}, \log\left(\frac{a_1}{a_m}\right)\right\}\right) \quad .$$

Λήμμα 4.10 Το κοινωνικό κόστος $\mathfrak{C}$ ικανοποιεί την ισότητα

$$\mathfrak{C} = opt\cdot\mathcal{O}\left(\frac{\log m}{\log\left(\frac{opt\cdot\log m}{\mathfrak{c}}\right)}\right) \quad .$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του $\mathfrak{c}$ που παίρνουμε από το λήμμα 4.9 στην παραπάνω ισότητα από το λήμμα 4.10 και σύμφωνα με τον ορισμό του κόστους αναρχίας προκύπτει το ζητούμενο του θεωρήματος 4.8. Οι αποδείξεις των δύο λημμάτων είναι μεγάλες και κάνουν χρήση άλλων λημμάτων στο [8] και για αυτό θα παραληφθούν.

4.5 Πλήρως μικτά NE

Οι Μαυρονικόλας και Σπυράκης δημοσίευσαν το 2001 την εργασία τους [23] που αφορά το ίδιο μοντέλο αλλά με έναν περιορισμό ως προς τα NE. Τα NE πρέπει να είναι μικτά και με μη μηδενικές πιθανότητες ως προς όλες τις επιλογές (στρατηγικές) όλων των παικτών. Δηλαδή τα NE πρέπει να είναι πλήρως μικτά. Αυτή η μελέτη προηγήθηκε της [8] και είναι φυσικά μεταγενέστερη της [20]. Δεν θα επεκταθούμε πολύ στην περίπτωση αυτή, απλά θα παραθέσουμε τα τρία θεωρήματα της δημοσίευσης αυτής. Η ανάλυση έγινε για μη ισοδύναμες και ισοδύναμες μηχανές όπου η περίπτωση των μη ισοδύναμων μηχανών έχει δύο υποπεριπτώσεις. Για κάθε αποτέλεσμα χρειάστηκε να αποδειχθεί πρώτα το άνω φράγμα του κοινωνικού κόστους και ύστερα το κάτω φράγμα του κοινωνικού βέλτιστου έτσι ώστε να φραχθεί από άνω ο λόγος συντονισμού.

Θεώρημα 4.11 Θεωρούμε την πλήρως μικτή περίπτωση για το μοντέλο των ισοδύναμων μηχανών. Υποθέτουμε ότι $n = m$. Τότε ισχύει:

$$\mathfrak{R} \leq \frac{e \ln n}{\ln \ln n} + 1 \quad ,$$

όπου με $\mathfrak{R}$ συμβολίζουμε το λόγο συντονισμού.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $m \leq n/(24 \ln n)$, μια υπόθεση για την οποία δεν είχε δειχθεί τίποτα πιο πάνω.

Θεώρημα 4.12 Θεωρούμε την πλήρως μικτή περίπτωση για το μοντέλο των ισοδύναμων μηχανών. Υποθέτουμε ότι $m \leq n/(24 \ln n)$ για κατάλληλα μεγάλα m και n. Τότε ισχύει:

$$\mathfrak{R} < \left(\frac{3}{2} + \varepsilon\right) \cdot \frac{\max_{i \in [n]}(w_i)}{\min_{i \in [n]}(w_i)} \quad .$$

Τέλος το πιο ισχυρό θεώρημα που έδειξαν στη δημοσίευσή τους ήταν το παρακάτω.

Θεώρημα 4.13 Θεωρούμε την πλήρως μικτή περίπτωση για το μοντέλο των μη ισοδύναμων μηχανών. Υποθέτουμε ότι όλα τα βάρη είναι ισοδύναμα και επιπλέον ότι ισχύει $m \leq n$. Τότε ισχύει:

$$\mathfrak{R} \leq \frac{2e \ln n}{\ln \ln n} + 2 \cdot (2e + 1)$$

5 Εγωιστικά Δρομολογούμενη Ροή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα θεωρήσουμε ένα διαφορετικό μοντέλο από συναρτήσεις κόστους, στο οποίο το κόστος της χρησιμοποίησης της ακμής (πλέον, και όχι μηχανής) δεν είναι μόνο μία συνάρτηση του φόρτου αλλά και μια συνάρτηση καθυστέρησης. Για την ανάλυση του μοντέλου αυτού υποθέτουμε ότι ο κάθε χρήστης του δικτύου ελέγχει ένα αμελητέο ποσοστό της συνολικής κυκλοφοριακής κίνησης και επομένως μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια απειροστή ροή. Για παράδειγμα κάθε χρήστης μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύει ένα αυτοκίνητο σε ένα σύστημα αυτοκινητοδρόμων ή αλλιώς ένα πακέτο σε ένα επικοινωνιακό δίκτυο.

5.1 Το μοντέλο της εγωιστικά δρομολογούμενης ροής

Θεωρούμε ένα κατευθυνόμενο δίκτυο $\mathcal{N} = (V, E)$, όπου V είναι το σύνολο των κόμβων και E το σύνολο των ακμών, και k ζευγάρια κόμβων πηγής - κατάληξης $\{s_1, t_1\}, \{s_2, t_2\}, \ldots, \{s_k, t_k\}$. Δηλώνουμε το σύνολο των $\{s_i, t_i\}$ (απλών) μονοπατιών με $\mathcal{P}_i$ και ορίζουμε το εξής: $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i$. Η ροή είναι μια συνάρτηση $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ με την έννοια ότι σε κάθε ζευγάρι κόμβων πηγής - κατάληξης αντιστοιχούμε έναν πραγματικό αριθμό που δηλώνει την απαιτούμενη προς δρομολόγηση εγωιστική ροή από την πηγή στην κατάληξη. Για μια οριστικά αμετάβλητη ροή f και για οποιαδήποτε ακμή $e \in E$ ορίζουμε το εξής: $f_e = \sum_{\pi \in \mathcal{P}: e \in \pi} f_\pi$ όπου το π είναι ένα οποιοδήποτε μονοπάτι του $\mathcal{P}$. Η προηγούμενη σχέση δηλώνει ότι η ροή μιας ακμής ισούται με το άθροισμα όλων των ροών των μονοπατιών π που ανήκουν στο σύνολο $\mathcal{P}$ και χρησιμοποιούν την ακμή e. Σε κάθε ζεύγος $\{s_i, t_i\}$, συσχετίζουμε έναν θετικό *όγκο προς δρομολόγηση* κυκλοφοριακής κίνησης r_i που δηλώνει το ποσό της ροής που στέλνεται από τον κόμβο s_i στον κόμβο t_i. Λέμε ότι η ροή f είναι εφικτή αν για κάθε $i \in [k]$, ισχύει $\sum_{\pi \in \mathcal{P}_i} f_\pi = r_i$.

Θεωρούμε ότι σε κάθε ακμή $e \in E$ δίνεται μία συνάρτηση καθυστέρησης που εξαρτάται από τον φόρτο της ακμής και δηλώνεται ως $\ell_e(\cdot)$. Αργότερα θα κάνουμε κάποιες πιο ακριβείς παραδοχές σχετικά με τις συναρτήσεις καθυστέρησης, αλλά για τώρα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε ℓ_e είναι μη αρνητική, διαφορήσιμη και μη φθίνουσα. Η καθυστέρηση του μονοπατιού π σύμφωνα με τη ροή f ορίζεται ως το άθροισμα των καθυστερήσεων των ακμών που χρησιμοποιούνται στο μονοπάτι και δηλώνονται ως $\ell_\pi(f)$. Οπότε έχουμε:

$$\ell_\pi(f) = \sum_{e \in \pi} \ell_e(f_e) \quad .$$

Τέλος, ορίζουμε το κόστος $\mathfrak{C}(f)$ μιας ροής f στο $\mathcal{N}$ ως τη συνολική καθυστέρηση που προκαλείται από την f:

$$\mathfrak{C}(f) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}} \ell_\pi(f) \cdot f_\pi \quad .$$

Υπενθυμίζουμε ότι το $\ell_\pi(f)$ δηλώνει την συνολική καθυστέρηση του μονοπατιού π για μία μονάδα ροής και το f_π το ποσό της ροής που περνάει από το μονοπάτι π. Άρα το γινόμενό τους δίνει τη ολική καθυστέρηση για το μονοπάτι αυτό. Από τον παραπάνω ορισμό είναι εύκολο να δούμε ότι το κόστος $\mathfrak{C}(f)$ μπορεί να γραφεί και ως $\mathfrak{C}(f) = \sum_{e \in E} \ell_e(f_e) \cdot f_e$.

Θα ονομάζουμε την τριάδα $(\mathcal{N}, r, \ell)$ *κατάσταση* σύμφωνα με τους Roughgarden και Tardos [42].

5.2 Εγωιστικά δρομολογούμενες ροές σε Nash ισορροπία

Μιας και έχουμε δεχθεί ότι όλοι οι χρήστες μεταφέρουν ένα αμελητέο ποσοστό της ολικής κυκλοφοριακής κίνησης, μπορούμε διαισθητικά και άτυπα εδώ (πιο αυστηρά στο [15]) να δεχθούμε ότι ο κάθε χρήστης επιλέγει ένα (απλό) μονοπάτι του δικτύου και επομένως να επικεντρώσουμε τη μελέτη μας σε γνήσιες στρατηγικές και να ορίσουμε NE μόνο γνήσιων στρατηγικών.

Ορισμός 5.1 Μια ροή f εφικτή για μια κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell)$ είναι σε Nash ισορροπία αν για όλα τα $i \in [k]$, $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}_i$ με $f_{\pi_1} > 0$ και $\delta \in (0, f_{\pi_1})$, έχουμε:

$$\ell_{\pi_1}(f) \leq \ell_{\pi_2}(\tilde{f}) \quad ,$$

όπου

$$\tilde{f}_\pi = \begin{cases} f_\pi - \delta & \text{αν } \pi = \pi_1 \\ f_\pi + \delta & \text{αν } \pi = \pi_2 \\ f_\pi & \text{αν } \pi \notin \{\pi_1, \pi_2\} \end{cases} \quad .$$

Δηλαδή αν επιτρέπαμε μια μικρή ποσότητα ροής δ να μετακινηθεί από το μονοπάτι π_1 στο π_2 δεν θα καταφέρναμε μικρότερη καθυστέρηση.

Επιτρέποντας το δ να τείνει στο 0, η συνέχεια και η μονοτονία των συναρτήσεων καθυστέρησης των ακμών μας οδηγούν στον επόμενο χαρακτηρισμό της ροής όταν βρίσκεται σε Nash ισορροπία. Αυτός ο χαρακτηρισμός καλείται και ως Wardrop ισορροπία από τη δημοσίευση του ίδιου [45].

Θεώρημα 5.2 Μια ροή f εφικτή για μια κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell)$ είναι σε Nash ισορροπία αν και μόνο αν για κάθε $i \in [k]$ και $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}_i$ με $f_{\pi_1} > 0$, ισχύει

$\ell_{\pi_1}(f) \leq \ell_{\pi_2}(f)$.

Με άλλα λόγια από τη στιγμή που η ροή f είναι NE και επιτρέπει ένα μέρος της ροής της από το μονοπάτι π_1 ($f_{\pi_1} > 0$), τότε οποιοδήποτε άλλο μονοπάτι μεταξύ των ίδιων κόμβων πηγής - κατάληξης π_2 έχει το λιγότερο την ίδια καθυστέρηση. Αυτό προκύπτει εύκολα από τον ορισμό του NE.

Από το παραπάνω θεώρημα, που υπενθυμίζουμε ότι είναι ένας χαρακτηρισμός των NE, πηγάζει ένα σημαντικό αποτέλεσμα. Αν η ροή f είναι NE τότε όλα τα $s_i - t_i$ μονοπάτια στα οποία η f αντιστοιχεί θετική ποσότητα ροής έχουν ίση καθυστέρηση, την οποία θα δηλώνουμε ως $L_i(f)$. Πράγματι αν υποθέταμε ότι δεν ίσχυε κάτι τέτοιο θα καταλήγαμε σε αντίφαση από το θεώρημα 5.2. Έτσι, μπορούμε να εκφράσουμε το κόστος μιας ροής f σε NE με την επόμενη χρήσιμη μορφή.

Θεώρημα 5.3 Αν f είναι μια εγωιστικά δρομολογούμενη ροή σε Nash ισορροπία στην κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell)$, τότε

$$\mathfrak{C}(f) = \sum_{i=1}^{k} L_i(f)\, r_i \quad .$$

5.3 Βέλτιστες εγωιστικά δρομολογούμενες ροές

Θα ερευνήσουμε τις ιδιότητες της βέλτιστης ροής, εκείνης δηλαδή που ελαχιστοποιεί την ολική καθυστέρηση. Υπενθυμίζοντας ότι το κόστος της ροής f μπορεί να εκφραστεί ως $\mathfrak{C}(f) = \sum_{e \in E} \ell_e(f_e) \cdot f_e$, παρατηρούμε ότι το πρόβλημα της εύρεσης της εφικτής ροής με την ελάχιστη καθυστέρηση σε ένα δίκτυο είναι μια ειδική περίπτωση του παρακάτω μη γραμμικού προγράμματος (ΜΓΠ)

$$\min \quad \sum_{e \in E} c_e(f_e)$$

με τους περιορισμούς:

$$(M\Gamma\Pi) \qquad \begin{array}{ll} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_i} f_\pi = r_i & \forall i \in \{1, \ldots, k\} \\ f_e = \sum_{\pi \in \mathcal{P} : e \in \pi} f_\pi & \forall e \in E \\ f_\pi \geq 0 & \forall \pi \in \mathcal{P} \end{array}$$

όπου ισχύει $c_e(f_e) = \ell_e(f_e)\, f_e$.

Στη συνέχεια θα χαρακτηρίσουμε τα τοπικά βέλτιστα του (ΜΓΠ). Διαισθητικά αναμένουμε μια ροή να είναι τοπικά βέλτιστη αν και μόνο αν όταν μεταφέρουμε μια ποσότητα ροής από ένα μονοπάτι σε κάποιο άλλο να μπορεί μόνο να αυξήσει (και σε καμία περίπτωση να μειώσει) το κόστος της ροής. Με άλλα λόγια, περιμένουμε η ροή να είναι τοπικά βέλτιστη όταν το *οριακό* κέρδος της μειωνόμενης ροής σε ένα οποιοδήποτε $s_i - t_i$ μονοπάτι είναι το πολύ το οριακό κόστος της αυξανόμενης ροής σε κάποιο διαφορετικό $s_i - t_i$ μονοπάτι. Το τοπικό και το ολικό βέλτιστο σε μία κυρτή συνάρτηση ενός κυρτού συνόλου συμπίπτουν ([36], θεώρημα 2.3.4). Η σχέση αυτή είναι αναγκαία και ικανή για να πούμε ότι η ροή είναι ολικά βέλτιστη όταν η αντικειμενική συνάρτηση του (ΜΓΠ) είναι κυρτή (όπως ισχύει στην περίπτωση όπου για κάθε $e \in E$ έχουμε $c_e(f_e) = \ell_e(f_e)\, f_e$ όπου οι συναρτήσεις ℓ_e είναι κυρτές).

Μορφοποιούμε τα όσα είπαμε ως τώρα πιο αυστηρά με το παρακάτω θεώρημα όπου χαρακτηρίζουμε τα ολικά βέλτιστα σε κυρτά προγράμματα της μορφής (ΜΓΠ). Με το c'_e δηλώνουμε την παράγωγο $\frac{d}{dx}c_e(x)$ του c_e και ορίζουμε με $c'_\pi(f)$ το $c'_\pi(f) = \sum_{e\in E} c'_e(f_e)$. Έτσι έχουμε:

Θεώρημα 5.4 Η ροή f είναι βέλτιστη για το κυρτό πρόγραμμα της μορφής (ΜΓΠ) αν και μόνο αν για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$ και $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}_i$ με $f_{\pi_1} > 0$, ισχύει $c'_{\pi_1}(f) \le c'_{\pi_2}(f)$.

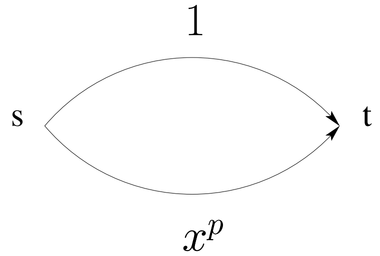
Την ομοιότητα μεταξύ των χαρακτηρισμών των βέλτιστων λύσεων σε κυρτά προγράμματα της μορφής (ΜΓΠ) και των ροών σε Nash ισορροπία την είχαν επισημάνει σχετικά νωρίς οι Beckman et al. στο [1]. Αυτοί μετατρέπουν μια βέλτιστη ροή σε μία ροή σε Nash ισορροπία διαφοροποιώντας τις συναρτήσεις καθυστερήσεων των ακμών με τον τρόπο που θα δούμε στο παρακάτω θεώρημα. Αναφορά σε αυτό γίνεται και στο [42]. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι σχετικά με τη διαφοροποίηση των συναρτήσεων, δηλώνουμε το οριακό κόστος της αυξανόμενης ροής σε μία ακμή e με το

$$\ell^*_e(f_e) \;=\; (\ell_e(f_e)\cdot f_e)' \;=\; \ell_e(f_e) + \ell'_e(f_e)\cdot f_e \quad . \tag{14}$$

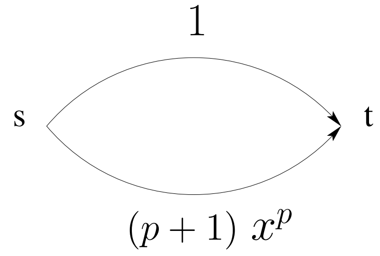
Από τα θεωρήματα 5.2 και 5.4 προκύπτει το ακόλουθο:

Θεώρημα 5.5 Έστω $(\mathcal{N}, r, \ell)$ μια κατάσταση στην οποία $x \cdot \ell_e(x)$ είναι μία κυρτή συνάρτηση για κάθε ακμή e, με συνάρτηση οριακού κόστους ℓ^* όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω. Τότε μια εφικτή για την $(\mathcal{N}, r, \ell)$ ροή f είναι βέλτιστη αν και μόνο αν είναι NE για την κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell^*)$.

Αυτός ο ακριβής και απλός χαρακτηρισμός των βέλτιστων ροών παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυση και στην κατανόηση του μοντέλου της ροής



(α) Συναρτήσεις καθυστέρησης



(β) Συναρτήσεις οριακού κόστους

Σχήμα 4: Το παράδειγμα του Pigou με πηγή το s και κατάληξη το t και με συναρτήσεις καθυστέρησης $\ell_1(x) = 1$ και $\ell_2(x) = x^p$.

προς δρομολόγηση. Από εδώ και στο εξής θα δηλώνουμε τη βέλτιστη ροή ως f^* και τη συνάρτηση οριακού κόστους ℓ^*.

Επισημαίνουμε ότι η κυρτότητα του $x \cdot \ell_e(x)$ είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την ισχύ του θεωρήματος 5.5. Επομένως στην παρούσα εργασία θα επικεντρωθούμε σε *κανονικές* συναρτήσεις καθυστέρησης, όπου η συνάρτηση καθυστέρησης ℓ είναι κανονική αν είναι διαφοροποιήσιμη και αν η $x \cdot \ell_e(x)$ είναι κυρτή στο $[0, \infty)$. Οι περισσότερες αλλά όχι όλες από τις ενδιαφέρουσες συναρτήσεις καθυστέρησης είναι κανονικές.

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση μεταξύ της βέλτιστης ροής και της NE, οι Beckmann et al. στο [1] (υπάρχει και στο [42], λήμμα 2.6) απέδειξαν την ύπαρξη και τη μοναδικότητα των NE.

Θεώρημα 5.6 Οποιαδήποτε κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell)$ με συνεχείς, μη φθίνουσες συναρτήσεις καθυστέρησης επιδέχεται μια εφικτή ροή σε Nash ισορροπία. Επιπλέον, αν f και $\tilde{f}$ είναι ροές σε Nash ισορροπία, τότε $\mathfrak{C}(f) = \mathfrak{C}(\tilde{f})$.

Μετά από όλα τα παραπάνω μπορούμε να εισάγουμε και τον ορισμό του λόγου συντονισμού.

Ορισμός 5.7 Ως λόγο συντονισμού ή κόστος αναρχίας ονομάζουμε το λόγο μεταξύ του κόστους της ροής που βρίσκεται σε Nash ισορροπία σε μια κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell)$, προς το ελάχιστο κόστος της βέλτιστης ροής για την κατάσταση αυτή,

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{C}(f)}{\mathfrak{C}(f^*)}$$

όπου f είναι μια NE ροή και f^* η βέλτιστη. Υπενθυμίζουμε ότι από το θεώρημα 5.6, όλα τα NE έχουν το ίδιο κόστος και άρα για οποιαδήποτε κατάσταση

$(\mathcal{N}, r, \ell)$ ο λόγος συντονισμού είναι ο ίδιος για όλες τις NE ροές.

5.4 Μη φραγμένο κόστος αναρχίας για κανονικές συναρτήσεις καθυστέρησης

Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε ότι με την παραδοχή ότι οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι κανονικές και μόνο, ο λόγος συντονισμού μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλος.

Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα του σχήματος 4, το οποίο είναι ένα παράδειγμα που δημοσίευσε ο Pigou στο [37]. Έστω p ένας οποιοσδήποτε θετικός αριθμός. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε ένα απλό δίκτυο με δύο κόμβους, μια μηγή s και μία κατάληξη t, δύο ακμές (1 και 2) και οι δύο με κατεύθυνση από την πηγή στην κατάληξη και με συναρτήσεις καθυστέρησης $\ell_1(x) = 1$ και $\ell_2(x) = x^p$. Ας θεωρήσουμε την κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell)$ με το δίκτο $\mathcal{N}$ όπως το προσδιορίσαμε, τις παραπάνω συναρτήσεις καθυστέρησης ℓ και με όγκο προς δρομολόγηση $r = 1$. Αν στείλουμε ροή q στην πρώτη ακμή (νούμερο 1) και $1 - q$ στη δεύτερη (νούμερο 2), τότε το κόστος αυτής της ροής είναι $q \cdot 1 + (1 - q) \cdot (1 - q)^p = q + (1 - q)^{p+1}$.

Καταρχάς επισημαίνουμε ότι η ροή σε Nash ισορροπία αναθέτει ολόκληρο τον όγκο προς δρομολόγηση στη δεύτερη ακμή με κόστος $\mathfrak{C}(f) = 1$. Αν υποθέσουμε ότι υπήρχε NE με θετική ποσότητα ροής στην ακμή 1 ($f_1 > 0$), με καθυστέρηση $\ell_1(f) = 1$, τότε από το θεώρημα 5.2 θα είχαμε $\ell_1(f) \leq \ell_2(f)$, δηλαδή $\ell_2(f) \geq 1$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την παραδοχή μας ότι δεν ανατέθηκε ολόκληρος ο όγκος προς δρομολόγηση (που ισούται με 1) στην ακμή 2, μιας και μόνο τότε μπορεί να ισχύει $\ell_2(f) \geq 1$ (και συγκεκριμένα ισχύει η ισότητα). Διαισθητικά για τον όγκο προς δρομολόγηση $r = 1$ η ακμή 2 έχει πάντα μικρότερη ή το πολύ ίση (και αυτό στην περίπτωση που $f_2 = 1$) καθυστέρηση από την ακμή 1 οπότε κανένας χρήστης δεν έχει λόγο να διαλέξει την ακμή 1.

Για να βρούμε το βέλτιστο κόστος της ροής εφαρμόζουμε το θεώρημα 5.5. Από τον ορισμό της συνάρτησης οριακού κόστους (14) ισχύουν $\ell_1^*(x) = 1$ και $\ell_2^*(x) = (p + 1) \cdot x^p$ και άρα για να βρούμε το βέλτιστο κόστος αρκεί να βρούμε το NE στην κατάσταση $(\mathcal{N}, 1, \ell^*)$. Παρατηρούμε ότι, αντίθετα από προηγουμένως, θα αναθέσουμε θετικές ροές και στις δύο ακμές και συγκεκριμένα θα πρέπει να ισχύει η σχέση $\ell_1^*(f^*) = \ell_2^*(f^*)$ από το θεώρημα 5.2. Επομένως στη βέλτιστη ροή θα αναθέσουμε $1 - (1 + p)^{-1/p}$ στην ακμή 1 και $(1 + p)^{-1/p}$ στην ακμή 2. Εύκολα επαληθεύεται ότι το άθροισμά τους είναι 1 (όσο και ο όγκος προς δρομολόγηση) και ότι ικανοποιούν την προηγούμενη σχέση μιας και $\ell_1^*(1 - (1 + p)^{-1/p}) = 1$ και $\ell_2^*((1 + p)^{-1/p}) = (p + 1)((1 + p)^{-1/p})^p = 1$. Επομένως το ελάχιστο κόστος της βέλτιστης ροής για την κατάσταση ($\mathcal{N}$, 1, ℓ) είναι

$$\mathfrak{C}(f^*) = (1-(1+p)^{-1/p})+((1+p)^{-1/p}))^{p+1} = 1-(1+p)^{-1/p}\cdot(1-((1+p)^{-1/p})^p) =$$

$$= 1-(1+p)^{-1/p}\cdot(1-\frac{1}{1+p}) = 1-\frac{p}{p+1}\cdot(1+p)^{-1/p} \quad .$$

Έτσι προκύπτει ο λόγος συντονισμού

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{1-\frac{p}{p+1}\cdot(1+p)^{-1/p}} = \frac{(1+p)\sqrt[p]{1+p}}{(1+p)\sqrt[p]{1+p}-p} = \Theta\left(\frac{p}{\ln p}\right) \quad ,$$

που τείνει στο ∞ καθώς το p αυξάνει. Με αυτό το παράδειγμα δείξαμε ότι ο λόγος συντονισμού μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλος ακόμα και όταν έχουμε πολυωνυμικές συναρτήσεις καθυστέρησης.

5.5 Φραγμένο κόστος αναρχίας για γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης

Σε αυτή την ενότητα θα θεωρήσουμε το σενάριο όπου η καθυστέρηση κάθε ακμής e είναι γραμμική ως προς τη συμφόρησή της, που σημαίνει ότι για κάθε ακμή $e \in E$ ισχύει, $\ell_e(x) = a_e x + b_e$ για κάποια $a_e, b_e \geq 0$. Σε ένα τέτοιο σενάριο ανακαλύφθηκε αρχικά το παράδοξο του Braess [3], [27].

Από την προηγούμενη ενότητα και βάζοντας $p = 1$ έχουμε ένα δίκτυο με γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης. Το δίκτυο αυτό μας δίνει ένα καλό κάτω φράγμα για το λόγο συντονισμού. Από τον τύπο έχουμε:

$$\mathfrak{R} = \frac{(1+p)\sqrt[p]{1+p}}{(1+p)\sqrt[p]{1+p}-p} = \frac{4}{3}$$

Το κάτω φράγμα αυτό είναι καλό γιατί όπως θα δείξουμε παρακάτω είναι και άνω φράγμα.

Για την ειδική περίπτωση των γραμμικών συναρτήσεων καθυστέρησης θα προκύψουν απλουστευμένοι τύποι. Για την ολική καθυστέρηση έχουμε $\mathfrak{C}(f) = \sum_e a_e f_e^2 + b_e f_e$ και επειδή $a_e \geq 0$ το μη γραμμικό πρόγραμμα (ΜΓΠ) της ενότητας 5.3 είναι κυρτό (δευτεροβάθμιο) και επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 5.4. Επιπλέον η συνάρτηση οριακού κόστους ℓ_e^* είναι απλά η $\ell_e^*(x) = 2a_e x + b_e$. Έτσι προκύπτουν ειδικές μορφές για τα θεωρήματα 5.2 και 5.4 τις οποίες παρουσιάζουμε με ένα συγκεντρωτικό θεώρημα.

Θεώρημα 5.8 Έστω μια κατάσταση ($\mathcal{N}$, r, ℓ) με συναρτήσεις καθυστέρησης

$\ell_e(x) = a_e x + b_e$ για κάθε $e \in E$. Τότε,
(α) η ροή f είναι σε Nash ισορροπία στο $\mathcal{N}$ αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι πηγής προορισμού i και $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}_i$ με $f_{\pi_1} > 0$,

$$\sum_{e \in \pi_1} a_e f_e + b_e \leq \sum_{e \in \pi_2} a_e f_e + b_e$$

(β) η ροή f^* είναι (ολικά) βέλτιστη στο $\mathcal{N}$ αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι πηγής προορισμού i και $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}_i$ με $f^*_{\pi_1} > 0$,

$$\sum_{e \in \pi_1} 2a_e f^*_e + b_e \leq \sum_{e \in \pi_2} 2a_e f^*_e + b_e \quad .$$

Από το θεώρημα 5.8 προκύπτει μία απλή απόδειξη ενός μη τετριμμένου αποτελέσματος αναφορικά με τα δίκτυα των οποίων όλες οι ακμές έχουν καθυστέρηση ανάλογη ως προς τη συμφόρηση.

Πόρισμα 5.9 Έστω ένα δίκτυο $\mathcal{N}$ στο οποίο όλες οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι της μορφής $\ell_e(x) = a_e \cdot x$. Τότε για οποιοδήποτε όγκο δρομολόγησης r μια εφικτή ροή για την κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell)$ είναι βέλτιστη αν και μόνο αν είναι NE.

Απόδειξη: Μια εφικτή ροή για μια τέτοια κατάσταση ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος 5.8(α) αν και μόνο αν ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος 5.8(β).

□

Ένα δεύτερο πόρισμα που συνάγεται από το θεώρημα 5.8 και το οποίο θα παίξει καθοριστικό ρόλο στην απόδειξη του κύριου θεωρήματος 5.12 της ενότητας αυτής, είναι το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.10 Έστω μια κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell)$ με γραμμικές συναρτήσεις κόστους και μια NE ροή f. Τότε ισχύουν,
(α) η ροή $f/2$ είναι βέλτιστη για την κατάσταση $(\mathcal{N}, r/2, \ell)$ και
(β) το οριακό κόστος της αύξησης της ροής σε ένα μονοπάτι π με ροή $f/2$ ισούται με την καθυστέρηση του π με ροή f.

Απόδειξη: Για το (α) μέρος, απλά επισημαίνουμε ότι αν η f ικανοποιεί τη συνθήκη του θεωρήματος 5.8(α) για την $(\mathcal{N}, r, \ell)$ τότε η $f/2$ ικανοποιεί τη συνθήκη του θεωρήματος 5.8(β) για την $(\mathcal{N}, r/2, \ell)$, μιας και τώρα το άθροισμα όλων των ροών, όλων υποδιπλασιασμένων, ισούται με τον μισό, από τον αρχικό, όγκο προς δρομολόγηση. Για το (β) μέρος, υπενθυμίζουμε ότι αν μία ακμή e έχει συνάρτηση καθυστέρησης $\ell_e(x) = a_e x + b_e$ τότε η e έχει συνάρτηση οριακού κόστους $\ell^*_e(x) = 2a_e x + b_e$. Άρα ισχύει $\ell^*_e(f_e/2) = \ell_e(f_e)$ για κάθε ακμή e και έτσι $\ell^*_\pi(f/2) = \ell_\pi(f)$ για κάθε μονοπάτι π.

□

Μια σύντομη περιγραφή της απόδειξης του κύριου θεωρήματος 5.12 είναι η εξής. Ας σκεφτούμε ότι θα δημιουργήσουμε μια βέλτιστη ροή για την κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell)$ μέσω δύο βημάτων. Πρώτα μια βέλτιστη ροή για την κατάσταση $(\mathcal{N}, r/2, \ell)$ στέλνεται στο δίκτυο $\mathcal{N}$ και ύστερα, στο δεύτερο βήμα, αυτή μεγεθύνεται σε μία βέλτιστη για την $(\mathcal{N}, r, \ell)$. Αυτή η μεγέθυνση μπορεί να αυξήσει ή να μειώση το ποσό, από το πρώτο βήμα, της ροής σε οποιαδήποτε ακμή. Θα δείξουμε ότι η πρώτη ροή έχει κόστος τουλάχιστον $\frac{1}{4}\mathfrak{C}(f)$ και ότι η μεγέθυνση έχει κόστος τουλάχιστον $\frac{1}{2}\mathfrak{C}(f)$, όπου f είναι μια NE ροή. Έτσι φράσσοντας το κόστος της βέλτιστης ροής από κάτω φράσσουμε το λόγο συντονισμού από άνω και συγκεκριμένα τον ταυτίζουμε με το παραπάνω κάτω φράγμα.

Θα δούμε στην απόδειξη του θεωρήματος 5.12 ότι το πρώτο κάτω φράγμα προκύπτει εύκολα από το θεώρημα 5.10(α) ενώ το δεύτερο χρειάζεται περισσότερη δουλειά και συγκεκριμένα το επόμενο λήμμα. Διαισθητικά το λήμμα 5.11 απλά υποστηρίζει ότι το μοναδιαίο κόστος της αύξησης του ποσού της ροής σε ένα δίκτυο είναι τουλάχιστον ίσο με το οριακό κόστος της αυξανόμενης ροής σε οποιοδήποτε μονοπάτι με ροή την τρέχουσα βέλτιστη.

Λήμμα 5.11 Έστω μια κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell)$ με γραμμικές συναρτήσεις κόστους για τις οποίες η f είναι βέλτιστη ροή. Έστω $L^*_i(f^*)$ το ελάχιστο οριακό κόστος της αυξανόμενης ροής σε ένα μονοπάτι $s_i - t_i$ με ροή f^*. Τότε για κάθε $\delta > 0$, μια εφικτή ροή για την κατάσταση $(\mathcal{N}, (1+\delta)\cdot r, \ell)$ έχει κόστος τουλάχιστον

$$\mathfrak{C}(f^*) + \delta \cdot \sum_{i=1}^{k} L^*_i(f^*) \cdot r_i \quad .$$

Θεώρημα 5.12 Αν η $(\mathcal{N}, r, \ell)$ έχει γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης, τότε για τον λόγο συντονισμού ισχύει $\mathfrak{R} \leq \frac{4}{3}$.

Απόδειξη: Έστω f μια NE ροή στο $\mathcal{N}$. Έστω $L_i(f)$ η καθυστέρηση της ροής σε ένα $s_i - t_i$ μονοπάτι, έτσι ώστε να ισχύει το θεώρημα 5.3, $\mathfrak{C}(f) = \sum_{i=1}^{k} L_i(f)\, r_i$. Από το θεώρημα 5.10(α) έχουμε ότι η $f/2$ είναι βέλτιστη λύση για την $(\mathcal{N}, r/2, \ell)$. Επιπλέον από το θεώρημα 5.10(β) έχουμε ότι $L^*_i(f/2) = L_i(f)$ για κάθε i (δηλαδή τα οριακά κόστη της $f/2$ συμπίπτουν με τις καθυστερήσεις της f). Αυτό εγκαθιδρύει την απαραίτητη σύνδεση μεταξύ του κόστους της μεγέθυνσης κατά $f/2$ της ροής εφικτής στη $(\mathcal{N}, r, \ell)$ και το κόστος της NE ροής και θα το δούμε στη συνέχεια της απόδειξης.

Παίρνοντας $\delta = 1$ στο λήμμα 5.11, βρίσκουμε ότι το κόστος μιας οποιασδήποτε ροής f^* εφικτής για την $(\mathcal{N}, r, \ell)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}(f^*) &\geq \mathfrak{C}(f/2) + \sum_{i=1}^{k} L_i^*(f/2)\frac{r_i}{2} \\ &= \mathfrak{C}(f/2) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} L_i(f)\, r_i \quad = \quad \mathfrak{C}(f/2) + \frac{1}{2}\,\mathfrak{C}(f) \quad .\end{aligned}$$

Αυτό που μας μένει είναι να κάτω φράξουμε το κόστος του $f/2$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}(f/2) &= \sum_e \frac{1}{4}\,a_e f_e^2 + \frac{1}{2}\,b_e f_e \\ &\geq \frac{1}{4}\sum_e a_e f_e^2 + b_e f_e \quad = \quad \frac{1}{4}\,\mathfrak{C}(f)\end{aligned}$$

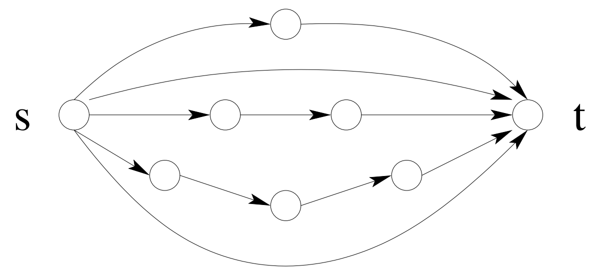
και έτσι $\mathfrak{C}(f^*) \geq \frac{3}{4}\,\mathfrak{C}(f)$.

□

Το κάτω φράγμα που δείξαμε στην αρχή της ενότητας συμπίπτει με το άνω που προέκυψε από το θεώρημα 5.12 και επομένως το φράγμα αυτό είναι σφιχτό.

5.6 Κόστος αναρχίας σε αυθαίρετα δίκτυα

Όσα θα αναφέρουμε στην ενότητα αυτή προέρχονται από τις δημοσιεύσεις του Roughgarden [40] και των Roughgarden και Tardos [43] που είναι μεταγενέστερες της [42]. Αν και η ανάλυση στη [42] ήταν καλή και σφιχτή δεν φαινόταν πιθανό να μπορέσει να επεκταθεί και σε αυθαίρετες συναρτήσεις καθυστέρησης, όπως για παράδειγμα στις συναρτήσεις από τη θεωρία ουρών. Στη [40] ο Roughgarden χρησιμοποίησε μια πιο κομψή προσέγγιση που απλοποίησε εμφανώς την ανάλυση αυτή. Έδειξε ότι ανάμεσα σε όλα τα δίκτυα, ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού επιτυγχάνεται στα δίκτυα με δύο κόμβους που ενώνονται με παράλληλες ακμές, ακόμα και με μόνο δύο ακμές, μερικές φορές. Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει τη σπουδαιότητα του μοντέλου των παράλληλων ακμών και απλοποιεί σημαντικά την ανάλυση του λόγου συντονισμού στα δίκτυα.



Σχήμα 5: Το ορισμένο ως ένωση από μονοπάτια δίκτυο.

Θα ονομάζουμε μια κλάση από συναρτήσεις καθυστέρησης $\mathcal{L}$ κανονική αν περιλαμβάνει μια μη μηδενική συνάρτηση και κάθε συνάρτηση $\ell \in \mathcal{L}$ είναι κανονική. Αναλύοντας το παράδειγμα του Pigou (Σχήμα 4) με διάφορες συναρτήσεις καθυστέρησης, ο Roughgarden παρατήρησε ότι σε πολλές περιπτώσεις ο λόγος συντονισμού για αυτό το παράδειγμα ήταν ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού. Αυτό μας οδήγησε στον ορισμό της *τιμής της αναρχίας* που είναι ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού στο παράδειγμα του Pigou, όπου χρησιμοποιείται η συνάρτηση καθυστέρησης ℓ στη δεύτερη ακμή. Πιο αυστηρά, αν ℓ είναι μια μη μηδενική κανονική συνάρτηση καθυστέρησης, τότε ορίζουμε την τιμή της αναρχίας $\alpha(\ell)$ της ℓ ως εξής

$$\alpha(\ell) \quad = \quad \sup_{r>0\,:\,\ell(r)>0} \frac{1}{\lambda\mu + (1-\lambda)} \quad ,$$

όπου το $\lambda \in [0,\, 1]$ είναι λύση του $\ell^*(\lambda\, r) = \ell(r)$ και $\mu = \ell(\lambda\, r)/\ell(r)$.

Επεκτείνουμε επιπλέον αυτήν την ιδέα σε κλάσεις συναρτήσεων και ορίζουμε την τιμή της αναρχίας μιας κανονικής κλάσης συναρτήσεων καθυστέρησης $\mathcal{L}$, ως εξής

$$\alpha(\mathcal{L}) \quad = \quad \sup_{0 \neq \ell \in \mathcal{L}} \alpha(\ell) \quad .$$

Με τους παραπάνω δύο ορισμούς μπορούμε να παρουσιάζουμε το πρώτο κύριο αποτέλεσμα της [40], το οποίο δίνει ένα ακριβές άνω φράγμα για τους λόγους συντονισμού.

Θεώρημα 5.13 Έστω $\mathcal{L}$ η κανονική κλάση των συναρτήσεων καθυστέρησης με τιμή αναρχίας $\alpha(\mathcal{L})$. Έστω η κατάσταση $(\mathcal{N},\, r,\, \ell)$ με συναρτήσεις καθυστέρησης από την $\mathcal{L}$. Τότε, ο λόγος συντονισμού άνω φράσσεται από το $\alpha(\mathcal{L})$.

Το όριο του θεωρήματος 5.13 είναι σφιχτό. Στην πραγματικότητα η κλάση των δικτύων για τα οποία το κάτω φράγμα συμπίπτει με το άνω, μπορεί να απλοποιηθεί επιπλέον αν ικανοποιούνται κάποιες επιπρόσθετες συνθήκες. Ορίζουμε δύο νέες κλάσεις συναρτήσεων καθυστέρησης. Η κλάση $\mathcal{L}$ είναι *διαφοροποιός* αν για κάθε θετική σταθερά $c > 0$ υπάρχει μια συνάρτηση καθυστέρησης $\ell \in \mathcal{L}$ με $\ell(0) = c$, και η κλάση $\mathcal{L}$ είναι *μη εκφυλισμένη* αν $\ell(0) \neq 0$ για κάποια $\ell \in \mathcal{L}$. Ένα δίκτυο καλείται *ένωση από μονοπάτια* αν μπορεί να παρασταθεί από ένα δίκτυο με παράλληλες ακμές επαναλαμβανόμενων υποδιαιρέσεων. Σκεφθείτε το ως το παράδειγμα του Pigou με περισσότερες των δύο ακμές και διάφορους ενδιάμεσους κόμβους, πααραταγμένους σε ευθείες, όπως αυτό φαίνεται στο Σχήμα 5.

Με το θεώρημα 5.14 επιτυγχάνουμε να αναγάγουμε τρεις διαφορετικές κλάσεις συναρτήσεων καθυστερήσεων σε τρεις διαφορετικές καταστάσεις. Στο θεώρημα αυτό ο όρος του χειρότερου δυνατόν λόγου συντονισμού υποδεικνύει τη χειρότερη δυνατή επιλογή μεταξύ των αναφερόμενων καταστάσεων.

Θεώρημα 5.14 Έστω ότι με $\mathcal{N}_m$ δηλώνουμε το δίκτυο με δύο κόμβους (πηγή και κατάληξη) και m παράλληλες ακμές από την πηγή στην κατάληξη.

- Αν $\mathcal{L}$ είναι η κανονική κλάση συναρτήσεων καθυστέρησης συμπεριλαμβανομένων και των σταθερών συναρτήσεων, τότε ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού για όλες τις καταστάσεις $(\mathcal{N}, r, \ell)$ με συναρτήσεις καθυστέρησης στη $\mathcal{L}$ είναι ισοδύναμος με το χειρότερο δυνατόν λόγο συντονισμού για όλες τις καταστάσεις $(\mathcal{N}_2, r, \ell)$ με συναρτήσεις καθυστέρησης στο $\mathcal{L}$.
- Αν $\mathcal{L}$ είναι μία κανονική και διαφοροποιός κλάση συναρτήσεων καθυστέρησης, τότε ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού για όλες τις καταστάσεις $(\mathcal{N}, r, \ell)$ με συναρτήσεις καθυστέρησης στη $\mathcal{L}$ είναι ισοδύναμος με το χειρότερο δυνατόν λόγο συντονισμού για όλες τις καταστάσεις $(\mathcal{N}_m, r, \ell)$ με συναρτήσεις καθυστέρησης στο $\mathcal{L}$.
- Αν $\mathcal{L}$ είναι μία κανονική και μη εκφυλισμένη κλάση συναρτήσεων καθυστέρησης, τότε ο χειρότερος δυνατόν λόγος συντονισμού για όλες τις καταστάσεις $(\mathcal{N}, r, \ell)$ με συναρτήσεις καθυστέρησης στη $\mathcal{L}$ είναι ισοδύναμος με το χειρότερο δυνατόν λόγο συντονισμού για όλες τις καταστάσεις $(\mathcal{N}^*, r, \ell)$ με συναρτήσεις καθυστέρησης στο $\mathcal{L}$, όπου με $\mathcal{N}^*$ δηλώνουμε την ένωση από μονοπάτια που ορίσαμε παραπάνω.

6 Τρόποι Βελτίωσης του Κόστους Αναρχίας

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε μεθόδους που έχουν μελετηθεί για τη μείωση του λόγου συντονισμού. Αφορούν τα παίγνια συμφόρησης και κυρίως τα δύο μοντέλα που αναπτύξαμε στα κεφάλαια 4 και 5.

6.1 Μηχανισμοί συντονισμού

Οι *μηχανισμοί συντονισμού* [5] αφορούν και τα δύο μοντέλα αλλά τα κύρια αποτελέσματά τους είναι για το μοντέλο της ανάθεσης εργασιών και θα επικεντρωθούμε μόνο σε αυτό.

6.1.1 Μοντέλα

Ένα μοντέλο συντονισμού είναι μια τετράδα $(N, M, (S_i)_{i\in N}, (C^j)_{j\in M})$ όπου $N = \{1, \ldots, n\}$ είναι το σύνολο των παικτών, M είναι το σύνολο των συνιστωσών των στρατηγικών, S_i είναι το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη i (κάθε στρατηγική αποτελείται από ένα σύνολο συνιστωσών στρατηγικών) και τέλος C^j είναι το σύνολο των συναρτήσεων κόστους που σχετίζονται με τη συνιστώσα στρατηγικών j όπως αυτές τις έχουμε δει ως τώρα. Μια φυσική ιδιότητα είναι η εξής $c_i^j(w_1, \ldots, w_{i-1}, 0, w_{i+1}, \ldots, w_n) = 0$ που εκφράζει την ιδιότητα ότι ένας παίκτης που δεν χρησιμοποιεί κάποια συνιστώσα στρατηγικών δεν επιβαρύνεται με το κόστος της.

Στα περισσότερα μοντέλα συντονισμού, οι στρατηγικές και οι συναρτήσεις κόστους είναι σαφώς ορισμένες. Για παράδειγμα εισάγουμε καθυστερήσεις και προτεραιότητες σε ένα δοσμένο παίγνιο συμφόρησης. Με την έννοια της εισαγωγής καθυστερήσεων εννοούμε ότι επιτρέπουμε την ύπαρξη νέων συναρτήσεων καθυστέρησης $\hat{c}_i^j$ με την ιδιότητα $\hat{c}_i^j(w) \geq c_i^j(w)$. Με την εισαγωγή προτεραιοτήτων εννοούμε ότι κάθε συνιστώσα στρατηγικών αναθέτει προτεραιότητες εξυπηρέτησης των παικτών, με αποτέλεσμα κάποιος παίκτης να εξυπηρετείται πρώτος σε κάποια συνιστώσα αν την διαλέξει, ενώ σε κάποια άλλη θα πρέπει να περιμένει την εξυπηρέτηση άλλων παικτών μέχρι να έρθει η σειρά του. Επισημαίνουμε, ωστόσο, ότι το μοντέλο συμφόρησης αφορά ένα συγκεκριμένο παίγνιο μιας και υπάρχει μόνο μία συνάρτηση κόστους σε κάθε συνιστώσα στρατηγικής, ενώ στο μοντέλο συντονισμού υπάρχει συλλογή από παίγνια μιας και έχουμε ένα σύνολο από συναρτήσεις κόστους για κάθε συνιστώσα στρατηγικών.

Το μοντέλο συντονισμού που αντιστοιχεί στο πρόβλημα της εγωιστικής ανάθεσης εργασιών του κεφαλαίου 4 είναι ως εξής: $N = \{1, \ldots, n\}$ είναι το σύνολο των παικτών, $M = \{1, \ldots, m\}$ είναι το σύνολο των μηχανών (ή ακμών), όλα τα S_i είναι όλα τα μονοσύνολα υποσύνολα του M, $S_i = \{\{1\}, \ldots, \{m\}\}$, μιας και κάθε παίκτης χρησιμοποιεί μία μόνο μηχανή, και οι συναρτήσεις κόστους είναι οι πιθανοί χρόνοι τερματισμού που καθορίζονται ανάλογα με τον χρονοπρογραμματισμό της κάθε μηχανής. Αυτό που πρέπει οπωσδήποτε να ισχύει είναι η σχέση για το μέγιστο χρόνο τερματισμού των παικτών στο σύνολο S, $\max_{i \in S} c_i^j(w_1, \ldots, w_n) \geq \sum_{i \in S} w_i$ για κάθε σύνολο φόρτων $(w_1, \ldots, w_n)$ και κάθε υποσύνολο $S \subseteq N$. Επισημαίνουμε ότι η μηχανή μπορεί να ταξινομήσει τις εργασίες αυθαίρετα και να εισάγει καθυστερήσεις, αλλά δεν μπορεί να επιταχύνει την εκτέλεσή τους. Για παράδειγμα μια μηχανή μπορεί να έχει ως χρονοπρογραμματισμό για δύο εργασίες με φόρτους w_1 και w_2 τέτοιον ώστε η πρώτη να τερματίζεται σε χρόνο $w_1 + w_2/2$ και η δεύτερη σε χρόνο $2\,w_1 + w_2$.

6.1.2 Μηχανισμοί

Θα ξεκινήσουμε την υποενότητα κάνοντας έναν παραλληλισμό ανάμεσα στην περίπτωσή μας και στους *άμεσους αλγόριθμους* και την *ανάλυση ανταγωνιστικότητας*, [2]. Στους άμεσους αλγόριθμους έχουμε έλλειψη πληροφόρησης ενώ εδώ έχουμε έλλειψη συντονισμού (συνεργασίας). Μπορούμε να γράψουμε τις παρακάτω αντιστοιχήσεις:

$$\begin{aligned} \text{Μοντέλο Συντονισμού} &\leftrightarrow \textit{Άμεσο Πρόβλημα} \\ \text{Μηχανισμός Συντονισμού} &\leftrightarrow \text{Άμεσος Αλγόριθμος} \\ \text{Κόστος Αναρχίας} &\leftrightarrow \textit{Λόγος Ανταγωνιστικότητας} \end{aligned}$$

Από αυτήν την αντιστοίχηση θα πρέπει να είναι επόμενο ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε σημαντικά αποτελέσματα για κάθε δυνατό μοντέλο συντονισμού με τον ίδιο τρόπο όπως δεν περιμένουμε να βρούμε μια και μόνη ανάλυση που θα λύνει κάθε δυνατό άμεσο πρόβλημα. Κάθε συγκεκριμένο μοντέλο συντονισμού που έχει πρακτική ή θεωρητική σημασία θα πρέπει να αναλύεται χωριστά. Ας δώσουμε λοιπόν τον ορισμό.

Ο μηχανισμός συντονισμού $(N, M, (S_i)_{i \in N}, (c^j)_{j \in M})$ για ένα μοντέλο συντονισμού είναι απλά ένα σύνολο από συναρτήσεις κόστους, μία για κάθε συνιστώσα στρατηγικής. Η απλότητα του ορισμού αυτού ίσως και να είναι παραπλανητική αν δεν λάβουμε υπόψη ότι το σύνολο των συναρτήσεων καθυστέρησης είναι πολύ πλούσιο. Ο μηχανισμός συντονισμού είναι βασικά ένας *αποκεντρωμένος αλγόριθμος*. Επιλέγουμε, δηλαδή, μία και μόνο φορά τις συναρτήσεις κόστους για κάθε μηχανή πριν μάθουμε την είσοδο. Πιο συγκεκριμένα, ο μηχανισμός συντονισμού για το μοντέλο της ανάθεσης εργασιών, στο οποίο θα επικεντρωθούμε αποκλειστικά, είναι ένα σύνολο από πολιτικές τοπικού χρονοπρογραμματισμού, μία για κάθε μηχανή. Ο χρονοπρογραμματισμός της κάθε μηχανής εξαρτάται μόνο από τους φόρτους της μηχανής αυτής. Έστω ο μηχανισμός συντονισμού $c = (c^1, \ldots, c^m)$, το σύνολο των φόρτων (βαρών) των παικτών (εργασιών) $w = (w_1, \ldots, w_n)$ και το σύνολο των στρατηγικών $A = (A_1, \ldots, A_n) \in S_1 \times \ldots \times S_n$. Δηλώνουμε ως $(cost_1, \ldots, cost_n)$ το κόστος που προκαλείται από τους παίκτες (εργασίες). Ορίζουμε το κοινωνικό κόστος ως το μέγιστο κόστος (καθυστέρηση) ανάμεσα σε όλες τις εργασίες,

$$sc(w; c; A) = \max_{i \in N} cost_i \quad . \tag{15}$$

Ορίζουμε το κοινωνικό βέλτιστο $opt(w)$ για ένα δοσμένο σύνολο από βάρη εργασιών w ως το ελάχιστο κοινωνικό κόστος ανάμεσα σε όλους τους μηχανισμούς συντονισμού και όλες τις στρατηγικές στο $S_1 \times \ldots \times S_n$

$$opt(w) = \inf_{c,A} sc(w; c; A) \quad . \tag{16}$$

Τονίζουμε ότι το κοινωνικό βέλτιστο υπολογίζεται με βάση τις αρχικές ταχύτητες των μηχανών και δεν έχει δικαίωμα να τις μειώσει όπως μπορεί να κάνει ένας μηχανισμός συντονισμού.

Σε ένα μηχανισμό συντονισμού c και ένα σύνολο φόρτων παικτών w αντιστοιχεί ένα παίγνιο. Το κόστος του παίκτη είναι το άθροισμα των κόστων των συνιστωσών στρατηγικών που χρησιμοποιεί. Έστω $Ne(w; c)$ το σύνολο των (μικτών) NE του παίγνιου αυτού. Ορίζουμε το κόστος της αναρχίας (ή λόγο συντονισμού) του μηχανισμού συντονισμού c ως το μέγιστο ανάμεσα σε όλα τα σύνολα φόρτων w και όλα τα NE, E, κοινωνικό κόστος προς το κοινωνικό βέλτιστο.

$$PA(c) = \sup_{w} \sup_{E \in Ne(w;c)} \frac{sc(w; c; A)}{opt(w)} \quad . \tag{17}$$

Ορίζουμε ως κόστος αναρχίας ενός μοντέλου συντονισμού το ελάχιστο κόστος αναρχίας ανάμεσα σε όλους τους μηχανισμούς συντονισμού.

Τέλος επισημαίνουμε ότι δεν είναι δυνατόν γενικά να έχουμε έναν και μόνο μηχανισμό που να ελαχιστοποιεί το κόστος του χειρότερου δυνατόν NE για κάθε πιθανό παίγνιο ενός μοντέλου συντονισμού. Αυτός είναι ο λόγος που προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος της αναρχίας και όχι απλά το κόστος του χειρότερου δυνατόν NE.

6.1.3 Εγωιστική ανάθεση εργασιών

Στο μοντέλο αυτό ο σχεδιαστής του μηχανισμού πρέπει να επιλέξει εκ των προτέρων μια πολιτική χρονοπρογραμματισμού για κάθε μηχανή, χωρίς να γνωρίζει τα βάρη των εργασιών, με στόχο την ελαχιστοποίηση του χρόνου τερματισμού των εργασιών. Η κάθε πολιτική πρέπει να εξαρτάται μόνο από τα βάρη της μηχανής στην οποία απευθύνεται και όχι από εκείνα των υπόλοιπων μηχανών.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση των $m = 2$ μηχανών. Στο [20] οι μηχανισμοί συντονισμού χρονοπρογραμματίζουν τα βάρη τυχαία. Το κόστος της αναρχίας σε αυτούς είναι 3/2. Εδώ θα περιγράψουμε έναν απλό μηχανισμό συντονισμού.

> Τα βάρη είναι ταξινομημένα κατά μέγεθος. Αν δύο ή περισσότερα βάρη έχουν το ίδιο μέγεθος, τότε ταξινομούνται κατά λεξικογραφική σειρά σε σχέση με τις εργασίες. Η πρώτη μηχανή χρονοπρογραμματίζει τα βάρη σε αύξουσα σειρά ενώ η δεύτερη σε φθίνουσα σειρά.

Ο μηχανισμός έχει ως στόχο να σπάσει τη συμμετρία μεταξύ των βαρών. Με αυτόν τον μηχανισμό εύκολα διαπιστώνουμε ότι η εργασία με το ελάχιστο βάρος θα ανατεθεί στην πρώτη μηχανή, ενώ εκείνη με το μέγιστο βάρος στη δεύτερη μηχανή. Έτσι προκύπτει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6.1 Ο παραπάνω αύξων - φθίνων μηχανισμός συντονισμού έχει κόστος αναρχίας 4/3. Συγκεκριμένα, για $n = 3$ παίκτες, έχει κόστος αναρχίας 1.

Θα δείξουμε με ένα παράδειγμα ότι δεν μπορεί να είναι καλύτερος από 4/3. Θεωρούμε 4 εργασίες με βάρη 1, 1, 2, 2. Σε ένα NE οι δύο πρώτες εργασίες πηγαίνουν στην πρώτη μηχανή και οι υπόλοιπες δύο στη δεύτερη μηχανή, οπότε και έχουμε γνήσιο NE. Το κόστος της αναρχίας είναι 4/3 μιας και η δεύτερη μηχανή έχει καθυστέρηση $2+2 = 4$ ενώ η βέλτιστη ανάθεση έχει καθυστέρηση $1 + 2 = 3$ και στις δύο μηχανές.

Δεν είναι τυχαίο ότι στην υποενότητα 4.3.1 πήραμε τις εργασίες ισοπληθείς με τις μηχανές και τα βάρη ισοδύναμα. Αυτή είναι η περίπτωση που οι παίκτες δημιουργούν μεγάλο κόστος αναρχίας, μιας και πετυχαίνουν στο συγκεκριμένο παράδειγμα το άνω φράγμα της υποενότητας 4.3.2. Ας θεωρήσουμε λοιπόν την περίπτωση όπου όλα τα βάρη είναι διαφορετικά μεταξύ τους και επιπλέον όλα τα μερικά αθροίσματα είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε τώρα το μηχανισμό συντονισμού για m μηχανές όπου κάθε μηχανή χρονοπρογραμματίζει τις εργασίες σε φθίνουσα σειρά. Για να μην υπάρχει κανένα είδος συμμετρίας υποθέτουμε ότι η μηχανή i έχει μία επιπλέον καθυστέρηση $i\,\epsilon$ για κάθε εργασία και για κάποιο μικρό $\epsilon > 0$ και ειδικά επιλεγμένο έτσι ώστε να μην δημιουργούνται *ισοφαρίσματα* στις καθυστερήσεις. Με αυτή την παραδοχή πετυχαίνουμε διαφορετικούς χρόνους καθυστέρησης (αν και με μικρή αύξηση) για την ίδια εργασία στις διαφορετικές μηχανές. Έτσι στο μοναδικό NE η μεγαλύτερη εργασία πηγαίνει στην πρώτη μηχανή (μιας και έχει τη μικρότερη επιπλέον καθυστέρηση, $i = 1$), η αμέσως επόμενη εργασία στη δεύτερη μηχανή και ούτω καθεξής. Η κάθε επόμενη εργασία πηγαίνει στη μηχανή με το μικρότερο φόρτο.

Αυτός ο μηχανισμός έχει μικρό κόστος αναρχίας. Ωστόσο δημιουργείται το ερώτημα για το τι θα γινόταν αν τα βάρη δεν ήταν διαφορετικά μεταξύ τους ή οι καθυστερήσεις $i\epsilon$ προκαλούσαν ισοφαρίσματα. Μπορούμε να τις αποφύγουμε και τις δύο περιπτώσεις με τον επόμενο μηχανισμό συντονισμού που βασίζεται σε δύο ιδιότητες:

- Κάθε μηχανή χρονοπρογραμματίζει τους φόρτους σε φθίνουσα σειρά, χρησιμοποιώντας τη λεξικογραφική σειρά για να αποφευχθούν οποιαδήποτε ισοφαρίσματα.
- Η καθυστέρηση μιας εργασίας είναι διαφορετική σε κάθε μηχανή. Για να επιτευχθεί αυτό η κάθε μηχανή μπορεί να χρειαστεί να εισάγει μια μικρή καθυστέρηση (το πολύ ένα πολλαπλάσιο του δ, για κάποιο μικρό δ). Για παράδειγμα για $m = 9$ μηχανές και $\delta = 0,001$, αν η εργασία με βάρος (κόστος) $w_i = 1$ είναι πρώτη (μεγαλύτερη) στη μηχανή 7, δεν θα τερματίσει σε χρόνο 1 αλλά σε χρόνο $1,007$.

Θεώρημα 6.2 Ο παραπάνω μηχανισμός συντονισμού για n παίκτες (εργασίες) και m συνιστώσες στρατηγικών (μηχανές) έχει κόστος αναρχίας $4/3 - 1/(3m)$.

Η απόδειξη βασίζεται στην ανάλυση που κάναμε προηγουμένως και σε ένα αποτέλεσμα του Graham [13] για τον *προσεγγιστικό λόγο* του άπληστου χρονοπρογραμματισμού με φόρτους ταξινομημένους σε φθίνουσα σειρά, που είναι ακριβώς $4/3 - 1/(3m)$.

Παρατηρούμε κάποιες επιπλέον ιδιότητες του παραπάνω μηχανισμού συντονισμού. Υπάρχει ένα μοναδικό NE και επομένως οι παίκτες είναι εύκολο να «συμφωνήσουν». Άκόμα, είναι προφανές ότι έχει χαμηλή υπολογιστική πολυπλοκότητα. Αντίθετα ο υπολογισμός των NE είναι γενικά ένα δύσκολο πρόβλημα και η πολυπλοκότητά του είναι ένα από τα πιο «μοντέρνα» ανοιχτά προβλήματα.

Το παραπάνω θεώρημα δείχνει ότι οι καλοί μηχανισμοί συντονισμού μειώνουν το κόστος αναρχίας από το $\Theta(\log m/\log\log m)$ σε μία μικρή σταθερά. Διερωτούμαστε αν υπάρχει μηχανισμός συντονισμού με καλύτερο κόστος αναρχίας από το $4/3 - 1/3m$. Οι επιστήμονες της δημοσίευσης [5] εικάζονται πως όχι.

Ο μηχανισμός συντονισμού που παρουσιάστηκε μπορεί να επεκταθεί και για τις περιπτώσεις που οι μηχανές έχουν ταχύτητες. Τότε το κόστος αναρχίας είναι $2 - 2/(m+1)$ και προκύπτει από τα αποτελέσματα του [12].

Θεώρημα 6.3 Ο παραπάνω μηχανισμός συντονισμού για n παίκτες (εργασίες) και m συνιστώσες στρατηγικών (μηχανές) με διαφορετικές ταχύτητες (όχι ισοδύναμες) έχει κόστος αναρχίας $2 - 2/(m+1)$.

Ο μηχανισμός που παρουσιάσαμε είναι κατάλληλος για παίγνια συμφόρησης με οποιοδήποτε δίκτυο με γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης. Μέχρι τώρα θεωρούσαμε το μοντέλο με τις m παράλληλες ακμές [20]. Στη νέα αυτή περίπτωση αν εφαρμόσουμε τον ίδιο μηχανισμό σε κάθε ακμή του δικτύου, το κόστος της αναρχίας είναι ο προσεγγιστικός λόγος του άπληστου αλγόριθμου επιλογής n μονοπατιών. Τονίζουμε ότι το κόστος της αναρχίας δεν είναι γνωστό (δεν έχει φραχθεί) για αυτά τα παίγνια συμφόρησης. Η δημοσίευση [5] δεν είχε περισσότερη ανάλυση του θέματος λόγω περιορισμένου χώρου και έτσι και εμείς θα σταθούμε εδώ.

6.2 Φόροι στις ακμές δικτύων

Η ανάλυση της ενότητας αυτής αφορά το μοντέλο της εγωιστικά δρομολογούμενης ροής και βασίζεται στη δημοσίευση [6] έχοντας πολλά στοιχεία (και συγκρίσεις) από την [39].

6.2.1 Εισαγωγή

Η μη αποτελεσματικότητα της εγωιστικής δρομολόγησης ωθεί στην εισαγωγή οικονομικών κινήτρων για να διασφαλιστεί η κοινωνικά επιθυμητή δρομολόγηση της κυκλοφοριακής κίνησης, παρόλη την εγωιστική συμπεριφορά. Μια αρκετά παλαιότερη ιδέα [37] είναι η εισαγωγή *χρέωσης μέσω οριακού κόστους*. Η αρχή της χρέωσης μέσω οριακού κόστους επιβάλλει ότι σε κάθε ακμή, κάθε χρήστης της ακμής πρέπει να πληρώσει ένα *τέλος* (*φόρο*) ίσο με την επιπλέον καθυστέρηση που η παρουσία του προκαλεί, στους υπόλοιπους χρήστες της ίδιας ακμής. Θεωρώντας ότι όλοι οι χρήστες χρησιμοποιούν τις διαδρομές εκείνες που ελαχιστοποιούν το άθροισμα των καθυστερήσεων και το άθροισμα των τελών ανά χρήστη, η αρχή αυτή διασφαλίζει ότι το τελικό NE πετυχαίνει τη μικρότερη δυνατή ολική καθυστέρηση [1]. Καταλήγοντας, η μη αποτελεσματικότητα της εγωιστικής δρομολόγησης μπορεί πάντα να διορθωθεί με την κατάλληλη χρέωση των ακμών του δικτύου.

Η παρατήρηση της παραγράφου αυτής είναι αυτή που διαφοροποιεί τη μελέτη στο [6]. Η αρχή της χρέωσης μέσω οριακού κόστους επικεντρώνεται μόνο στην επίτευξη μιας ροής με ελάχιστη καθυστέρηση και αγνοεί την έλλειψη πρακτικότητας για τους χρήστες του δικτύου εξαιτίας των (πιθανότατα πολύ μεγάλων) φόρων. Αυτή η παραδοχή είναι κατάλληλη μόνο όταν οι συλλεγμένοι φόροι μπορούν να επιστραφούν (άμεσα ή έμμεσα) πίσω στους χρήστες του δικτύου. Για παράδειγμα να πάρει ο καθένας ένα ισότιμο μερίδιο από τους συνολικούς συλλεγμένους φόρους. Εδώ ενδιαφερόμαστε για περιπτώσεις όπου αυτή η παραδοχή δεν ευσταθεί. Για παράδειγμα, η επιστροφή των συλλεγμένων φόρων μπορεί να είναι οικονομικά μη εφικτή ή οι φόροι μπορεί να αντιπροσωπεύουν ποσότητες από μη νομισματικά, μη επιστρέψιμα αγαθά, όπως είναι ο χρόνος και η χρονική καθυστέρηση.

Σε μια τέτοια περίπτωση που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την ολική έλλειψη ωφελιμότητας για κάθε χρήστη (χρονική καθυστέρηση και πληρωμένοι φόροι), το άθροισμα που θα καλούμε κόστος από εδώ και στο εξής στην ενότητα αυτή, αντί να ελαχιστοποιήσουμε μόνο την καθυστέρηση, πώς πρέπει να χρεώνουμε τις ακμές του δικτύου;

Ας πάρουμε το παράδοξο του Braess όπως εικονίζεται στο Σχήμα 1. Στο μοναδικό NE, ολόκληρη η κυκλοφοριακή κίνηση δρομολογείται από το μονοπάτι $s \to a \to b \to t$ και δέχεται δύο μονάδες καθυστέρησης (ο όγκος προς δρομολόγηση είναι 1). Ωστόσο, αν εφαρμοστεί φόρος ίσος με το μισό της μονάδας στην ακμή (a, b) τότε στο NE ο μισός όγκος προς δρομολόγηση ακολουθεί το μονοπάτι $s \to a \to t$ και ο άλλος μισός το $s \to b \to t$. Σε αυτό το NE όλοι δέχονται καθυστέρηση $\frac{3}{2}$ χωρίς να πληρώνει κανένας φόρους, και άρα είναι προφανώς καλύτερο από το αντίστοιχο με την απουσία των τελών.

Στην περίπτωση της χρέωσης μέσω οριακού κόστους τα τέλη θα ήταν διαφορετικά. Θα χρεώναμε με φόρο $\frac{1}{2}$ τις ακμές (s, a) και (b, t) και με φόρο 0 τις υπόλοιπες. Έτσι θα είχαμε το ίδιο NE με προηγουμένως (με καθυστερήσεις και εδώ $\frac{3}{2}$ αλλά και με χρέωση φόρων $\frac{1}{2}$ για κάθε έναν χρήστη. Για μας που μας ενδιαφέρει το άθροισμα αυτών σημαίνει κόστος 2. Επομένως στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα προτιμήσουμε την προηγούμενη ανάθεση φόρων.

6.2.2 Μοντέλο

Το μοντέλο που θα μελετήσουμε έχει ως βάση εκείνο που αναλύσαμε στο κεφάλαιο 5. Εδώ μόνο διαφοροποιούμε την ολική καθυστέρηση που την συμβολίζουμε $L(f)$ από το κόστος $C(f, \tau)$ της ροής f σε ένα δίκτυο με φόρους τ στις ακμές του, με τον παρακάτω τρόπο:

$$L(f) \;=\; \sum_{\pi \in \mathcal{P}} \ell_\pi(f)\, f_\pi \;=\; \sum_{e \in E} \ell_e(f)\, f_e \quad ,$$

$$C(f, \tau) \;=\; \sum_{\pi \in \mathcal{P}} [\ell_\pi(f) + \tau_\pi]\, f_\pi \;=\; \sum_{e \in E} [\ell_e(f_e) + \tau_e]\, f_e \quad .$$

Όμοια με το μοντέλο της εγωιστικά δρομολογούμενης ροής εκφράζουμε τον παρακάτω ορισμό. Επιπλέον ισχύει η ύπαρξη και η μοναδικότητα ροής σε Nash ισορροπία. Εκφράζουμε τις δύο ιδιότητες με τις επόμενες προτάσεις.

Ορισμός 6.4 Μια ροή εφικτή για την κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell + \tau)$ είναι NE αν για όλα τα $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}$ με $f_{\pi_1} > 0$, ισχύει $\ell_{\pi_1}(f) + \tau_{\pi_1} \leq \ell_{\pi_2}(f) + \tau_{\pi_2}$.

Πρόταση 6.5 Κάθε κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell + \tau)$ έχει κάποια ροή σε Nash ισορροπία.

Πρόταση 6.6 Αν f, $\tilde{f}$ είναι NE ροές για την $(\mathcal{N}, r, \ell + \tau)$ τότε ισχύουν:

(α) $\ell_e(f_e) = \ell_e(\tilde{f}_e)$ για όλες τις ακμές e,
(β) $C(f, \tau) = C(\tilde{f}, \tau)$.

Η επόμενη πρόταση εκφράζει ότι όλα τα μονοπάτια που χρησιμοποιούνται από μια NE ροή έχουν ίσο άθροισμα καθυστέρησης και φόρου και έτσι το κόστος της μπορεί να γραφεί με έναν πολύ απλό τρόπο.

Πρόταση 6.7 Αν f είναι μια NE ροή για την $(\mathcal{N}, r, \ell + \tau)$ τότε υπάρχει σταθερά $c \geq 0$ με $\ell_\pi(f) + \tau_\pi = c$ όποτε ισχύει $f_\pi > 0$. Επιπλέον έχουμε $C(f, \tau) = r \cdot c$.

6.2.3 Η αποτελεσματικότητα των φόρων

Το μέγιστο δυνατό κέρδος από τους φόρους εξαρτάται αποφασιστικά από το είδος των συναρτήσεων κόστους του δικτύου. Αυτή η εξάρτηση είναι χαρακτηριστική σχεδόν σε ολόκληρη τη διδακτορική εργασία του Roughgarden [41]. Μία ακόμα ένδειξη του γεγονότος αυτού βρίσκεται στη [6] όπου οι φόροι ως χρέωση μέσω οριακού κόστους μπορούν να βοηθήσουν γενικά αλλά όχι με γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης.

Εδώ θα παραθέσουμε δύο πορίσματα που πηγάζουν από την ανάλυση των ενοτήτων 5.4 και 5.5 αντίστοιχα και ένα θεώρημα. Το πόρισμα 6.8 μας λέει ότι μπορούμε να βελτιώσουμε την καθυστέρηση σε ένα δίκτυο με πολυωνυμικές συναρτήσεις καθυστέρησης προσθέτοντας φόρους στις ακμές κατά ένα συντελεστή $c_1 \frac{p}{\log p}$ το πολύ. Αντίστοιχα το πόρισμα 6.9 για γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης κατά ένα συντελεστή 4/3 το πολύ. Το θεώρημα 6.10 αναφέρεται σε δίκτυα με οποιεσδήποτε συναρτήσεις καθυστέρησης και σε αυτά δεν μπορούμε να βελτιώσουμε την καθυστέρηση περισσότερο από $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Υπενθυμίζουμε ότι το κοινωνικό βέλτιστο είναι το ίδιο (δεν αλλάζει με την προσθήκη φόρων) και επομένως οι λόγοι αυτοί βελτιώνουν κατ΄ επέκταση το κόστος αναρχίας.

Πόρισμα 6.8 Για κάποια σταθερά $c_1 > 0$ η επόμενη πρόταση ισχύει για $p \geq 2$. Έστω $(\mathcal{N}, r, \ell)$ μια κατάσταση με πολυωνυμικές συναρτήσεις καθυστέρησης με βαθμό το πολύ p και μη αρνητικούς συντελεστές, τ οι φόροι στις ακμές και f και f^τ NE ροές για τις καταστάσεις $(\mathcal{N}, r, \ell)$ και $(\mathcal{N}, r, \ell + \tau)$ αντίστοιχα. Τότε $L(f) \leq c_1 \frac{p}{\log p} \cdot C(f^\tau, \tau)$.

Πόρισμα 6.9 Έστω $(\mathcal{N}, r, \ell)$ μια κατάσταση με γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης και τ οι φόροι στις ακμές. Έστω, επίσης, f και f^τ NE ροές για τις καταστάσεις $(\mathcal{N}, r, \ell)$ και $(\mathcal{N}, r, \ell+\tau)$ αντίστοιχα. Τότε $L(f) \leq \frac{4}{3} C(f^\tau, \tau)$.

Εδώ θα θέλαμε να τονίσουμε ότι ο Roughgarden στη δημοσίευσή του [39] βρήκε μια οικογένεια δικτύων στα οποία η αφαίρεση ακμών μπορούσε να μειώσει δραματικά την καθυστέρηση της NE ροής. Σημαντικά υψηλοί φόροι μπορούν πάντα να προσεγγίσουν την αφαίρεση των ακμών μιας και αποτρέπουν την κυκλοφορία σε αυτές. Λόγω αυτής της ισοδυναμίας τα παραδείγματα που αναφέρονται στο [39] (δεν τα αναφέρουμε εδώ) υποδηλώνουν ότι το φράγμα του πορίσματος 6.9 είναι το καλύτερο και εκείνο του πορίσματος 6.8 είναι ξεχωριστό λαμβάνοντας όμως υπόψη τη σταθερά c_1.

Το επόμενο όριο είναι επίσης σημαντικό λαμβάνοντας υπόψη ότι δεν πήραμε κανένα περιορισμό και δεν κάναμε καμία παραδοχή για το είδος των συναρτήσεων καθυστέρησης όταν μάλιστα το κόστος αναρχίας σε αυτά είναι μη φραγμένο.

Θεώρημα 6.10 Έστω $(\mathcal{N}, r, \ell)$ μια κατάσταση με n κόμβους και τ οι φόροι στις ακμές της. Έστω, επίσης, f και f^τ NE ροές για τις καταστάσεις $(\mathcal{N}, r, \ell)$ και $(\mathcal{N}, r, \ell + \tau)$ αντίστοιχα. Τότε $L(f) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot C(f^\tau, \tau)$.

Και εδώ η δημοσίευση [39] με τα παραδείγματά της δείχνει ότι το φράγμα του θεωρήματος 6.10 είναι το καλύτερο δυνατό.

6.2.4 Σύγκριση φόρων με αφαίρεση ακμών

Υπάρχει μία ισχυρή συσχέτιση μεταξύ της αποτελεσματικότητας των φόρων και της αφαίρεσης ακμών και αυτό θίχτηκε ελαφρώς στην προηγούμενη υποενότητα. Συγκεκριμένα είδαμε τρία φράγματα για τη μέγιστη δυνατή βελτίωση του κόστους, για τρία διαφορετικά είδη συναρτήσεων καθυστέρησης, που ταυτίζονται για τις δύο μεθόδους βελτίωσης του κόστους αναρχίας. Εδώ θα κάνουμε τη σύγκρισή τους για τις γενική και γραμμικών συναρτήσεων καθυστέρησης περιπτώσεις πιο αναλυτικά.

Θεωρούμε την πρώτη περίπτωση με ένα δίκτυο με συναρτήσεις καθυστέρησης $\ell(x) = ax + b$. Θα δείξουμε ότι οι φόροι δεν είναι ποτέ πιο αποτελεσματικοί από την αφαίρεση ακμών σε αυτά τα δίκτυα. Λέμε ότι ένα σύνολο φόρων για την κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell)$ είναι $0/\infty$ αν για κάποια NE ροή f^τ για την $(\mathcal{N}, r, \ell + \tau)$ ισχύει $\tau_e = 0$ ή $f_e^\tau = 0$ για κάθε ακμή e. Επισημαίνουμε ότι οι φόροι $0/\infty$ δεν είναι πιο αποτελεσματικοί από την αφαίρεση ακμών αφού ισχύει $c(\mathcal{N}, r, \ell + \tau) = c(\mathcal{H}, r, \ell)$, όπου $c(\mathcal{N}, r, \ell + \tau)$ είναι η τιμή της σταθεράς c της πρότασης 6.7 για την κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell + \tau)$, $\mathcal{H}$ είναι το υποδίκτυο του $\mathcal{N}$ που αποτελείται από τις ακμές με μηδενικούς (και όχι ∞) φόρους. Μια φορολογία είναι βέλτιστη για την $(\mathcal{N}, r, \ell)$ αν ελαχιστοποιεί το $c(\mathcal{N}, r, \ell + \tau)$ ανάμεσα σε όλα τα διανύσματα φόρων τ. Το επόμενο θεώρημα ολοκληρώνει την ανάλυσή μας.

Θεώρημα 6.11 Μια κατάσταση με γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης επιδέχεται ένα βέλτιστο σύνολο φόρων που είναι $0/\infty$.

Παρόλα αυτά δεν συμβαίνει το ίδιο και για την γενική περίπτωση, όπου οι φόροι μπορούν να έχουν καλύτερα αποτελέσματα. Στην πραγματικότητα, για κάθε $n \geq 2$ υπάρχει ένα n-κόμβων δίκτυο όπου οι γενικοί φόροι μπορούν να βελτιώσουν τους $0/\infty$ κατά ένα συντελεστή $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Με αυτό το αποτέλεσμα θα αντιληφθούμε καλύτερη τη σχέση μεταξύ των φόρων και της αφαίρεσης ακμών στα γενικά δίκτυα. Αφαιρώντας τις ακμές μπορούμε να βελτιώσουμε τη NE ροή κατά ένα συντελεστή $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ([39], πρόταση 4.2). Με βάση το παρακάτω θεώρημα οι φόροι μπορούν να βελτιώσουν τη NE ροή κατά $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ περισσότερο από την αφαίρεση ακμών, με τον περιορισμό ότι ο συνδυασμός τους δεν μπορεί να βελτιώσει την (αρχική) NE ροή περισσότερο από το συντελεστή $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, κάτι που δείξαμε στο θεώρημα 6.10.

Θεώρημα 6.12 Για κάθε $n \geq 2$ υπάρχει μια κατάσταση $(\mathcal{N}, r, \ell)$ με $c(\mathcal{H}, r, \ell) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ για όλα τα υποδίκτυα $\mathcal{H}$ του $\mathcal{N}$ αλλά με $c(\mathcal{N}, r, \ell + \tau) = 1$ για κάποια φορολογία $\tau \geq 0$.

6.3 k-Υλοποίηση

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τη γενική ιδέα της [25] με κάποια από τα αποτελέσματά της. Η μέθοδος που ακολουθείται δεν εστιάζει σε ένα από τα δύο μοντέλα αλλά είναι πιο γενική.

6.3.1 Εισαγωγή

Ο *σχεδιασμός μηχανισμού* και η θεωρία *υλοποίησης* είναι βασικά εργαλεία για τους ερευνητές στον χώρο της θεωρίας παιγνίων και των συστημάτων με πολλούς χρήστες, ειδικά εάν παρουσιάζουν εγωιστική συμπεριφορά. Στον κλασσικό σχεδιασμό μηχανισμού μια κεντρική μονάδα ορίζει την αλληλεπίδραση μεταξύ των εγωιστικά κινούμενων ομάδων χρηστών, με σκοπό να πετύχει τον επιθυμητό στόχο, λαμβάνοντας υπόψη τα κίνητρα (συμφέροντα) των χρηστών αυτών. Μπορούμε να δούμε την κεντρική μονάδα ως μια κυβέρνηση ή έναν πωλητή που καθορίζει και ελέγχει τους κανόνες της αλληλεπίδρασης αυτής. Ωστόσο σε πολλά κατανεμημένα συστήματα και σε αλληλεπιδράσεις με πολλούς χρήστες οι *σκόπιμα αναμεμιγμένες ομάδες* δεν μπορούν να ελέγξουν τους κανόνες των αλληλεπιδράσεων (αλληλοσυγκρούσεων). Ένας διαχειριστής δικτύου, για παράδειγμα, δεν μπορεί απλά να αλλάξει τα επικοινωνιακά πρωτόκολλα σε ένα δοσμένο κατανεμημένο σύστημα με σκοπό να πετύχει επιθυμητές συμπεριφορές. Θα μελετήσουμε το σχεδιασμό μηχανισμού στην επόμενη ενότητα. Η δημοσίευση [25] εστιάζει στο πώς μία αξιόπιστη σκόπιμα αναμεμιγμένη ομάδα, που δεν μπορεί να αλλάξει τους κανόνες της αλληλεπίδρασης και δεν μπορεί να εξαναγκάσει τους χρήστες στην επιλογή των αποφάσεών τους, μπορεί να πετύχει τους επιθυμητούς της στόχους. Μπορεί να προβεί σε πληρωμές των χρηστών, όταν τελειώσει ο κύκλος των επιλογών, και οι χρήστες μπορούν να είναι σίγουροι ότι θα πληρωθούν με τον τρόπο που αρχικά είχε ειπωθεί από την σκόπιμα αναμεμιγμένη ομάδα.

Εδώ θα αναλύσουμε την υλοποίηση των επιθυμητών συμπερισφορών από την σκόπιμα αναμεμιγμένη ομάδα, σύμφωνα με τα παραπάνω. Υπάρχουν δύο βασικά θέματα που κάνουν την έρευνα αυτή μη τετριμμένη και προκλητική:

1. Η σκόπιμα αναμεμιγμένη ομάδα μπορεί να υποθέσει ότι η λογική των χρηστών είναι μικρή, όσο μικρή γίνεται. Στην ιδανική περίπτωση, θα υποθέσουμ ότι ένας χρήστης δεν αποδέχεται μια στρατηγική αν αυτή κυριαρχείται από κάποια άλλη (ενότητα 2.2).
2. Η σκόπιμα αναμεμιγμένη ομάδα μπορεί να θέλει να ελαχιστοποιήσει τα έξοδά της.

Ας θεωρήσουμε το επόμενο απλό σύστημα συμφόρησης. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο παίκτες, ο 1 και ο 2, που έχουν να επιλέξουν μεταξύ δύο παροχέων υπηρεσιών (π.χ. μηχανές, επικοινωνιακές γραμμές, κλπ). Ένας από αυτούς, ο f, είναι ο γρήγορος, ενώ ο άλλος, ο s, είναι ο αργός. Αυτό το δείχνουμε με αριθμούς δίνοντας κέρδος 6 στον ένα και μόνο παίκτη που χρησιμοποιεί τον f και 4 στον ένα και μόνο που χρησιμοποιεί τον s. Αν όμως και οι δύο παίκτες διαλέξουν τον ίδιο παροχέα υπηρεσιών τότε η ταχύτητά του μειώνεται στο μισό και επομένως το κέρδος του κάθε παίκτη υποδιπλασιάζεται. Παρακάτω δείχνουμε την κανονική μορφή του παραπάνω παίγνιου, όπου ο παίκτης 1 διαλέγει γραμμές και ο παίκτης 2 στήλες.

$$M = \begin{array}{cc} \{f\} & \{s\} \\ \left(\begin{array}{cc} (3,3) & (6,4) \\ (4,6) & (2,2) \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \{f\} \\ \{s\} \end{array}$$

Ας υποθέσουμε ότι η αξιόπιστη, σκόπιμα αναμεμιγμένη ομάδα θέλει να εμποδίσει τους χρήστες από το να χρησιμοποιήσουν τον ίδιο παροχέα υπηρεσιών. Τότε μπορεί να ενεργήσει ως εξής. Θα υποσχεθεί στον χρήστη 1 ότι θα τον πληρώσει με το ποσό 10 αν και οι δύο χρήστες χρησιμοποιήσουν τον f και θα υποσχεθεί στον 2 το ποσό 10 αν και οι δύο χρησιμοποιήσουν τον s. Με αυτές τις υποσχέσες έχουμε ένα νέο παίγνιο που η κανονική του μορφή είναι παρακάτω.

$$M' = \begin{array}{cc} \{f\} & \{s\} \\ \left(\begin{array}{cc} (13,3) & (6,4) \\ (4,6) & (2,12) \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \{f\} \\ \{s\} \end{array}$$

Επισημαίνουμε ότι στο M' η στρατηγική f είναι κυρίαρχη για τον χρήστη 1 και η s κυρίαρχη για τον 2. Ως αποτέλεσμα έχουμε ότι το μόνο λογικό διάνυσμα στρατηγικών είναι εκείνο στο οποίο ο χρήστης 1 επιλέγει τον f και ο 2 τον s. Έτσι, η σκόπιμα αναμεμιγμένη ομάδα πετυχαίνει το ένα από τα δύο επιθυμητά αποτελέσματα. Επιπλέον δοσμένου του διανύσματος στρατηγικών (f, s) η σκόπιμα αναμεμιγμένη ομάδα δεν έχει να πληρώσει τίποτα. Υλοποίησε, απλά, με κυρίαρχες στρατηγικές, μία επιθυμητή συμπεριφορά με μηδενικό κόστος, βασισμένη μόνο στην αξιοπιστία της, χωρίς να αλλάξει τους κανόνες των αλληλεπιδράσεων ή να εξαναγκάσει κάποια συμπεριφορά.

Αντί, λοιπόν, να εξηγούμε το πώς θα συμπεριφερθούν οι χρήστες σε ένα δοσμένο πρωτόκολλο, μπορούμε να θελήσουμε να προκαλέσουμε στους χρήστες επιθυμητές συμπεριφορές χρησιμοποιώντας *νομισματικές προσφορές*. Ένα σημαντικό σημείο είναι το γεγονός ότι ο νομισματικές προσφορές δεν είναι απαραίτητο να πραγματοποιηθούν τελικά όταν οι χρήστες ακολουθήσουν την επιθυμητή συμπεριφορά. Πιο επίσημα, εισάγουμε την έννοια της k-υλοποίησης ενός συνόλου από επιθυμητά διανύσματα στρατηγικών, όπου το k δηλώνει το ποσό της πληρωμής που πρέπει πραγματικά να δοθεί στους χρήστες για να υλοποιήσουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα.

6.3.2 Ορισμοί

Ένα *προπαίγνιο* σε στρατηγική (κανονική) μορφή είναι ένα ζεύγος $G = (N, X)$, όπου $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ είναι το σύνολο των παικτών, $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, όπου για κάθε i, X_i είναι το σύνολο των στρατηγικών διαθέσιμων στον παίκτη i. Οι συναρτήσεις κέρδους U_i για κάθε παίκτη i ορίζονται όπως τις έχουμε δει ως τώρα. Έχουμε το δίανυσμα αυτών $U = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Ένα προπαίγνιο G και ένα διάνυσμα συναρτήσεων κέρδους U ορίζουν ένα παίγνιο σε στρατηγική μορφή που το συμβολίζουμε με $G(U)$. Η κυριαρχία στο παίγνιο αυτό ορίζεται όπως ακριβώς την έχουμε δει στην ενότητα 2.2. Τονίζουμε για μια ακόμα φορά ότι οι παίκτες είναι λογικοί και δεν πρόκειται να επιλέξουν μια κυριαρχούμενη στρατηγική.

Στο προπαίγνιο $G = (N, X)$ για κάθε διάνυσμα συναρτήσεων κέρδους V, έστω $\bar{X}_i(V)$ το σύνολο των μη κυριαρχούμενων στρατηγικών του i στο παίγνιο $G(V)$ και έστω $\bar{X}(V) = \bar{X}_1(V) \times \bar{X}_2(V) \times \ldots \times \bar{X}_n(V)$. $\bar{G}(V)$ είναι το παίγνιο $(N, \bar{X}, V)$, όπου πλέον το V είναι το διάνυσμα των συναρτήσεων κέρδους περιορισμένο στις στρατηγικές $\bar{X}$. Ένα διάνυσμα V είναι μη αρνητικό $(V \geq 0)$ αν $V_i(x) \geq 0$ για κάθε παίκτη i και κάθε $x \in X$.

Θεωρούμε ένα σύνολο από επιθυμητά διανύσματα στρατηγικών $O \subseteq X$ στο παίγνιο $G(U)$. Ένα μη αρνητικό διάνυσμα από συναρτήσεις κέρδους V υλοποιεί το O στο $G(U)$ αν

- $\emptyset \subset \bar{X}(U + V) \subseteq O$.

Ένα τέτοιο V καλείται k-υλοποίηση του O στο $G(U)$ αν επιπρόσθετα ισχύει

- $\sum_{i=1}^{n} V_i(x) \leq k$ για κάθε $x \in \bar{X}(U + V)$.

Προφανώς, με την πληρωμή του κάθε παίκτη i με ένα επαρκές ποσό χρημάτων για να παίξει τη σρταγητική που σχετίζεται με ένα συγκεκριμένο διάνυσμα στρατηγικών στο O, μπορούμε να υλοποιήσουμε το O. Έτσι δρα η σκόπιμα αναμεμιγμένη ομάδα, με μη αρνητικά κέρδη V, με τέτοιο τρόπο ώστε οι λογικοί παίκτες θα οδηγηθούν στο O και το χειρότερο δυνατόν ποσό που η σκόπιμα αναμεμιγμένη ομάδα θα έχει να πληρώσει να είναι το πολύ k.

Έχουμε δεχθεί δύο σημαντικές παραδοχές:

- *Ευδιάκριτη έξοδος*: Η σκόπιμα αναμεμιγμένη ομάδα μπορεί να αντιληφθεί και να παρακολουθεί τις ενέργειες των παικτών.
- *Κύρος δέσμευσης*: Η σκόπιμα αναμεμιγμένη ομάδα είναι αξιόπιστη με την έννοια ότι οι παίκτες πιστεύουν ότι αυτή θα τους πληρώσει πράγματι το επιπρόσθετο κέρδος που ορίζεται από το V.

Έτσω $k(O)$ το τίμημα της υλοποίησης O. Αυτό σημαίνει ότι το $k(O)$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα (ΜΚΦ) όλων των μη αρνητικών αριθμών q για τους οποίους υπάρχει μία q-υλοποίηση. Δηλαδή, η $k(O) = k$ υποδηλώνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$, το O έχει ένα $(k + \epsilon)$-διάνυσμα υλοποίησης V^{ϵ} και το O δεν έχει μια k'-υλοποίηση για κάθε $k' < k$. Η V είναι μια βέλτιστη υλοποίηση του O αν η V υλοποιεί το O και ισχύει

$$\max_{x \in \bar{X}(U+V)} \sum_{i=1}^{n} V_i(x) \;=\; k(O) \quad .$$

Η V είναι μια ϵ βέλτιστη υλοποίηση του O αν η V υλοποιεί το O και ισχύει

$$\max_{x \in \bar{X}(U+V)} \sum_{i=1}^{n} V_i(x) \;\le\; k(O) + \epsilon \quad .$$

6.3.3 Αποτελέσματα

Θεώρημα 6.13 Έστω $G(U)$ ένα πεπερασμένο παίγνιο με τουλάχιστον δύο στρατηγικές για κάθε παίκτη. Κάθε διάνυσμα στρατηγικών z έχει μια βέλτιστη υλοποίηση V και επιπλέον ισχύει

$$k(z) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \max_{x_i \in X_i}(U_i(x_i, z_{-i}) - U_i(z_i, z_{-i})) \quad .$$

Απόδειξη: Έστω $z \in X$ και έστω το V υλοποιεί το z. Έστω $i \in N$. Αν για κάποιο $x_i \neq z_i$, και για κάθε x_{-i}, $V_i(x_i, x_{-i}) > 0$, τότε κάποιος μπορεί να τροποποιήσει αυτών τον όρο σε μηδέν και να αποκτήσει μια φθηνότερη υλοποίηση του z. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να δεχθούμε ότι για κάθε i και για κάθε $x_i \neq z_i$ ισχύει $V_i(x_i, *) = 0$.

Με την προσθήκη των πληρωμών έχουμε κάνει τη στρατηγική z κυρίαρχη. Έτσι η z_i είναι κυρίαρχη στρατηγική του i στο $G(U+V)$, που σημαίνει $V_i(z_i, x_{-i}) + U_i(z_i, x_{-i}) \ge V_i(x_i, x_{-i}) + U_i(x_i, x_{-i})$ για κάθε $x_i \in X_i$ και για κάθε $x_{-i} \in X_{-i}$. Όμως $x_i \neq z_i$ και $V_i(x_i, *) = 0$, οπότε έχουμε $V_i(z_i, x_{-i}) + U_i(z_i, x_{-i}) \ge U_i(x_i, x_{-i})$ για κάθε $x_i \in X_i$. Ή διαφορετικά $V_i(z_i, x_{-i}) \ge \max_{x_i \in X_i}(U_i(x_i, x_{-i}) - U_i(z_i, x_{-i}))$.
Μιας και έχουμε δεχθεί ότι κάθε παίκτης έχει τουλάχιστον δύο στρατηγικές μπορεί γενικά να ισχύει $x_{-i} \neq z_{-i}$. Έτσι η βέλτιστη υλοποίηση V για το z, ορίζεται για κάθε παίκτη ως εξής: $V_i(x_i, *) = 0$ για κάθε $x_i \neq z_i$ και $V_i(z_i, x_{-i}) = \max_{x_i \in X_i}(U_i(x_i, z_{-i}) - U_i(z_i, z_{-i})) + \delta(x_{-i})$, όπου $\delta : X_{-i} \to \Re$ είναι μια μη αρνητική συνάρτηση με $\delta(z_{-i}) = 0$ και για $x_{-i} \neq z_{-i}$ έχουμε $\delta(x_{-i}) > 0$ έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα. Άρα ισχύει το ζητούμενο.

$\square$

Σημειώνουμε ότι το z είναι ΝΕ αν και μόνο αν για κάθε παίκτη i, ισχύει $\max_{x_i \in X_i}(U_i(x_i, z_{-i}) - U_i(z_i, z_{-i})) = 0$. Το επόμενο πόρισμα του θεωρήματος 6.13 είναι ένας χαρακτηρισμός του ΝΕ.

Πόρισμα 6.14 Έστω $G(U)$ ένα πεπερασμένο παίγνιο με τουλάχιστον δύο στρατηγικές για κάθε παίκτη και $z \in X$. Το z είναι ΝΕ αν και μόνο αν το z έχει 0-υλοποίηση.

Στο προηγούμενο θεώρημα θέλαμε να υλοποιήσουμε ένα μόνο διάνυσμα στρατηγικών. Ωστόσο, από την πλευρά της πολυπλοκότητας, δοσμένων ενός παίγνιου $G(U)$ και ενός συνόλου, πλέον, από επιθυμητά διανύσματα στρατηγικών O, μπορεί να ενδιαφερθούμε να βρούμε το μικρότερο ακέραιο $k \geq 0$ για τον οποίο μία k-υλοποίηση υπάρχει.

Θεώρημα 6.15 Δοσμένων ενός παίγνιου $G(U)$, ενός συνόλου από επιθυμητά διανύσματα στρατηγικών O και ενός ακεραίου $k \geq 0$, το να αποφασίσουμε αν υπάρχει μια k-υλοποίηση του O στο $G(U)$ είναι NP-δύσκολο.

Μιας και το παραπάνω πρόβλημα είναι τόσο δύσκολο μπορούμε να μετριάσουμε την αυστηρότητά μας εξετάζοντας κάποιες παραλλαγές, όπως είναι και η επόμενη, με χαμηλότερη, ίσως, πολυπλοκότητα.

Ένα μη αρνητικό διάνυσμα από συναρτήσεις κέρδους V καλείται k-ακριβής υλοποίηση του O στο $G(U)$, αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο συνθήκες:

- $\bar{X}(U+V) = O$.
- $\sum_{i=1}^{n} V_i(x) \leq k$ για κάθε $x \in O$.

Έτσι, το V υλοποιεί το O σημαίνει ότι ένα σύνολο από μη κυριαρχούμενες στρατηγικές στο $G(U+V)$ είναι υποσύνολο τπυ O, ενώ το V είναι ακριβής υλοποίηση του O αν αυτό το σύνολο ταυτίζεται με το O. Επισημαίνουμε ότι το σύνολο O δεν μπορεί να περιέχει δύο στρατηγικές ενός παίκτη i που η μία να κυριαρχεί έναντι της άλλης και ταυτόχρονα να έχει ακριβή υλοποίηση. Όταν μελετάμε μονοσύνολα οι δύο ορισμοί συμπίπτουν. Με το παρακάτω θεώρημα δείχνουμε τη χαμηλότερη πολυπλοκότητα αυτής της έννοιας.

Θεώρημα 6.16 Ο υπολογισμός του βέλτιστου k για το οποίο υπάρχει μία ακριβής υλοποίηση είναι πολυωνυμικός.

Η απόδειξή του είναι κατασκευαστική και αποτελείται από έναν αλγόριθμο που τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο.

6.4 Σχεδιαμός μηχανισμών

Ο χώρος του σχεδιασμού μηχανισμού στοχεύει στη μελέτη του τρόπου με τον οποίο οι ιδιωτικές προτιμήσεις πολλών διαφορετικών ανθρώπων μπορούν να συναθροιστούν μέσω μίας «κοινωνικής επιλογής». Η κύρια δραστηριοποίηση είναι μικροοικονομική και χρησιμοποιεί εργαλεία από τη θεωρία παιγνίων. Έμφαση δίνεται στην υλοποίηση διαφόρων ειδών *μοντέλων πλειστηριασμών*. Από τα μέσα της δεκαετίας του '90 ο χώρος αυτός έχει αποκτήσει μεγάλο ενδιαφέρον. Μια πιο εκτενή εισαγωγή για το σχεδιασμό μηχανισμού μπορείτε να βρείτε στο κεφάλαιο 10 του [33].

6.4.1 Εισαγωγή

Ένα μεγάλο μέρος της έρευνας στην επιστήμη των υπολογιστών ασχολείται με πρωτόκολλα και αλγόριθμους για διασυνδεδεμένες συλλογές από υπολογιστές. Ο σχεδιαστής ενός τέτοιου αλγόριθμου ή πρωτόκολλου πάντα κάνει μια παραδοχή ότι οι συμμετέχοντες υπολογιστές θα δράσουν βάσει προγράμματος εκτός και αν συμβεί κάτι απρόσμενο, όπως μία βλάβη.

Με την ανάδυση του διαδικτύου ως μια υπολογιστική πλατφόρμα, αυτή η παραδοχή δεν μπορεί πλέον να υφίσταται. Οι υπολογιστές στο διαδίκτυο ανήκουν σε διαφορετικά πρόσωπα ή οργανισμούς και πιθανότατα θα κάνουν αυτό που είναι συμφερότερο για τους ίδιους. Δεν μπορούμε να περιμένουμε απλά κάθε υπολογιστή στο διαδίκτυο να ακολουθεί πιστά τα σχεδιασμένα πρωτόκολλα ή αλγόριθμους. Έτσι, ένας τέτοιος αλγόριθμος ή πρωτόκολλο πρέπει να σχεδιαστεί εκ των προτέρων για μια τέτοιου είδους εγωιστική συμπεριφορά. Δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι τα δύο κύρια μοντέλα της εργασίας αυτής. Εδώ θα τα αναλύσουμε από την πλευρά του διαδικτύου.

Ανάθεση εργασιών

Η συνολική υπολογιστική δύναμη όλων των υπολογιστών είναι τεράστια. Σε έναν ιδανικό κόσμο αυτή η συνολική ισχύς θα ανατιθόταν βέλτιστα άμεσα σε όλους τους συνδεδεμένους επεξεργαστές. Ας φανταστούμε εντατικές εργασίες επεξεργαστών που ανατίθονται σε επεξεργαστές - εξυπηρετητές και επιπλέον χρησιμοποιούν τον άδειο χώρο των σκληρών τους δίσκων. Η πρόσβαση στα δεδομένα, οι επικοινωνιακές γραμμές και ακόμα και φυσικές συνδέσεις, όπως είναι οι εκτυπωτές, να ανατίθονταν μέσω του διαδικτύου. Αυτό είναι προφανώς ένα δύσκολο πρόβλημα βελτιστοποίησης, ειδικά όταν οι πηγές ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες ανθρώπων πολλές φορές αντίπαλες μεταξύ τους. Οι αλγόριθμοι και τα πρωτόκολλα πρέπει, επομένως, να παρέχουν κάποια κίνητρα για να πείσουν τους ιδιοκτήτες να «παίξουν».

Δρομολόγηση

Όταν ένας υπολογιστής θελήσει να στείλει πληροφορίες σε έναν άλλο, τα δεδομένα συνήθως δρομολογούνται μέσω διάφορων ενδιάμεσων δρομολογητών. Ως τώρα αυτό γίνεται (γινόταν) εθελοντικά, πιθανότατα λόγω του χαμηλού οριακού κόστους της προώθησης ενός πακέτου. Ωστόσο, όταν η επικοινωνία με μεγαλύτερους όγκους δεδομένων (π.χ. video) γίνει πιο κοινή και το εύρος της γραμμής επικοινωνίας χρειαστεί να δεσμευτεί από κάποιο πρωτόκολλο για κάποια ποιότητα υπηρεσίας, αυτή η αλτρουιστική συμπεριφορά των δρομολογητών θα πάψει να ισχύει. Όταν συμβεί αυτό θα πρέπει να σχεδιάσουμε πρωτόκολλα που να λαμβάνουν υπόψη τον εγωισμό των δρομολογητών.

6.4.2 Μοντέλο

Διαισθητικά, ένα πρόβλημα σχεδιασμού μηχανισμού έχει δύο συστατικά: την αλγοριθμική περιγραφή της εξόδου και τις περιγραφές του τι οι συμμετέχοντες χρήστες επιθυμούν, αυστηρά δοσμένες ως συναρτήσεις κέρδους με πεδίο ορισμού το σύνολο των πιθανών εξόδων.

Ορισμός 6.17 (Πρόβλημα Σχεδιασμού Μηχανισμού) Ένα πρόβλημα σχεδιασμού μηχανισμού δίνεται από την περιγραφή της εξόδου και από το σύνολο των συναρτήσεων κέρδους των χρηστών. Συγκεκριμένα:

1. Υπάρχουν n χρήστες, όπου ο καθένας χρήστης i έχει μια ιδιωτική είσοδο $t^i \in T^i$, που καλείται *ιδιωτικός τύπος*. Οτιδήποτε άλλο σε αυτό το σενάριο είναι δημοσίως γνωστό.
2. Η περιγραφή της εξόδου συναρτησιακά απεικονίζει σε κάθε διάνυσμα $t = t^1 \ldots t^n$ ένα σύνολο από επιτρεπτές εξόδους $o \in O$.
3. Οι προτιμήσεις κάθε χρήστη i δίνονται από μία συνάρτηση $u^i(t^i, o)$, που καλείται αποτίμηση. Αυτή είναι η ποσοτικοποίηση, κατά εκείνον, της αξίας της εξόδου o, όταν ο ιδιωτικός του τύπος είναι t^1, αναφορικά με κάποια κοινή μονάδα μέτρησης.

Ακόμα πιο συγκεκριμένα για τα προβλήματα βελτιστοποίησης με τα οποία ασχολούμαστε στην εργασία αυτή θα δόσουμε τον παρακάτω ορισμό (ελαχιστοποίησης).

Ορισμός 6.18 (Πρόβλημα Βελτιστοποίησης Σχεδιασμού Μηχανισμού) Αυτό είναι ένα πρόβλημα σχεδιασμού μηχανισμού όπου η περιγραφή της εξόδου δίνεται από μία αντικειμενική συνάρτηση $g(o, t)$ και ένα σύνολο από εφικτές εξόδους F. Στην ακριβή περίπτωση αναζητούμε μια έξοδο $o \in F$ που ελαχιστοποιεί τη g και στην κατά προσέγγιση περίπτωση αναζητούμε οποιαδήποτε $o \in F$ που για έναν συντελεστή c και για οποιαδήποτε άλλη έξοδο $o' \in F$ ισχύει $g(o,t) \leq g(o',t)$.

Διαισθητικά, ένας μηχανισμός λύνει ένα δοσμένο πρόβλημα με την επιβεβαίωση ότι οι ζητούμενοι έξοδοι συμβαίνουν όταν οι χρήστες μεγιστοποιούν τα κέρδη τους, με τον γνωστό, πλέον, εγωιστικό τρόπο. Άρα ο μηχανισμός πρέπει να εξασφαλίζει ότι τα κέρδη αυτά είναι συμβατά με τον αλγόριθμο.

Ορισμός 6.19 (Μηχανισμός) Ένας μηχανισμός $m = (o, p)$ απαρτίζεται από δύο μέλη: Μία συνάρτηση εξόδου $o()$ και μία n-άδα από πληρωμές $p^1(), \ldots, p^n()$. Ειδικότερα:

1. Ο μηχανισμός ορίζει για κάθε παίκτη i μια οικογένεια στρατηγικών A^i. Ο χρήστης μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε στρατηγική $a^i \in A^i$.
2. Το πρώτο πράγμα που ένας μηχανισμός πρέπει να παρέχει είναι μια συνάρτηση εξόδου $o = o(a^1, \ldots, a^n)$.
3. Το δεύτερο είναι μια πληρωμή $p^i = p^i(a^1, \ldots, a^n)$.
4. Λέμε ότι ένας μηχανισμός είναι μια υλοποίηση με κυρίαρχες στρατηγικές (όπως την είδαμε στην ενότητα 6.3) αν

   - Για κάθε χρήστη i υπάρχει μια κυρίαρχη στρατηγική $a^i \in A^i$.
   - Για κάθε n-άδα από κυρίαρχες στρατηγικές $a = (a^1, \ldots, a^n$ η έξοδος $o(a)$ ικανοποιεί το στόχο του μηχανισμού.

Ένας μηχανισμός είναι πολυωνυμικός αν η έξοδος και οι συναρτήσεις πληρωμής είναι υπολογίσιμες σε πολυωνυμικό χρόνο. Ωστόσο δεν θα επεκτεθούμε στην πολυπλοκότητα των μηχανισμών και στο πώς αυτοί υπολογίζονται σε ένα κατανεμημένο σύστημα.

Τα πιο απλά είδη μηχανισμών είναι εκείνα στα οποία οι στρατηγικές των χρηστών είναι απλά να δηλώνουν τον ιδιωτικό τους τύπο.

Ορισμός 6.20 (Ειλικρινής Υλοποίηση) Ένας μηχανισμός είναι *ειλικρινής* αν

1. Για κάθε i και όλους τους t^i ισχύει $A^i = T^i$.
2. Η ειλικρινής αναφορά από τη μεριά των χρηστών είναι κυρίαρχη στρατηγική, δηλαδή η σχέση $a^i = t^i$ ικανοποιεί τον ορισμό της κυρίαρχης στρατηγικής.

Ορισμός 6.21 Ένας μηχανισμός είναι ισχυρά ειλικρινής αν η ειλικρινής αναφορά από τη μεριά των χρηστών είναι η μοναδική κυρίαρχη στρατηγική.

Μία απλή σχετικά παρατήρηση, γνωστή ως η *αρχή της αποκάλυψης*, δηλώνει ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να επικεντρωθούμε σε ειλικρινείς υλοποιήσεις.

Πρόταση 6.22 Αν υπάρχει ένας μηχανισμός που υλοποιεί ένα δοσμένο πρόβλημα με κυρίαρχες στρατηγικές τότε υπάρχει, επίσης, μια ειλικρινής υλοποίηση.

Η παραπάνω πρόταση αναλύεται εκτενέστερα στη σελίδα 871 του [22].

6.4.3 Ανάθεση εργασιών

Εδώ θα παρουσιάσουμε κάποια αποτελέσματα, και χωρίς λεπτομέρειες, από εκείνα που αναλύονται στο [32]. Θα γράψουμε τον ορισμό της ανάθεσης εργασιών προσαρμοσμένο στο σχεδιασμό μηχανισμού, χωρίς φυσικά να αλλάξουμε το πρόβλημα. Η διαφορά είναι ότι θεωρούμε τις μηχανές ως χρήστες.

Ορισμός 6.23 Υπάρχουν k εργασίες που θα ανατεθούν σε n χρήστες (μηχανές). Ο ιδιωτικός τύπος κάθε χρήστη i, για κάθε εργασία j, είναι η ελάχιστη ποσότητα χρόνου t^i_j που αρκεί για να πραγματοποιηθεί η εργασία αυτή. Ο στόχος είναι να ελαχιστοποιήσουμε το χρόνο αποπεράτωσης της τελευταίας ανάθεσης σε κάθε χρήστη. Η αποτίμηση ενός χρήστη i είναι το αρνητικό του συνολικού χρόνου που χρειάστηκε για να ολοκληρώσει τις εργασίες του. Πιο αυστηρά:

- Οι εφικτές έξοδοι του μηχανισμού είναι όλοι οι διαμερισμοί $x = x^1, \ldots, x^n$ των εργασιών στους χρήστες, όπου x^i είναι το σύνολο των εργασιών που ανατίθονται στο χρήστη i.
- Η αντικειμενική συνάρτηση είναι η $g(x,t) = \max_i \sum_{j \in x^i} t^i_j$.
- Η αποτίμηση του χρήστη i είναι η $u^i(x, t^i) = -\sum_{j \in x^i} t^i_j$.

Δηλώνουμε έναν άμεσο μηχανισμό αποκάλυψης για το πρόβλημα της ανάθεσης εργασιών με $m = (x, p)$, όπου $x = x(t)$ είναι ο αλγόριθμος ανάθεσης και $p = p(t)$ η πληρωμή. Και οι δύο είναι συναρτήσεις των ιδιωτικών τύπων t.

Θα παρουσιάσουμε έναν προσεγγιστικό μηχανισμό για το πρόβλημα αυτό, με τον οποίο μπορούμε να δεχθούμε ότι πετυχαίνουμε ένα άνω φράγμα για τη λύση του προβλήματος.

Ορισμός 6.24 (*Μηχανισμός ελάχιστης δουλειάς*)

- **ανάθεση:** κάθε εργασία ανατίθεται στο χρήστη που είναι ικανός να την διεκπεραιώση στον ελάχιστο χρόνο (αν υπάρχουν παραπάνω από μία επιλέγονται αυθαίρετα).
- **πληρωμή:** η πληρωμή στον κάθε χρήστη i ορίζεται ως $p^i(t) = \sum_{j \in x^i(t)} \min_{i' \neq i}(t_j^{i'})$, δηλαδή για κάθε εργασία που ανατίθεται σε αυτόν, ο χρήστης πληρώνεται ίσα με το χρόνο που θα χρειαζόταν η εργασία αυτή να διεκπεραιωθεί αν δεν υπήρχε ο i, που είναι ο χρόνος του αμέσως επόμενου ελάχιστου (δεύτερου ελάχιστου) χρήστη.

Αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα 6.25 Ο μηχανισμός της ελάχιστης δουλειάς είναι ένας ισχυρά ειλικρινής n-προσεγγιστικός μηχανισμός για το πρόβλημα της ανάθεσης εργασιών.

Το κάτω φράγμα του προβλήματος που μελετάμε εδώ δίνεται με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 6.26 Δεν υπάρχει μηχανισμός που να υλοποιεί μία c-προσέγγιση για το πρόβλημα της ανάθεσης εργασιών με n χρήστες για οποιοδήποτε $c < n$.

Κλείνοντας την υποενότητα αυτή επισημαίνουμε ότι με την εισαγωγή πιθανοτικών μηχανισμών πετυχαίνουμε καλύτερα φράγματα. Περισσότερα αναφέρονται στο 4.4 του [32].

Α΄ Λεξικό Ορολογίας

ακμή = *link, edge*
άμεσο πρόβλημα = *online problem*
άμεσος αλγόριθμος = *online algorithm*
ανάθεση εργασιών = *task allocation*
ανάλυση ανταγωνιστικότητας = *competitive analysis*
αποκεντρωμένος αλγόριθμος = *decentralized algorithm*
αρχή της αποκάλυψης = *relevation principle*
αυτογενής ανάδυση = *spontaneous emergence*
γνήσια στρατηγική = *pure strategy*
γνήσιος = *pure*
διαφοροποιός = *diverse*
δρομολογούμενη ροή = *routing flow*
εγωιστής = *selfish*
εγωιστικός = *selfish*
ειλικρινής = *truthful*
μηχανισμός ελάχιστης δουλειάς = *minwork mechanism*
ένωση από μονοπάτια = *union of paths*
ευδιάκριτη έξοδος = *output observability*
θεωρία παιγνίων = *game theory*
θεωρία παιγνίων με συνεργασία = *cooperative game theory*
θεωρία παιγνίων χωρίς συνεργασία = *non cooperative game theory*
ιδιότητα πεπερασμένης βελτίωσης = *finite improvement property* (FIP)
ιδιωτικός τύπος = *type*
ισοδύναμα = *identical*
ισοδύναμες εργασίες = *identical tasks*
ισοδύναμες μηχανές = *identical machines*
ισοφάρισμα = *tie*
κανονική ανισότητα συγκέντρωσης = *standard concentration inequality*
κανονική μορφή = *normal form*
κανονικός = *standard*
κατάληξη = *sink*
κατάσταση = *instance*
κέρδος = *payoff*
κοινωνικό βέλτιστο = *social optimum*
κοντόφθαλμος = *myopic*
κόστος αναρχίας = *price of anarchy*
κυριαρχία = *dominance*
κυριαρχούμενη = *dominated*
κύρος δέσμευσης = *commitment power*

λογικός = *rational*
λόγος ανταγωνιστικότητας = *competitive ratio*
λόγος συντονισμού = *coordination ratio*
μη εκφυλισμένος = *nondegenerate*
μηχανισμοί συντονισμού = *coordination mechanisms*
μικτή στρατηγική = *mixed strategy*
μικτός = *mixed*
μπάλες στα καλάθια = *balls into bins*
μοντέλο πλειστηριασμού = *auction*
NE = Nash σημείο ισορροπίας = *Nash Equilibrium*
νομισματική προσφορά = *monetary offer*
όγκος προς δρομολόγηση = *rate*
ομοιόμορφος = *uniform*
οριακός = *marginal*
οριστικά αμετάβλητο = *fixed*
οριστικά αμετάβλητο σημείο = *fixed point*
όρος = *clause*
παίγνιο συμφόρησης = *congestion game*
παίγνιο συμφόρησης με βάρη = *weighed congestion game*
πηγή = *source*
πλήρως μικτό = *fully - mixed*
πόρος = *resource*
πρόβλημα διαμέρισης = *partition problem*
πρόβλημα εγκατάστασης - *occupancy problem*
πρόβλημα τυπικής αναζήτησης πολυωνυμικού χρόνου =
. *polynomial - time local search (PLS) problem*
προπαίγνιο = *pre − game*
προσεγγιστικός λόγος = *approximation ratio*
ροή = *flow*
σκόπιμα αναμεμιγμένη ομάδα = *interested party*
συμφόρηση = *congestion*
συναρτησιακή απεικόνιση = *mapping*
συνασπισμός = *coalition*
συνιστώσα στρατηγικών = *facility, resource*
σφιχτός = *tight*
σχεδιασμός μηχανισμού = *mechanism design*
τέλος = *tax*
τιμή της αναρχίας = *anarchy value*
τυχαία ανάθεση = *random allocation*
υλοποίηση = *implementation*
υποκειμενικό παίγνιο συμφόρησης = *subjective congestion game*

φλιπ = *flip*
φόρος = *tax*
φόρτος = *load*
χειρότερος δυνατόν = *worst - case*
χρέωση μέσω οριακού κόστους = *marginal cost pricing*
χρονοπρογραμματισμός = *scheduling*

Αναφορές

[1] M.Beckmann, C.B.McGuire and C.B.Winstein, *Studies in the Economics of Transportation*, Yale University Press, 1956.

[2] A.Borodin and R.El-Yaniv, *Online Computation and Competitive Analysis*, Cambridge University Press, 1998.

[3] D.Braess, *Uber ein Paradoxon der Verkehrsplanung*, Unternehmensforschung, 12 (1968), 258-268.

[4] L.E.J. Brouwer, *Beweis der Invarianz der Dimensionzahl*, Mathematische Annalen, 70 (1911), 161-165.

[5] G.Christodoulou, E.Koutsoupias and A.Nanavati, *Coordination Mechanisms*, 2004.

[6] R.Cole, Y.Dodis and T.Roughgarden, *How much can Taxes Help Selfish Routing*, In Proceedings of the 4th ACM conference on Electronic Commerce, 2003, 98-107.

[7] A. Czumaj, *Selfish Routing on the Internet*, Survey, 2003.

[8] A. Czumaj and B. Vocking, *Tight Bounds for the Worst-Case Equilibria*, Proceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), January 2002, 413-420.

[9] A. Fabrikant, C. Papadimitriou and K. Talwar, *The Complexity of Pure Nash Equilibria*, Symposium on Theory of Computing (STOC) 2004.

[10] D.Fotakis, S.Kontogiannis, E.Koutsoupias, M.Mavronicolas and P.Spirakis *The Structure and Complexity of Nash Equilibria for a Selfish Routing Game*, In 29th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, 2002, 123-134.

[11] G. Gonnet, *Expected length of the longest probe sequence in hash code searching*, Journal of the Association for Computing Machinery, 28(2) 1981, 289-304.

[12] T.Gonzalez, O.Ibarra and S.Sahni, *Bounds for LPT Schedules on Uniform Processors*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Journal on Computing, 6(1), March 1977, 155-166.

[13] R.L.Graham, *Bounds for Certain Multiprocessing Anomalies*, Bell System Technical Journal, 45 (1966), 1563-1581.

[14] J.Hangstrom and R.Abrams, *Characterizing Braess's Paradox for Traffic Networks*, In IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, 2001, 837-842.

[15] A. Haurie and P. Marcotte, *On the Relationship between Nash-Cournot and Wardrop Equilibria*, Networks, 15 (1985), 295-308.

[16] W. Hoeffding, *Probability inequalities for sums of bounded random variables*, Journal of the American Statistical Association, 58(301), March 1963, 13-30.

[17] D. Johnson, C. Papadimitriou and M. Yannakakis, *How Easy is Local Search?*, Journal of Computer and System Sciences, 37 (1988), 79-100.

[18] Shizuo Kakutani, *A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem*, Duke Mathematical Journal 8 (1941), 457-459.

[19] E. Koutsoupias, M. Mavronicolas and P. Spirakis, *Approximate Equilibria and Ball Fusion*, Proceedings of the 9th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO), June 2002.

[20] E. Koutsoupias and C. H. Papadimitriou, *Worst-case equilibria*, Proceedings of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, G. Meinel and S. Tison eds. pp.404-413, Vol. 1563, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Trier, Germany, March 1999.

[21] David M. Kreps, *A course in Micronomic Theory*, Princeton University Press, 1990.

[22] A.Mas-Collel, W.Whinston and J.Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995.

[23] M. Mavronicolas and P. Spirakis, *The Price of Selfish Routing*, Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, July 2001, 510-519.

[24] D. Monderer and L. Shapley, *Potential Games*, Games and Economic Behaviour, 14 (1996), 124-143.

[25] D.Monderer and M.Tennenholtz, *k-Implementation*, In Proceedings of the 4th ACM conference on Electronic Commerce, 2002, 19-28.

[26] R. Motwani and P. Raghavan, *Randomized Algorithms*, Cambridge University Press, 1995.

[27] J.D.Murchland, *Braess's Paradox of Traffic Flow*, Transportation Research, 4 (1970), 391-394.

[28] John F. Nash, *Equilibrim points in N-Person Games*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 36 (1950), 48-49.

[29] John F. Nash, *Non-Cooperative Games*, Annals of Mathematics, 54 (1951), 286-295.

[30] Von Neumann and Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, 1944 (1980).

[31] N.Nisan, *Algorithms for Selfish Agents*, In Proceedings of th 16th Symposium on Theoritical Aspects of Computer Science, 1999.

[32] N.Nisan and A. Ronen, *Algorithmic Mechanism Design*, In Proceedings of STOC-99, 1999.

[33] M.Osborne and A.Rubinstein, *A course in Game Theory*, MIT Press, 1994.

[34] C.Papadimitriou, *Algorithms, Games and the Internet*, In Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, 2001, 749-753.

[35] C.Papadimitriou, *On the Complexity of the Parity Argument and Other Inefficient Proofs of Existence*, Journal of Computer and System Sciences, 48(3) (1994), 498-532.

[36] A.L.Peressini, F.E.Sullivan and J.J.Uhl, *The Mathematics of Nonlinear Programming*, Springer-Verlag, 1988.

[37] A.C.Pigou, *The Economics of Welfare*, Macmillan, London, UK, 1920.

[38] R. Rosenthal, *A Class of Games Possessing Pure-Strategy Nash Equilibria*, International Journal of Game Theory, 2 (1973), 65-67.

[39] T. Roughgarden, *Designing Networks for Selfish Users is Hard*, In Proceedings of the 42nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 2001, 472-481.(Ολοκληρωμένη έκδοση στο www.cs.cornell.edu/timr .)

[40] T. Roughgarden, *The Price of Anarchy is Independent of the Network Topology*, In Proceedings of the 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), 2002, 428-437.

[41] T. Roughgarden, *Selfish Routing*, PhD thesis, Cornell Univeristy, Department of Computer Science, May 2002.

[42] T. Roughgarden and E. Tardos, *How bad is selfish routing*, Journal of the ACM, 49(2) (2002), 236-259.

[43] T. Roughgarden and E. Tardos, *Bounding the Inefficiency of Equilibria in Nonatomic Congestion Games*, Technical Report TR2002-1866, Cornell University, 2002.

[44] A. Schaffer and M. Yannakakis, *Simple Local Search Problems that are Hard to Solve*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Journal on Computing, 20(1) (1991), 56-87.

[45] J. Wardrop, *Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research*, In Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part II, volume 1 (1952), 325-362.