ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΑΞΕΙΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

$$\mu \prod \lambda \, \forall$$

Ρόκος Ηλίας

Δεκέμβριος 2008

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Τι μπορεί να κρύβει μια απλή συλλογή κορυφών συνδεδεμένες μεταξύ τους μέσω κάποιων ακμών; Αυτό το ερώτημα ήταν αρκετό για να μου προκαλέσει το ενδιαφέρον και να με μυήσει στον κόσμο της Θεωρίας Γραφημάτων. Αυτόν τον τόσο όμορφα πολύπλοκο κόσμο στον οποίο επέλεξα να “ταξιδέψω” τους τελευταίους 6 μήνες.

Υπεύθυνος για την επιλογή του ταξιδιού αυτού, εν αγνοία του, ήταν ο κκ Δ. Θηλυκός που με τον τρόπο διδασκαλίας του, την απλότητα του και την σε βάθος γνώση του “κόσμου” των γραφημάτων, μου μετέδωσε την αγάπη του και το πάθος του γι' αυτόν. Δεν τον ευχαριστώ μόνο γι' αυτό, αλλά και γιατί τους τελευταίους αυτούς μήνες ήταν καθοδηγητής και συνοδοιπόρος στο ταξίδι αυτό, και που δίχως την πολύτιμη βοήθεια και υπομονή του δεν θα είχα φτάσει στον προορισμό μου.

Πρωτού φτάσω εδώ όμως, και όντας στο τελευταίο έτος του Μαθηματικού ο κκ Ε. Ράπτης, καθηγητής μου τότε στο Μαθηματικό και μέλος τώρα της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής μου συνέστησε το ΜΠΛΑ. Τον ευχαριστώ ιδιαίτερα που πάντα πίστευε στις δυνατότητες μου και με στήριζε με την αμέριστη βοήθεια του σε όλα τα θέματα που με απασχολούσαν τόσο ως φοιτητή του Μαθηματικού, όσο και ως φοιτητή του ΜΠΛΑ.

Ακόμα, θέλω να ευχαριστήσω τον κκ Η. Κουτσουπιά για τις πιο ευχάριστες διαλέξεις που έχω παρακολουθήσει ως φοιτητής αναγκάζοντάς με να αγαπήσω τους αλγορίθμους μέσα από αυτές.

Οφείλω να ευχαριστήσω θερμά όλους τους συντελεστές του ΜΠΛΑ και να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου, ιδιαίτερα, στους κκ Γ. Μοσχοβάκη, καταρχήν, για την τιμή που μου έκανε να υπάρξω φοιτητής του, και Κ. Δημητρακόπουλο, εν συνεχεία, που με δέχτηκαν στην οικογένεια του ΜΠΛΑ και μου έδωσαν αυτήν την πολύτιμη ευκαιρία σπουδών.

Κατά την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, όμως, οι πιο γλυκές μου αναμνήσεις είναι άμεσα συνδεδεμένες με ένα συμφοιτητή με τον οποίο μοιράστηκα αμέτρητες ώρες συνεργασίας και εποικοδομητικών συζητήσεων εν μέσω κοπιαστικών εργασιών και μελέτης. Τον ευχαριστώ τόσο γι' αυτές τις στιγμές όσο και για τις διορθώσεις και παρατηρήσεις του γι' αυτήν εδώ την εργασία. Κυρίως όμως ευχαριστώ τον Κώστα Σδράκα γιατί στο πρόσωπο του κέρδισα έναν αδελφικό φίλο.

Τέλος, πάνω απ' όλα, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω, μέσα από την καρδιά μου, τον αγαπημένο μου πατέρα για την αμέριστη οικονομική και ηθική υποστήριξη που μου πρόσφερε απλόχερα καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου, καθώς και τον αδερφό μου για την υπερπολύτιμη παρέα του και ανοχή που έδειξε στις δύσκολες στιγμές αυτών των χρόνων.

Όμως, το οτί γράφω τούτες εδώ τις γραμμές και μπορώ και νιώθω, λίγο περήφανος για αυτά που έχω καταφέρει ως τώρα, το οφείλω, πρώτα απ' όλα, στον άνθρωπο που πάντα ήταν δίπλα μου και που με υπομονή, υπέρμετρη αγάπη, φροντίδα και υπευθυνότητα, έφερε εις πέρας με την μεγαλύτερη επιτυχία τον δυκολότερο ρόλο απ' όλους.

Μητέρα σ' ευχαριστώ.

Αθήνα, Δεκέμβριος 2008

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Τα προβλήματα σε γραμμικές παρατάξεις γραφημάτων είναι μία ειδική κλάση προβλημάτων συνδιαστικής βελτιστοποίησης, που σκοπό έχουν την εύρεση γραμμικής παράταξης ενός γραφήματος έτσι ώστε να βελτιστοποιείται η τιμή της εκάστοτε ζητούμενης συνάρτησης. *Παράταξη ενός γραφήματος (graph layout)* καλούμε την ανάθεση τιμών (labels) στις κορυφές ενός γραφήματος. Πολυάριθμα προβλημάτα πάνω σε διάφορους τομείς μπορούν να μοντελοποιηθούν ως γραμμικές παρατάξεις γραφημάτων. Τέτοια είναι, η βελτιστοποίηση δικτύων παράλληλων αρχιτεκτονικών, σχεδιασμός VLSI δικτύων, ανάκτηση δεδομένων, προβλήματα αριθμητικής ανάλυσης, υπολογιστικής βιολογίας, θεωρίας γραφημάτων, χρονοδρομολόγησης (scheduling) και αρχαιολογίας. Τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα σε παρατάξεις γραφημάτων είναι NP-πλήρη αλλά για τις περισσότερες εφαρμογές αυτών, εφικτές λύσεις με μία σχεδόν βέλτιστη τιμή είναι επαρκείς.

Λόγω της σημασίας τους, υπάρχουν πολλά αποτελέσματα που συνδέονται με προβλήματα σε παρατάξεις γραφημάτων. Θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε μια ολοκληρωμένη εικόνα των τεχνικών πάνω σε τέτοια προβλήματα και θα εστιάσουμε την προσοχή μας κυρίως σε θέματα αλγοριθμικής φύσεως με σκοπό, αρχικά, την αναφορά και παρουσίαση σχετικών επιστημονικών αποτελεσμάτων σε διεθνές επίπεδο και επιπλέον να ενθαρρύνουμε την διεθνή επιστημονική κοινότητα να εργασθεί πάνω σε αυτό το καινούριο και πολλά υποσχόμενο πεδίο έρευνας. Άλλες έρευνες που ασχολήθηκαν με διάφορες πτυχές σχετικές με προβλήματα σε παρατάξεις γραφημάτων και αξίζει να αναφερθούν είναι οι εργασίες των Chinn [23], Chung [25], Monbien και Sudborough [114], Mohar και Poljiak [112], Bezrukov [8], Lai και Williams [92].

Αναφορικά με την παρούσα μελέτη, στο κεφάλαιο 2 θα εισάγουμε και θα δώσουμε τους απαραίτητους ορισμούς πάνω στις παρατάξεις γραφημάτων καθώς και θα αναφερθούμε σε κάποια βασικά αποτελέσματα αυτών. Μια ιστορική ανασκόπηση για τις εφαρμογές των γραμμικών παρατάξεων ακολουθεί στο κεφάλαιο 3. Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε αποτελέσματα NP-πληρότητας πάνω σε προβλήματα παρατάξεων, ενώ στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε κάποιες πολυωνυμικού χρόνου επιλύσιμες κλάσεις γραφημάτων. Έπειτα στο κεφάλαιο 6 παραθέτουμε κάποια αποτελέσματα παραμετρικής πολυπλοκότητας και τέλος στο κεφάλαιο 7 μελετούμε προσεγγιστικούς αλγόριθμους.

Κεφάλαιο 2

Βασικοί Ορισμοί και Παρατηρήσεις

Αρχικά θα ορίσουμε κάποια βασικά προβλήματα σε παρατάξεις γραφημάτων και έννοιες που συνδέονται με αυτά. Έτσι θα έχουμε την δυνατότητα να αντιμετωπίσουμε διάφορα προβλήματα μέσα σ' ένα ενιαίο πλαίσιο. Τέλος θα παρουσιάσουμε κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με προβλήματα γραμμικών παρατάξεων.

Οι γραφοθεωρητικοί ορισμοί και συμβολισμοί που θα χρησιμοποιήσουμε συνάδουν απόλυτα με τους αντίστοιχους στην Πληροφορική. Θα θεωρούμε τα γραφήματα πεπερασμένα, μη κατευθυνόμενα και χωρίς θηλιές (loops). Έστω γράφημα G. Θα συμβολίσουμε ως $V(G)$ το σύνολο των κορυφών και $E(G)$ το σύνολο των ακμών. Ο συμβολισμός uv αντιπροσωπεύει την μη κατευθυνόμενη ακμή $\{u,v\}$. Καλούμε $\deg u = \deg_G u$ τον βαθμό κορυφής u του γραφήματος G και $\Delta(G)$ τον μέγιστο βαθμό γραφήματος G. Επίσης καλούμε $\Gamma(u) = \Gamma_G(u) = \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ το σύνολο των γειτόνων της κορυφής u του γραφήματος G.

Ορισμός 2.1 Γραμμική παράταξη (linear layout) *η απλά παράταξη (layout) μη κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V,E)$ με $n = |V|$ κορυφές ορίζουμε την 1-1 και επί συνάρτηση*

$$\phi\colon V(G) \to [n] = \{1,\dots,n\}$$

Ορισμός 2.2 *Καλούμε $\Phi(G) = \big\{\phi \mid \phi\colon V(G) \to [n] = \{1,\dots,n\}\big\}$ το σύνολο όλων των δυνατών παρατάξεων επί του γραφήματος G.*

Παρατήρηση 2.1 *Ένας συνήθης τρόπος για να αναπαραστήσουμε σχηματικά μια παράταξη ϕ ενός γραφήματος G είναι να τοποθετήσουμε τις κορυφές του πάνω σε μια νοητή οριζόντια ευθεία γραμμή, διατάσσοντάς τες μέσω της ϕ όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1 .*

Ορισμός 2.3 $L(i,\phi,G) = \{u \in V \mid \phi(u) \le i\}$*, καλούμε το σύνολο που περιέχει όλες τις κορυφές του G των οποίων οι τιμές μέσω της ϕ είναι μικρότερες ή ίσες του i και*

$R(i, \phi, G) = \{u \in V \mid \phi(u) > i\}$ *καλούμε το σύνολο που περιέχει όλες τις κορυφές του* G *των οποίων οι τιμές μέσω της* ϕ *είναι μεγαλύτερες του* i *αντίστοιχα.*

Παρατήρηση 2.2 *Διαισθητικά το* $L(i, \phi, G)$ *είναι το σύνολο κορυφών του* G *που βρίσκονται αριστερά του* $\phi(i)$ *και* $R(i, \phi, G)$ *αυτές δεξία του* $\phi(i)$ *αντίστοιχα. (βλ. σχήμα 1)*

Ορισμός 2.4 *Έστω παράταξη* ϕ *γραφήματος* $G = (V, E)$ *και* $i \in \mathbb{N}$. *Ορίζουμε τις παρακάτω βασικές έννοιες.*

1. Ακμές Τομής (Edge Cut) *της* $\phi(i)$ *στη θέση* i

   $$\theta(i, \phi, G) = |\ \{uv \in\ E \mid u \in L(i, \phi, G) \wedge v \in R(i, \phi, G)\}\ |$$

   καλούμε το πλήθος των ακμών του G *των οποίων οι κορυφές (άκρες) βρίσκονται η μία στο* $L(i, \phi, G)$ *και η άλλη στο* $R(i, \phi, G)$.

2. Τροποποιημένη Τομή Ακμής (Modified Edge cut) *της* $\phi(i)$ *στη θέση* i

   $$\zeta(i, \phi, G) = |\ \{uv \in\ E \mid u \in L(i, \phi, G) \wedge v \in R(i, \phi, G) \wedge \phi(u) \neq i\}\ |$$

   όμοια με το παραπάνω, με τη διαφορά ότι τώρα εξαιρούμε της ακμές που προσπίπτουν στην u.

3. Κορυφές Τομής (Vertex Cut) *της* $\phi(i)$ *στη θέση* i

   $$\delta(i, \phi, G) = |\ \{u \in\ L(i, \phi, G) \mid \exists v \in R(i, \phi, G) \mid uv \in\ E\}\ |$$

   καλούμε το πλήθος των κορυφών του $L(i, \phi, G)$ *που συνδέονται με κορυφές στο* $R(i, \phi, G)$

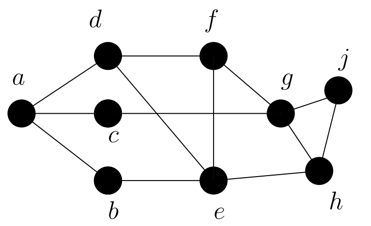
4. Μήκος (length) *της ακμής* $uv \in\ E$ *της* $\phi(i)$

   $$\lambda(uv, \phi, G) = \ |\phi(u) - \phi(v)|$$

Στο σχήμα 2.1 βλέπουμε πως αναπαριστάται το γράφημα G μέσω της παράταξης $\phi(i)$. Παρατηρούμε ότι οι κορυφές αριστερά της διακεκομμένης κάθετης γραμμής (από τη θέση i και πριν) αποτελούν το $L(i, \phi, G)$ ενώ οι υπόλοιπες στα δεξιά της (από τη θέση $i + 1$ και μετά) αποτελούν το $R(i, \phi, G)$. Η τιμή του $\theta(i, \phi, G)$ υπολογίζεται εύκολα μετρώντας τις ακμές που τέμνουν την κάθετη διακεκομμένη γραμμή και το $\zeta(i, \phi, G)$ προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον αριθμό αυτόν τις ακμές της $\phi^{-1}(i)$. Τέλος, υπολογίζουμε το $\delta(i, \phi, G)$ αν μετρήσουμε τις κορυφές στα αριστερά της κάθετης γραμμής που ενώνονται με κορυφές στα δεξιά αυτής (οι δύο λευκές κορυφές και η γκρι $\phi^{-1}(i) = g$).

Ορισμός 2.5 *Έστω παράταξη* ϕ *του γραφήματος* $G = (V, E)$. *Ορίζουμε ως* ανάστροφη γραμμική παράταξη *την*

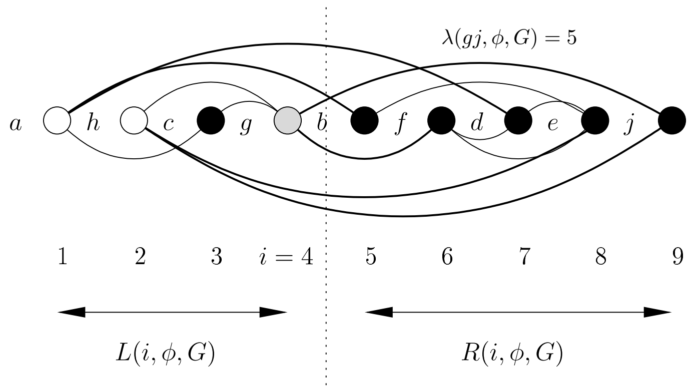
$$\phi^R(u) = |V| - \phi(u) + 1$$



(a) $G = (V, E)$

$\phi = \{(a,1),(b,5),(c,3),(d,7),(e,8),(f,6),(g,4),(j,9),(h,2)\}$

$\theta(i,\phi,G) = 6$ $\quad\zeta(i,\phi,G) = 4$ $\quad\delta(i,\phi,G) = 3$



(b) Γραφική αναπαράσταση της γραμμικής παράταξης ϕ του γραφήματος G και η εφαρμογή των $\theta(i,\phi,G)$, $\zeta(i,\phi,G)$, $\delta(i,\phi,G)$ στο $i = 4$

Σχήμα 2.1: Το γράφημα G, η παράταξη ϕ και η εφαρμογή των παραπάνω ορισμών.

Παρατήρηση 2.3 *Για να αντιληφθούμε καλύτερα διαισθητικά την έννοια της* ϕ^R *αρκεί να φανταστούμε ζωγραφισμένο αντίστροφα το δεύτερο γράφημα του σχήματος 2.1 έτσι που* $\phi^R = \{(a,9),(b,5),(c,7),(e,2),(f,4),(g,6),(j,1),(h,8)\}$.

Ορισμός 2.6 Κόστος γραμμικής παράταξης (layout cost) *καλούμε τη συνάρτηση* F *που αντιστοιχεί κάθε παράταξη* ϕ *γραφήματος* G *με τον ακέραιο* $F(\phi, G)$. *Το πρόβλημα βελτιστοποίησης του κόστους παράταξης* F *αφορά την εύρεση της κατάλληλης* $\phi^* \in \Phi(G)$ *έτσι ώστε*

$$F(\phi^*, G) = \min_{\phi \in \Phi(G)} F(\phi, G).$$

Για κάθε F και G ορίζουμε ως $\text{MIN}F(G) = \min_{\phi \in \Phi(G)} F(\phi, G)$

Ορισμός 2.7 *Εδώ ορίζουμε τα βασικά κόστη γραμμικών παρατάξεων με τα οποία θα ασχοληθούμε στη παρούσα εργασία όπως και τα προβλήματα γραμμικών παρατάξεων που προκύπτουν βάση αυτών.*

- Ζωνοπλάτος (BandWith)*: Έστω γράφημα $G = (V, E)$, να βρεθεί παράταξη $\phi^* \in \Phi(G)$ τέτοια ώστε* $\textsc{bw}(\phi^*, G) = \textsc{minbw}(G)$ *όπου*

$$\textsc{bw}(\phi, G) = \max_{uv \in E} \lambda(uv, \phi, G).$$

- Ελάχιστη Γραμμική Παράθεση (Minimum Linear Arrangement)*: Έστω γράφημα $G = (V, E)$, να βρεθεί παράταξη $\phi^* \in \Phi(G)$ τέτοια ώστε* $\textsc{la}(\phi^*, G) = \textsc{minla}(G)$ *όπου*

$$\textsc{la}(\phi, G) = \sum_{uv \in E} \lambda(uv, \phi, G).$$

- Τομοπλάτος (CutWidth)*: Έστω γράφημα $G = (V, E)$, να βρεθεί παράταξη $\phi^* \in \Phi(G)$ τέτοια ώστε* $\textsc{cw}(\phi^*, G) = \textsc{mincw}(G)$ *όπου*

$$\textsc{cw}(\phi, G) = \max_{i \in [|V|]} \theta(i, \phi, G).$$

- Τροποποιημένο Τομοπλάτος (Modified Cut)*: Έστω γράφημα $G = (V, E)$, να βρεθεί παράταξη $\phi^* \in \Phi(G)$ τέτοια ώστε* $\textsc{mc}(\phi^*, G) = \textsc{minmc}(G)$ *όπου*

$$\textsc{mc}(\phi, G) = \sum_{i \in [|V|]} \zeta(i, \phi, G).$$

- Διαχωρισμός Κορυφών (Vertex Separation)*: Έστω γράφημα $G = (V, E)$, να βρεθεί παράταξη $\phi^* \in \Phi(G)$ τέτοια ώστε* $\textsc{vs}(\phi^*, G) = \textsc{minvs}(G)$ *όπου*

$$\textsc{vs}(\phi, G) = \max_{i \in [|V|]} \delta(i, \phi, G).$$

- Άθροισμα Τομών (Sum Cut)*: Έστω γράφημα $G = (V, E)$, να βρεθεί παράταξη $\phi^* \in \Phi(G)$ τέτοια ώστε* $\textsc{sc}(\phi^*, G) = \textsc{minsc}(G)$ *όπου*

$$\textsc{sc}(\phi, G) = \sum_{i \in [|V|]} \delta(i, \phi, G).$$

- Προφίλ (Profile)*: Έστω γράφημα $G = (V, E)$, να βρεθεί παράταξη $\phi^* \in \Phi(G)$ τέτοια ώστε* $\textsc{pr}(\phi^*, G) = \textsc{minpr}(G)$ *όπου*

$$\textsc{pr}(\phi, G) = \sum_{u \in V} \Big(\phi(u) - \min_{u \in \Gamma^*(u)} \phi(v) \Big)$$

και $\Gamma^*(u) = \{u\} \cup \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$.

Πίνακας 2.1: Προβλήματα και Κόστη σε Γραμμικές Παρατάξεις

Πρόβλημα	Κόστος
Ζωνοπλατος (BandWith)	$\text{BW}(\phi, G) = \max_{uv \in E} \lambda(uv, \phi, G)$
Ελαχιστη Γραμμικη Παραθεση (MinLA)	$\text{LA}(\phi, G) = \sum_{uv \in E} \lambda(uv, \phi, G)$
Τομοπλατος (CutWith)	$\text{CW}(\phi, G) = \max_{i \in [\|V\|]} \theta(i, \phi, G)$
Τροποποιημενο Τομοπλατος (Modified Cut)	$\text{MC}(\phi, G) = \sum_{i \in [\|V\|]} \zeta(i, \phi, G)$
Διαχωρισμος Κορυφων (Vertex Separation)	$\text{VS}(\phi, G) = \max_{i \in [\|V\|]} \delta(i, \phi, G)$
Άθροισμα Τομων (Sum Cut)	$\text{SC}(\phi, G) = \sum_{i \in [\|V\|]} \delta(i, \phi, G)$
Προφιλ (Profile)	$\text{PR}(\phi, G) = \sum_{u \in V} \Big(\phi(u) - \min_{u \in \Gamma^*(u)} \phi(v)\Big)$
Διχοτομηση Ακμων (Edge Bisection)	$\text{EB}(\phi, G) = \theta\Big(\left\lfloor \frac{1}{2}\|V\| \right\rfloor, \phi, G\Big)$
Διχοτομηση Κορυφων (Vertex Bisection)	$\text{VB}(\phi, G) = \delta\Big(\left\lfloor \frac{1}{2}\|V\| \right\rfloor, \phi, G\Big)$

- Διχοτόμηση Ακμών (Edge Bisection): *Έστω γράφημα $G = (V, E)$, να βρεθεί παράταξη $\phi^* \in \Phi(G)$ τέτοια ώστε $\text{EB}(\phi^*, G) = \text{MINEB}(G)$ όπου*

$$\text{EB}(\phi, G) = \theta\Big(\left\lfloor \frac{1}{2}|V| \right\rfloor, \phi, G\Big).$$

- Διχοτόμηση Κορυφών (Vertex Bisection): *Έστω γράφημα $G = (V, E)$, να βρεθεί παράταξη $\phi^* \in \Phi(G)$ τέτοια ώστε $\text{VB}(\phi^*, G) = \text{MINVB}(G)$ όπου*

$$\text{VB}(\phi, G) = \delta\Big(\left\lfloor \frac{1}{2}|V| \right\rfloor, \phi, G\Big).$$

Παρατήρηση 2.4 *Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$ και κάθε παράταξη ϕ του G το συνολικό μήκος των ακμών είναι ίσο με το άθροισμα όλων των αποκόπτουσων ακμών.*

$$\sum_{uv \in E} \lambda(uv, \phi, G) = \sum_{i \in [|V|]} \theta(i, \phi, G).$$

Τη παρατήρηση αυτή έκανε πρώτος ο Harper το 1966 (βλέπε [68]) και προκύπτει από το εξής γεγονός. Έστω παράταξη ϕ γραφήματος $G = (V, E)$ και έστω ακμή uv με $\phi(u) < \phi(v)$ και $\lambda(uv) = \phi(v) - \phi(u)$. Τότε σε κάθε $\theta(\phi(u)), \theta(\phi(u) + 1), \theta(\phi(u) + 2), \ldots, \theta(\phi(v) - 1)$ η ακμή uv συνεισφέρει από 1.

Παρατήρηση 2.5 *Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$ και κάθε παράταξη ϕ του G*

$$\text{PR}(\phi, G) = \text{SC}(\phi^R, G).$$

Την απόδειξη μπορείτε να την βρείτε στην εργασία των Golovach και Fomin, 1998 [58]. Η ιδέα βασίζεται στο γεγονός ότι κάθε κορυφή $u \in V$ συμβάλει κατά μία μονάδα

$\phi(u) - \min_{u \in \Gamma^*(u)} \phi(v)$ φορές στο άθροισμα τομών της ανάστροφης παράταξης. Ουσιαστικά το $\phi(u) - \min_{u \in \Gamma^*(u)} \phi(v)$ εκφράζει την απόσταση της u με τον πιο «απομακρισμένο» γείτονά της $v \in \Gamma^*(u) \cap L(\phi(u), \phi, G)$ στα αριστερά της. Π.χ στο σχήμα 2.1 ο ζητούμενος αυτός γείτονας της j είναι ο h με $\lambda(jh, \phi, G) = \phi(j) - \phi(h) = 9 - 2 = 7$. Παρατηρούμε λοιπόν πως στη ϕ^R (φανταστείτε τη παράταξη του σχήματος 2.1 ανάποδα) η κορυφή j ανήκει σε όλα τα $\delta(i, \phi^R, G)$ για $\phi^R(j) \leq i < \phi^R(h)$. Δηλαδή στο $\mathrm{SC}(\phi^R, G)$ η j συμβάλει κατά 7 μονάδες, όσο και η τιμή του $\phi(j) - \phi(h)$.

Παρατήρηση 2.6 *Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι, τα προβλήματα σε παρατάξεις γραφημάτων που έχουμε δει μέχρι τώρα ζητούν την εύρεση παράταξης με το βέλτιστο κόστος, παρά το κόστος της βέλτιστης παράταξης:*

«Δίνεται γράφημα G, να βρεθεί παράταξη $\phi^* \in \Phi(G)$ τέτοια ώστε $F(\phi^*, G) = \mathrm{MIN}(F(G))$»

Παρόλ' αυτά όλα τα προβλήματα μπορούν να διατυπωθούν ως προβλήματα απόφασης όπου το ζητούμενο πλέον είναι αν υπάρχει παράταξη της οποίας το κόστος δεν υπερβαίνει ένα δοθέντα ακέραιο k :

«Δίνεται γράφημα G και ακέραιος k, υπάρχει παράταξη $\phi^* \in \Phi(G)$ τέτοια ώστε $F(\phi^*, G) \leq k$; »

Το παρακάτω λήμμα μας δίνει χρήσιμες σχέσεις ανάμεσα στα κόστη των παρατάξεων.

Λήμμα 2.1 *Έστω γράφημα G με n κορυφές και m ακμές τότε για κάθε ϕ στο G ισχύει,*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LA}(\phi, G) &\leq n \cdot \mathrm{CW}(\phi, G) \\
\mathrm{LA}(\phi, G) &\leq m \cdot \mathrm{BW}(\phi, G) \\
\mathrm{MC}(\phi, G) &\leq \mathrm{LA}(\phi, G) \\
\mathrm{SC}(\phi, G) &\leq n \cdot \mathrm{VS}(\phi, G) \\
\mathrm{VS}(\phi, G) &\leq \mathrm{BW}(\phi, G) \\
\mathrm{EB}(\phi, G) &\leq \mathrm{CW}(\phi, G) \\
\mathrm{VB}(\phi, G) &\leq \mathrm{VS}(\phi, G) \\
\mathrm{CW}(\phi, G) &\leq \Delta(G) \cdot \mathrm{BW}(\phi, G)
\end{aligned}
$$

και για $\phi = \phi^*$ έχουμε,

$$
\begin{aligned}
\text{MINLA}(G) &\leq n \cdot \text{MINCW}(G) \\
\text{MINLA}(G) &\leq m \cdot \text{MINBW}(G) \\
\text{MINMC}(G) &\leq \text{MINLA}(G) \\
\text{MINSC}(G) &\leq n \cdot \text{MINVS}(G) \\
\text{MINVS}(G) &\leq \text{MINBW}(G) \\
\text{MINEB}(G) &\leq \text{MINCW}(G) \\
\text{MINVB}(G) &\leq \text{MINVS}(G) \\
\text{MINCW}(G) &\leq \Delta(G) \cdot \text{MINBW}(G)
\end{aligned}
$$

Οι παραπάνω ανισώσεις προκύπτουν άμεσα από τους ορισμούς και την παρατήρηση 2.5 .

Το επόμενο λήμμα συνδέει κάποια κόστη παρατάξεων ενός γραφήματος με τις συνεκτικές συνιστώσες του.

Λήμμα 2.2 *Έστω γράφημα G και $G_1, \ldots, G_k$ οι συνεκτικές συνιστώσες. Τότε ισχύει,*

$$
\begin{aligned}
\text{MINBW}(G) &= \max_{i \in [k]} \text{MINBW}(G_i) \\
\text{MINCW}(G) &= \max_{i \in [k]} \text{MINCW}(G_i) \\
\text{MINVC}(G) &= \max_{i \in [k]} \text{MINVC}(G_i) \\
\text{MINMC}(G) &= \sum_{i \in [k]} \text{MINMC}(G_i) \\
\text{MINLA}(G) &= \sum_{i \in [k]} \text{MINLA}(G_i) \\
\text{MINSC}(G) &= \sum_{i \in [k]} \text{MINSC}(G_i)
\end{aligned}
$$

Την απόδειξη για το Ζωνοπλάτος μπορείτε να τη βρείτε στο [27] του Chvatalova το 1975. Οι υπόλοιπες αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο.

Μια βασική συνέπεια του παραπάνω λήμματος είναι ότι για οποιοδήποτε κόστος παράταξης $F \in \{\text{BW}, \text{CW}, \text{LA}, \text{VS}, \text{MC}, \text{SC}\}$, είναι πιθανό να πάρουμε μία βέλτιστη παράταξη για το F του γραφήματος υπολογίζοντας τα βέλτιστα κόστη των συνεκτικών συνιστωσών. Για τη Διχοτόμηση Κορυφών και Ακμών όμως, κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Σαν αντιπαράδειγμα ας φανταστούμε την περίπτωση ενός γραφήματος που αποτελείται από δύο συνιστώσες ίδιου μεγέθους όπου κάθε μία είναι κλίκα.

Πρωτού δούμε το επόμενο λήμμα που συνδέει τα κόστη ενός γραφήματος και ενός υπογραφήματός του, ας θυμηθούμε ότι:

Ορισμός 2.8 Επικαλύπτον υπογράφημα H γραφήματος G καλούμε το υπογράφημα για το οποίο ισχύει $V(H) = V(G)$ και $E(H) \subseteq E(G)$ και εναγόμενο υπογράφημα H γραφήματος G καλούμε το υπογράφημα για το οποίο ισχύει $V(H) \subseteq V(G)$ και $E(H) = \{uv \in E(G) \mid u, v \in V(H)\}$.

Λήμμα 2.3 *Έστω H επικαλύπτον ή εναγόμενο υπογράφημα γραφήματος G. Τότε για κάθε κόστος $F \in \{$BW, CW, VS, LA, MC, SC$\}$ ισχύει,*

$$\textsc{min}\mathrm{F}(H) \leq \textsc{min}F(G)$$

και αν H είναι επικαλύπτον υπογράφημα του G τότε,

$$\textsc{mineb}(H) \leq \textsc{mineb}(G) \text{ και } \textsc{minvb}(H) \leq \textsc{minvb}(G).$$

Κεφάλαιο 3

Ιστορική Ανασκόπηση και Εφαρμογές

Όπως θα δούμε οι όροι παράταξη και πρόβλημα παράταξης οφείλονται στην αρχική εφαρμογή αυτών των προβλημάτων στην βέλτιστη παράταξη κυκλωμάτων. Θα παρουσιάσουμε το υπόβαθρο που παρακινεί την έρευνα πάνω σε προβλήματα παρατάξεων όπως και κάποιες εφαρμογές αυτών. Θα αρχίσουμε με μια μικρή ιστορική αναδρομή.

Το πρόβλημα Έλάχιστης Γραμμικής Παράθεσης διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Harper το 1964 στο [67]. Σκοπός του Harper ήταν να σχεδιάσει κώδικες - διορθωτές με τον ελάχιστο δυνατό μέσο όρο λαθών πάνω σε βασικές κλάσεις γραφημάτων. Πρόσφατα αυτό το πρόβλημα βρήκε εφαρμογή σε πιο απλουστευμένη μορφή από τους Mitchison και Durbin στο [111] όπου μελετάει την δραστηριότητα των νεύρων του φλοιού του εγκεφάλου. Άλλες εφαρμογές του βρίσκουμε στο πρόβλημα δρομολόγησης μιας μηχανής (βλέπε [1], [127]) και στο ζωγράφισμα γραφημάτων [134]. Άλλες ονομασίες που αποδόθηκκαν στο πρόβλημα Έλάχιστης Γραμμικής Παράθεσης ήταν οι *Βέλτιστη Γραμμική Διάταξη, Άθροισμα Ακμών, Ελάχιστο 1-Άθροισμα, Ζωνοπλάτος ή Προβλημα Καλωδιακού Μήκους.*

Το Ζωνοπλάτος πρωτοπαρουσιάστηκε στη δεκαετία του 1950 όταν και ήθελαν να αυξήσουν τον χρόνο κάποιων υπολογισμών σε αραιούς πίνακες. Σύμφωνα με τον Dewdney [29] το πρόβλημα Ζωνοπλάτους σε γραφήματα εισήχθηκε για πρώτη φορά το 1967 από τον Harary στο [66], αλλά ο πρώτος ορίσμος του δόθηκε στην εργασία [68] του Harper το 1966.

Το Τομοπλάτος πρώτη φορά εμφανίστηκε στη δεκαετία του '70 ως θεωρητικό μοντέλο για την εύρεση του αριθμού των καναλιών σε μια βέλτιστη διάταξη κυκλώματος (βλέπε [2] [109]). Πιο πρόσφατες εφαρμογές του προβλήματος αυτού συναντούμε στην αξιοπιστία δικτύων [78], αυτόματο ζωγραφισμό γραφημάτων [119] και ανάκτηση δεδομένων [19].

Το πρόβλημα Διαχωρισμού Κορυφών ενός γραφήματος το συναντάμε για πρώτη φορά, στη γενικότερη μορφή του, ως το πρόβλημα εύρεσης των διαχωριστών ενός γραφήματος (βλέπε [102]) και έχει εφαρμογές σε αλγόριθμους σχεδιάσμου VLSI (βλέπε [95]). Όπως θα δούμε παρακάτω το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο και με άλλα γνωστά προβλήματα.

Το Άθροισμα Τομών και Προφίλ ορίστηκαν ανεξάρτητα στις δημοσιεύσεις των Diaz [31] και Lin και Yuon [99] αντίστοιχα. Το πρόβλημα του Αθροίσματος Τομών το συναντάμε για πρώτη φόρα ως μια απλούστερη μορφή του προβλήματος δ-τελεστή στο [30]. Το Προφίλ προτάθηκε ως ο τρόπος να μειωθεί η χωριτικότητα αποθήκευσης σε αραιούς πίνακες (βλέπε [141], [97], [99]). Και τα δύο αυτά προβλήματα αποδείχθηκε πως είναι ισοδύναμα με το πρόβλημα του συμπληρωματικού του διαστήματος του γραφήματος (interval graph copmletion) [127] το οποίο έχει εφαρμογές στην αρχαιολογία [81] και κλωνοποίηση δακτυλικών αποτυπωμάτων (clone fingerprinting)[80]. Τέλος ξανασυναντάμε το πρόβλημα αυτό στο [57] με το όνομα *συνολικός αριθμός διαχωρισμού κορυφών.*

Η Διχοτόμηση Ακμών έχει πολλές εφαρμογές κυρίως στη περιοχή των παραλλήλων υπολογισμών και VLSI (βλέπε [9], [136], [74], [93], [36]). Επίσης το πρόβλημα Διχοτόμησης Κορυφών το συναντάμε στην πολυπλοκότητα αποστολής μηνυμάτων σε επεξεργαστές σε διασυνδέσεις δικτύων μέσω ξένων -ως προς τις κορυφές - μονοπατιών (βλέπε [84]).

3.1 Προβλήματα Παράταξης στην Αριθμητική Ανάλυση

Στον τομέα της Αριθμητικής Αναλυσης, αυτό που επιθυμούμε σε πολλές εφαρμογές μηχανικής, είναι να επαναδιατάσουμε της στήλες και γραμμές πολύ μεγάλων αραιών συμμετρικών πινάκων, έτσι ώστε τα μη μηδενικά στοιχεία να βρίσκονται όσο το δυνατόν πιο κοντά στη διαγώνιο. Να θυμηθούμε εδώ ότι, καλούμε έναν πίνακα αραιό, όταν περιέχει πολύ λίγα μη μηδενικά στοιχεία. Συγκεκριμένα το Ζωνοπλάτος ενός συμμετρικού πίνακα M είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος b για τον οποίο ο $M[j, j+b]$ περιέχει ένα μη μηδενικό στοιχείο και Προφίλ του M είναι το άθροισμα $\sum_{i\in[n]}(i-p)$ όπου, p_j είναι ο δείκτης (index) του πρώτου μη μηδενικού στοιχείου της στήλης j. Το να ανάγουμε το Ζωνοπλάτος ή Προφίλ ενός πίνακα οδηγεί σε μια άλλη αναγωγή της ποσότητας χώρου που απαιτείται για κάποια συστήματα αποθήκευσης και στη βελτίωση κάποιων λειτουργιών όπως της παραγοντοποίησης Cholesky μη μοναδιαίων συστημάτων εξισώσεων (βλ. [130]). Το πρόβλημα του Ζωνοπλάτους ή Προφίλ ενός πίνακα M συνιστά την εύρεση ενός αντιμεταθετικού πίνακα P τέτοιου που ο $M' = P \cdot M \cdot P^T$ να έχει το ελάχιστο Ζωνοπλάτος ή Προφίλ αντίστοιχα. Να θυμίσουμε ότι, ένας αντιμεταθετικός πίνακας P είναι ένας ταυτοτικός πίνακας με το ίδιο μέγεθος του M του οποίου οι στήλες έχουν αντιμεταθετηθεί. Να παρατηρήσουμε εδώ πως, αν αντιστοιχίσουμε τα μη μηδενικά στοιχεία του συμμετρικού πίνακα με τις ακμές ενός γραφήματος και τις μεταθέσεις των γραμμών και στηλών με τη μετάθεση των ετικετών (labels) των κορυφών, τότε το Ζωνοπλάτος ή Προφίλ του πίνακα ισούται με το Ζωνοπλάτος ή Προφίλ του γραφήματος αντίστοιχα. Το πρόβλημα της αναγωγής του Ζωνοπλάτους ή Προφίλ ενός αραιού συμμετρικού πίνακα το συναντάμε για πρώτη φορά στη δεκαετία του '50 στο [53]. Στις μέρες μας υπάρχουν γενικές μέθοδοι πιο αποτελεσματικές από εκείνες. Παρόλ' αυτά εφαρμογές όπως στον τομέα της ανάκτησης πληροφορίας (information retrieval) κάνουν χρήση τεχνικών αναγωγής του Ζωναπλάτους και Προφίλ (βλ. [19], [137]).

3.2 Προβλήματα Παράταξης σε Συστήματα VLSI

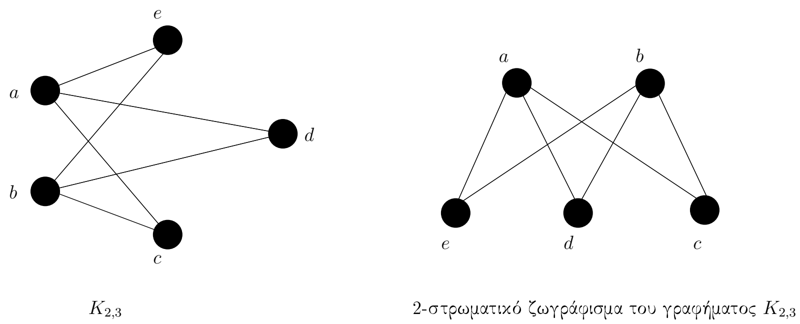
Πολλά προβλήματα παράταξης αρχικά προέκυψαν ως απλοποιημένα μαθηματικά μοντέλα παράταξης σε συστήματα VLSI. Το πρόβλημα παράταξης VLSI συστημάτων (VLSI layout problem) αφορά την τοποθέτηση των modules (τμήματα κώδικα) σε πίνακα έτσι ώστε να μην συμπίπτουν μεταξύ τους όπως και την καλωδίωση των τερματικών στα διάφορα modules σύμφωνα με μια συγκεκριμένη προδιαγραφή (καλωδίωσης), με τέτοιο τρόπο, ώστε τα καλώδια να μην συμπίπτουν μεταξύ τους. Τα δύο στάδια VLSI παράταξης αφορούν την *τοποθέτηση* και την *δρομολόγηση*. Το πρόβλημα τοποθέτησης έχει να κάνει με την τοποθέτηση των modules στον πίνακα και το πρόβλημα δρομολόγησης αφορά την καλωδίωση των τερματικών στα διάφορα modules που πρέπει να συνδεθούν μεταξύ τους. Ένα κύκλωμα VLSI μπορεί να απεικονισθεί με τη μορφή ενός γραφήματος, όπου οι ακμές αναπαριστούν τα καλώδια και οι κορυφές αναπαριστούν τα modules . Βεβαίως, ένα τέτοιο γράφημα είναι μία απλουστευμένη μορφή του κυκλώματος, αλλά η κατανόηση και η λύση ενός τέτοιου προβλήματος μάς παρέχει πολύτιμες βοήθειες στο να καταλήξουμε στις λύσεις των ρεαλιστικών μοντέλων.

Μια πρώτη προσσέγγιση για τη λύση του προβλήματος τοποθέτησης ήταν μέσω της Ελάχιστης Γραμμικής Διάταξης προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε τον συνολικό μήκος καλωδίων (βλέπε [69], [2]). Πρόσφατα μια εναλλακτική προσσέγγιση του προβλήματος αφορά την εύρεση, αναδρομικά, ελαχιστικών τομών με την ελάχιστη χωρητικότητα μεταξύ όλων των τομών που διαχωρίζουν το γράφημα σε δύο ισομεγέθης συνιστώσες. Η Διχοτόμηση Ακμών στοχεύει σε αυτή την προσσέγγιση (βλέπε [137]). Στις μέρες μας η τεχνολογία ολοκληρωμένων κυκλωμάτων έχει αλλάξει σημαντικά, οπότε αυτές οι εφαρμογές είναι πλέον άνευ ουσίας.

Το 1995, ο Raspaud στο [126] αποδεικνύει μια καινούρια σχέση μεταξύ του Τομοπλάτους και του εμβαδού της VLSI παράταξης ενός γραφήματος. Συγκεκριμένα, απέδειξε ότι, το ελάχιστο εμβαδόν της VLSI παράταξης ενός γραφήματος δεν είναι λιγότερο από το τετράγωνο του Τομοπλάτους του.

3.3 Προβλήματα Παράταξης σε Ζωγραφίσματα Γραφημάτων

Ίσως ο πιο σημαντικός στόχος του ζωγραφίσματος γραφημάτων είναι να αναπαριστά με τον πιο ευανάγνωστο τρόπο τα γραφήματα. Όπως λόγου χάρει το να μειώνει το πλήθος των διασταυρωμένων ακμών προκειμένου το γράφημα να γίνεται πιο ευανάγνωστο και να βοηθάει στην αντίληψη. Ένα διμερές ζωγράφισμα ή ενα 2-στρωματικό (2-layer) ζωγράφισμα είναι μια αναπαράσταση ενός γραφήματος όπου οι κορυφές ενός διμερούς γραφήματος τοποθετούνται σε δύο παράλληλες γραμμές και οι ακμές είναι ζωγραφισμένες ευθείες γραμμές (βλ. σχήμα 3.1). Ο αριθμός των τεμνουσών ακμών ενός διμερούς γραφήματος στο διστρωματικό ζωγράφισμα είναι ο ελάχιστος αριθμός των τεμνουσών ακμών μεταξύ όλων των δυνατών ζωγραφιών πάνω στο γράφημα αυτό. Στο [134] για μια μεγάλη κλάση διμερών γραφημάτων αποδείχθηκε ότι, η μείωση του αριθμού των τεμνουσών ακμών ενός διμερούς γραφήματος, είναι ισοδύναμη με τη μείωση του συνολικού μηκούς ακμών, δηλαδή της Ελαχιστης Γραμμικής Παράθεσης.



Σχήμα 3.1: Παράδειγμα εφαρμογής του 2-στρωματικού ζωγραφίσματος στο $K_{2,3}$ γράφημα

3.4 Προβλήματα Παράταξης ως Προβλήματα Εμβάπτισης

Γραμμική παράθεση είναι μια ειδική περίπτωση εμβάπτισης γραφήματος σε n-διάστατο γράφημα σχάρα (grid) ή σε άλλο γράφημα. Στη γενικότερη μορφή της, εμβάπτιση γραφήματος G εντός γραφήματος H, συνιστά τον ορισμό μιας 1-1 συνάρτησης από τις κορυφές του G στις κορυφές του H και την αντιστοιχεία ενός μονοπατιού στο H για κάθε ακμή στο G. Οι τρεις θεμελιώδεις παράμετροι που καθορίζουν την εμβάπτιση ενός γραφήματος είναι η *διεύρυνση (dilation)*, η *συμφόρηση (congestion)* και το *φορτίο (load)*. Διεύρυνση μιας εμβάπτισης είναι το μήκος του μεγαλύτερου μονοπατιού. Συμφόρηση μιας εμβάπτισης είναι ο μέγιστος αριθμός μονοπατιών που περιέχουν μια κοινή ακμή του H. Φορτίο εμβάπτισης είναι ο μέγιστος αριθμός κορυφών του G που αντιστοιχούν σε μια κορυφή του H. Οι εμβαπτίσεις είναι χρήσιμες στους παράλληλους υπολογισμούς όπου χρησιμοποιούνται για να εξομοιώνουν έναν αλγόριθμο ενός τύπου δικτύου σε μια παράλληλη μηχανή διαφορετικού τύπου δικτύου (βλ. [114]).

Η περίπτωση που ένα γράφημα με n κορυφές εμβαπτίζεται σε ένα γράφημα-μονοπάτι P_n με φορτίο 1, είναι ίσως το απλούστερο μη τετριμμένο πρόβλημα εμβάπτισης που έχει μελετηθεί διεξοδικά (βλ. [81], [1], [2], [70], [128], [109], [127], [19], [93], [130]). Σε αυτή την περίπτωση μερικά προβλήματα παράταξης συνδέονται άμεσα με κάποια προβλήματα εμβάπτισης. Συγκεκριμένα, το Ζωνοπλάτος αντιστοιχεί στην ελάχιστη διεύρυνση και το Τομοπλάτος στην ελάχιστη συμφόρηση.

Υπάρχουν και άλλες ενδιαφέρουσες εμβαπτίσεις σε πιο γενικευμένα γραφήματα. Μια τέτοια βλέπουμε στη μελέτη κυκλικού Ζωνοπλάτους και Τομοπλάτους αντίστοιχα στο [125], όπου έχουμε εμβάπτιση γραφήματος σε γράφημα-κύκλο. Τέλος, άλλες ενδιαφέρουσες εμβαπτίσεις είναι αυτές σε γραφήματα-σχάρες [7] όπως και σε δέντρα (βλέπε [75], [76], [132], [3]).

3.5 Προβλήματα Παράταξης σε Παράλληλους Επεξεργαστές

Πολλοί παράλληλοι υπολογιστές είναι φτιαγμένοι από ένα σύνολο επεξεργαστών με δικές τους μνήμες που ανταλλάζουν μηνύματα μέσω ενός δικτύου επικοινωνίας. Προκειμένου να πετυχαίνουμε καλές ταχύτητες, είναι σημαντικό να διανέμουμε τη συνολική ποσότητα δουλειάς στους επεξεργαστές με τον καλύτερο δυνατό τρόπο έτσι ώστε να ελαχιστοποιούμε οποιαδήποτε απώλεια χρόνου. Επίσης, σημαντικό είναι να μειώνουμε τη ποσότητα επικοινωνίας μεταξύ των επεξεργαστών, γιατί η επικοινωνία μεταξύ των δικτύων είναι πολύ πιο αργή από την ταχύτητα των επεξεργαστών. Κατάλληλες συναρτήσεις και τεχνικές ισορρόπησης του φορτίου έχουν αναπτυχθεί για να δώσουν λύσεις σε αυτές τις καταστάσεις. Σε ορισμένες περιπτώσεις οι τεχνικές αυτές οδηγούν σε προβλήματα διαμέρισης γραφημάτων (βλέπε [35], [93], [74]).

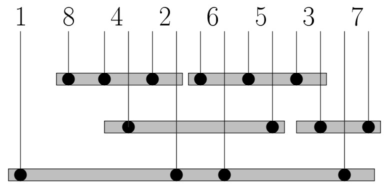
Το πρόβλημα διαμέρισης ενός γραφήματος συνιστά τη διαμέριση των κορυφών ενός γραφήματος σε k σύνολα παρόμοιου μεγέθους με τρόπο τέτοιο ώστε, να ελαχιστοποιείται ο αριθμός των ακμών των τομών μεταξύ των συνόλων αυτών. Η Διχοτόμηση Ακμών είναι μια ειδική περίπτωση διανέρισης για $k = 2$. Η αναδρομική διχοτόμηση είναι μια δημοφιλή τεχνική για να διασφαλίζουμε διαμερίσεις όπου $k = 2^r$ (βλέπε [137])

Την Διχοτόμηση Ακμών την χρησιμοποιούμε στην εύρεση λύσεων διαφορικών εξισώσεων και σε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων σε παράλληλα συστήματα. Απλουστεύοντας, σε αυτά τα προβλήματα εκτελείται μια ειδική επαναληπτική διεργασία σε κάθε κόμβο-κορυφή του δικτύου-γραφήματος και κάθε υπολογισμός περιλαμβάνει δεδομένα από τον εκάστοτε κόμβο και τους γείτονες του. Ένας τρόπος να διανείμουμε τη συνολική ποσότητα υπολογισμών μεταξύ των δύο επεξεργαστών είναι να αναθέσουμε στον καθένα τις μισές κορυφές του δικτύου. Αλλά λόγω της ανάγκης των συνοριακών κορυφών να επικοινωνούν, προκειμένου να παίρνουν τους τελεστές, είναι απαραίτητη η μείωση της τομής της διχοτόμησης.

3.6 Μερικά Ισοδύναμα Προβλήματα

Ο Διαχωρισμός Κορυφών είναι άμεσα συνδεδεμένος με πολλά αρκετά NP-πλήρη προβλήματα όπως, *παράταξη πίνακα πύλης (gate matrix layout), πλάτος μονοπατιού (pathwidth)* και *αναζήτηση αριθμού κορυφών (vertex search number)*. Επίσης, το Ζωνοπλάτος σχετίζεται με το *γνήσιο πλάτος μονοπατιού (proper pathwidth)*. Η παράταξη του πίνακα πύλης έχει μελετηθεί διεξοδικά και έχει εφαρμογές στη σχεδιάση CMOS κυκλωμάτων [28]. Μια τυχαία περίπτωση της παράταξης του πίνακα πύλης συνιστά μια συλλογή δικτύων $[N_1, \ldots, N_n]$ και ένα σύνολο πυλών $[G_1, \ldots, G_m]$ που συνδέονται με τα δίκτυα. Οι γραμμές του πίνακα αντιπροσωπεύουν τα δίκτυα ενώ οι στήλες τις πύλες. Σκοπός του προβλήματος είναι να βρούμε μια μετάθεση των στηλών που ελαχιστοποιεί τον αριθμό των ιχνών που απαιτείται για να καταγράψουν το τσιπ, που είναι ισοδύναμο με την ελαχιστοποίηση του εμβαδού. Στο σχήμα 3.2 βλέπουμε ένα παράδειγμα μιας παράταξης πίνακα πύλης. Καλούμε MINGML(G) τον ελάχιστο αριθμό των ιχνών που χρειάζεται ένα γράφημα G.

Το πρόβλημα του πλάτους μονοπατιού έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον τα τελευταία



	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
N_1	1	1	0	0	0	1	1	0
N_2	0	0	0	1	1	0	0	0
N_3	0	0	1	0	0	0	1	0
N_4	0	1	0	1	0	0	0	1
N_5	0	0	1	0	1	1	0	0

Σχήμα 3.2: Παράδειγμα παράταξης πίνακα πύλης με 3 tracks

χρόνια λόγω της σχέσης του με την θεωρία ελασσόντων γραφημάτων (Minor Graph Theory [128]). Η αποσύνθεση μονοπατιού γραφήματος $G = (V, E)$ είναι μια ακολουθία υποσυνόλων κορυφών $(X_1, \ldots, X_r)$ τέτοια που

- $\bigcup_{i=1}^{r} X_i = V$
- Οι δύο άκρες ακμής $e \in E$ ανήκουν στο ίδιο X_i για $1 \leq i \leq r$
- για κάθε $i \leq j \leq k$ ισχύει ότι, $X_i \cap X_k \subseteq X_j$.

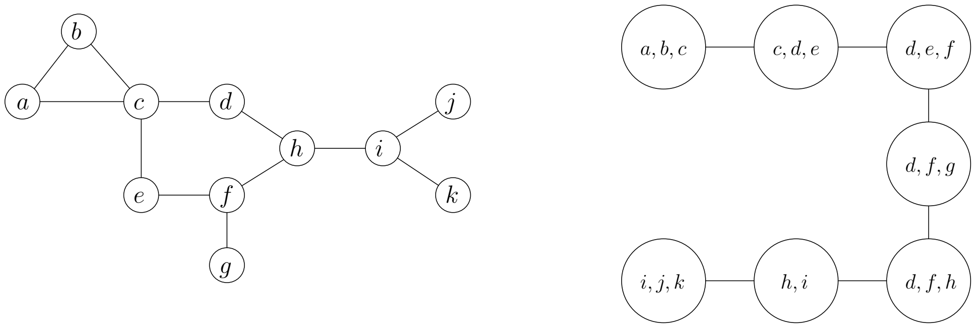
Ορισμός 3.1 Πλάτος αποσύνθεσης μονοπατιού $(X_1, \ldots, X_r)$ *καλούμε το*

$$\textsc{minpw}(G, (X_1, \ldots, X_r)) = \max_{i \in |r|} |X_i| - 1$$

Το $\textsc{minpw}(G)$ είναι το ελάχιστο πλάτος μονοπατιού μεταξύ όλων των δυνατών αποσυνθέσεων μονοπατιών του G. Το πρόβλημα του πλάτους μονοπατιού (pathwidth) συνιστά την εύρεση μιας αποσύνθεσης μονοπατιού με το ελάχιστο πλάτος (βλέπε σχήμα 3.3). Για περαιτέρω πληροφορίες σχετικά με το πλάτος μονοπατιού βλέπε [15] και [44].

Το πρόβλημα εύρεσης κορυφών (vertex search number) προτάθηκε από τους Κυρούση και Παπαδημητρίου το 1986 στο [83]. Να αναφέρουμε εν συντομία ότι, αυτό το πρόβλημα ζητάει τον αριθμό των «ερευνητών» που απαιτούνται για να πιάσουν έναν απεριόριστο αριθμό «εισβολέων» που κινούνται πάνω στις ακμές ενός γραφήματος. Συμβολίζουμε ως $\textsc{minsn}(G)$ τον ελάχιστο αυτό αριθμό κορυφών του γραφήματος G.

Η ισοδυναμία μεταξύ της παράταξης πύλης πίνακα, του αριθμού εύρεσης κορυφών, πλάτος μονοπατιού και διαχωρισμού κορυφών, είναι συνέπεια των αποτελεσμάτων [83], [82], [46] και από τα οποία προκύπτει το παρακάτω θεώρημα.



Σχήμα 3.3: Παράδειγμα ενός γραφήματος και ένα από τα μονοπάτια αποσύνθεσής του με πλάτος 2.

Θεώρημα 3.1 *Για κάθε γράφημα G ισχύει,*

$$\text{MINVS}(G) = \text{MINPW}(G) = \text{MINSN}(G) - 1 = \text{MINGML}(G) + 1.$$

Έστω $I_v = \{i \mid u \in X_i\}$. *Γνήσια αποσύνθεση μονοπατιού* καλούμε την αποσύνθεση μονοπατιού για την οποία ισχύει ότι, $I_u \nsubseteq I_v$ για όλες τις $u, v \in V$. Γνήσιο πλάτος μονοπατιού γραφήματος G, $\text{MINPPW}(G)$, είναι το ελάχιστο πλάτος μονοπατιού μεταξύ όλων των γνήσιων αποσυνθέσεων μονοπατιών του G. Το γνήσιο πλάτος μονοπατιού συνιστά την εύρεση μιας γνήσιας αποσύνθεσης μονοπατιού με το ελάχιστο πλάτος. Το γνήσιο πλάτος μονοπατιού γραφήματος G μπορεί επίσης να οριστεί ως η ελάχιστη πληθικότητα της μέγιστης κλίκας ενός γνήσιου τμήματος υπογραφήματος του G μειωμένο κατά 1.

Η παρακάτω ισοδυναμία μεταξύ του ζωνοπλάτους και του γνήσιου πλάτους μονοπατιού αποδείχθηκε στο [77]:

Θεώρημα 3.2 *Για κάθε γράφημα G ισχύει,*

$$\text{MINPPW}(G) = \text{MINBW}(G).$$

Κεφάλαιο 4

Αποτελέσματα NP-Πληρότητας

Είναι γενικά αποδεκτό ότι δείχνοντας ότι ένα πρόβλημα είναι NP-πλήρες είναι ισοδύναμο με το να αποδεικνύεται η υπολογιστική του *δυσκολία* (βλέπε [50]). Το ακόλουθο θεώρημα αναδεικνύει την δυσκολία των προβλημάτων παράταξης σε αυθαίρετα γραφήματα.

Θεώρημα 4.1 *Οι εκδοχές των προβλημάτων παράταξης -Ζωνοπλάτος, Ελάχιστη Γραμμική Παράθεση, Τομοπλάτος, Διαχωρισμός Κορυφών, Άθροισμα Τομών, Διχοτόμηση Ακμών- ως προβλήματα απόφασης, είναι NP-πλήρη .*

Η αναγωγή για το Ζωνοπλάτος δίνεται από τον Παπαδημητρίου στο [122], οι αποδείξεις για την Ελάχιστη Γραμμική Παράθεση και Διχοτόμηση Ακμών δίνονται στο [51], για το Τομοπλάτος στο [52], ενώ για το Τροποποιημένο Τομοπλάτος στο [115]. Τέλος, η απόδειξη της πληρότητας του Διαχωρισμού Κορυφών βρίσκεται στο [96] και για το Άθροισμα Τομών στο [31], [65].

Πολλά προβλήματα παρατάξεων παραμένουν NP-πλήρη και σε περιπτώσεις πιο ειδικών γραφημάτων. Στον πίνακα 4.1 βλέπουμε συγκεντρωμένα αυτά τα αποτελέσματα. Για παράδειγμα το Ζωνοπλάτος παραμένει NP-πλήρες ακόμα και στη περίπτωση όπου το γράφημα είναι είναι δέντρο μέγιστου βαθμού 3 [49].Το αποτέλεσμα αυτό βελτιώθηκε από τον Monien στο [113] όπου απέδειξε ότι το Ζωνοπλάτος παραμένει NP-πλήρες σε γραφήματα σαρανταποδαρούσες με «τρίχες» το πολύ μήκους 3 και σαρανταποδαρούσες με το πολύ μια «τρίχα ραχοκοκαλιάς». Το πρόβλημα είναι επίσης NP-πλήρες σε κυκλικές σαρανταποδαρούσες όπως και δείχνεται στο [118]. Να θυμίσουμε εδώ ότι σαρανταποδαρούσα είναι μια ειδική κλαση δέντρων αποτελούμενη από ένα σύνολο μονοπατιών που ονομάζουμε τρίχες που συνδέουν τα φύλλα τους με τις κορυφές του κύριου μονοπατιού που ονομάζουμε ραχοκοκαλιά. Όταν η ραχοκοκαλιά είναι κύκλος αντί μονοπατιού, καλούμε την σαρανταποδαρούσα κυκλική.

Το Τομοπλάτος παραμένει NP-πλήρες και για γραφήματα μέγιστου βαθμού 3 (βλέπε [108]). Αυτό το αποτέλεσμα ισχυροποιήθηκε ακόμα περισσότερο στο [115] όπου αποδείχθηκε ότι το Τομοπλάτος, ο Διαχωρισμός Κορυφών και το Τροποποιημένο Τομοπλάτος παραμένουν NP-πλήρη σε επίπεδα γραφήματα μέγιστου βαθμού 3. Η Διχοτόμηση Ακμών είναι επίσης NP-πλήρες για μ-κανονικά γραφήματα [20] και για γραφήματα μέγιστου βαθμού 3 [105]. Είναι επίσης γνωστό [41] ότι η Ελάχιστη Γραμμική Παράθεση σε διμερή γραφήματα είναι NP- πλήρες. Η NP-πληρότητα του Διαχωρισμού Κορυφών σε χορδικά γραφήματα

Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα NP-πληρότητας σε προβλήματα παρατάξεων

Πρόβλημα	NP-Πλήρες	Βιβλιογραφία
Ζωνοπλατος (BandWith)	γενικά	[122]
	για δέντρα με μέγιστο βαθμό 3	[49]
	για σαρ/δαρούσες με μήκος τρίχας ≤ 3	[113]
	για σαρ/δαρούσες με ≤ 1 τρίχα ανά κορυφή-ραχοκοκαλιά	[113]
	για κυκλικές σαρ/δαρούσες με μήκος τρίχας $= 1$	[118]
	για γραφήμτα σχάρες και *unit disk graph*?	[33]
Ελαχιστη Γραμμικη Παραθεση (MinLA)	γενικά	[51]
	για διμερή γραφήματα	[41]
Τομοπλατος (CutWith)	γενικά	[52]
	για γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3	[108]
	για επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3	[115]
	για γραφήματα σχάρες και *unit disk graph*?	[33]
Τροποποιημενο Τομοπλατος (ModCut)	για επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3	[115]
Διαχωρισμος Κορυφων (Vertex Separation)	γενικά	[96]
	για επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3	[115]
	για χορδικά γραφήματα	[62]
	για διμερή γραφήματα	[56]
	για διμερή γραφήματα σχάρες και *unit disk graph*?	[33]
Άθροισμα Τομων (SumCut)	γενικά	[31]
	για συνδιμερή γραφημάτα	[151]
Διχοτομηση Ακμων (Edge Bisection)	γενικά	[51]
	για γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3	[105]
	για γραφήματα με μέγιστο βαθμό φραγμένο	[105]
	για μ-κανονικά γραφήματα	[20]

αποδείχθηκε από τον Gustedt στο [62] ενώ για διμερή γραφήματα στο [56]. Στο [33] αποδεικνύεται ότι το Ζωνοπλάτος, Τομοπλάτος και Διαχωρισμός Κορυφών παραμένει NP-πλήρες και στην πρίπτωση γραφήματος σχάρας ή μοναδιαίου δίσκου. Τέλος, το Άθροισμα Τομών είναι NP-πλήρες και για συνδιμερή γραφημάτα [151].

Η υπολογιστική πολυπλοκότητα των περισσοτέρων προβλημάτων παράταξης πάνω σε διάφορες κλάσεις γραφημάτων παραμένει ακόμα άγνωστη. Για παράδειγμα δεν είναι γνωστό αν η Ελάχιστη Γραμμική Παράταξη ή το Άθροισμα Τομών παραμένει NP-πλήρες σε αραιά γραφήματα, όπως επίσης, δεν έχει αποδειχθεί η NP-πληρότητα τους σε σειριακά-παράλληλα γραφήματα.

Κεφάλαιο 5

Κλάσεις Γραφημάτων με Πολυωνυμικούς Αλγόριθμους

Εδώ θα αναφέρουμε αποτελέσματα επαρκών αλγορίθμων που μας δίνουν βέλτιστες λύσεις πάνω σε κάποιες ειδικές κλάσεις γραφημάτων.

Στη περίπτωση της Ελάχιστης Γραμμικής Παράθεσης είναι γνωστή η βέλτιστη τιμή της σε υπερκύβους από τον Harper το 1964 στο [67] ενώ το 1970 στο [69] έδωσε έναν κλειστό τύπο για την βέλτιστη τιμή της σε Bruijn γράφημα τάξης 4. Το πρώτο αποτέλεσμα από τα δύο προέκυψε κατά την ελαχιστοποίηση του συνολικού μήκους καλωδίων που απαιτούνταν για την σύνδεση ενός Viterbi αποκωδικοποιητή ενώ το δεύτερο κατά την ελαχιστοποίηση λαθών στην σχεδίαση ενός κώδικα διορθωτή-λαθών. Στην περίπτωση n-διάστατου υπερκύβου Q_d έχουμε,

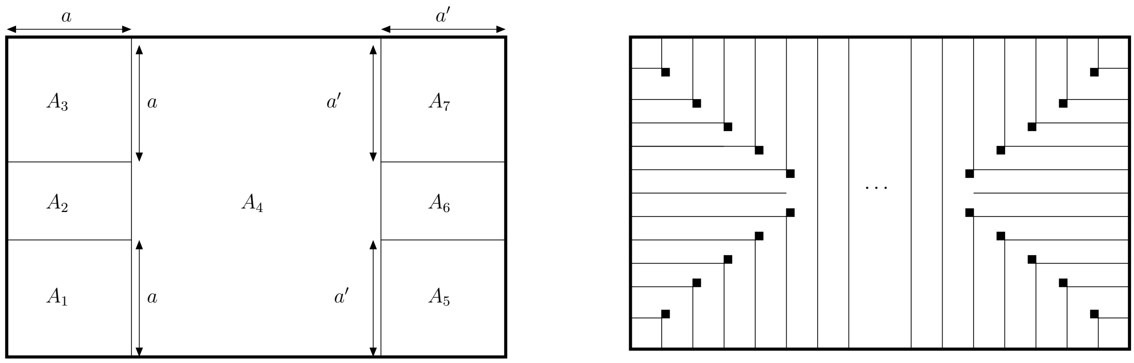
$$\textsc{minla}(Q_d) = 2^{d-1}(2^d - 1).$$

Οι Chung [25], Goldberg [55] ήταν οι πρώτοι που έδωσαν έναν $O(n^3)$ αλγόριθμο για τη λύση της Ελάχιστης Γραμμικής Παράταξης σε δέντρα. Στο [2] δόθηκε ένας $O(n \log n)$ αλγόριθμος για τον υπολογισμό της Ελάχιστης Γραμμικής Παράθεσης ριζωμένου δέντρου n κορυφών. Ο Shiloach το 1979 στο [135] βελτίωσε αυτό το αποτέλεσμα παρουσιάζοντας έναν αλγόριθμο χρόνου $O(n^{2.2})$ ο οποίος βελτιώθηκε ακόμα περισσότερο εννιά χρόνια αργότερα σε $O(n^{\log 3/\log 2})$ από τον Chung στο [25]. Η βέλτιστη τιμή της Ελάχιστης Γραμμικής Παράταξης σε πλήρη διμερή δέντρα $T_{2,k}$ δίνεται από τον παρακάτω τύπο που ανακαλύφθηκε απο τον Chung. Για όλα τα $k \geq 2$ έχουμε

$$\textsc{minla}(T_{2,k}) = 2^k \left(\frac{1}{3}k + \frac{5}{18}\right) + \frac{2}{9}(-1)^k - 2.$$

Όσον αφορά τους παράλληλους αλγόριθμους, ο Diaz στο [34] απέδειξε ότι η Ελάχιστη Γραμμική Παράταξη σε δέντρα ανήκει στο NC, δηλαδή, μπορεί να λυθεί σε χρόνο $O(\log^2 n)$ με CREW PRAM (Parallel Random Access Machine) με $O(n^{3.6})$ επεξεργαστές (για πολυπλοκότητα παράλληλων υπολογισμών βλέπε [59]).

Η Ελάχιστη Γραμμική Παράταξη σε τετραγωνικά ή ορθογώνια γραφήματα-σχάρες, είναι μία ιδιαίτερη περίπτωση. Έστω $L_{m,n}$ ένα $m \times n$ ορθογώνιο γράφημα σχάρα και έστω



(α) (β)

Σχήμα 5.1: Σχηματική αναπαράσταση της βέλτιστης τιμής της MINLA($L_{m,m'}$) για ορθογώνιο γράφημα σχάρα $m \times m'$ όπως την περιέγραψαν οι Muradyan και Philiposyan στο [118].

$L_{n,n} = L_n$ τετραγωνικό γράφημα σχάρα $n \times n$. Το πρόβλημα αυτό λύθηκε πρώτη φορά από τους Muradyan και Philiposyan το 1980 σε μια ρώσικη δημοσίευση [118] για την γενική περίπτωση της ορθογώνιας σχάρας. Το 1986 οι Mitchison και Durbin παρουσίασαν στο [111] την λύση για τετραγωνικές σχάρες. Το 1981 οι Niepel και Tomasta στο [121] έκαναν λαθεμένα την εικασία ότι η λεξικογραφική παράταξη είναι η βέλτιστη για την MINLA(L_m).

Το 1999 ο Bezrukov στο [8] περιέγραψε μια ενδιαφέρουσα λύση για την βέλτιστη τιμή της MINLA($L_{m,m'}$) για $m \times m'$ ορθογώνιες σχάρες. Την βέλτιστη αρίθμηση την βλέπουμε στο σχήμα 5.1. Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1(α) η αρίθμηση ξεκινάει από την κάτω αριστερή γωνία της σχάρας και μετά συμπληρώνει τα τμήματα $A_1, A_2, \ldots, A_7$, όπου A_1, A_3 είναι $\alpha \times \alpha$ πίνακες και A_5, A_7 είναι $\alpha' \times \alpha'$ πίνακες. Οι τιμές των α και α' πρέπει να ικανοποιούν

$$\alpha,\ \alpha' \in \left\{ \left\lceil m - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}} \right\rceil \times \left\lfloor m - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}} \right\rfloor \right\}$$

Ο τρόπος με τον οποίο απαριθμούμε τις περιοχές φαίνεται στο σχήμα 5.2(b). Κάθε τετράγωνο απαριθμάται με τη σειρά. Το τετράγωνο A_1 πρέπει να συμπληρωθεί γραμμή μετά από στήλη. Το τετράγωνο A_2 πρέπει να συμπληρωθεί από συνεχόμενες γραμμές από τα κάτω προς τα πάνω και από τα αριστερά προς τα δεξιά. Το τετράγωνο A_3 απαριθμάται αντίστροφα σε σχέση με το A_1, ενώ το A_4 απαριθμάται από συνεχόμενες στήλες από τα κάτω προς τα πάνω και από τα αριστερά προς τα δεξιά. Τέλος τα τετράγωνα A_5, A_6, A_7, συμπληρώνονται με τον ίδιο τρόπο. Έτσι λοιπόν με αυτή τη λύση, παίρνουμε

$$\text{MINLA}(L_{m,m'}) = -\frac{2}{3}a^3 + 2ma^2 - \Big(m^2 + m - \frac{2}{3}\Big)a + m' \times (m^2 + m - 1) - m$$

και

$$\textsc{minla}(L_m) = \tfrac{4-\sqrt{2}}{3} m^3 + O(m^2).$$

Το παρακάτω θεώρημα προκύπτει από τα [118], [111], [16], [32], [47] και συγκεντρώνει τις βέλτιστες τιμές των προβλημάτων (παραμέτρων) παράταξης σε γραφήματα σχάρες.

Θεώρημα 5.1 *Έστω L_m τετραγωνική σχάρα μεγέθους m. Τότε ισχύουν τα εξής*

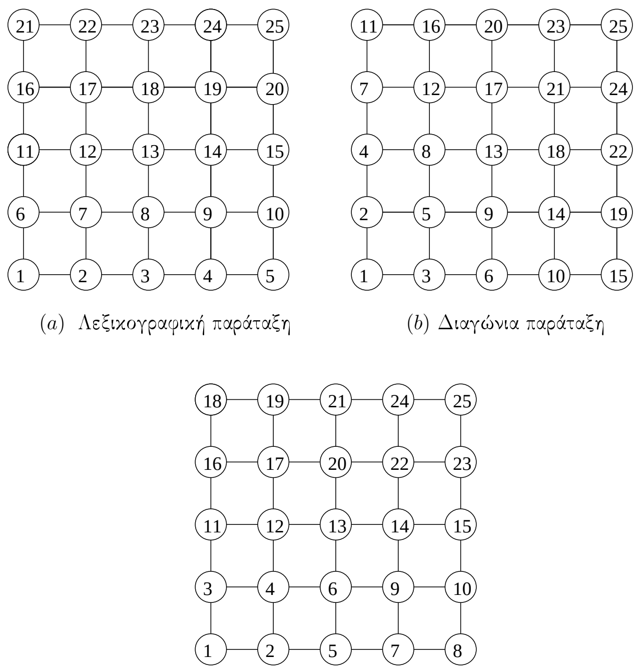
$$\begin{aligned}
\textsc{minvs}(L_m) &= m \\
\textsc{mincw}(L_m) &= m + (\text{odd } m) \\
\textsc{minsc}(L_m) &= \frac{2}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 - \frac{7}{6}m \\
\textsc{minvb}(L_m) &= m \\
\textsc{mineb}(L_m) &= m + (\text{odd } m) \\
\textsc{minla}(L_m) &= \frac{1}{3}(4-\sqrt{2})m^3 + O(m^2).
\end{aligned}$$

Στο σχήμα 5.2 βλέπουμε τις βέλτιστες παρατάξεις σε 5×5 τετραγωνικό γράφημα σχάρα. Η λεξικογραφική είναι η βέλτιστη για τον Διαχωρισμό Κορυφών, την Διχοτόμηση Ακμών, Ζωνοπλάτος και Τομοπλάτος. Η Muradyan και Philiposyan είναι η βέλτιστη για την Ελάχιστη Γραμμική Παράταξη και τέλος η διαγώνια είναι η βέλτιστη παράταξη για τον Διαχωρισμό Κορυφών, Άθροισμα Τομών και Ζωνοπλάτος.

Ακριβή αποτελέσματα για τον Διαχωρισμό Κορυφών, Άθροισμα Τομών και Ζωνοπλάτος είναι γνωστά και για πολυδιάστατες σχάρες και τοροειδή [8]. Το πρόβλημα του ζωνοπλάτους για n-διάστατες σχάρες λύθηκε από τον Bolobas το 1991 στο [17]. Αντίθετα, ανοιχτό παραμένει το πρόβλημα εύρεσης των βέλτιστων τιμών σε σχάρες με οπές, με εξαίρεση την Διχοτόμηση Ακμών για την οποία οι Παπαδημητρίου και Σιδέρης στο [123] έδωσαν έναν $O(n^5)$ αλγόριθμο.

Η d-διάστατη n-αδική κλίκα είναι ένα γράφημα του οποίου κάθε κορυφή αναπαριστάται με έναν ακέραιο (label) από το 0 στο $n^d - 1$ και οι ακμές του ενώνουν κορυφές των οποίων η n-αδική αναπαράσταση διαφέρει κατά ένα ψηφίο. Στο [120] βλέπουμε την απόδειξη της λύσης της Ελάχιστης Γραμμικής Παράταξης που έδωσε ο Nakano για τέτοια γραφήματα. Αλλα αποτελέσματα της Ελάχιστης Γραμμικής Παράταξης πάνω σε άλλες ειδικές κλάσεις γραφημάτων και αναφορές τέτοιων βλέπουμε στο [8].

Το Τομοπλάτος ιστορικά ακολούθησε μια παρόμοια διαδρομή. Το 1966 ο Harper στο [68] φαίνεται να είναι ο πρώτος πού το έλυσε για υπερκύβους. Αργότερα το 1982 ο Chung στο [26] παρουσίασε έναν αλγόριθμο $O(n \log^{d-2} n)$ χρόνου, για το Τομοπλάτος σε δέντρα n κορυφών με μέγιστο βαθμό d. Ο Γιαννακάκης το 1985 στο [150] βελτίωσε το αποτέλεσμα αυτό δίνοντας έναν γρηγορότερο αλγόριθμο χρόνου $O(n \log n)$. Στην περίπτωση k-επίπεδου t-αδικού δέντρου $T_{t,k}$ ισχύει,



(a) Λεξικογραφική παράταξη

(b) Διαγώνια παράταξη

(c) Muradyan Piliposjian παράταξη

Σχήμα 5.2: Οι βέλτιστες παρατάξεις σε 5×5 τετραγωνικό γράφημα σχάρα.

$$\textsc{mincw}(T_{t,k}) = \left\lceil \frac{1}{2}(k-1)(t-1) \right\rceil, \quad \forall k \geq 3.$$

Τις ακριβείς τιμές Τομοπλάτους για 2-διάστατες και 3-διάστατες σχάρες βρήκε ο Rolin το 1995 στο [129], ο οποίος επίσης παρουσίασε αποτελέσματα για κυλινδρικά και τοροειδή πλέγματα. Συγκεκριμένα απέδειξε ότι,

$$\textsc{mincw}(L_{m,n}) = \begin{cases} 2, & \text{αν } m = n = 2, \\ \min(m+1, n+1), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Το 2001 ο Θηλυκός στο [144] παρουσίασε έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για τον υπολογισμό του τομοπλάτους σε γραφήματα φραγμένου βαθμού με μικρό δεντροπλάτος.

Στους παράλληλους αλγόριθμους , ο Diaz στο [34] απέδειξε ότι μια βέλτιστη τιμή για το τομοπλάτος δέντρου n κορυφών με βαθμό Δ μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(\Delta \log^2 n)$ μέσω του CREW PRAM με $O(n^{3.6})$ επεξεργαστές. Η παράλληλη πολυπλοκότητα του Τομοπλάτους για δέντρα φραγμένου βαθμού παραμένει ανοιχτό πρόβλημα.

Για το Άθροισμα Τομών και Προφίλ ο Lepin το 2002 σε μια ρώσικη δημοσίευση [97] έδωσε τον πρώτο πολυωνυμικό αλγόριθμο για δέντρα. Το αποτέλεσμα αυτό βελτίωσε ο Diaz το 1991 στο [31] δίνοντας έναν αλγόριθμο γραμμικού χρόνου. Στην ίδια δημοσίευση έδωσε και έναν παράλληλο αλγόριθμο $O(\log n)$ χρόνου για το βέλτιστο Άθροισμα Τομών σε δέντρα n κορυφών, μέσω του CREW PRAM με $O(n^2 \log n)$ επεξεργαστές.

Στην περίπτωση του Διαχωρισμού Κορυφών ο Ellis στο [39] έδωσε έναν γραμμικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό του βέλτιστου διαχωρισμού κορυφών ενός δέντρου και έναν $O(n \log n)$ αλγόριθμο για την βέλτιστη παράταξη. Πρόσφατα ο Σκοδίνης στο [138] παρουσίασε έναν γραμμικό αλγόριθμο για την εύρεση της βέλτιστης παράταξης. Πολυωνυμικούς αλγόριθμους για τον υπολογισμό του Διαχωρισμού Κορυφών σε μεταθετικά γραφήματα και *cographs* δόθηκαν από τους Bodloander και Mohring στα [14] και [15] αντίστοιχα.

Στην περίπτωση της Διχοτόμησης Ακμών ο Leighton στο [93] απέδειξε πως να ελαχιστοποιεί το πλάτος της διχοτόμησης του καρτεσιανού γινομένου ισομηκών μονοπατιών, εφόσον τα μήκη αυτά είναι άρτιοι. Ο Nakano στο [120] έλυσε την περίπτωση που τα μήκη είναι περιττοί. Ο Rolim στο [129] υπολόγισε την βέλτιστη Διχοτόμηση Ακμών κανονικών, κυλινδρικών και τοροειδών 2-διάστατων σχάρων και 3-διάστατων τοροειδών σχάρων. Το ακόλουθο θεώρημα διατυπώνει αυτά τα αποτελέσματα για ορθογώνια σχάρα $L_{m,n}$:

Θεώρημα 5.2 *Έστω ορθογώνια σχάρα $L_{m,n}$. Τότε για $2 \leq m \leq n$ έχουμε,*

$$\textsc{mineb}(L_{m,n}) = m + (\text{odd } n)$$

και για $m \geq 2,\ n \geq 3$,

$$\textsc{mineb}(L_{m,n}) = \begin{cases} \min\{2m, n\}, & \text{αν } m, n \text{ άρτιοι,} \\ \min\{2m, n+2\}, & \text{αν } m \text{ περιττός και } n \text{ άρτιος,} \\ \min\{2m+1, n\}, & \text{αν } m \text{ άρτιος και } n \text{ περιττός,} \\ \min\{2m+1, n+2\}, & \text{αν } m, n \text{ περιττοί.} \end{cases}$$

Ο MacGregor το 1978 στο [105] έδωσε έναν $O(n^3)$ αλγόριθμο για την Διχοτόμηση Ακμών σε δέντρα. Οι Goldberg και Miller στο [54] διατύπωσαν έναν παράλληλο αλγόριθμο χρόνου $O(\log^2 n \log\log n)$ πάνω σε CRCW PRAM με $O(n^2)$ επεξεργαστές για τη Διχοτόμηση δέντρων, βασισμένοι στον αλγόριθμο του MacGregor .

Στο [118] οι Muradyan και Philiposyan έλυσαν το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής παράταξης και τομοπλάτος για πλήρη p-μερή γραφήματα. Να θυμίσουμε ότι, πλήρες p-μερές είναι το $K(N_1, \ldots, N_p)$ γράφημα του οποίου το σύνολο κορυφών είναι διαμερισμένο σε p σύνολα έτσι ώστε κάθε κορυφή να συνδέεται με όλες τις άλλες πλην αυτών που ανήκουν στην ίδια διαμέριση. Αν επιπλέον, οι διαμερίσεις διαφέρουν, πληθικά, το πολύ κατά μια κορυφή, τότε καλείται *ισορροπημένο* p-μερές γράφημα.

Όπως έχουμε αναφέρει το Ζωνοπλάτος σε δέντρα είναι NP-πλήρες. Στη περίπτωση, όμως, k-επίπεδου t-αδικού δέντρου $T_{t,k}$ ισχύει,

$$\textsc{minbw}(T_{t,k}) = \left\lceil \frac{t(t^{k-1}-1)}{2(k-1)(t-1)} \right\rceil .$$

Ο Heckmann στο [72] παρουσίασε την εμβάπτιση του πλήρους διμερούς γραφήματος με βέλτιστο Ζωνοπλάτος. Υπάρχει επίσης $O(n \log n)$ αλγόριθμος [5] που αποφασίζει το Ζωνοπλάτος γραφήματος σαρανταποδαρούσας με τρίχες μήκους το πολύ δύο.

Άλλες κλάσεις γραφημάτων των οποίων το Ζωνοπλάτος μπορεί να υπολογιστεί αποτελεσματικά είναι τα τμηματικά (interval) γραφήματα [106], [107], τα γραφήματα αλυσίδες [86] και πεταλούδες [149]. Να θυμίσουμε εδώ ότι, τμηματικά γραφήματα καλούμε τις τομές γραφημάτων ενός συνόλου διαστημάτων πάνω στην νοητή γραμμή των πραγματικών αριθμών. Αντιστοιχούμε ένα διάστημα σε κάθε κορυφή και για κάθε ακμή που ενώνει δύο κορυφές αντιστοιχούμε την τομή των διαστημάτων αυτών. Δηλαδή για γράφημα $G = (V, E)$ έχουμε, $V = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ όπου $I_1, I_2, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ και $\{I_i, I_j\} \in E \Leftrightarrow I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Γραφήματα αλυσίδες καλούμε τα διμερή γραφήματα $G(X, Y, E)$ όπου έχουμε την διάταξη $x_1, x_2, \ldots, x_{|X|}$ των κορυφών του X έτσι ώστε $\Gamma(x_1) \subseteq \Gamma(x_2) \subseteq \ldots \subseteq \Gamma(x_{|X|})$. Ο Muradyan στο [117] ήταν ο πρώτος που έδωσε πολυωνυμικό αλγόριθμο για το Ζωνοπλάτος τμηματικών γραφημάτων. Ένα χρόνο μετά ακολούθησε ο Kratsch στο [106] και έπειτα ακολούθησαν οι Kleitman και Vohra στο [85] όπου έδωσαν έναν $O(n\textsc{bw}(G))$ αλγόριθμο. Οι Mahem στο [107] και Sprague στο [140], ανεξάρτητα, στην προσπάθεια τους να διορθώσουν τον αλγόριθμο του Kratsch έδωσαν δύο νέους αλγόριθμους χρόνου $O(n^2)$ και $O(n \log n)$ αντίστοιχα. Ένα άλλο πρόβλημα σε τμηματικά γραφήματα για το οποίο έχουμε πολυωνυμικούς αλγορίθμους είναι το Άθροισμα Τομών [100]

Ο πίνακας 5.1 συνοψίζει όλες τις κλάσεις γραφημάτων και τα προβλήματα παράταξης για τα οποία υπάρχουν πολυωνυμικοί αλγόριθμοι.

Εκτός από σχάρες, υπάρχουν και αποτελέσματα πάνω σε άλλες οικογένειες γραφημάτων που προκύπτουν μέσω πράξεων μεταξύ μονοπατιών P_n, κύκλων C_n, δέντρων T_n, κλικών K_n ή διμερών $K_{n,m}$.

Ορισμός 5.1 *Θα ορίσουμε τις πράξεις πάνω σε γραφήματα όπως τις εισήγαγε ο Lai και Williams στο [92].*

- *Η n-οστή δύναμη του γραφήματος G είναι το γράφημα G^n, το οποίο έχει τις ίδιες κορυφές με το G και ακμή uv αν απόσταση$(u, v) \leq n$ στο G.*

- *Έστω διακεκριμένα - ξένα ανά δύο - γραφήματα $G_1, \ldots, G_k$.* Η διακεκριμένη σύνδεση *$G_1 + \ldots + G_k$, είναι το γράφημα G με $V(G) = \bigcup_{1\leq i\leq k} V(G_i)$ και $uv \in E(G)$ αν για κάποιο $i \neq j$, $u \in V(G_i)$ και $v \in V(G_j)$ ή αν για κάποιο i έχουμε $u, v \in V(G_i)$ και $uv \in E(G_i)$.*

- *Έστω γραφήματα G, H. Ορίζουμε το* το γινόμενο *των G και H ως*

  $$G \times H = (V(G) \times V(H), E(G \times H))$$

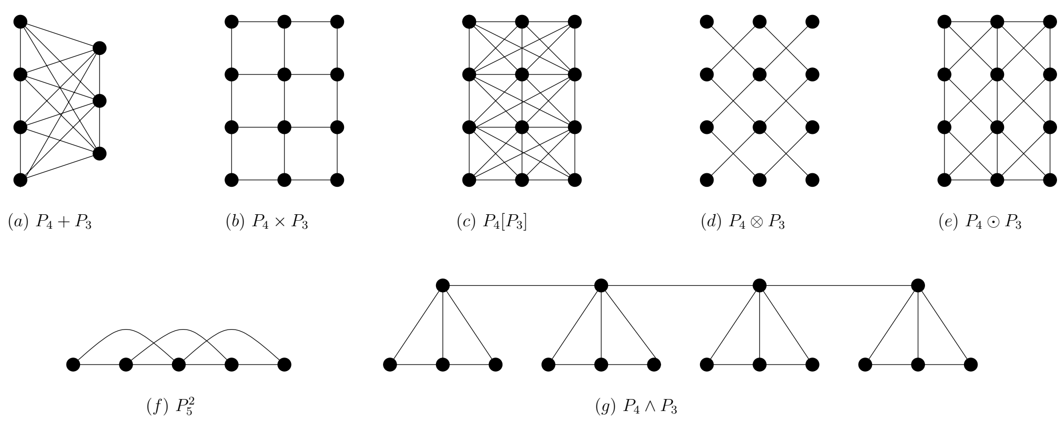
  όπου $E(G \times H) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid (u_1u_2 \in E(G) \text{ και } v_1 = v_2) \text{ ή } (v_1v_2 \in E(H) \text{ και } u_1 = u_2)\}$.

- *Έστω γραφήματα G, H. Ορίζουμε την* σύνθεση *των G, H ως*

  $$G[H] = (V(G) \times V(H), \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid (u_1u_2 \in E(G)) \text{ ή } (v_1v_2 \in E(H) \text{ και } u_1 = u_2)\}).$$

- *Έστω γραφήματα G, H. Ορίζουμε το* ευθή γινόμενο *των G, H ως*

  $$G \otimes H = (V(G) \times V(H), \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid u_1u_2 \in E(G) \text{ και } v_1v_2 \in E(H)\}).$$



Σχήμα 5.3: Παραδείγματα σε πράξεις γραφημάτων: (a) διακεκριμένη σύνδεση, (b) γινόμενο, (c) σύνθεση, (d) ευθύ γινόμενο, (e) ισχυρό γινόμενο, (f) η δύναμη, (g) κορόνα

- *Έστω γραφήματα G, H. Ορίζουμε το* ισχυρό γινόμενο *των G, H ως*

  $$G \odot H = (V(G) \times V(H), E(G \odot H))$$

  όπου

  $$\begin{aligned} E(G \odot H) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid \ & u_1u_2 \in E(G) \textit{ και } v_1v_2 \in E(H) \\ & \textit{ή } u_1 = u_2 \textit{ και } v_1v_2 \in E(H) \\ & \textit{ή } v_1 = v_2 \textit{ και } u_1u_2 \in E(G) \ \}. \end{aligned}$$

- *Έστω γραφήματα G, H. Ορίζουμε την* κορόνα *$G \wedge H$ των G, H ως το γράφημα που περιέχει ένα αντίγραφο του G και σε κάθε κορυφή $u \in G$ αντιστοιχούμε ένα αντίγραφο του H και ενώνουμε τις κορυφές αυτού με την u.*

Στον πίνακα 5.2 βλέπουμε τα προβλήματα παράταξης, που είναι επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο, σε γραφήματα που έχουν προκύψει μέσω των πράξεων που ορίσαμε.

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ένα ενδιαφέρον ανοιχτό πρόβλημα. Αυτό αφορά τον υπολογισμό του Ζωνοπλάτους ενός γραφήματος *Hamming*. Και το ενδιαφέρον αυτό έγκειται στο ότι κάτι τέτοιο θα μας έδινε ένα καλό μέτρο της επίδρασης του θορύβου πολυκάναλης μετάδοσης δεδομένων. Το καλύτερο αποτέλεσμα που έχουμε μέχρι στιγμής όπως ο Harper απέδειξε στο [71] μας δείχνει ότι το Ζωνοπλάτος γραφήματος Hamming είναι ασύμπτωτο με το $\sqrt{\frac{2}{\pi d} n^d}$ με $d \to \infty$.

Πίνακας 5.1: Οι κλάσεις γραφημάτων με υπολογίσιμες τις βέλτιστες λύσεις των προβλημάτων παράταξης σε πολυωνυμικό χρόνο. (Όπου n ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος, m ο αριθμός των ακμών και Δ ο μέγιστος βαθμός)

Πρόβλημα	Κλάσεις Γραφημάτων	Πολυπλοκότητα	Βιβλιογραφία
Ζωνοπλατος	σαρ/δαρούσες με μήκος τρίχας ≤ 2	$O(n \log n)$	[5]
	υπερκύβοι	$O(n \log n)$	[68]
	πεταλούδες	$O(n \log n)$	[149]
	τμηματικά γραφήματα	$O(n\Delta^2 \log \Delta)$	[106]
	τμηματικά γραφήματα	$O(n \log n)$	[107]
	τμηματικά γραφήματα	$O(n \log n)$	[140]
	αλυσίδες	$O(n^2 \log n)$	[86]
	k-πλήρη t-αδικά δέντρα	$O(n)$	[72]
	τετραγωνικές σχάρες	$O(n)$	[32]
Ελαχιστη Γρμμικη Παραταξη	δέντρα	$O(n^3)$	[55]
	ριζωμένα δέντρα	$O(n \log n)$	[2]
	δέντρα	$O(n^{2.2})$	[135]
	δέντρα	$O(n^{\log 3/ \log 2})$	[25]
	ορθογώνιες σχάρες	$O(n)$	[118]
	τετρσγωνικές σχάρες	$O(n)$	[111]
	2-διάστατοι κύλινδροι	$O(n)$	[116]
	υπερκύβοι	$O(n)$	[67]
	De Bruijn γραφ. 4ης τάξης	$O(n)$	[69]
	d-διάστατες c-αδικές κλίκες	$O(n)$	[98]
	πλήρη k-μερή γραφήματα	$O(n + p \log p)$	[118]
Τομοπλατος	δέντρα	$O(n \log^{\Delta-2} n)$	[25]
	δέντρα	$O(n \log n)$	[150]
	υπερκύβοι	$O(n)$	[67]
	d-διάστατες c-αδικές κλίκες	$O(n)$	[120]
	μέγ.βαθμό $\leq \Delta$ και δεντροπλάτος $\leq k$	$O(n^{\Delta k^2})$	[143]
	2-κανονικά και 3-διάστατα πλέγματα	$O(n^2)$	[129]
	τοροειδή και κυλινδρικά 2-διάστατα πλέγματα	$O(n^2)$	[129]
	τοροειδή 3-διάστατα πλέγματα	$O(n^2)$	[129]
	πλήρη p-μερή γραφήματα	$O(n + p \log p)$	[118]
Διαχωρισμος Κορυφων	δέντρα	$O(n \log n)$	[39]
	δέντρα	$O(n)$	[138]
	cographs	$O(n)$	[15]
	μεταθετικά γραφήματα	$O(n^2)$	[14]
	n-διάστατες σχάρες	$O(n^2)$	[17]
Άθροισμα Τομων	δέντρα	$O(n^{2.3})$	[97]]
	δέντρα	$O(n)$	[31]
	δέντρα	$O(n^{1.722})$	[87]
	τετραγωνικές σχάρες	$O(n)$	[32]
	τμηματικά γραφήματα		[100]
Διχοτομηση Ακμων	δέντρα	$O(n^3)$	[105]
	υπερκύβοι	$O(n)$	[120]
	d-διάστατες c-αδικές πίνακες	$O(n)$	[120]
	d-διάστατες c-αδικές κλίκες	$O(n)$	[120]
	2-κανονικά και 3-διάστατα πλέγματα	$O(n^2)$	[129]
	τοροειδή και κυλινδρικά 2-διάστατα πλέγματα	$O(n^2)$	[129]
	τοροειδή 3-διάστατα πλέγματα	$O(n^2)$	[129]
	σχάρες	$O(n^5)$	[123]
	δεντροπλάτος $\leq k$	$O(n^2)$	[139]
	κυβο-συνδεόμενα(;) κυκλικά γραφήματα	$O(n)$	[110]

Πίνακας 5.2: Γραφήματα που έχουν προκύψει από πράξεις μεταξύ βασικών κλάσεων γραφημάτων και για τα οποία, βασικά προβλήματα παράταξης είναι επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο.

Πρόβλημα	Κλάσεις Γραφημάτων	Βιβλιογραφία
Ζωνοπλατος	$G_1 + \ldots + G_k$	[91]
	$P_1 \times \ldots \times P_n$	[27]
	$P_n \times C_m$	[118]
	$C_n \times C_m$	[91]
	$K_n[G], P_n[G], C_n[G]$	[73]
	$K_{1,n}[G], K_n[G]$ για $\in \{P_m, T_m, C_m\}$	
	ή $G = C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_k}$ με $n_i \leq 5$	
	ή $G = P_{n_1} \times \ldots \times P_{n_k}$ με $n_i > 1$	[104]
	$P_n^r[G], C_n^r[G]$	[24]
	$P_n \times P_m[G], P_n \times C_m[G]$ με $2n \neq m$	
	και $C_n \times C_m[G]$ με $6 \leq 2n \leq 2s$	[152]
	$K_n \odot P_m$	[91]
	$P_n \odot P_m, C_n \odot P_m, P_n \odot C_m, C_n \odot C_m$	[91]
	$P_n \otimes P_m,\ C_n \otimes P_m,\ C_n \otimes C_m$	[149]
	$P_k \otimes K_{nm}$	[147]
	$P_k \otimes K_n,\ C_k \otimes K_n$	[91]
	$K_n \wedge K_m,\ C_n \wedge K_1,\ P_n \wedge K_1,\ C_n \wedge (K_1 \cup \ldots \cup K_1)$	[23]
Ελαχιστη Γραμμικη Παραταξη	$G_1 + \ldots + G_k$	[91]
	$P_n[P_m],\ P_n[C_m]$	[22]
	$K_n[P_m],\ K_n[C_m]$	[104]
	$P_k \otimes K_{nm}$	[148]
	$P_n \wedge P_m,\ K_n \wedge K_1$	[146]
Τομοπλατος	$C_n^r,\ P_n \times P_m,\ P_n \times C_m,\ C_n \times C_m,\ K_n \times P_m$	
	και $K_n \times C_m,\ C_n^s \times C_m^r,\ K_n \times K_m,\ P_n \times C_m, P_n \otimes C_m$	[104]
Άθροισμα Τομων	$G_1 + G_2$	[101]
	$P_n \times K_m,\ C_n \times K_m,\ C_n \times C_m$	[103]
	$K_n[G], P_n[G], C_n[G]$	[88]
	$P_k \otimes K_{nm}$	[89]
	$P_n \wedge G,\ C_n \wedge G,\ K_{nm} \wedge G$	[88]
	$G \wedge H$ όπου H είναι σαραντ/ρουσα, $K_n,\ C_n$	[90]

Κεφάλαιο 6

Αποτελέσματα Παραμετρικής Πολυπλοκότητας

Στην παραμετροποίηση αυτό που μας ενδιαφέρει δεν είναι αν ένα πρόβλημα είναι δύσκολο ή όχι, αλλά τι είναι αυτό που το κάνει δύσκολο ή εύκολο να υπολογιστεί. Η προσέγγιση για την μελέτη της *δομικής δυσκολίας* ενός προβλήματος, είναι να χωρίζουμε την είσοδο σε δύο μέρη : στο *εύκολο μέρος*, το παραμετροποιημένο, όπου επιβάλουμε κάποιους περιορισμούς και ένα *δύσκολο*, το μη παραμετροποιημένο. Για μερικά προβλήματα είναι γνωστό ότι αν παραμετροποιηθούν παραμένουν NP- πλήρη. Μια τέτοια περίπτωση είναι το πρόβλημα του k-χρωματισμού ενός γραφήματος. Όπου k η παράμετρος αυτή. Για το οποίο είναι γνωστό ότι παραμένει NP-πλήρες και για $k \geq 3$. Από την άλλη, το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο ή το ελάχιστο κάλυμμα κορυφών γίνεται πολυωνυμικά επιλύσιμο, για κάθε k, όταν τα παραμετροποιούμε με k το μέγεθος του ανεξάρτητου συνόλου ή του καλύμματος κορυφών αντίστοιχα.

Ακόμα και σε περιπτώσεις όπου η παραμετροποίηση ενός NP- πλήρους προβλήματος οδηγεί σε πολυωνυμικό αλγόριθμο, υπάρχουν δίαφορα άνω φράγματα χρόνου για τον καλύτερο γνωστό αλγόριθμο. Για παράδειγμα για ένα πρόβλημα με παράμετρο k, ο χρόνος επίλυσής του θα μπορούσε να είναι $O(n^{f(k)})$, ή $O(f(k)n^a)$, ή και $O(f(k)+n^a)$. Ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα καλείται *παραμετρικά εύκολο* (fixed parametertractable) αν υπάρχει ένας $O(f(k)n^a)$-αλγόριθμος που το λύνει. Η κλάση όλων των παραμετρικά εύκολων προβλημάτων καλείται FPT . Οι Downey κσι Fellows όρισαν την ιεραρχία της παραμετρικής πολυπλοκότητας, γνωστή ως W-ιεραρχία, η οποία συνιστά όλες τις κλάσεις παραμετροποιημένων προβλημάτων ανάλογα με την παραμετρική τους πολυπλοκότητα. Έτσι έχουμε ότι:

$$\mathsf{FPT} \subseteq \mathsf{W[1]} \subseteq \mathsf{W[2]} \subseteq \ldots \subseteq \mathsf{W[P]}$$

Για εκτενέστερη μελέτη παραμετρικής πολυπλοκότητας βλέπε [37]. Το πρόβλημα της αυστηρότητας των συμπεριλήψεων του παραπάνω τύπου ιεραρχίας, παραμένει ανοιχτό. Υπάρχουν ενδείξεις όμως, πως αν ένα πρόβλημα που ανήκει σε κάποια από τις κλάσεις της W-ιεραρχίας είναι πλήρες, τότε δεν αναμένεται να έχει έναν $O(f(k)n^a)$-αλγόριθμο. Για παράδειγμα το *παραμετροποιημένο κάλυμμα κορυφών* ανήκει στο FPT ενώ το *παραμετροποιημένο ανεξάρτητο σύνολο* είναι W[1]-πλήρες.

Πίνακας 6.1: Αποτελέσματα παραμετρικής πολυποκότητας για προβλήματα παράταξης (όπου n οι κορυφές και k η παράμετρος).

Πρόβλημα	Πολυπλοκότητα	Βιβλιογραφία
ΖΩΝΟΠΛΑΤΟΣ(2)	$O(n)$	[49]
ΖΩΝΟΠΛΑΤΟΣ(k)	$O(n^{k+1})$	[131]
ΖΩΝΟΠΛΑΤΟΣ(k)	$O(n^k)$	[61]
ΖΩΝΟΠΛΑΤΟΣ(k)	$\mathbf{W}[k]$	[12]
ΤΟΜΟΟΠΛΑΤΟΣ(2)	$O(n)$	[49]
ΤΟΜΟΟΠΛΑΤΟΣ(k)	$O(n^k)$	[61]
ΤΟΜΟΟΠΛΑΤΟΣ(k)	$O(n^{k-1})$	[109]
ΤΟΜΟΟΠΛΑΤΟΣ(k)	$O(n^2)$	[45]
ΤΟΜΟΟΠΛΑΤΟΣ(k)	$O(n)$	[142]
ΤΡΟΠ/ΜΕΝΟΤΟΜΟΠΛΑΤΟΣ(k)	$O(n^2)$	[45]
ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΚΟΡΥΦΩΝ(k)	$O(n^2)$	[44]
ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΚΟΡΥΦΩΝ(k)	$O(n)$	[13]

Υπάρχουν ήδη κάποια αποτελέσματα παραμετρικής πολυπλοκότητας για προβλήματα παράταξης. Τα προβλήματα παράταξης τα παραμετροποιούμε ως προς την ελάχιστη τιμή τους. Στην περίπτωση του Ζωνοπλάτους η παραμετροποίηση γίνεται ως εξής:

ΖΩΝΟΠΛΑΤΟΣ(k): Έστω γράφημα G. Αποφάσισε αν MINBW$(G) \leq k$.

Με τον ίδιο τρόπο παραμετροποιούνται και τα υπόλοιπα προβλήματα παράταξης. Έχει αποδειχθεί [49] ότι το ΖΩΝΟΠΛΑΤΟΣ(2) και ΤΟΜΟΟΠΛΑΤΟΣ(2) μπορεί να αποφασιστεί σε γραμμικό χρόνο. Συγκεκριμένα για το Ζωνοπλάτος, ο Saxe το 1980 στο [131] παρουσίασε έναν $O(n^{k+1})$ αλγόριθμο που αποφασίζει το ΖΩΝΟΠΛΑΤΟΣ(k) για κάθε k. Τέσσερα χρόνια αργότερα οι Gurari και Sudborough στο [61] βελτίωσαν το αποτέλεσμα αυτό σε $O(n^k)$. Ο χρόνος αυτός είναι και ο καλύτερος που μπορεί να επιτευχθεί καθώς όπως απέδειξε ο Bodlaender στο [12] το ΖΩΝΟΠΛΑΤΟΣ(k) για κάθε k είναι W[k]-*δύσκολο*.

Και στην περίπτωση του Τομοπλάτους οι Gurari και Sudborough στην ίδια δημοσίευση, παρουσίασαν επίσης έναν $O(n^k)$ αλγόριθμο που αποφασίζει το ΤΟΜΟΠΛΑΤΟΣ(k) για κάθε k με είσοδο γράφημα n κορυφών. Το αποτέλεσμα αυτό βελτιώθηκε στη συνέχεια από τους Makedon και Sudborough στο [109] σε $O(n^{k-1})$ και έπειτα σε $O(n^2)$ από τους Fellows και Langston στο [44]. Ώσπου πρόσφατα το 2000 στο [142] ο Θηλυκός παρουσίασε για το ΤΟΜΟΠΛΑΤΟΣ(k) έναν γραμμικό αλγόριθμο. Να θυμίσπυμε ότι η έννοια του δεντροπλάτους είναι όμοια με αυτή του πλάτους μονοπάτιου με τη διαφορά ότι αναφέρεται σε αποσύνθεση δέντρου αντί της αποσύνθεσης μονοπατιού.

Επιπλέον οι Fellows και Langston στο [44] απέδειξαν ότι ο Διαχωρισμός Κορυφών και το Τροποποιημένο Τομοπλάτος είναι παραμετρικά εύκολα. Μάλιστα, ο Bodlaender στο [13] παρουσίασε έναν αλγόριθμο γραμμικού χρόνου για το ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΚΟΡΥΦΩΝ(k).

Τέλος, οι Bui και Peck στο [21] έδειξαν ότι η ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΑΚΜΩΝ($k \log n$) αποφασίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Ο πίνακας 6.1 συνοψίζει όλα αυτά τα αποτελέσματα.

Η παραμετρική πολυπλοκότητα των προβλημάτων παράταξης που δεν υπάρχουν στον παραπάνω πινάκα παραμένει ανοιχτό πρόβλημα. Επιπλέον, αν λάβουμε υπ' όψη μας ότι πολλές φορές οι παράγοντες που εμπεριέχονται εντός της έννοιας του $O(\ )$ μπορεί να είναι και εκθετικοί επί του k, τότε αντιλαμβανόμαστε την ανάγκη εύρεσης ακόμα πιο πρακτικών αλγορίθμων (γραμμικών), γεγονός που καθιστά αναγκαιά την συνεχή περαιτέρω έρευνα πάνω στα προβλήματα αυτά.

Κεφάλαιο 7

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Ένας τρόπος να αντιμετωπίσουμε *δύσκολα* προβλήματα είναι να σχεδιάσουμε *προσεγγιστικούς* αλγορίθμους. Δηλαδή πολυωνυμικούς αλγορίθμους που παράγουν μία εφικτή λύση που είναι πάρα πολύ «κοντά» στην βέλτιστη. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξηγήσουμε τι σημαίνει να έχουμε μια λύση «κοντά» στην βέλτιστη, καθώς και θα παραθέσουμε αποτελέσματα προσεγγισιμότητας για προβλήματα παράταξης. Για μια πιο διεξοδική ανάγνωση και πλήρη εικόνα πάνω στην θεωρία προσεγγιστικών αλγορίθμων βλέπε [50] και [6].

Να θυμίσουμε ότι, $r(n)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος ενός προβλήματος βελτιστοποίησης Π, είναι ένας αλγόριθμος που για κάθε είσοδο x μεγέθους n, βρίσκει μία λύση για το Π, της οποίας η τιμή είναι το πολύ $r(n)$ φορές η τιμή της βέλτιστης. Όταν ένα πρόβλημα Π έχει $r(n)$-προσεγγιστικό αλγόριθμο, το ονομάζουμε $r(n)$-*προσεγγίσιμο* και λέμε ότι ανήκει στην κλάση APX. Ένας αλγόριθμος A_ϵ καλείται *προσεγγιστικό σχήμα* αν για κάθε προκαθορισμένη σταθερά $\epsilon > 0$, βρίσκει μία λύση για το Π με τιμή μεγαλύτερη κατά το πολύ ένα παράγοντα $1 + \epsilon$ από την τιμή της βέλτιστης λύσης του προβλήματος. Αν η πολυπλοκότητα του προσεγγιστικού σχήματος A_ϵ είναι πολυωνυμική ως προς το μέγεθος της εισόδου, τότε καλείται *πολυωνυμικό προσεγγιστικό σχήμα*, PTAS. Αν επιπλέον, η πολυπλοκότητα του προσεγγιστικού σχήματος είναι πολυωνυμική και ως προς το $1/\epsilon$, τότε καλείται *πλήρες πολυωνυμικό προσεγγιστικό σχήμα*, FPTAS. Ισχύει ότι FPTAS $\subseteq$ PTAS $\subseteq$ APX με τις συμπεριλήψεις αυστηρές αν και μόνο αν P $\neq$ NP.

Θέτουμε ως I το σύνολο όλων των μη κατευθυνόμενων γραφημάτων και ως $x \in I$ ένα τέτοιο γράφημα στο I. Αντιστοιχούμε το σύνολο εφικτών λύσεων $S(G)$ στο $\Phi(G)$ και τέλος με $f \in \{$LA, BW, SC, VS, CW, MC, EB, VB$\}$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση κόστους ενός προβλήματος παράταξης.

Στους προσεγγιστικούς αλγορίθμους αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο είναι η βελτίωση των προσεγγιστικών φραγμάτων παρά η πολυπλοκότητα χρόνου, γι' αυτό και τα πιο πολλά αποτελέσματα δίνουν έμφαση σε αυτό. Δύο βασικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται είναι η *εκτόνωση ημιπεπερασμένων προγραμμάτων (relaxation of semidefinite programs)* και *η εξάπλωση μετρικών (spreading metrics)*. Η εξάπλωση μετρικών σ' ένα γράφημα είναι η ανάθεση τιμών σε ακμές ή κορυφές έτσι ώστε τα υπογραφήματα να απλώνονται στον αντίστοιχο μετρικό χώρο [133]. Το εμβαδό της απλωμένης μετρικής, που ορίζεται ως το άθροισμα όλων των μηκών των ακμών ή των κορυφών, παράγει ένα κάτω φράγμα της λύσης του προβλήματος μέσω μιας *διαίρει και βασίλευε (divide and conquer)* στρατηγικής. Η αδυναμία των αλγορίθμων που βασίζονται σε αυτή την τεχνική έγκειται στο ότι απαιτούν την λύση ενός γραμμικού προγράμματος με εκθετικό πλήθος περιορισμών, γεγονός που τους καθιστά μη πρακτικούς. Η *ροή μετρικών (flow metrices)* είναι μια νέα τεχνική για την προσέγγιση προβλημάτων παράταξης [18]. Αν και μέχρι στιγμής η τεχνική των ρευστών μετρικών δεν έχει βελτιώσει κάποια αποτελέσματα, παρ' όλ' αυτά αποτελεί μια πιο απλή και υποσχόμενη τεχνική καθώς μειώνει τον αριθμό των εκθετικών περιορισμών σε πολυωνυμικό.

Για το Ζωνοπλάτος υπάρχουν προσεγγιστικοί αλγόριθμοι για κάποια συγκεκριμένα γραφήματα. Στην περίπτωση του γ-πυκνού (dense graph) γραφήματος υπάρχει 3-προσεγγιστικός πολυωνυμικός αλγόριθμος όπως παρουσιάζεται στο [79]. Να θυμίσουμε ότι γ-πυκνό είναι το γράφημα n κορυφών με ελάχιστο βαθμό κορυφής γn. Υπάρχει 2-προσεγγιστικός πολυωνυμικός αλγόριθμος για το Ζωνοπλάτος αστεροειδούς - τριπλού γραφήματος, μεταθετικού γραφήματος και τραπεζοειδούς γραφήματος. Υπάρχουν επίσης πολυωνυμικού χρόνου $O(\log n)$-προσεγγιστικοί αλγόριθμοι για γραφήματα σαρανταποδαρούσες [65] και για πολύ μεγάλες κλάσεις δέντρων, τα λεγόμενα GHBδέντρα για τα οποία ισχύει ότι για κάθε κορυφή u, η διαφορά βάθους μεταξύ δύο υποδέντρων με ρίζα την u, είναι φραγμένο από μία σταθερά [64]. Για την γενική κλάση δέντρων και τα χορδικά δέντρα, ο Gupta το 2001 παρουσίασε έναν πιθανοτικό $O(\log^{2.5} n)$-προσεγγιστικό αλγόριθμο. Το Ζωνοπλάτος για γενικά γραφήματα έχει διάφορους πολυλογαριθμικούς προσεγγιστικούς αλγόριθμους, πολυωνυμικού πιθανοτικού χρόνου μέσω της τεχνικής της ημιπεπερασμένης εκτόνωσης [11], μέσω των απλομένων μετρικών [42] και μέσω ημιπεπερασμένης εκτόνωσης και Ευκλειδίων εμβαπτίσεων [38]. Το 1998 στο [10] αποδείχθηκε ότι η εύρεση μιας $\frac{3}{2}$-προσέγγισης για γενικά γραφήματα είναι NP-πλήρες , όπως επίσης NP-πλήρες είναι και η εύρεση $\frac{3}{2}$-προσέγγισης για δέντρα. Κατά συνέπεια, το Ζωνοπλάτος δεν ανήκει στο PTAS. Μάλιστα, ο Unger στο [145] απέδειξε ότι, για κάθε σταθερά k, είναι NP-πλήρες η εύρεση k-προσέγγισης ακόμα και για 4Οποδαρούσες. Επομένως το Ζωνοπλάτος δεν ανήκει στο APX. Η προσεγγισιμότητα του Ζωνοπλάτους για έναν παράγοντα μεταξύ μιας σταθεράς και ενός πολυλογάριθμου παραμένει ανοιχτό πρόβλημα.

Να θυμίσουμε ότι ένα γράφημα n κορυφών και m ακμών καλείται πυκνό εάν $m = \Theta(n^2)$. Ο Arora στο [4] και οι Frieze και Kannan στο [48] παρουσίασαν πλήρη πολυωνυμικά σχήματα για την Ελάχιστη Γραμμική Παράταξη, Τομοπλάτος και Διχοτόμηση Τομών αντίστοιχα για πυκνά γραφήματα. Το λήμμα *κανονικότητας* του Szemeredi αποτέλεσε την βασική τεχνική που απέδωσε αυτά τα αποτελέσματα.

Αρκετοί προσεγγιστικοί αλγόριθμοι προτάθηκαν για την Ελάχιστη Γραμμική Παράταξη, Τομοπλάτος και Άθροισμα Τομών. Ο πρώτος προσεγγιστικός αλγόριθμος που δόθηκε για την Ελάχιστη Γραμμική Παράταξη και Τομοπλάτος σε γενικά γραφήματα, ήταν μια απλή εφαρμογή ενός $O(\log n)$ προσεγγιστικού αλγορίθμου για την εύρεση ισορροπημένων διαμερίσεων ενός γραφήματος [94] η οποία με τη σειρά της παρήγαγε έναν $O(\log^2 n)$ προσεγγιστικό αλγόριθμο για την Ελάσιστη Γραμμική Παράταξη και Τομοπλάτος [63]. Το 1995 ο Even στο [40], χρησιμοποιώντας την τεχνική των απλωμένων μετρικών, έδωσε έναν $O(\log n \log\log n)$-προσεγγιστικό αλγόριθμο για την Ελάχιστη Γραμμική Παράταξη και Άθροισμα Τομών. Έως και σήμερα οι καλύτεροι πολυωνυμικοί προσεγγιστικοί αλγόριθμοι για την Ελάχιστη Γραμμική Παράταξη και Άθροισμα Τομών, είναι $O(\log n)$ προσεγγίσεις για γενικά γραφήματα και $O(\log\log n)$ προσεγγίσεις για επίπεδα γραφήματα. Και τα δύο αυτά αποτελέσματα παρουσιάζονται στο [124] όπου επίσης η τεχνική που χρησιμοποιείται είναι αυτή των των απλωμένων μετρικών.

Για την περίπτωση του Διαχωρισμού Κορυφών στο [14] παρουσιάζεται ένας πολυωνυμικού χρόνου $O(\log^2 n)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος για γενικά γραφήματα και δείχνει πως από τα αποτελέσματα του [132] προκύπτει ένας $O(\log n)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος για επίπεδα γραφήματα.

Τέλος, ο πρώτος προσεγγιστικός αλγόριθμος, με υπογραμμικό προσεγγιστικό λόγο, για τη Διχοτόμηση Ακμών σε γενικά γραφήματα, δόθηκε από τον Feige στο [42] και βελτιώθηκε από τον ίδιο δύο χρόνια αργότερα στο [43] όπου μας δίνει έναν $O(\log^2 n)$-προσεγγιστικό λόγο.

Ο πίνακας 7.1 συνοψίζει όλα τα παραπάνω αποτελέσματα προσεγγισιμότητας

Πίνακας 7.1: Αποτελέσματα προσεγγισιμότητας για προβλήματα παράταξης (Όπου n ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος, m ο αριθμός των ακμών και ϵ η παράμετρος προσεγγιστικού σχήματος)

Πρόβλημα	Προσεγγισιμότητα	Πολυπλοκότητα	Βιβλιογραφία
Ζωνοπλατος	3-προσεγγίσιμο για δ-πυκνά γραφήματα	$n^{O(1/\delta)}$	[79]
	3-προσεγγίσιμο για AT-ελεύθερα δέντρα	$O(n^3)$	[86]
	$O(\log n)$-προσεγγίσιμο για 40-ποδαρούσες	$O(n^2)$	[65]
	$O(\log n)$-προσεγγίσιμο για GHB-δέντρα	$O(n^2)$	[64]
	πιθανοτικό $O(\log^{4.5} n)$-προσεγγίσιμο	$O(m(\log n)^4 \log\log n)$	[42]
	πιθανοτικό $O(\log^3 n\sqrt{\log\log n})$-προσεγγίσιμο	$\mathrm{pol}(n)$	[38]
	πιθανοτικό $O(\sqrt{n/\mathrm{BW(G)}}\log n)$-προσεγγίσιμο	$\mathrm{pol}(n)$	[11]
	πιθανοτικό $O(\sqrt{\log^{2.5} n})$-προσεγγ. για δέντρα κ΄ χορδικά γράφ.	$\mathrm{pol}(n)$	[60]
Διαχωρισμος Κορυφων	$O(\log n)$-προσεγγίσιμο	$\mathrm{pol}(n)$	[14]
	$O(\log n)$-προσεγγίσιμο για επίπεδα γραφήματα	$\mathrm{pol}(n)$	[14]
Ελαχιστη Γρμμικη Παραταξη	PTAS για πυκνά γραφήματα	$n^{O(1/\epsilon^2)}$	[4]
	$O(\log^2 n)$-προσεγγίσιμο	$\mathrm{pol}(n)$	[63]
	$O(\log n\log\log n)$-προσεγγίσιμο	$\mathrm{pol}(n)$	[40]
	$O(\log n)$-προσεγγίσιμο	$\mathrm{pol}(n)$	[124]
	$O(\log\log n)$-προσεγγίσιμο για επίπεδα γραφήματα	$\mathrm{pol}(n)$	[124]
Τομοπλατος	PTAS για πυκνά γραφήματα	$n^{O(1/\epsilon^2)}$	[4]
	$O(\log^2 n)$-προσεγγίσιμο	$\mathrm{pol}(n)$	[94]
Άθροισμα Τομων	$O(\log n\log\log n)$-προσεγγίσιμο	$\mathrm{pol}(n)$	[40]
	$O(\log n)$-προσεγγίσιμο	$\mathrm{pol}(n)$	[124]
	$O(\log\log n)$-προσεγγίσιμο για επίπεδα γραφήματα	$\mathrm{pol}(n)$	[124]
Διχοτομηση Ακμων	PTAS για πυκνά γραφήματα	$nO(1/\epsilon^2) + 2^{O(1/\epsilon^2)}$	[42]
	$O(\log^2 n)$-προσεγγίσιμο	$\mathrm{pol}(n)$	[43]
	$O(\log n)$-προσεγγίσιμο για επίπεδα γραφήματα	$\mathrm{pol}(n)$	[43]

Βιβλιογραφία

[1] D. Adolphson. Single machine job sequencing with precedence constraints. *SIAM Journal on Computing*, 6:40–54, 1977.

[2] D. Adolphson και T. C. Hu. Optimal linear ordering. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 25(3):403–423, 1973.

[3] C. Àlvarez, R. Cases, J. Díaz, J. Petit και M. Serna. Routing trees for random graphs. Στο *ICALP Workshops 2000*, επιμελητής: J. Rolim, τόμος 8 στο *Proceedings in Informatics*, σελίδες 99–110, Canada, 2000. Carleton Scientific.

[4] S. Arora, A. Frieze και H. Kaplan. A new rounding procedure for the assignment problem with applications to dense graphs arrangements. Στο *37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, σελίδες 21–30. IEEE Computer Society Press, 1996.

[5] S. F. Assman, G. W. Peck, M. M. Syslo και J. Zak. The bandwidth of caterpillars with hair of lengths 1 and 2. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 2:387–393, 1981.

[6] G. Ausiello, P. Crescenzi, G. Gambosi, V. Kann, A. Marchetti-Spaccamela και M. Protasi. *Complexity and approximation.* Springer–Verlag, Berlin, 1999.

[7] S. Bezrukov, R. Elsässer, B. Monien, R. Preis και J. P. Tillich. New spectral lower bounds on the bisection width of graphs. τόμος 320, σελίδες 155–174, 2004.

[8] S. L. Bezrukov. Edge isoperimetric problems on graphs. Στο *Graph theory and combinatorial biology (Balatonlelle, 1996)*, τόμος 7 στο *Bolyai Soc. Math. Stud.*, σελίδες 157–197. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1999.

[9] S. N. Bhatt και F. T. Leighton. A framework for solving VLSI graph layout problems. *Journal of Computer and System Sciences*, 28:300–343, 1984.

[10] G. Blache, M. Karpinski και J. Wirtgen. On approximation intractability of the bandwidth problem. Τεχνική αναφορά TP98-014, Electronic Colloquium on Computational Complexity, 1998.

[11] A. Blum, G. Konjevod, R. Ravi και S. Vempala. Semi-definite relaxations for minimum-bandwith and other vertex-ordering problems. Στο *Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, σελίδες 284–293, 1998.

[12] H. Bodlaender, M. R. Fellows και M. T. Hallet. Beyond NP-completeness for problems of bounded width: hardness for the W-hierarchy. Στο *Proceedings of the 26th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, σελίδες 449–458, 1994.

[13] H. L. Bodlaender. A linear-time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth. *SIAM Journal on Computing*, 25(6):1305–1317, 1996.

[14] H. L. Bodlaender, T. Kloks και D. Kratsch. Treewidth and pathwidth of permutation graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 8(4):606–616, 1995.

[15] H. L. Bodlaender και R. H. Möhring. The pathwidth and treewidth of cographs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 6(2):181–188, 1993.

[16] B. Bollobás και I. Leader. Compressions and isoperimetric inequalities. *Journal of Combinatorial Theory Series A*, 56:47–62, 1991.

[17] B. Bollobás και I. Leader. Edge–isoperimetric inequalities in the grid. *Combinatorica*, 4:299–314, 1991.

[18] Claudson F. Bornstein και Santosh Vempala. Flow metrics. Στο *LATIN*, σελίδες 516–527, 2002.

[19] R. A. Botafogo. Cluster analysis for hypertext systems. Στο *Proceedings of the 16th Annual International ACM-SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval*, επιμελητές: R. Korfhage, E. M. Rasmussen και P. Willett, σελίδες 116–125. ACM, 1993.

[20] T. Bui, S. Chaudhuri, T. Leighton και M. Sipser. Graph bisection algorithms with good average case behavior. *Combinatorica*, 7:171–191, 1987.

[21] T. N. Bui και A. Peck. Partitioning planar graphs. *SIAM Journal on Computing*, 21(2):203–215, 1992.

[22] Mei Ju Chen, David Kuo και Jing Ho Yan. The bandwidth sum of join and composition of graphs. *Discrete Math.*, 290(2-3):145–163, 2005.

[23] P. Z. Chinn, J. Chvátalová, A. K. Dewdney και N. E. Gibbs. The bandwidth problem for graphs and matrices—a survey. *J. Graph Theory*, 6(3):223–254, 1982.

[24] Phyllis Zweig Chinn, Yi Xun Lin, Jin Jiang Yuan και Kenneth Williams. Bandwidth of the composition of certain graph powers. *Ars Combin.*, 39:167–173, 1995.

[25] F. R. K. Chung. Labelings of graphs. Στο *Selected topics in graph theory, 3*, επιμελητές: L. Beineke και R. Wilson, σελίδες 151–168. Academic Press, San Diego, 1988.

[26] M. Chung, F. Makedon, I. H. Sudborough και J. Turner. Polynomial time algorithms for the min cut problem on degree restricted trees. Στο *23th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, σελίδες 262–271. IEEE Computer Society Press, 1982.

[27] Jarmila Chvátalová. Optimal labelling of a product of two paths. *Discrete Math.*, 11:249–253, 1975.

[28] N. Deo, M. S. Krishnamoorthy και M. A. Langston. Exact and approximate solutions for the gate matrix layout problem. *IEEE Transactions on Computer Aided Design*, 6(1):79–84, 1987.

[29] A. K. Dewdney. The bandwidth of a graph—some recent results. Στο *Proceedings of the Seventh Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Louisiana State Univ., Baton Rouge, La., 1976)*, σελίδες 273–288. δνγρεσσυς Νυμεραντιυμ, No. Ξ'II, Winnipeg, Man., 1976. Utilitas Math.

[30] J. Díaz. The δ-operator. Στο *Fundamentals of Computation Theory*, επιμελητής: L. Budach, σελίδες 105–111. Akademie–Verlag, 1979.

[31] J. Díaz, A. M. Gibbons, M. S. Paterson και J. Torán. The Minsumcut problem. Στο *Algorithms and Data Structures*, επιμελητές: F. Dehen, R. J. Sack και N. Santoro, τόμος 519 στο *Lecture Notes in Computer Science*, σελίδες 65–79, Berlin, 1991. Springer–Verlag.

[32] J. Díaz, M. D. Penrose, J. Petit και M. Serna. Convergence theorems for some layout measures on random lattice and random geometric graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 9(6):489–511, 2000.

[33] J. Díaz, M. D. Penrose, J. Petit και M. Serna. Approximating layout problems on random geometric graphs. *Journal of Algorithms*, 39(1):78–116, 2001.

[34] Josep Díaz, Alan Gibbons, Grammati E. Pantziou, Maria J. Serna, Paul G. Spirakis και Jacobo Torán. Parallel algorithms for the minimum cut and the minimum length tree layout problems. *Theoret. Comput. Sci.*, 181(2):267–287, 1997. Computing and combinatorics (Xi'an, 1995).

[35] R. Diekmann, R. Lüling και B. Monien. Communication throughput of interconnection networks. Στο *Mathematical Foundations of Computer Science 1994*, επιμελητές: I. Privara, B. Rovan και P. Ruzicka, τόμος 841 στο *Lecture Notes in Computer Science*, σελίδες 72–86, Berlin, 1994. Springer–Verlag.

[36] R. Diekmann, R. Lüling και J. Simon. A general purpose distributed implementation of simulated annealing. Στο *4th IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing*, σελίδες 94–101. IEEE Computer Society Press, 1992.

[37] R. G. Downey και M. R. Fellows. *Parameterized complexity*. Springer–Verlag, New York, 1999.

[38] John Dunagan και Santosh Vempala. Abstract. we study euclidean embeddings of euclidean metrics and, 2001.

[39] J. Ellis, I. H. Sudborough και J. Turner. The vertex separation and search number of a graph. *Information and Computation*, 113:50–79, 1979.

[40] G. Even, J. Naor, S. Rao και B. Schieber. Divide-and-conquer approximation algorithms via spreading metrics. Στο *36th Annual Symposium on Foundations of Computer science*, σελίδες 62–71. IEEE Computer Society Press, 1995.

[41] S. Even και Y. Shiloach. NP-completeness of several arrangements problems. Τεχνική Αναφορά υπ. αρίθμ. TR-43, The Technion, Haifa, 1978.

[42] U. Feige, R. Krauthgamer και K. Nissim. Approximating the minimum bisection size. Στο *Proceedings of the 32nd Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, σελίδες 530–536, 2000.

[43] Uriel Feige και Robert Krauthgamer. A polylogarithmic approximation of the minimum bisection. *SIAM J. Comput.*, 31(4):1090–1118, 2002.

[44] M. R. Fellows και M. A. Langston. Layout permutation problems and well-partially-ordered sets. Στο *Advanced research in VLSI*, σελίδες 315–327. MIT Press, Cambridge, MA, 1988.

[45] M. R. Fellows και M. A. Langston. On well-partial-order theory and its application to combinatorial problems of VLSI design. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(1):117–126, 1992.

[46] M. R. Fellows και M. A. Langston. On search, decision, and the efficiency of polynomial-time algorithms. *Journal of Computer and System Sciences*, 49(3):769–779, 1994.

[47] P. Fishburn, P. Tetali και P. Winkler. Optimal linear arrangement of a rectangular grid. *Discrete Mathematics*, 213:123–139, 2000.

[48] A. Frieze και R. Kannan. The regularity lemma and approximation schemes for dense problems. Στο *37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, σελίδες 12–20. IEEE Computer Society Press, 1996.

[49] M. R. Garey, R. L. Graham, D. S. Johnson και D. Knuth. Complexity results for bandwidth minimization. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 34:477–495, 1978.

[50] M. R. Garey και D. S. Johnson. *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*. Freeman and Company, 1979.

[51] M. R. Garey, D. S. Johnson και L. Stockmeyer. Some simplified NP-complete graph problems. *Theoretical Computer Science*, 1:237–267, 1976.

[52] F. Gavril. Some NP-complete problems on graphs. Στο *11th Conference on Information Sciences and Systems*, σελίδες 91–95, John Hopkins University, Baltimore, 1977.

[53] N. E. Gibbs, W. G. Poole, Jr. και P. K. Stockmeyer. An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 13(2):236–250, 1976.

[54] M. Goldberg και Z. Miller. A parallel algorithm for bisection width in trees. *Comput. Math. Appl.*, 15(4):259–266, 1988.

[55] M. K. Goldberg και I. A. Klipker. An algorithm for minimal numeration of tree vertices. *Sakharth. SSR Mecn. Akad. Moambe*, 81(3):553–556, 1976. In Russian.

[56] P. W. Goldberg, M. C. Golumbic, H. Kaplan και R. Shamir. Four strikes against physical mapping od DNA. *Journal of Computational Biology*, 2(1):139–152, 1995.

[57] P. A. Golovach. The total vertex separation number of a graph. *Diskret. Mat.*, 9(4):86–91, 1997.

[58] P.A. Golovach και F.V. Fomin. The total vertex separation number and profile of a graph. *Discrete Math. Appl.*, 8(1):73–80, 1998.

[59] Raymond Greenlaw, H. James Hoover και Walter L. Ruzzo. Computation: P-completeness theory, q.q.

[60] Anupam Gupta. Improved bandwidth approximation for trees and chordal graphs. *J. Algorithms*, 40(1):24–36, 2001.

[61] E. Gurari και I. H. Sudborough. Improved dynamic programming algorithms for the bandwidth minimization and the mincut linear arrangement problem. *Journal of Algorithms*, 5:531–546, 1984.

[62] J. Gustedt. On the pathwidth of chordal graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 45(3):233–248, 1993.

[63] M. D. Hansen. Approximation algorithms for geometric embeddings in the plane with applications to parallel processing problems. Στο *30th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, σελίδες 604–609. IEEE Computer Society Press, 1989.

[64] J. Haralambides και F. Makedon. Approximation algorithms for the bandwidth minimization problem for a large class of trees. *Theory of Computing Systems*, 30:67–90, 1997.

[65] J. Haralambides, F. Makedon και B. Monien. Bandwidth minimization: an approximation algorithm for cartepillars. *Mathematical Systems Theory*, (24):169–177, 1991.

[66] F. Harary. Problem 16. Στο *Graph Theory and Computing*, επιμελητής: M. Fiedler, σελίδα 161, Prague, 1967. Czechoslovak Academy Sciences.

[67] L. H. Harper. Optimal assignments of numbers to vertices. *Journal of SIAM*, 12(1):131–135, 1964.

[68] L. H. Harper. Optimal numberings and isoperimetric problems on graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 1(3):385–393, 1966.

[69] L. H. Harper. Chassis layout and isoperimetric problems. Teqnik'h anafor'a SPS 37–66, vol II, Jet Propulsion Laboratory, 1970.

[70] L. H. Harper. Stabilization and the edgesum problem. *Ars Combinatoria*, 4:225–270, Dek'embrioc 1977.

[71] L. H. Harper. On the bandwidth of a hamming graph. *Theor. Comput. Sci.*, 1-3(301):491–498, 2003.

[72] R. Heckmann, R. Klasing, B. Monien και W. Unger. Optimal embedding of complete binary trees into lines and grids. Στο *Graph-theoretic Concepts in Computer Science*, επιμελητές: G. Schmidt και R. Berghammer, τόμος 570 στο *Lectures Notes in Computer Sciences*, σελίδες 25–35, Berlin, 1992. Springer–Verlag.

[73] U. Hendrich και M. Stiebitz. On the bandwidth of graph products. *J. Inf. Process. Cybern.*, 28(3):113–125, 1992.

[74] J. Hromkovič και B. Monien. The bisection problem for graphs of degree 4 (configuring transputer systems). Στο *Informatik*, σελίδες 215–233. Teubner, Stuttgart, 1992.

[75] T. C. Hu. Optimum communication spanning trees. *SIAM Journal on Computing*, 3:188–195, 1974.

[76] D. S. Johnson, J. K. Lenstra και A. H. G. Rinnooy Kan. The complexity of the network design problem. *Networks*, 8(4):279–285, 1978.

[77] Haim Kaplan και Ron Shamir. Bounded degree interval sandwich problems. *Algorithmica*, 24:96–104, 1999.

[78] D. R. Karger. A randomized fully polynomial approximation scheme for all terminal network realiability problem. Στο *Proceedings of the 27th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, σελίδες 11–17. ACM, 1996.

[79] M. Karpinski, J. Wirtgen και A. Zelikovsky. An approximating algorithm for the bandwidth problem on dense graphs. Teqnik'h anafor'a TR 97-017, Electronic Colloquium on Computational Complexity, Electronic Colloquium on Computational Complexity, 1997.

[80] R. M. Karp. Mapping the genome: some combinatorial problems arising in molecular biology. Στο *Proceedings of the 25th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, σελίδες 278–285. ACM, 1993.

[81] D. G. Kendall. Incidence matrices, interval graphs, and seriation in archeology. *Pacific Journal of Mathematics*, 28:565–570, 1969.

[82] N. G. Kinnersley. The vertex separation number of a graph equals its path-width. *Information Processing Letters*, 42(6):345–350, 1992.

[83] L. M. Kirousis και C. H. Papadimitriou. Searching and pebbling. *Theoretical Computer Science*, 47:205–216, 1986.

[84] R. Klasing. The relationship between the gossip complexity in vertex-disjoint paths mode and the vertex bisection width. *Discrete Applied Mathematics*, 83:229–246, 1998.

[85] Daniel J. Kleitman και Rakesh Vohra. Computing the bandwidth of interval graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 3(3):373–375, 1990.

[86] T. Kloks, D. Kratsch και H. Müller. Bandwidth of chain graphs. *Information Processing Letters*, 68(6):313–315, 1998.

[87] D. Kuo και G. J. Chang. The profile minimization problem in trees. *SIAM Journal on Computing*, 23:71–81, 1994.

[88] Yung Ling Lai. *Bandwidth, edgesum and profile of graphs.* Διδακτορική Διατριβή , Kalamazoo, MI, USA, 1997.

[89] Yung Ling Lai. Exact profile values of some graph compositions. *Taiwanese J. Math.*, 6(1):127–134, 2002.

[90] Yung Ling Lai και Gerard J. Chang. On the profile of the corona of two graphs. *Inform. Process. Lett.*, 89(6):287–292, 2004.

[91] Yung Ling Lai, Jiuqiang Liu και Kenneth Williams. Bandwidth for the sum of k graphs. *Ars Combin.*, 37:149–155, 1994.

[92] Yung Ling Lai και K. Williams. A survey of solved problems and applications on bandwidth, edgesum, and profile of graphs. *Journal of Graph Theory*, 31(2):75–94, 1999.

[93] F. T. Leighton. *Introduction to parallel algorithms and architectures: arrays, trees, hypercubes.* Morgan Kaufmann, San Mateo, 1993.

[94] F. T. Leighton και S. Rao. An approximate max-flow min-cut theorem for uniform multicommodity flow problem with applications to approximation algorithms. Στο *29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, σελίδες 422–431. IEEE Computer Society Press, 1988.

[95] C. E. Leiserson. Area-efficient graph layouts (for VLSI). Στο *21st Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, σελίδες 270–281. IEEE Computer Society Press, 1980.

[96] T. Lengauer. Black-white pebbles and graph separation. *Acta Informatica*, 16:465–475, 1981.

[97] V. V. Lepin. A profile minimization algorithm for a graph. *Vestsī Nats. Akad. Navuk Belarusī Ser. Fīz.-Mat. Navuk*, (3):103–109, 128, 2002.

[98] John H. Lindsey, II. Assignment of numbers to vertices. *Amer. Math. Monthly*, 71:508–516, 1964.

[99] Yi Xun Lin και Jin Jiang Yuan. Profile minimization problem for matrices and graphs. *Acta Math. Appl. Sinica (English Ser.)*, 10(1):107–112, 1994.

[100] Yi Xun Lin και Jin Jiang Yuan. Profile minimization problem for matrices and graphs. *Acta Math. Appl. Sinica (English Ser.)*, 10(1):107–112, 1994.

[101] Yi Xun Lin και Jin Jiang Yuan. Profile minimization problem for matrices and graphs. *Acta Math. Appl. Sinica (English Ser.)*, 10(1):107–112, 1994.

[102] R. J. Lipton και R. E. Tarjan. A separator theorem for planar graphs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 36:177–189, 1979.

[103] Hong En Liu και Jin Jiang Yuan. The cutwidth problem for graphs. *Gaoxiao Yingyong Shuxue Xuebao Ser. A*, 10(3):339–348, 1995.

[104] W. Liu και A. Vannelli. Generating lower bounds for the linear arrangement problem. *Discrete Applied Mathematics*, 59:137–151, 1995.

[105] Robert Malcolm Macgregor. *On partitioning a graph: a theoretical and empirical study.* Διδακτορική Διατριβή , 1978.

[106] R. Mahesh, C. Pandu Rangan και Aravind Srinivasan. On finding the minimum bandwidth of interval graphs. *Inform. and Comput.*, 95(2):218–224, 1991.

[107] R. Mahesh, C. Pandu Rangan και Aravind Srinivasan. On finding the minimum bandwidth of interval graphs. *Inf. Comput.*, 95(2):218–224, 1991.

[108] F. Makedon, C. H. Papadimitriou και I. H. Sudborough. Topological bandwidth. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 6(3):418–444, 1985.

[109] F. Makedon και I. H. Sudborough. On minimizing width in linear layouts. *Discrete Applied Mathematics*, 23(3):243–265, 1989.

[110] Yoshifumi Manabe, Ken'ichi Hagihara και Nobuki Tokura. The minimum bisection widths of the cube-connected cycles graph and cube graph. *Systems-Comput.-Controls*, 15(6):9–18, 1984.

[111] G. Mitchison και R. Durbin. Optimal numberings of an $n \times n$ array. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 7(4):571–582, 1986.

[112] B. Mohar. Some applications of laplace eigenvalues of graphs. Στο *Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications*, επιμελητές: G. Hahn και G. Sabidussi, σελίδες 225–275. NATO ASI Ser. C 497, 1993.

[113] B. Monien. The bandwidth minimization problem for caterpillars with hair length 3 is NP-complete. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 7(4):505–512, 1986.

[114] B. Monien και H. Sudborough. Embedding one interconnection network in another. Στο *Computational graph theory*, επιμελητές: G. Tinhofer, E. Mayr, H. Noltemeier και M. M. Syslo, τόμος 7 στο *Computing Supplementa*, σελίδες 257–282, Berlin, 1990. Springer–Verlag.

[115] B. Monien και I. H. Sudborough. Min Cut is NP-complete for edge weighted trees. *Theoretical Computer Science*, 58(1-3):209–229, 1988.

[116] D. O. Muradyan. Minimal numberings of a two-dimensional cylinder. *Akad. Nauk Armyan. SSR Dokl.*, 75(3):114–119, 1982.

[117] D. O. Muradyan. A polynomial algorithm for finding the bandwidth of interval graphs. *Akad. Nauk Armyan. SSR Dokl.*, 82(2):64–66, 1986.

[118] D. O. Muradyan και T. E. Piliposjan. Minimal numberings of vertices of a rectangular lattice. *Akad. Nauk. Armjan. SRR*, 1(70):21–27, 1980. In Russian.

[119] P. Mutzel. A polyedral approach to planar augmentation and related problems. Στο *Algorithms — ESA'95*, επιμελητής: P. Spirakis, τόμος 979 στο *Lecture Notes in Computer Science*, σελίδες 497–507, Berlin, 1995. Springer–Verlag.

[120] K. Nakano. Linear layouts of generalized hypercubes. Στο *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, επιμελητής: J.van Leeuwen, τόμος 790 στο *Lecture Notes in Computer Science*, σελίδες 364–375, Berlin, 1994. Springer–Verlag.

[121] L. Niepel και P. Tomasta. Elevation of a graph. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 31(106)(3):475–483, 1981.

[122] C. Papadimitriou. The NP-completeness of the bandwidth minimization problem. *Computing*, 16:263–270, 1976.

[123] C. H. Papadimitriou και M. Sideri. The bisection width of grid graphs. *Mathematical Systems Theory*, 29(2):97–110, 1996.

[124] S. Rao και A. W. Richa. New approximation techniques for some ordering problems. Στο *9th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, σελίδες 211–218, 1998.

[125] A. Raspaud και O. S Ykora. Congestion and dilation, similarities and differences - a survey. Στο *In Proc. 7th Intl. Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, σελίδες 269–280, 2000.

[126] André Raspaud, Ondrej Sýkora και Imrich Vrto. Cutwidth of the bruijn graph. *ITA*, 29(6):509–514, 1995.

[127] R. Ravi, A. Agrawal και P. Klein. Ordering problems approximated: single-processor scheduling and interval graph completition. Στο *Automata, Languages and Programming*, επιμελητές: J. Leach, B. Monien και M. Rodriguez, τόμος 510 στο *Lecture Notes in Computer Science*, σελίδες 751–762, Berlin, 1991. Springer–Verlag.

[128] N. Robertson και P. D. Seymour. Graph minors—a survey. Στο *Surveys in combinatorics*, σελίδες 153–171. Cambridge University Press, 1985.

[129] J. Rolim, O. Sykora και I. Vrt'o. Optimal cutwidths and bisection widths of 2- and 3-dimensional meshes. *j-LECT-NOTES-COMP-SCI*, 1017:252–??, 1995.

[130] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems.* PWS Publishing Company, Boston, 1996.

[131] J. B. Saxe. Dynamic-programming algorithms for recognizing small-bandwidth graphs in polynomial time. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 1(4):363–369, 1980.

[132] P. D. Seymour και R. Thomas. Call routing and the ratcatcher. *Combinatorica*, 14(2):217–241, 1994.

[133] Paul D. Seymour. Packing directed circuits fractionally. *Combinatorica*, 15(2):281–288, 1995.

[134] Farhad Shahrokhi, Ondrej Sýkora, László A. Székely και Imrich Vrťo. On bipartite drawings and the linear arrangement problem. *SIAM J. Comput.*, 30(6):1773–1789 (electronic), 2001.

[135] Y. Shiloach. A minimum linear arrangement algorithm for undirected trees. *SIAM Journal on Computing*, 8(1):15–32, 1979.

[136] M. T. Shing και T. C. Hu. Computational complexity of layout problems. Στο *Layout design and verification*, επιμελητής: T. Ohtsuki, τόμος 4 στο *Advances in CAD for VLSI*, σελίδες 267–294, Amsterdam, 1986. North–Holland.

[137] H. D. Simon και S H. Teng. How good is recursive bisection? *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(5):1436–1445, 1997.

[138] K. Skodinis. Computing optimal linear layouts of trees in linear time. Στο *Algorithms — ESA 2000*, επιμελητής: M. Paterson, τόμος 1879 στο *Lecture Notes in Computer Science*, σελίδες 403–414, Berlin, 2000. Springer–Verlag.

[139] K. Soumyanath και Jitender S. Deogun. On the bisection width of partial k-trees. Στο *Proceedings of the Twentieth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Boca Raton, FL, 1989)*, τόμος 74, σελίδες 25–37, 1990.

[140] Alan P. Sprague. An 0(n log n) algorithm for bandwidth of interval graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 7(2):213–220, 1994.

[141] Reginald P. Tewarson. *Sparse matrices.* Academic Press, New York, 1973. Mathematics in Science and Engineering, Vol.99.

[142] D. M. Thilikos, M. J. Serna και H. L. Bodlaender. Constructive linear time algorithms for small cutwidth and carving-width. Στο *Algorithms and Computation*, επιμελητές: D. T. Lee και S. H. Teng, τόμος 1969 στο *Lecture Notes in Computer Science*, σελίδες 192–203, Berlin, 2000. Springer–Verlag.

[143] D. M. Thilikos, M. J. Serna και H. L. Bodlaender. A constructive linear time algorithm for small cutwidth. Report de recerca LSI-00-48-R, Universitat Politècnica de Catalunya, Departament de Llenguatges i Sistemes Informàtics, 2001.

[144] D. M. Thilikos, M. J. Serna και H. L. Bodlaender. A polynomial time algorithm for the cutwidth of bounded degree graphs with small treewidth. Report de recerca LSI-01-4-R, Universitat Politècnica de Catalunya, Departament de Llenguatges i Sistemes Informàtics, 2001.

[145] W. Unger. The complexity of the approximation of the bandwidth problem. Στο *37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, σελίδες 82–91. IEEE Computer Society Press, 1998.

[146] Kenneth Williams. On the minimum sum of the corona of two graphs. Στο *Proceedings of the Twenty-fourth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Boca Raton, FL, 1993)*, τόμος 94, σελίδες 43–49, 1993.

[147] Kenneth Williams. On bandwidth and edgesum for the tensor product of paths with complete bipartite graphs. Στο *Proceedings of the Twenty-fifth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL, 1994)*, τόμος 102, σελίδες 183–190, 1994.

[148] Kenneth Williams. On bandwidth and edgesum for the tensor product of paths with complete bipartite graphs. Στο *Proceedings of the Twenty-fifth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL, 1994)*, τόμος 102, σελίδες 183–190, 1994.

[149] Lai Y.-L. και Williams K. On bandwidth for the tensor product of paths and cycles. *Discrete Applied Mathematics*, 73:133–141(9), 7 March 1997.

[150] M. Yannakakis. A polynomial algorithm for the min cut linear arrangement of trees. Στο *24th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, σελίδες 274–281. IEEE Computer Society Press, 1983.

[151] Jinjiang Yuan, Yixun Lin, Yan Liu και Shiying Wang. NP-completeness of the profile problem and the fill-in problem on cobipartite graphs. *Journal of Mathematical Study*, 31(3):239–243, 1998.

[152] Sanming Zhou και Jinjiang Yuan. Harper-type lower bounds and the bandwidths of the compositions of graphs. *Discrete Math.*, 181(1-3):255–266, 1998.