ΑΝΤΙΘΕΜΕΛΙΩΣΗ

Παναγιώτης Ρουβελάς

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα στη Λογική και Θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού

$\mu\Pi\lambda\forall$

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Στην εργασία αυτή επιδιώκουμε να παρουσιάσουμε μία όσο το δυνατό πληρέστερη εισαγωγή στη θεωρία *ZFA*, βασισμένοι στη μορφή του Αξιώματος Αντιθεμελίωσης (Antifoundation Axiom) που ονομάζεται Λήμμα Επίλυσης (Solution Lemma). Στην προσπάθεια μας αυτή βέβαια χρειάστηκε να θυσιάσουμε αρκετά ενδιαφέροντα αποτελέσματα τα οποία δεν θα ταίριαζαν σε ένα εισαγωγικό κείμενο. Ελπίζουμε πάντως ο αναγνώστης να παρακινηθεί από την θελκτικότητα ορισμένων ελλιπώς αναπτυγμένων θεμάτων της εργασίας και να ανατρέξει στην ευρεία βιβλιογραφία που αφορά στο συγκεκριμένο αντικείμενο. Πιστεύουμε άλλωστε ότι πλέον η μαθηματική κοινότητα έχει αναδείξει ένα νέο ενδιαφέρον προς την έννοια του μη θεμελιωμένου συνόλου και ειδικότερα προς τα Αξιώματα Αντιθεμελίωσης. Αυτό το αποδεικνύει και η πληθώρα εισαγωγικών κειμένων συνολοθεωρίας που εντάσσουν στην ύλη τους το συγκεκριμένο θέμα (για παράδειγμα βλέπε [4, 9]).

Πολύ σημαντικό ρόλο στην επανεμφάνιση συνολοθεωριών που κάνουν χρήση του Αξιώματος Αντιθεμελίωσης έπαιξε η εργασία του Aczel (βλέπε [1]) στην οποία πολύ οργανωμένα και μεθοδικά παρουσιάστηκαν όλες οι μορφές του. Στην εργασία του αυτή μάλιστα αναπτύχθηκε περαιτέρω μία συγκεκριμένη μορφή του αξιώματος στην οποία θα στηριχτεί έμμεσα και η παρούσα εργασία. Εμείς επιλέξαμε να παρουσιάσουμε την οπτική των Barwise και Moss, οι οποίοι αποκόπτοντας τους δεσμούς της δουλειάς του Aczel με τη θεωρία κατηγοριών και τη θεωρία γράφων, ανέπτυξαν μία καθαρά συνολοθεωρητική ματιά του θέματος που πιστεύουμε ότι είναι πολύ πιο εύληπτη και γόνιμη από την αρχική.

Στην πορεία προς τα βασικά αποτελέσματά μας ο αναγνώστης θα πρέπει να δείξει μία ωριμότητα όσον αφορά στο χειρισμό βασικών εννοιών της συνολοθεωρίας. Θα πρέπει επίσης να διαθέτει μία άνεση στο να δουλεύει με μη εδραιωμένα σύνολα, μιας και αυτά θα αποτελούν το κύριο αντικείμενο μας. Φυσικά όπως παρατηρεί και ο Forster (βλέπε [6]), είναι παράδοξο να μη θεωρούμε δεδομένη την εξοικείωση κάποιου με τα μη εδραιωμένα σύνολα, αφού η πρώτη επαφή κάποιου με τη συνολοθεωρία είναι το Παράδοξο του Russel, το οποίο αποτελεί κατ' εξοχήν παράδειγμα χρήσης τέτοιου συνόλου. Από την άλλη βέβαια είναι σαφές ότι έχει γίνει βαθιά ριζωμένη συνήθεια πλέον το να ταυτίζουμε την έννοια του συνόλου με αυτή του εδραιωμένου συνόλου, αφού το καθιερωμένο αξιωματικό σύστημα της *ZFC* (που περιλαμβάνει το Αξίωμα Θεμελίωσης), αποτελεί την αδιαμφισβήτητη βάση κάθε μαθηματικής εργασίας.

Τέλος, υπάρχει κάτι που πρέπει να σημειώσουμε πριν προχωρήσουμε στην εργασία. Ένα πολύ βασικό μειονέκτημα της εργασίας είναι σίγουρα η σχεδόν απόλυτη απουσία εφαρμογών. Κάναμε αυτή την επιλογή συνειδητά, έχοντας δύο πράγματα στο μυαλό μας. Κατά πρώτον, κρίναμε ως πιο σημαντικό να παρουσιάσουμε χωρίς ιδιαίτερες συντομεύσεις και ελλείψεις το Θεώρημα Συναναδρομής (Corecursion Theorem). Επομένως το κύριο βάρος (ολόκληρο το Κεφάλαιο 3) αναπόφευκτα έπεσε στην συγκεκριμένη προσπάθεια ανάλυσης (η οποία τονίζουμε ότι παρέμεινε ελλιπής σε κάποιο βαθμό). Κατά δεύτερον, πιστεύουμε ότι οι περισσότερες εφαρμογές (βλέπε [3]) παραμένουν σε ένα εμβρυακό στάδιο ακόμα. Σε βαθμό μάλιστα να μπορούσαμε να τις χαρακτηρίσουμε "ad hoc", μιας και δεν θεωρούμε ότι εκμεταλλεύονται ουσιωδώς τη δύναμη της θεωρίας παρά αναλώνονται σε μάλλον τετριμμένες μοντελοποιήσεις (χωρίς βέβαια αυτό να σημαίνει ότι δεν υπάρχουν και ενδιαφέρουσες τέτοιες, με κύρια ίσως αυτή της εφαρμογής στη φιλοσοφία).

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες

Το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο έχει ως σκοπό να δώσει το απαραίτητο υπόβαθρο από τις απολύτως αναγκαίες γνώσεις που απαιτούνται για να κατανοηθούν σε πρώτο επίπεδο τα αποτελέσματα της εργασίας. Σε καμία περίπτωση δεν αποτελεί μία εισαγωγή στη συνολοθεωρία και γι αυτό συστήνουμε στον αναγνώστη που αισθάνεται άβολα με τις έννοιες του παρόντος κεφαλαίου, να ανατρέξει σε βιβλία (βλέπε [4, 5, 8, 7, 9, 12]) που μπορούν να παίξουν άριστα αυτό το ρόλο. Ένας επιπλέον σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι επίσης να διασαφηνίσει με καθαρά συνολοθεωρητικά μέσα το ακριβές πλαίσιο στο οποίο θα βασιστούμε στη συνέχεια και πιο συγκεκριμένα να καταδείξουν το συγκεκριμένο αξιωματικό σύστημα του οποίου θα κάνουμε χρήση. Ελπίζουμε να το πετύχουμε αυτό με τον πιο σύντομο και καθαρό τρόπο.

1.1 Αξιωματικό σύστημα *ZFC*

Το αξιωματικό σύστημα στο οποίο θα στηρίζονται τα αποτελέσματα της εργασίας είναι ουσιαστικά μία επέκταση του κλασικού συστήματος *ZFC*. Κρίνουμε σκόπιμο λοιπόν να θυμίσουμε τα αξιώματα αυτά.

Η τυπική γλώσσα την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να εκφράσουμε τα αξιώματα είναι μια γλώσσα του πρωτοβάθμιου κατηγορηματικού λογισμού με μοναδικό μη λογικό σύμβολο το διμελές σύμβολο σχέσης "$\in$".

Αξίωμα 1 (Αξίωμα Ύπαρξης Συνόλου). *"Το σύμπαν των συνόλων μας είναι μη κενό".*

$$(\exists x)x = x.$$

Αξίωμα 2 (Αξίωμα Έκτασης). *"Σύνολα με τα ίδια μέλη ταυτίζονται".*

$$(\forall x)(\forall y)\big((\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y\big).$$

Αξίωμα 3 (Αξίωμα Ζεύγους). *"Για οποιαδήποτε σύνολα x και y, υπάρχει σύνολο z που τα περιέχει ως μέλη".*

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x \in z \wedge y \in z).$$

Αξίωμα 4 (Αξίωμα Ένωσης). *"Για κάθε σύνολο x, υπάρχει σύνολο y το οποίο περιέχει ως μέλη όλα τα στοιχεία που ανήκουν σε στοιχεία του x".*

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z \in x)(\forall w \in z) w \in y.$$

Αξίωμα 5 (Αξίωμα Σχήμα Διαχωρισμού). *"Για κάθε σύνολο x και κάθε τύπο ϕ, υπάρχει σύνολο y το οποίο περιέχει ως μέλη ακριβώς εκείνα τα στοιχεία του x για τα οποία ισχύει ο ϕ".*
Για κάθε τύπο $\phi(x,z)$,

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow z \in y \wedge \phi(z,x)).$$

Αξίωμα 6 (Αξίωμα Δυναμοσυνόλου). *"Για κάθε σύνολο x, υπάρχει σύνολο y που περιέχει ως μέλη όλα τα υποσύνολα του x".*

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \subseteq x \rightarrow z \in y),$$

όπου $z \subseteq x$ ως συνήθως είναι συντομογραφία του $(\forall t \in z) t \in x$.

Αξίωμα 7 (Αξίωμα Απείρου). *"Υπάρχει σύνολο το οποίο περιέχει ως μέλος το κενό σύνολο και είναι κλειστό ως προς τον τελεστή S".*

$$(\exists x)(\emptyset \in x \wedge (\forall y \in x)(\exists z \in x) z = S(y)),$$

όπου $\emptyset$ το κενό σύνολο και $S(y) = y \cup \{y\}$ (η ένωση, το μονοσύνολο είναι τελεστές των οποίων η ύπαρξη προκύπτει από τα Αξιώματα Ένωσης, Ζεύγους και Διαχωρισμού).

Αξίωμα 8 (Αξίωμα Θεμελίωσης). *"Κάθε μη κενό σύνολο x έχει ένα στοιχείο y το οποίο δεν έχει κανένα κοινό στοιχείο με το x".*

$$(\forall x \neq \emptyset)(\exists y \in x)(\forall z \in x) z \notin y.$$

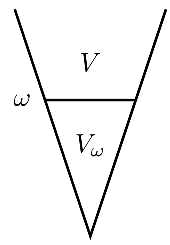
Αξίωμα 9 (Αξίωμα Σχήμα Συλλογής). *"Για κάθε σύνολο x, αν για κάθε στοιχείο y του x υπάρχει στοιχείο z τέτοιο ώστε $\varphi(x,y,z)$, τότε υπάρχει σύνολο u που συλλέγει όλα αυτά τα z".*
Για κάθε τύπο $\varphi(x,y,z)$,

$$(\forall x)\big((\forall y \in x)(\exists z)\varphi(x,y,z) \rightarrow (\exists u)(\forall y \in x)(\exists z \in u)\varphi(x,y,z)\big).$$

Αξίωμα 10 (Αξίωμα Επιλογής). *"Αν x είναι σύνολο μη κενών ξένων μεταξύ τους συνόλων, τότε υπάρχει σύνολο z που έχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε στοιχείο του x".*

$$\begin{aligned}(\forall x)\big((\forall y_1)(\forall y_2)((y_1 \in x \wedge y_2 \in x) \rightarrow \\ \rightarrow (y_1 \neq \emptyset \wedge (y_1 = y_2 \vee y_1 \cap y_2 = \emptyset))) \rightarrow \\ \rightarrow (\exists z)(\forall y \in x)(\exists! w) w \in y \cap z\big),\end{aligned}$$

όπου το $y \cap z$ είναι συντομογραφία του $\{x \in y \mid x \in z\}$.



Σχήμα 1.1: Συσσωρευτική ιεραρχία στην *ZFC*.

Όλοι οι συμβολισμοί και η ορολογία που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια είναι συνηθισμένοι και γ' αυτό θα αποφύγουμε να τους επαναλάβουμε. Για παράδειγμα το σύμπαν όλων των κλάσεων θα το συμβολίζουμε με V, ενώ θα κάνουμε συχνή χρήση κλάσεων και τελεστών. Με τον όρο *κλάση* θα εννοούμε κάθε συλλογή

$$\{x \mid \phi(x,\ldots)\},$$

όπου ϕ τύπος της πρωτοβάθμιας λογικής. Όταν αυτή η συλλογή είναι σύνολο θα την ταυτίζουμε με το σύνολο, αλλιώς θα την καλούμε *γνήσια κλάση* (π.χ. η V είναι γνήσια κλάση). *Τελεστή* θα καλούμε κάθε κλάση η οποία είναι απεικόνιση από το V στο V. Η συσσωρευτική ιεραρχία ορίζεται όπως πάντα ως

$$V_\alpha = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } \alpha = 0 \\ \mathcal{P}(V_\beta), & \text{αν } \alpha = \beta + 1 \\ \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta, & \text{αν } \alpha \text{ οριακός.} \end{cases}$$

Με *Ord* θα συμβολίζουμε την κλάση των διατακτικών, με ω τον πρώτο οριακό διατακτικό δηλαδή το σύνολο των φυσικών αριθμών, ενώ με *trcl* θα συμβολίζουμε την *μεταβατική κλειστότητα* που ορίζεται ως

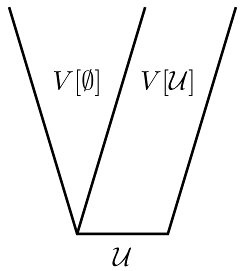
$$trcl(a) = \bigcup\{a, \cup a, \cup\cup a, \ldots\}.$$

Το σύστημα όλων των παραπάνω αξιωμάτων θα το συμβολίζουμε με *ZFC*. Το σύστημα *ZFC* χωρίς Αξίωμα Θεμελίωσης θα το συμβολίζουμε με ZFC^-.

Η εικόνα του σύμπαντος κατά την *ZFC* φαίνεται στο Σχήμα 1.1.

1.2 Αξιωματικό σύστημα $ZFC^-_{\mathcal{U}}$

Ερχόμαστε τώρα στα αξιώματα στα οποία θα βασιστεί η υπόλοιπη εργασία. Επιθυμούμε να κάνουμε μία σημαντική αλλαγή στο σύστημα ZFC^-. Αυτή είναι να εισάγουμε αντικείμενα στο σύμπαν μας V τα οποία όμως δεν θα είναι σύνολα. Αυτά θα τα ονομάζουμε *άτομα* (*urelements*) και οι ιδότητες τους θα προκύπτουν από δύο αξιώματα τα οποία θα προσθέσουμε σ' αυτά του συστήματος ZFC^-.



Σχήμα 1.2: Συσσωρευτική ιεραρχία[1] στην ZFC + Αξίωμα Ατόμων.

Πριν περάσουμε στη διατύπωση των νέων αξιωμάτων θα πρέπει να κάνουμε μία διευκρίνιση. Τα αξιώματα της ZFC^- τα εκφράσαμε σε μία γλώσσα L στην οποία το μόνο μη λογικό σύμβολο ήταν το "$\in$". Εδώ θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε μία επέκταση L' της γλώσσας L ώστε να περιλαμβάνει ένα μονομελές σύμβολο σχέσης $\mathcal{U}$ και ένα διμελές σύμβολο συνάρτησης "*new*".

Αξίωμα 11 (Αξίωμα Ατόμων). *"Τα άτομα δεν περιέχουν στοιχεία".*

$$(\forall x)(\forall y)(\mathcal{U}(x) \rightarrow y \notin x).$$

Τα άτομα επομένως συμπεριφέρονται όπως το κενό σύνολο, δηλαδή δεν έχουν μέλη. Με την εισαγωγή ατόμων στο σύμπαν μας η εικόνα της συσσωρευτικής ιεραρχίας αλλάζει αρκετά (βλέπε Σχήμα 1.2).

Παρατήρηση 1.1. 1. Για ευκολία πολλές φορές αντί για $\mathcal{U}(x)$ θα γράφουμε $x \in \mathcal{U}$, ενώ επίσης θα μιλάμε για την κλάση των ατόμων $\mathcal{U}$ αναφερόμενοι στην κλάση

$$\{x \mid \mathcal{U}(x)\}.$$

2. Το σύμπαν με κλάση ατόμων $\mathcal{U}$ θα το συμβολίζουμε πάλι με V. Την κλάση όμως των συνόλων του V με κλάση ατόμων $\mathcal{U}$ θα τη συμβολίζουμε με $V[\mathcal{U}]$.

Ορισμός 1.1. Για κάθε $a \in V[\mathcal{U}]$, ορίζουμε *στήριξη* του a να είναι

$$support(a) = trcl(a) \cap \mathcal{U}\,.$$

Ένα σύνολο θα καλείται *αγνό* (*pure*) αν $support(a) = \emptyset$.

Ορίζουμε επίσης για κάθε $A \subseteq \mathcal{U}$,

$$V[A] = \{a \mid a \in V[\mathcal{U}]\,\&\, support(a) \subseteq A\}.$$

[1] Σημειώνουμε ότι το σχήμα αυτό περιγράφει το σύμπαν της ZFC + Αξίωμα Ατόμων, επομένως έχουμε συμπεριλάβει στα αξιώματα μας και αυτό της Θεμελίωσης. Το σύμπαν της ZFC^- + Αξίωμα Ατόμων είναι προφανώς μεγαλύτερο από αυτό μιας και περιέχει και μη εδραιωμένα σύνολα.

Παρατήρηση 1.2. 1. Προφανώς η κλάση των αγνών συνόλων είναι η $V[\emptyset]$.

2. Είναι σημαντικό να έχουμε υπόψην ότι

$$V = V[\mathcal{U}] \cup \mathcal{U}\,.$$

Ορισμός 1.2. *Τελεστής συνόλων* θα καλείται κάθε απεικόνιση από το $V[\mathcal{U}]$ στο $V[\mathcal{U}]$, που αντιστοιχεί δηλαδή σύνολα σε σύνολα.

Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς εύκολα, το Αξίωμα 11 δεν εγγυάται ότι υπάρχουν άτομα, πόσο μάλλον το αν αποτελούν σύνολο ή γνήσια κλάση. Επειδή ακριβώς θα χρειαστεί να έχουμε "αφθονία" από άτομα στη διάθεση μας, εισάγουμε το παρακάτω αξίωμα.

Αξίωμα 12 (Αξίωμα Αφθονίας - Axiom of Plenitude). *"Για κάθε x, y το $\mathrm{new}(x, y)$ είναι άτομο το οποίο δεν ανήκει στο y και μάλιστα διαφέρει από οποιοδήποτε $\mathrm{new}(x, z)$".*

$$\begin{aligned}(\forall x)(\forall y)\big(&\mathcal{U}(\mathrm{new}(x, y)) \wedge \mathrm{new}(x, y) \notin y \wedge \\ &\wedge (\forall z)(z \neq x \rightarrow (\mathrm{new}(x, y) \neq \mathrm{new}(z, y)))\big).\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το Αξίωμα η κλάση $\mathcal{U}$ είναι τουλάχιστον όσο μεγάλη είναι και η κλάση των συνόλων, επομένως είναι γνήσια κλάση. Επίσης ο τελεστής $new(x, y)$ μας δίνει πάντα ένα νέο άτομο το οποίο μάλιστα δεν εμφανίζεται ήδη στο y.

Παρατήρηση 1.3. Ο τελεστής new θα χρησιμοποιείται συνήθως όταν θέλουμε να εισάγουμε "φρέσκα" άτομα, δηλαδή άτομα τα οποία δεν έχουν εμφανιστεί σε κάποιο από τα σύνολα που χειριζόμαστε εκείνη τη στιγμή. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι $p \in \mathcal{U}$ και $a, b \in V[\mathcal{U}]$. Τότε για το $q = new(p, support(a \cup b) \cup \{p\})$ ισχύει ότι

- $q \in \mathcal{U}$.
- το q δεν εμφανίζεται πουθενά στην κατασκευή των a και b.
- $q \neq p$.

Το Αξιωματικό σύστημα ZFC^- + Αξίωμα Ατόμων + Αξίωμα Αφθονίας θα το συμβολίζουμε με $ZFC^-_{\mathcal{U}}$.

Παρατήρηση 1.4. Το παραπάνω σχόλιο δεν είναι απόλυτα ακριβές, μιας και στα αξιώματα της ZFC^- θα πρέπει να γίνουν μερικές προφανείς μικροαλλαγές. Για παράδειγμα το Αξίωμα Έκτασης θα πρέπει να γίνει

$$(\forall x, y \notin \mathcal{U})\big((\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y\big).$$

Κεφάλαιο 2

Αξίωμα Αντιθεμελίωσης

2.1 Αρχική διαίσθηση

Μία από τις διάφορες μορφές του Αξιωμάτων Αντιθεμελίωσης είναι και αυτή που δόθηκε από τους Barwise και Moss (βλέπε [3]). Η ιδέα πίσω από την μορφή αυτή, η οποία ονομάζεται "Λήμμα Επίλυσης", είναι απλή τόσο στην σύλληψη όσο και στη διατύπωση. Ακολουθεί σε κάποιο βαθμό μία κατασκευή η οποία είναι συνηθισμένη στα μαθηματικά, με την έννοια ότι την βλέπουμε συχνά να επαναλαμβάνεται όταν θέλουμε να περάσουμε από μία απλούστερη δομή σε μία άλλη η οποία περιέχει "λύσεις" που απουσιάζουν από την αρχική, διατηρώντας παράλληλα όλες τις "καλές" ιδιότητές της.

Ως κλασικό παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε το πέρασμα από το σύνολο των ακεραίων σε αυτό των ρητών. Πράττοντας λοιπόν κατ' αναλογία με την επέκταση του συνόλου των ακεραίων, επιθυμούμε να "γεμίσουμε" την κλάση όλων των συνόλων V με καινούργια σύνολα (των οποίων η ύπαρξη θα προκύπτει από το καινούργιο μας αξίωμα) τα οποία θα αποτελούν "λύσεις" κάποιων "άλυτων" εξισώσεων στην αρχική μας κλάση. Η βασική ιδέα είναι ότι αυτές οι εξισώσεις για τις οποίες μιλάμε θα εγγυώνται την ύπαρξη μη εδραιωμένων συνόλων, Για παράδειγμα, θέλουμε εξισώσεις όπως οι

$$x = \{x\},$$

και

$$x = \{p, x\},$$

ή το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} x &= \{p, y, x\} \\ y &= \{x\}, \end{aligned}$$

να έχουν λύσεις, όπως ακριβώς απαιτήσαμε και στο $\mathbb{Q}$ να υπάρχουν λύσεις για τις εξισώσεις

$$3x = 2,$$

και

$$3x = p + 4,$$

ή για το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} 3x &= p + y + 2 \\ y &= 2x. \end{aligned}$$

Όπως και στην κατασκευή των ρητών όμως, έτσι και εδώ δεν αρκεί να προσθέσουμε απλά κάποια καινούργια στοιχεία, γιατί τότε θα χάσουμε όλες τις ιδιότητες των ακεραίων τις οποίες θέλουμε να διατηρήσουμε. Το πρόβλημα έγκειται στο ότι για παράδειγμα οι εξισώσεις

$$x = \{x, p\},$$

ή

$$x = \{\{x, p\}, p\},$$

ή

$$x = \{\{\{x, p\}, p\}, p\},$$

θα πρέπει να έχουν όλες την ίδια λύση ακριβώς όπως και οι

$$3x = 4,$$

ή

$$6x = 8,$$

ή

$$9x = 12,$$

έχουν την ίδια λύση στους ρητούς.

Για να αποφύγουμε λοιπόν αυτή την επιπλοκή, χρησιμοποιούμε ένα παρόμοιο τέχνασμα με αυτό στους ρητούς, δηλαδή αντί για στοιχεία που είναι λύσεις εξισώσεων, προσθέτουμε στοιχεία που είναι λύσεις ολόκληρων κλάσεων εξισώσεων (χρησιμοποιώντας κλάσεις ισοδυναμίας). Πώς θα το πετύχουμε όμως αυτό;

Όπως γνωρίζουμε, στους ρητούς απαιτήσαμε κάθε εξίσωση του τύπου

$$ax = b, \ \ a \neq 0$$

να έχει μία και μοναδική λύση. Όμως τι γίνεται στην περίπτωσή μας; Θα πρέπει ή όχι να απαιτήσουμε κάθε σύστημα εξισώσεων να έχει μία λύση;

Ας δούμε μερικά παραδείγματα. Έστω η εξίσωση

$$x = \{x\}. \tag{2.1}$$

Σύμφωνα με τη διαίσθησή μας για τα σύνολα (την οποία σαφώς και θέλουμε να διατηρήσουμε παραμένοντας στον πλαίσιο της ZFC^-), η εξίσωση αυτή θα πρέπει να έχει την ίδια λύση με τις

$$x = \{\{x\}\},$$

ή

$$x = \{\{\{x\}\}\},$$

ή

$$\vdots$$

Ξεδιπλώνοντας διαρκώς την εξίσωση (2.1) βλέπουμε ότι μετατρέπεται στην

$$x = \{\{\ldots\{\ldots\}\ldots\}\}, \tag{2.2}$$

η οποία είναι φυσικά μία αναπαράσταση της λύσης της (2.1) και όχι μία αυστηρά τυποποιημένη έκφραση.

Ακολουθώντας το πνεύμα του Αξιώματος της Έκτασης δεν μπορούμε παρά να δεχθούμε ότι από αυτή τη διαδικασία "ανάπτυξης" προκύπτει ότι η λύση της (2.1) πρέπει να είναι μοναδική. Διαφορετικά αν c και d ήταν δύο διαφορετικές λύσεις της, θα έπρεπε και οι δύο να ικανοποιούν την (2.2), δηλαδή

$$c = \{\{\ldots\{\ldots\}\ldots\}\} = d.$$

Η διαίσθηση μας λοιπόν, μας οδηγεί στο να απαιτήσουμε μοναδικότητα της λύσης.

Από την άλλη μεριά όμως, θα πρέπει άραγε κάθε εξίσωση να έχει λύση βάση του καινούργιου αξιώματος μας; Αυτό σίγουρα απορρίπτεται εύκολα μιας και για παράδειγμα η εξίσωση

$$x = \mathcal{P}(x)$$

δεν μπορεί να έχει λύση λόγω του θεωρήματος του Cantor[1].

Έχοντας συγκεντρώσει μερικές αρχικές παρατηρήσεις γύρω από την φύση που θα θέλαμε να έχει το νέο μας αξίωμα, μπορούμε πλέον να επικεντρωθούμε στην τυποποίηση της όλης ιδέας.

2.2 Συστήματα εξισώσεων

Το πρώτο βήμα προς την έκφραση του Αξιώματος Επίλυσης είναι η ακριβής τυποποίηση της έννοιας του συστήματος εξισώσεων. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι απαιτούμε από κάποιες "εξισώσεις" να έχουν λύση στο καινούργιο μας σύμπαν; Τι είναι αυτές οι "εξισώσεις";

Είναι καλύτερο ίσως να προσεγγίσουμε αρχικά την έννοια αυτή του συστήματος εξισώσεων μέσα από ένα παράδειγμα. Έστω p, q, r παράμετροι (σύνολα ή άτομα) και έστω x, y, z οι "άγνωστοι" μας οι οποίοι ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$(\mathcal{E}) \qquad \begin{aligned} x &= \{y, p\} \\ y &= \{x, z, r, q\} \\ z &= \{y, p, r\}. \end{aligned}$$

Θα καλούμε τα x, y, z μεταβλητές του συστήματος εξισώσεων $\mathcal{E}$ και τα p, q, r παραμέτρους του συστήματος εξισώσεων $\mathcal{E}$. Επίσης, θα γράφουμε συνήθως $X_{\mathcal{E}} = \{x, y, z\}$ και $A_{\mathcal{E}} = \{p, q, r\}$ (ή X και A όταν το σύστημα εξισώσεων είναι ευνόητο).

Όπως φαίνεται από το παράδειγμα προτιμούμε οι εξισώσεις μας στην αρχική αυτή φάση να είναι όσο το δυνατό πιο απλές· με μία έννοια να μοιάζουν "επίπεδες". Επιθυμούμε δηλαδή τα ζητούμενα σύνολα να ορίζονται ως απλά σύνολα με στοιχεία που είναι είτε ζητούμενα σύνολα είτε παράμετροι. Γι' αυτό το λόγο και ο αρχικός ορισμός που θα δώσουμε είναι αυτός του "επίπεδου συστήματος εξισώσεων". Ο λόγος που δε χρησιμοποιούμε πιο πολύπλοκες εξισώσεις είναι κυρίως γιατί όπως είδαμε υπάρχουν συστήματα τα οποία θέλουμε να παραμείνουν άλυτα και στο νέο κόσμο μας, ώστε να διαφυλάξουμε την συνέπεια προς τη ZFC^-. Για παράδειγμα, δεν επιτρέπουμε την χρήση τελεστών όπως αυτός του δυναμοσυνόλου. Είναι βολικό ωστόσο να επιτρέψουμε τη χρήση παραμέτρων, ενώ εξίσου χρήσιμο σε πρώτο στάδιο θα είναι να θεωρήσουμε τις μεταβλητές x, y, z ως άτομα και όχι ως σύνολα.

Όλα αυτά που διατυπώσαμε βέβαια ως τώρα δεν αποτελούν τυπικές εκφράσεις στη γλώσσα της συνολοθεωρίας. Για να γίνει αυτό θα πρέπει το σύστημά μας

[1] Υπενθυμίζουμε ότι το θεώρημα του Cantor είναι πρόταση της ZFC^- και επομένως επιθυμούμε να το σεβαστούμε.

να εκφραστεί με καθαρά συνολοθεωρητικά μέσα. Ας γυρίσουμε όμως πάλι στο παράδειγμα να δούμε πώς μπορούμε να πετύχουμε κάτι τέτοιο. Ένας απλός τρόπος να μοντελοποιήσουμε τις εξισώσεις του $\mathcal{E}$ είναι θεωρώντας μία συνάρτηση e ορισμένη στο X έτσι ώστε

$$(\mathcal{E}) \qquad \begin{aligned} e_x &= \{y, p\} \\ e_y &= \{x, z, r, q\} \\ e_z &= \{y, p, r\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα $\mathcal{E}$ περιγράφεται πλήρως από τη διατεταγμένη τριάδα $\langle X, A, e\rangle$. Με οδηγό την παρατήρηση αυτή, αλλά και τις προηγούμενες, δίνουμε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 2.1. *Επίπεδο σύστημα εξισώσεων* (*Flat system of equations*) $\mathcal{E}$ καλούμε κάθε διατεταγμένη τριάδα $\mathcal{E} = \langle X_\mathcal{E}, A_\mathcal{E}, e^\mathcal{E}\rangle$, όπου $X_\mathcal{E} \subseteq \mathcal{U}$, $A_\mathcal{E} \cap X_\mathcal{E} = \emptyset$ και $e^\mathcal{E}$ συνάρτηση από το $X_\mathcal{E}$ στο $\mathcal{P}(X_\mathcal{E} \cup A_\mathcal{E})$. Το σύνολο $X_\mathcal{E}$ ονομάζεται *σύνολο μεταβλητών* του $\mathcal{E}$ και το $A_\mathcal{E}$ *σύνολο παραμέτρων* του $\mathcal{E}$. Ορίζουμε επίσης για κάθε $x \in X_\mathcal{E}$, $b_x^\mathcal{E} = e_x^\mathcal{E} \cap X_\mathcal{E}$ και $c_x^\mathcal{E} = e_x^\mathcal{E} \cap A_\mathcal{E}$ τα σύνολα των μεταβλητών και των παραμέτρων από τα οποία εξαρτάται το x αντίστοιχα.

Ορισμός 2.2. *Γενικευμένο επίπεδο σύστημα εξισώσεων*(*Generalized flat system of equations*) $\mathcal{E}$ ονομάζουμε κάθε επίπεδο σύστημα $\mathcal{E} = \langle X_\mathcal{E}, A_\mathcal{E}, e^\mathcal{E}\rangle$, στο οποίο έχει αρθεί ο περιορισμός $X_\mathcal{E} \subseteq \mathcal{U}$ (στο οποίο δηλαδή οι μεταβλητές μπορούν πλέον να είναι και σύνολα).

Παρατήρηση 2.1. 1. Συνήθως θα παραλείπουμε τον δείκτη $\mathcal{E}$ στα $X_\mathcal{E}, A_\mathcal{E}, e^\mathcal{E}$.

2. Ένα σύστημα εξισώσεων μπορεί κάλλιστα να αποτελείται από μία μόνο εξίσωση, ενώ μπορούμε να έχουμε ακόμα και $X = \emptyset$.

3. Μπορούμε να έχουμε $e_x = \emptyset$ για κάποιο $x \in X$.

4. Ένα μειονέκτημα της έννοιας του επίπεδου συστήματος εξισώσεων είναι ότι μας περιορίζει κάπως στον τρόπο με τον οποίο πρέπει να εκφράζουμε τις εξισώσεις. Για παράδειγμα, έστω η παρακάτω εξίσωση

$$x = \{\{\{x, p\}, x, q\}, r\}.$$

Σαφώς και αυτή δεν αποτελεί επίπεδο σύστημα εξισώσεων μιας και το στοιχείο $\{\{x, p\}, x, q\}$ του e_x δεν είναι ούτε άτομο ούτε παράμετρος.

Για να αποφύγουμε αυτό το εμπόδιο (μιας και όπως θα δούμε στη συνέχεια θα θέλαμε να χρησιμοποιούμε κυρίως επίπεδα συστήματα εξισώσεων) μπορούμε να μετατρέψουμε την εξίσωση αυτή στο εξής επίπεδο σύστημα

$$\begin{aligned} x &= \{y, r\} \\ y &= \{z, x, q\} \\ z &= \{x, p\}. \end{aligned}$$

Αναλόγως μπορούμε να μετατρέψουμε σε επίπεδα συστήματα εξισώσεων, εξισώσεις όπως η

$$x = \{p_0, \{p_1\{p_2, \ldots\}\}\},$$

εισάγοντας άπειρες μεταβλητές

$$\begin{aligned} x &= \{p_0, x_1\} \\ x_1 &= \{p_1, x_2\} \\ x_2 &= \{p_2, x_3\} \\ &\vdots \\ x_n &= \{p_n, x_{n+1}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

μιας και υπενθυμίζουμε ότι δεν υπάρχει περιορισμός στο πλήθος[2] των μεταβλητών που μπορεί να έχει ένα επίπεδο σύστημα εξισώσεων.

2.3 Λύσεις συστημάτων εξισώσεων

Στο δρόμο για την διατύπωση του Λήμματος Επίλυσης μένει ακόμα ένας ορισμός. Θα πρέπει να προσδιορίσουμε τυπικά τι εννοούμε με τον όρο "λύση" ενός συστήματος εξισώσεων. Γυρίζοντας στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου, θα λέγαμε ότι λύση του $\mathcal{E}$ πρέπει να είναι οποιαδήποτε τριάδα συνόλων s_x, s_y, s_z ικανοποιεί τις[3]

$$\begin{aligned} s_x &= \{s_y, p\} \\ s_y &= \{s_x, s_z, r, q\} \\ s_z &= \{s_y, p, r\}. \end{aligned}$$

Συμπτύσσοντας κάπως τη γραφή της λύσης, παίρνουμε ότι, για κάθε $u \in X$, $s_u = \{s_w \mid w \in b_u^{\mathcal{E}}\} \cup c_u^{\mathcal{E}}$.

Ορισμός 2.3. Έστω $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ ένα επίπεδο σύστημα εξισώσεων. *Λύση* του συστήματος $\mathcal{E}$ καλούμε κάθε συνάρτηση $s^{\mathcal{E}}$ από το X στο $X \cup A$, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη

$$s_x^{\mathcal{E}} = \{s_y^{\mathcal{E}} \mid y \in b_x^{\mathcal{E}}\} \cup c_x^{\mathcal{E}}, \text{ για κάθε } x \in X.$$

[2] Φυσικά η κλάση των μεταβλητών ενός συστήματος πρέπει να είναι σύνολο και όχι γνήσια κλάση.

[3] Τα p, q, r επιθυμούμε να τα μεταχειριζόμαστε ως δοσμένες παραμέτρους ανεξάρτητες από τα x, y, z και γι' αυτό μένουν αναλλοίωτα στην διαδικασία επίλυσης.

Αναλόγως ορίζουμε και την λύση για γενικευμένο επίπεδο σύστημα εξισώσεων.

Παρατήρηση 2.2. 1. Συνήθως θα παραλείπουμε τον δείκτη $\mathcal{E}$ στο $s^{\mathcal{E}}$.

2. Αν $X = \emptyset$, τότε προφανώς η $s = \emptyset$ αποτελεί λύση του συστήματος.

3. Συνήθως την τιμή της λύσης s στο x θα τη γράφουμε ως s_x και όχι ως $s(x)$. Όταν πάντως ο συμβολισμός του δείκτη γίνεται "βαρύς", θα χρησιμοποιούμε τον κλασικό συμβολισμό.

2.4 Λήμμα Επίλυσης

Μπορούμε πλέον μετά από τους προηγούμενους ορισμούς να διατυπώσουμε το Αξίωμα Αντιθεμελίωσης (Antifoundation Axiom, *AFA*) με τη μορφή του Λήμματος Επίλυσης (Solution Lemma) βασιζόμενοι στις ιδέες που περιγράψαμε στην εισαγωγή.

Αξίωμα 13 (Αξίωμα Αντιθεμελίωσης - Λήμμα Επίλυσης). *Κάθε επίπεδο σύστημα εξισώσεων έχει ακριβώς μία λύση.*

Το σύστημα $ZFC^-_{\mathcal{U}}$ με την προσθήκη του *AFA* θα το συμβολίζουμε με *ZFA*.

Παρατήρηση 2.3. 1. Το Λήμμα Επίλυσης έχει διάφορες ισοδύναμες μορφές διατύπωσης και θα ήταν σωστότερο ίσως να αναφερόμασταν σε αυτή τη μορφή ως "Επίπεδο Λήμμα Επίλυσης", αλλά για λόγους απλότητας θα το αποφύγουμε.

2. Τα περισσότερα αποτελέσματα από εδώ και πέρα βασίζονται στη *ZFA*. Η χρήση ή μη του αξιώματος θα τονίζεται όταν αυτό κρίνεται απαραίτητο.

Ορισμός 2.4. *Σύνολο λύσεων* ενός συστήματος εξισώσεων $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ είναι το σύνολο

$$\textit{solution-set}(\mathcal{E}) = \{s_x \mid x \in X \ \& \ s \text{ η μοναδική λύση του } \mathcal{E}\}.$$

Όπως είδαμε, στην διατύπωση του Λήμματος Επίλυσης απαιτήσαμε κάθε επίπεδο σύστημα εξισώσεων να έχει μοναδική λύση. Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι αν αντ' αυτού απαιτούσαμε κάθε γενικευμένο επίπεδο σύστημα εξισώσεων να έχει μοναδική λύση, μήπως θα παίρναμε κάποια διαφοροποιημένη θεωρία; Όπως φαίνεται από το παρακάτω θεώρημα, αυτό δεν ισχύει γιατί πολύ απλά ο περιορισμός ότι οι μεταβλητές του συστήματος εξισώσεων είναι άτομα, δεν είναι ουσιώδης[4].

Θεώρημα 2.1. *Κάθε γενικευμένο επίπεδο σύστημα εξισώσεων $\mathcal{E}$ έχει μοναδική λύση. Επίσης, υπάρχει επίπεδο σύστημα εξισώσεων $\mathcal{E}'$ που έχει το ίδιο σύνολο παραμέτρων και το ίδιο σύνολο λύσεων με το $\mathcal{E}$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$. Επικαλούμενοι το Αξίωμα Αφθονίας μπορούμε να ορίσουμε, για κάθε $x \in X$,

$$y_x = \textit{new}(x, A).$$

[4] Αν και όπως θα δούμε είναι αρκετά χρήσιμος.

Όπως προκύπτει από τις ιδιότητες του *new*,

$$y_x \notin A \;\text{ και }\; x \neq z \Rightarrow y_x \neq y_z.$$

Έστω

$$Y = \{y_x \mid x \in X\}.$$

Προφανώς $Y \subseteq \mathcal{U}$ και $Y \cap A = \emptyset$.

Θεωρούμε $\mathcal{E}' = \langle Y, A, e' \rangle$ επίπεδο σύστημα εξισώσεων, όπου για κάθε $x \in X$,

$$e'(y_x) = \{y_z \mid z \in b_x^{\mathcal{E}}\} \cup c_x^{\mathcal{E}}.$$

Από το Λήμμα Επίλυσης έχουμε ότι το $\mathcal{E}'$ έχει μία μοναδική λύση s'.

Έστω $s : X \to \mathcal{P}(X \cup A)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$,

$$s_x = s'(y_x).$$

Η s είναι λύση του $\mathcal{E}$, γιατί αν $x \in X$

$$s'(y_x) = \{s'(y_z) \mid z \in b_x^{\mathcal{E}}\} \cup c_x^{\mathcal{E}},$$

οπότε

$$s(x) = \{s(z) \mid z \in b_x^{\mathcal{E}}\} \cup c_x^{\mathcal{E}}.$$

Από την άλλη, αν s είναι μια οποιαδήποτε λύση του $\mathcal{E}$, ορίζοντας $s' : Y \to \mathcal{P}(Y \cup A)$ με

$$s'(y_x) = s(x), \;\text{ για κάθε } x \in X,$$

παίρνουμε μία λύση για το $\mathcal{E}'$. Εφόσον λοιπόν το $\mathcal{E}'$ έχει μοναδική λύση, το ίδιο ισχύει και για το $\mathcal{E}$. $\dashv$

2.5 Χαρακτηρισμός σύμπαντος

Με την εισαγωγή νέων συνόλων στο σύμπαν μας αλλάζει και η δομή του σε κάποιο βαθμό. Ο αρχικός μας στόχος ήταν ο εμπλουτισμός του με μη εδραιωμένα σύνολα, αλλά με τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρηθούν όλες οι καλές ιδιότητες της αρχικής δομής. Όμως πώς είναι τα καινούργια μας σύνολα; Έχουμε δει διάφορα παραδείγματα, αλλά υπάρχει κάποιος γενικός χαρακτηρισμός; Για παράδειγμα, υπάρχουν άραγε σύνολα τα οποία δεν προκύπτουν ως λύση επίπεδου συστήματος εξισώσεων;

Ορισμός 2.5. Ορίζουμε $V_{afa}[A]$ να είναι η *κλάση* όλων των *λύσεων* όλων των συστημάτων εξισώσεων με παραμέτρους από το A, δηλαδή

$$V_{afa}[A] = \bigcup\{\textit{solution-set}(\mathcal{E}) \mid \mathcal{E} \text{ επίπεδο σύστημα εξισώσεων} \\ \text{με παραμέτρους από το } A\}.$$

Ορισμός 2.6. Έστω a σύνολο και $\mathcal{E}_a = \langle X, A, e\rangle$ γενικευμένο σύστημα εξισώσεων τέτοιο ώστε $A = support(a)$, $X = trcl(\{a\}) \setminus A$ και

$$e_x = x, \text{ για κάθε } x \in X.$$

Το $\mathcal{E}_a$ θα ονομάζεται *κανονικό επίπεδο σύστημα εξισώσεων* (*canonical flat system*) για το a.

Παρατήρηση 2.4. 1. Το $\mathcal{E}_a$ είναι πράγματι γενικευμένο επίπεδο σύστημα εξισώσεων γιατί κάθε $x \in X$ είναι σύνολο και από τη μεταβατικότητα στα σύνολα του X έχουμε ότι $x \subseteq X$, άρα $X \cap A = \emptyset$.

2. Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι η ταυτοτική συνάρτηση στο X είναι λύση του $\mathcal{E}_a$ (αφού $x = (x \cap X) \cup (x \cap A)$).

Θεώρημα 2.2. $V_{afa}[A] = V[A]$.

Απόδειξη. ($V_{afa}[A] \subseteq V[A]$). Έστω $\mathcal{E}$ επίπεδο σύστημα εξισώσεων και $Z = solution\text{-}set(\mathcal{E}) \cup A$.

Έστω $u \in v \in Z$. Προφανώς $v = s_x$ για κάποιο $x \in X$. Αν $u \in A$ τότε $u \in Z$, ενώ αν πάλι $u = s_y$, για κάποιο $y \in X$, τότε $u \in Z$ επίσης. Άρα το Z είναι μεταβατικό.

Έστω $x \in X$. Εξ' ορισμού (του *trcl*) έχουμε ότι $trcl(s_x) \subseteq Z$. Επίσης $s_x \notin \mathcal{U}$ γιατί είτε έχει στοιχεία (όταν $e_x \neq \emptyset$) είτε είναι το κενό σύνολο. Άρα

$$trcl(s_x) \cap \mathcal{U} \subseteq Z \cap \mathcal{U} = A,$$

δηλαδή

$$support(s_x) \subseteq A.$$

Επομένως

$$solution\text{-}set(\mathcal{E}) \subseteq V[A].$$

($V[A] \subseteq V_{afa}[A]$). Έστω $a \in V[A]$, δηλαδή το a είναι τέτοιο ώστε $support(a) \subseteq A$, και έστω $\mathcal{E}_a = \langle X, A, e\rangle$ το κανονικό επίπεδο σύστημα εξισώσεων του a. Από Παρατήρηση 2.4.2 γνωρίζουμε ότι η ταυτοτική συνάρτηση στο X είναι λύση του $\mathcal{E}_a$. Άρα αφού $a \in X$, έχουμε ότι

$$a = s_a \in solution\text{-}set(\mathcal{E}_a).$$

Από το Θεώρημα 2.1 παίρνουμε ότι υπάρχει επίπεδο σύστημα εξισώσεων $\mathcal{E}$ με ίδιες παραμέτρους και ίδιο σύνολο λύσεων με το $\mathcal{E}_a$. Άρα $a \in solution\text{-}set(\mathcal{E})$ και επομένως $a \in V_{afa}[A]$. $\dashv$

2.6 Το σύνολο Ω

Στην εισαγωγή μας, σε μία προσπάθεια για αρχική προσέγγιση του Λήμματος Επίλυσης είδαμε κάποια παραδείγματα ανάμεσα στα οποία ήταν και αυτό που αφορούσε στην εξίσωση

$$(\mathcal{E}) \qquad x = \{x\}.$$

Ορμώμενοι μάλιστα από τη διαίσθησή μας για τις λύσεις της, οδηγηθήκαμε και στο αίτημα που διατυπώνεται στο *AFA* για μοναδικότητα λύσης των συστημάτων εξισώσεων.

Όπως είδαμε μετά την τυποποίηση των εννοιών και την αυστηρή διατύπωση του αξιώματός μας, η εξίσωση $\mathcal{E}$ αποτελεί ένα επίπεδο σύστημα εξισώσεων, όπου $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$, με $X = \{x\}$, $A = \emptyset$, $e_x = \{x\}$. Επομένως από το *AFA* έχουμε ότι θα πρέπει να έχει μία και μοναδική λύση (κάτι που επιδιώκαμε από την αρχή).

Ορισμός 2.7. Συμβολίζουμε με Ω το σύνολο που αποτελεί την μοναδική λύση του επίπεδου συστήματος εξισώσεων

$$x = \{x\} \tag{2.3}$$

Έστω τώρα τα παρακάτω επίπεδα συστήματα εξισώσεων

$$(\mathcal{E}_1) \quad \begin{aligned} x &= \{y, z\} \\ y &= \{x\} \\ z &= \{x, y\} \end{aligned} \qquad (\mathcal{E}_2) \quad \begin{aligned} x &= \{x_0\} \\ x_0 &= \{x_1\} \\ &\vdots \\ x_n &= \{x_{n+1}\} \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (\mathcal{E}_3) \quad \begin{aligned} x &= \{x, x_0\} \\ x_0 &= \{x, x_1\} \\ &\vdots \\ x_n &= \{x, x_{n+1}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι όλα τα παραπάνω συστήματα έχουν ακριβώς το ίδιο σύνολο λύσεων με το $\mathcal{E}$. Στο $\mathcal{E}_1$ έχουμε εύκολα ότι $s_x^{\mathcal{E}_1} = s_y^{\mathcal{E}_1} = s_z^{\mathcal{E}_1} = \Omega$ μιας και $\{\Omega, \Omega\} = \{\Omega\} = \Omega$ (από τον ορισμό του Ω), ενώ στο $\mathcal{E}_3$ (το $\mathcal{E}_2$ είναι ανάλογο) έχουμε ότι $s_x^{\mathcal{E}_3} = s_{x_0}^{\mathcal{E}_3} = \ldots = s_{x_n}^{\mathcal{E}_3} = \ldots = \Omega$ γιατί $\Omega = \{\Omega\}$ και επομένως $s_{x_n}^{\mathcal{E}_3} = \{s_{x_{n+1}}^{\mathcal{E}_3}\}$.

Το επόμενο αποτέλεσμα έρχεται να γενικεύσει το γεγονός αυτό.

Πρόταση 2.3. *Έστω $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ επίπεδο σύστημα εξισώσεων, όπου $A = \emptyset$ και για κάθε $x \in X$, $e_x \neq \emptyset$. Τότε το $\mathcal{E}$ έχει σύνολο λύσεων το Ω.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η s, με

$$s_x = \Omega, \ \text{ για κάθε } x \in X,$$

είναι λύση του $\mathcal{E}$.

Έστω $x \in X$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \Omega = s_x &= \{s_y \mid y \in e_x \cap X\} \cup c_x^{\mathcal{E}} \\ &= \{s_y \mid y \in e_x\} && (c_x^{\mathcal{E}} = \emptyset \text{ και } e_x \subseteq X) \\ &= \{\Omega \mid y \in e_x\} && (s_y = \Omega, \text{ για κάθε } y \in X) \\ &= \{\Omega\}, \end{aligned}$$

η οποία ισότητα ισχύει από τον ορισμό του Ω.

Άρα η s είναι λύση και μάλιστα η μοναδική, δηλαδή

$$\textit{solution-set}(\mathcal{E}) = \{\Omega\} = \Omega. \qquad \dashv$$

2.7 Προσομοιώσεις

Όπως το Ω έτσι και κάθε σύνολο, αποτελεί λύση πολλών διαφορετικών συστημάτων εξισώσεων. Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες είναι εύκολο με μία απλή επισκόπηση να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι τα υπό μελέτη συστήματα εξισώσεων έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων, ότι δηλαδή με μία έννοια είναι ισοδύναμα.

Ας πάρουμε για παράδειγμα τα δύο παρακάτω συστήματα εξισώσεων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}'$

$$(\mathcal{E}) \quad \begin{aligned} x &= \{p, y, z\} \\ &\left.\begin{aligned} y &= \{w\} \\ z &= \{y, w\} \\ w &= \{y, z\} \end{aligned}\right\} (\mathcal{E}_1) \end{aligned} \qquad\qquad (\mathcal{E}') \quad \begin{aligned} x' &= \{p, y'\} \\ y' &= \{y'\}, \end{aligned}$$

όπου p είναι παράμετρος.

Με την πρώτη ματιά μοιάζουν εντελώς διαφορετικά και επομένως δεν δίνουν την εντύπωση ότι θα έχουν κοινές λύσεις. Κοιτάζοντας όμως λίγο πιο προσεκτικά θα παρατηρήσουμε ότι αν απομονώσουμε τις τρεις τελευταίες εξισώσεις του $\mathcal{E}$ και τις θεωρήσουμε ένα ξεχωριστό σύστημα εξισώσεων $\mathcal{E}_1$, τότε εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.3 παίρνουμε ως λύση του την $s^{\mathcal{E}_1}$ με $s_y^{\mathcal{E}_1} = s_z^{\mathcal{E}_1} = s_w^{\mathcal{E}_1} = \Omega$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι το αρχικό μας σύστημα $\mathcal{E}$ έχει ως λύση την $s^{\mathcal{E}}$ με $s_x^{\mathcal{E}} = \{p, \Omega\}$, $s_y^{\mathcal{E}} = s_z^{\mathcal{E}} = s_w^{\mathcal{E}} = \Omega$. Από την άλλη μεριά, το $\mathcal{E}'$ ομοίως έχει ως λύση την $s^{\mathcal{E}'}$ με $s_{x'}^{\mathcal{E}'} = \{p, \Omega\}$, $s_{y'}^{\mathcal{E}'} = \Omega$. Επομένως *solution-set*$(\mathcal{E})$ = *solution-set*$(\mathcal{E}')$.

Οι περιπτώσεις σαν αυτή βέβαια αποτελούν εξαίρεση. Συνήθως δεν είναι καθόλου εύκολο να διακρίνουμε αν δύο συστήματα εξισώσεων έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο χρειάζεται να αναζητήσουμε ένα κριτήριο που να μας βεβαιώνει αν όντως δύο συστήματα εξισώσεων έχουν κοινές λύσεις, το οποίο μάλιστα να είναι απλό και γενικά εφαρμόσιμο. Πριν όμως εκφράσουμε αυτό το κριτήριο πρέπει να ορίσουμε μία σημαντική έννοια στην οποία θα βασιστεί.

Ορισμός 2.8. Έστω $A \subseteq \mathcal{U}$ και έστω $\mathcal{E} = \langle X, A, e \rangle$, $\mathcal{E}' = \langle X', A, e' \rangle$ δύο γενικευμένα επίπεδα συστήματα εξισώσεων με ίδιο σύνολο παραμέτρων.

Σχέση A-προσομοίωσης (*bisimulation relation*) των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}'$ είναι κάθε σχέση $R \subseteq X \times X$ η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

i. Έστω $x\,R\,x'$. Τότε, για κάθε $y \in e_x \cap X$, υπάρχει $y' \in e'_{x'} \cap X'$ τέτοιο ώστε $y\,R\,y'$.

ii. Έστω $x\,R\,x'$. Τότε, για κάθε $y' \in e'_{x'} \cap X'$, υπάρχει $y \in e_x \cap X$ τέτοιο ώστε $y\,R\,y'$.

iii. Αν $x\,R\,x'$, τότε $e_x \cap A = e'_{x'} \cap A$.

Λέμε ότι τα $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}'$ είναι *A-προσόμοια* (*bisimilar*) και γράφουμε $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$, αν υπάρχει σχέση A-προσομοίωσης μεταξύ τους που ικανοποιεί τα εξής

i. Για κάθε $x \in X$, υπάρχει $x' \in X'$ τέτοιο ώστε xRx'.

ii. Για κάθε $x' \in X'$, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε xRx'.

Παρατήρηση 2.5. Συνήθως παραλείπουμε το "A" και μιλάμε απλά για σχέση προσομοίωσης και προσόμοια σύνολα.

Ας γυρίσουμε πάλι στο παράδειγμα της αρχής της παραγράφου και ας ορίσουμε σχέση $R \subseteq X \times X'$, με

$$R = \{\langle x, x' \rangle, \langle y, y' \rangle, \langle z, y' \rangle, \langle w, y' \rangle\}.$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι αυτή η σχέση είναι $\{p\}$-προσομοίωση. Ας ελέγξουμε όμως κάποιες από τις συνθήκες για να βεβαιωθούμε. Έχουμε ότι $x\,R\,x'$. Καταρχάς ισχύει $e_x \cap A = e'_{x'} \cap A = \{p\}$. Επίσης έχουμε ότι $y \in e_x \cap X$, $y' \in e'_{x'} \cap X'$ και $y\,R\,y'$. Ομοίως $z \in e_x \cap X$, $y' \in e'_{x'} \cap X'$ και $z\,R\,y'$. Παρόμοια καλύπτονται όλες οι συνθήκες για κάθε ζεύγος στην R.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι δύο συστήματα που δείξαμε ότι έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων είναι προσόμοια. Τη σύνδεση αυτών των δύο γεγονότων φωτίζει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.4. *Έστω $\mathcal{E} = \langle X, A, e \rangle$ και $\mathcal{E}' = \langle X', A, e' \rangle$ επίπεδα συστήματα εξισώσεων με ίδιο σύνολο παραμέτρων $A \subseteq \mathcal{U}$. Τα $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων αν και μόνο αν είναι προσόμοια.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι τα $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}'$ έχουν ίδιο σύνολο λύσεων και έστω s και s' οι λύσεις τους αντίστοιχα. Ορίζουμε σχέση $R \subseteq X \times X'$ τέτοια ώστε

$$x\,R\,x' \text{ αν και μόνο αν } s_x = s'_{x'}.$$

Θα δείξουμε ότι η R είναι σχέση προσομοίωσης. Έστω xRx'. Εξ' ορισμού έχουμε $s_x = s'_{x'}$.

i. Έστω $y \in e_x \cap X$, τότε

$$\begin{aligned} s_y \in s_x = s'_{x'} &\Rightarrow s_y = s'_{y'}, \text{ για κάποιο } y' \in e'_{x'} \cap X' \\ &\Rightarrow y\,R\,y', \text{ για κάποιο } y' \in e'_{x'} \cap X'. \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $y \in e_x \cap X$, υπάρχει $y' \in e'_{x'} \cap X'$ τέτοιο ώστε

$$y\,R\,y'.$$

ii. Ομοίως με το (i), για κάθε $y' \in e'_{x'} \cap X'$, υπάρχει $y \in e_x \cup X$ τέτοιο ώστε

$$y\,R\,y'.$$

iii. Έχουμε ότι

$$p \in e_x \cap A \Leftrightarrow p \in s_x \cap A \Leftrightarrow p \in s'_{x'} \cap A \Leftrightarrow p \in e'_{x'} \cap A.$$

Άρα

$$e_x \cap A = e'_{x'} \cap A.$$

Δηλαδή, η R είναι σχέση προσομοίωσης και επομένως

$$\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'.$$

($\Leftarrow$) Έστω $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$ και R σχέση προσομοίωσης μεταξύ τους. Θα δείξουμε ότι

$$x\,R\,x' \Rightarrow s_x = s'_{x'}.$$

Αν το δείξουμε αυτό, τότε εύκολα προκύπτει ότι

$$\textit{solution-set}(\mathcal{E}) = \textit{solution-set}(\mathcal{E}').$$

Πράγματι, έστω $a \in \textit{solution-set}(\mathcal{E})$. Τότε

$$a = s_x, \text{ για κάποιο } x \in X.$$

Αφού η R είναι προσομοίωση, υπάρχει $x' \in X'$ τέτοιο ώστε

$$x\,R\,x'.$$

Άρα
$$s_x = s'_{x'}$$
και επομένως
$$a = s'_{x'} \in \textit{solution-set}(\mathcal{E}').$$
Άρα
$$\textit{solution-set}(\mathcal{E}) \subseteq \textit{solution-set}(\mathcal{E}').$$

Όμοια δείχνουμε ότι $\textit{solution-set}(\mathcal{E}') \subseteq \textit{solution-set}(\mathcal{E})$.

Μένει να δείξουμε λοιπόν ότι
$$x\,R\,x' \Rightarrow s_x = s'_{x'}.$$
Αυτό θα γίνει χρησιμοποιώντας την μοναδικότητα της λύσης ενός νέου συστήματος εξισώσεων $\mathcal{E}^*$.

Ορίζουμε $\mathcal{E}^* = \langle X^*, A, e^* \rangle$, όπου
$$X^* = \{\langle x, x' \rangle \in X \times X' \mid x\,R\,x'\}$$
και για κάθε $\langle x, x' \rangle \in X^*$,
$$e^*_{\langle x,x' \rangle} = \{\langle y, y' \rangle \in X^* \mid y \in e_x \text{ και } y' \in e'_{x'}\} \cup (e_x \cap A).$$

Θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις s^1 και s^2 που ορίζονται στο X^* με
$$s^1_{\langle x,x' \rangle} = s_x$$
και
$$s^2_{\langle x,x' \rangle} = s_{x'},$$
αποτελούν λύσεις του $\mathcal{E}^*$.

Αν το πετύχουμε αυτό, λόγω της μοναδικότητας της λύσης κάθε συστήματος εξισώσεων θα έχουμε ότι
$$s^1 = s^2,$$
δηλαδή ότι για κάθε $\langle x, x' \rangle \in X^*$,
$$s^1_{\langle x,x' \rangle} = s^2_{\langle x,x' \rangle},$$
ή ισοδύναμα ότι
$$\text{αν } \; x\,R\,x' \; \text{ τότε } \; s_x = s_{x'},$$

το οποίο είναι αυτό που θέλαμε.

Έστω λοιπόν $\langle x, x' \rangle \in X^*$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$s^1_{\langle x,x' \rangle} = \{s^1_{\langle y,y' \rangle} \mid \langle y, y' \rangle \in e^*_{\langle x,x' \rangle}\} \cup (e^*_{\langle x,x' \rangle} \cap A).$$

Έστω

$$a \in s^1_{\langle x,x' \rangle} = s_x.$$

Τότε, είτε $a = s_y$, για κάποιο $y \in e_x \cap X$, είτε $a \in e_x \cap A$.

Αν υπάρχει $y \in e_x \cap X$, τέτοιο ώστε $a = s_y$, τότε

$$\text{υπάρχει } \; y' \in e'_{x'} \cap X' \; \text{ τέτοιο ώστε } \; y \, R \, y',$$

δηλαδή

$$\langle y, y' \rangle \in X^*$$

και επομένως

$$a = s^1_{\langle y,y' \rangle} \in \{s^1_{\langle y,y' \rangle} \mid \langle y, y' \rangle \in e^*_{\langle x,x' \rangle}\}.$$

Αν πάλι $a \in e_x \cap A$, τότε εύκολα

$$a \in e^*_{\langle x,x' \rangle} \cap A.$$

Έστω τώρα ότι

$$a \in \{s^1_{\langle y,y' \rangle} \mid \langle y, y' \rangle \in e^*_{\langle x,x' \rangle}\} \cup (e^*_{\langle x,x' \rangle} \cap A),$$

τότε είτε $a = s^1_{\langle y,y' \rangle}$ για κάποιο $\langle y, y' \rangle \in e^*_{\langle x,x' \rangle}$ είτε $a \in e^*_{\langle x,x' \rangle} \cap A$.

Αν υπάρχει $\langle y, y' \rangle \in e^*_{\langle x,x' \rangle}$, τέτοιο ώστε $a = s^1_{\langle y,y' \rangle}$, τότε

$$a = s_y$$

και εφόσον $y \in e_x$, θα έχουμε και ότι

$$a = s_y \in s_x = s^1_{\langle x,x' \rangle}.$$

Αν πάλι $a \in e^*_{\langle x,x' \rangle} \cap A$,τότε προφανώς

$$a \in e_x \cap A \Rightarrow a \in s_x = s^1_{\langle x,x' \rangle}.$$

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι και η s^2 είναι λύση του $\mathcal{E}^*$. $\dashv$

Πόρισμα 2.5. *Η σχέση προσομοίωσης μεταξύ γενικευμένων επίπεδων συστημάτων εξισώσεων με ίδιο σύνολο παραμέτρων είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη.

- Αν $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$, τότε

$$\begin{aligned} & \textit{solution-set}(\mathcal{E}) = \textit{solution-set}(\mathcal{E}') \\ \Rightarrow\ & \textit{solution-set}(\mathcal{E}') = \textit{solution-set}(\mathcal{E}) \\ \Rightarrow\ & \mathcal{E}' \equiv \mathcal{E}. \end{aligned}$$

- Αν $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$ και $\mathcal{E}' \equiv \mathcal{E}''$, τότε

$$\begin{aligned} & \textit{solution-set}(\mathcal{E}) = \textit{solution-set}(\mathcal{E}') \\ \& \quad & \textit{solution-set}(\mathcal{E}') = \textit{solution-set}(\mathcal{E}) \\ \Rightarrow\ & \textit{solution-set}(\mathcal{E}') = \textit{solution-set}(\mathcal{E}'') \\ \Rightarrow\ & \mathcal{E} \equiv \mathcal{E}''. \end{aligned}$$

- $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}$, αφού $\textit{solution-set}(\mathcal{E}) = \textit{solution-set}(\mathcal{E})$. $\dashv$

2.8 Ισχυρή εκτατικότητα

Όσο η αντίληψή μας για τα καινούργια σύνολα του σύμπαντός μας διευρύνεται, γίνεται ολοένα και πιο καθαρό ότι θα πρέπει να παραιτηθούμε από ορισμένες συνήθειες του παλιού κόσμου της *ZFC*. Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα είναι αυτό της χρήσης του Αξιώματος Έκτασης ως κριτηρίου για το αν δύο σύνολα είναι ίσα ή όχι. Ο λόγος που αποτυγχάνει το συγκεκριμένο κριτήριο φάνηκε αρκετά καλά στις προηγούμενες παραγράφους. Το πρόβλημα είναι η κυκλικότητα που ενυπάρχει στους ορισμούς μερικών συνόλων. Για παράδειγμα, είναι αδύνατο να ελέγξουμε αν τα σύνολα

$$a = \{p, a\}$$

και

$$b = \{p, \{p, b\}\}$$

είναι ίσα ή όχι χρησιμοποιώντας το Αξίωμα Έκτασης. Γι' αυτό λοιπόν χρειαζόμαστε ένα καινούργιο κριτήριο. Φυσικά το κριτήριο αυτό δεν μπορεί παρά να βασίζεται στη σύγκριση των συστημάτων εξισώσεων από τα οποία προέκυψαν τα υπό σύγκριση σύνολα.

Παρατήρηση 2.6. Παρά το γεγονός ότι το Αξίωμα Έκτασης αποτυγχάνει να μας δώσει ένα αξιόπιστο κριτήριο ισότητας συνόλων, δεν πρέπει αυτό να μας παρασύρει στο εσφαλμένο συμπέρασμα ότι το αξίωμα δεν ισχύει. Ήταν βασικό μας αίτημα από την αρχή η διατήρηση της ισχύος όλων των αξιωμάτων της ZFC^-. Είναι επίσης σημαντικό να τονιστεί ότι πολύ συχνά το Αξίωμα Έκτασης προσφέρει ένα πολύ εύκολο κριτήριο ανισότητας. Για παράδειγμα, τα σύνολα

$$a = \{p, \{a\}\}$$

και

$$b = \{q, \{b\}\}, \text{ όπου } p, q \in \mathcal{U} \text{ και } p \neq q,$$

δεν είναι ίσα γιατί ακριβώς δεν έχουν τα ίδια στοιχεία.

Ορισμός 2.9. *Σχέση προσομοίωσης συνόλων* (*bisimulation relation on sets*) R είναι κάθε διμελής σχέση η οποία ικανοποιεί τα εξής

Αν $a\,R\,b$, τότε

i. Για κάθε $c \in a$, υπάρχει σύνολο $d \in b$ τέτοιο ώστε $c\,R\,d$.

ii. Για κάθε $d \in b$, υπάρχει σύνολο $c \in a$ τέτοιο ώστε $c\,R\,d$.

iii. $a \cap \mathcal{U} = b \cap \mathcal{U}$.

Θα λέμε ότι τα *σύνολα* a και b είναι *προσόμοια* αν υπάρχει σχέση προσομοίωσης συνόλων R τέτοια ώστε $a\,R\,b$.

Παράδειγμα 2.1. Έστω $p \in \mathcal{U}$,

$$a = \{p, a\}$$

και

$$b = \{p, \{p, \{p, b\}\}\}.$$

Έστω τώρα

$$R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, \{p, \{p, b\}\}\rangle\}.$$

Η R είναι προφανώς μία σχέση προσομοίωσης συνόλων τέτοια ώστε $a\,R\,b$.

Θεώρημα 2.6 (Θεώρημα Ισχυρής Εκτατικότητας - Strong Extensionality). *Έστω I η ταυτοτική σχέση στα σύνολα, δηλαδή $I = \{\langle a, a\rangle \mid a \text{ σύνολο}\}$. Η I είναι η μεγαλύτερη σχέση προσομοίωσης συνόλων. Δηλαδή*

i. *Η I είναι σχέση προσομοίωσης συνόλων.*

ii. *Αν η R είναι σχέση προσομοίωσης συνόλων, τότε η R είναι υποσχέση της ταυτοτικής, δηλαδή αν $a\,R\,b$ τότε $a = b$.*

Απόδειξη. Το (i) προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της προσομοίωσης. Μένει λοιπόν να δείξουμε το (ii).

Έστω R σχέση προσομοίωσης συνόλων και έστω $a\,R\,b$. Θα δείξουμε ότι $a = b$. Έστω λοιπόν $\mathcal{E}_a = \langle X_a, A_a, e_a \rangle$ και $\mathcal{E}_b = \langle X_b, A_b, e_b \rangle$ τα κανονικά γενικευμένα συστήματα εξισώσεων των a και b αντίστοιχα.

Ο στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός R' της R στο $X_a \times X_b$ είναι σχέση προσομοίωσης μεταξύ των $\mathcal{E}_a$ και $\mathcal{E}_b$. Αν το καταφέρουμε αυτό, τότε θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a &= s_a && \text{(η ταυτοτική συνάρτηση στο } X_a \text{ είναι λύση του } \mathcal{E}_a) \\ &= s_b && \text{(τα } \mathcal{E}_a \text{ και } \mathcal{E}_b \text{ είναι προσόμοια)} \\ &= b. && \text{(η ταυτοτική συνάρτηση στο } X_b \text{ είναι λύση του } \mathcal{E}_b) \end{aligned}$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι η R' είναι προσομοίωση μεταξύ των $\mathcal{E}_a$ και $\mathcal{E}_b$.

- Καταρχάς πρέπει να δείξουμε ότι $A_a = A_b$. Έστω

$$p \in A_a = support(a).$$

Τότε υπάρχει $a' \in trcl(\{a\})$, τέτοιο ώστε $p \in a'$. Υπάρχει επίσης πεπερασμένη ακολουθία $\{a_i\}$ τέτοια ώστε

$$a' = a_n \in a_{n-1} \in \cdots \in a_1 \in a_0 = a.$$

Γνωριζουμε όμως ότι $a\,R\,b$, άρα

$$\text{υπάρχει } b_1 \in b_0 = b, \text{ τέτοιο ώστε, } a_1\,R\,b_1.$$

Με ίδιο τρόπο παίρνουμε ότι,

$$\text{για κάθε } i \leq n, \text{ υπάρχει } b_i, \text{ τέτοιο ώστε, } a_i\,R\,b_i,$$

δηλαδή υπάρχει ακολουθία $\{b_i\}$ τέτοια ώστε

$$b' = b_n \in b_{n-1} \in \cdots \in b_1 \in b_0 = b$$

και

$$a' \, R \, b'.$$

Επομένως

$$p \in a' \cap \mathcal{U} = b \cap \mathcal{U} \Rightarrow p \in b' \Rightarrow p \in support(b) = A_b.$$

Δηλαδή

$$A_a \subseteq A_b.$$

Με όμοιο τρόπο παίρνουμε και ότι $A_b \subseteq A_a$.

- Έστω τώρα

$$Y = \{x \in X_a \mid x \, R' \, x' \text{ για κάποιο } x' \in X_b\}.$$

Αν δείξουμε ότι $Y = X_a$, τότε θα έχουμε ότι, για κάθε $x \in X_a$, υπάρχει $x' \in X_b$ τέτοιο ώστε $x \, R' \, x'$.

Έχουμε ότι

$$a \in Y,$$

γιατί $a \, R \, b$ και $b \in X_b$.

Επίσης εύκολα παίρνουμε ότι το Y είναι μεταβατικό. Έστω $x \in Y$ και $y \in x$. Τότε υπάρχει $x' \in X_b$ τέτοιο ώστε $x \, R x'$. Άρα αφού $y \in x$, από τον ορισμό της προσομοίωσης συνόλων θα έχουμε ότι υπάρχει $y' \in x'$ τέτοιο ώστε yRy'. Επομένως

$$x' \in X_b,$$

μιας και το X_b είναι μεταβατικό.

Το Υ είναι λοιπόν μεταβατικό και περιέχει το a ως στοιχείο, επομένως

$$\begin{gathered} X_a = trcl(\{a\}) \subseteq Y \subseteq X_a \\ \Rightarrow Y = X_a. \end{gathered}$$

Όμοια δείχνεται ότι, για κάθε $x' \in X_b$, υπάρχει $x \in X_a$ τέτοιο ώστε $x \, R' \, x'$.

- Έστω $x \, R' \, y$ και έστω $x' \in (e_a)_x \cap X_a$. Τότε

$$x' \in x \cap X_a,$$

αφού $(e_a)_x = x$. Δηλαδή το x' είναι σύνολο και επομένως υπάρχει $y' \in y$ τέτοιο ώστε $x' \, R y'$, αφού R είναι προσομοίωση συνόλων. Από τη μεταβατικότητα του X_b, παίρνουμε ότι $y' \in X_b$, οπότε

$$y' \in (e_a)_y \cap X_b$$

και άρα
$$x' \, R' \, y'.$$

Όμοια προκύπτει και η συμμετρική συνθήκη στον ορισμό της προσομοίωσης.

- Έστω $x \, R' \, y$. Τότε
$$x \cap \mathcal{U} = y \cap \mathcal{U}.$$

Όμως $x \cap \mathcal{U} \subseteq A$ και $y \cap \mathcal{U} \subseteq A$. Άρα
$$(e_a)_x \cap A = x \cap A = x \cap \mathcal{U} = y \cap \mathcal{U} = y \cap \mathcal{A} = (e_b)_y \cap A. \qquad \dashv$$

2.9 Τελεστής αντικατάστασης

Η αδυναμία της έννοιας του επίπεδου συστήματος να περιγράφει με άμεσο τρόπο σχέσεις στις οποίες περιλαμβάνονται κατασκευές που συναντάμε συχνά στην συνολοθεωρία, αποτελεί ίσως το αντίτιμο με το οποίο έπρεπε να πληρώσουμε την απλότητα του Λήμματος Επίλυσης. Στην πράξη η αδυναμία αυτή αποδεικνύεται ιδιαίτερα ενοχλητική και μάλιστα ως ένα βαθμό καταστροφική για τη διαίσθηση. Αυτό φαίνεται καλύτερα από το παρακάτω σύστημα

$$(\mathcal{E}) \qquad \begin{aligned} x &= \{\langle y, \Omega \rangle, z\} \\ y &= \{z, 2\} \\ z &= \langle p, x \rangle, \end{aligned}$$

όπου p είναι παράμετρος.

Θα ήταν σίγουρα πολύ βολικό και διαισθητικά γόνιμο να είμαστε ικανοί να επικαλούμαστε άμεσα το Λήμμα Επίλυσης για συστήματα εξισώσεων όπως το $\mathcal{E}$. Αυτό δυστυχώς δεν μπορεί να γίνει γιατί το $\mathcal{E}$ δεν είναι επίπεδο. Ακόμα όμως και να μπορούσαμε να το κάνουμε αυτό, παραμένει ένα ερώτημα. Πώς θα ήταν άραγε οι λύσεις του $\mathcal{E}$; Για να το δούμε αυτό θα πρέπει να το μετατρέψουμε όπως πάντα σε ένα επίπεδο σύστημα εξισώσεων ως εξής

$$(\mathcal{E}') \qquad \begin{aligned} x &= \{x_0, z\} \\ x_0 &= \{x_1, x_2\} \\ x_1 &= \{y\} \\ x_2 &= \{y, x_3\} \\ x_3 &= \{x_3\} \\ y &= \{z, y_2\} \\ y_2 &= \{y_1, y_0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \{y_0\} \\ y_0 &= \emptyset \\ z &= \{z_1, z_2\} \\ z_1 &= \{p\} \\ z_2 &= \{p, x\}. \end{aligned}$$

Καταρχάς, ακόμα και το μέγεθος του νέου συστήματος μας δείχνει πόσο δύσχρηστη είναι αυτή η μέθοδος και πόσο επιτακτική είναι η ανάγκη ενός θεωρήματος που θα χειριζόταν τέτοιες περιπτώσεις. Παρόλα αυτά προς το παρόν πρέπει να αρκεστούμε στα μέχρι τώρα γνωστά μας αποτελέσματα με στόχο τη διασάφηση του προβλήματος. Από την μετατροπή του συστήματος $\mathcal{E}$ σε $\mathcal{E}'$ και έχοντας στο μυαλό μας τις αντιστοιχίες των μεταβλητών παίρνουμε ότι

$$s_x^{\mathcal{E}} = s_x^{\mathcal{E}'},\ \ s_y^{\mathcal{E}} = s_y^{\mathcal{E}'},\ \ s_z^{\mathcal{E}} = s_z^{\mathcal{E}'}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} s_{\langle y,\Omega\rangle}^{\mathcal{E}} &= s_{x_0}^{\mathcal{E}'} \\ &= \{s_{x_1}^{\mathcal{E}'}, s_{x_2}^{\mathcal{E}'}\} \\ &= \{\{s_y^{\mathcal{E}'}\}, \{s_y^{\mathcal{E}'}, \Omega\}\} \\ &= \langle s_y^{\mathcal{E}'}, \Omega\rangle \\ &= \langle s_y^{\mathcal{E}}, \Omega\rangle, \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} s_x^{\mathcal{E}} &= \{s_{\langle y,\Omega\rangle}^{\mathcal{E}}, s_z^{\mathcal{E}}\} \\ &= \{\langle s_y^{\mathcal{E}}, \Omega\rangle, s_z^{\mathcal{E}}\}, \end{aligned}$$

ενώ επίσης

$$\begin{aligned} s_y^{\mathcal{E}} &= \{s_z^{\mathcal{E}}, s_2^{\mathcal{E}}\} \\ &= \{s_z^{\mathcal{E}}, 2\}, \end{aligned}$$

αφού

$$\begin{aligned} s_2^{\mathcal{E}} &= s_{y_2}^{\mathcal{E}'} \\ &= \{s_{y_1}^{\mathcal{E}'}, s_{y_2}^{\mathcal{E}'}\} \\ &= \{\{0\}, 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{1, 0\} \\ &= 2, \end{aligned}$$

και τέλος

$$\begin{aligned} s_z^{\mathcal{E}} &= s_z^{\mathcal{E}'} \\ &= \{s_{z_1}^{\mathcal{E}'}, s_{z_2}^{\mathcal{E}'}\} \\ &= \{\{p\}, \{p, s_x^{\mathcal{E}'}\}\} \\ &= \langle p, s_x^{\mathcal{E}'} \rangle = \langle p, s_x^{\mathcal{E}} \rangle. \end{aligned}$$

Δηλαδή συνοπτικά η λύση του $\mathcal{E}$ είναι

$$\begin{aligned} s_x^{\mathcal{E}} &= \{\langle s_y^{\mathcal{E}}, \Omega \rangle, s_z^{\mathcal{E}}\} \\ s_y^{\mathcal{E}} &= \{s_z^{\mathcal{E}}, 2\} \\ s_z^{\mathcal{E}} &= \langle p, s_x^{\mathcal{E}} \rangle. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η διαδικασία επίλυσης άφησε αναλλοίωτα τα Ω, 2, p και το διατεταγμένο ζεύγος, ενώ αντικατέστησε "μέσα" στα x, y, z όλα τα υπόλοιπα με το αντίστοιχό τους κατά την s.

Αυτό είναι ίσως ένα καλό σημείο να απομονώσουμε και να γενικεύσουμε τις παρατηρήσεις μας δίνοντας μερικούς ορισμούς.

Ορισμός 2.10. *Γενικό σύστημα εξισώσεων* (*General system of equations*) καλούμε κάθε διατεταγμένη τριάδα $\mathcal{E} = \langle X, A, e \rangle$, όπου X και A είναι σύνολα τέτοια ώστε $X \subseteq \mathcal{U}$, $A \subseteq \mathcal{U}$ και $X \cap A = \emptyset$ και e είναι συνάρτηση από το X στο $V_{afa}[X \cup A]$.

Ορισμός 2.11. *Αντικατάσταση* (*Substitution*) είναι κάθε συνάρτηση s με πεδίο ορισμού σύνολο ατόμων. *Τελεστής αντικατάστασης* (*Substitution operation*) είναι κάθε τελεστής sub, του οποίου το πεδίο ορισμού είναι κλάση από διατεταγμένα ζεύγη $\langle s, b \rangle$, όπου s είναι αντικατάσταση και $b \in \mathcal{U} \cup V_{afa}[\mathcal{U}]$, τέτοιος ώστε να ισχύουν τα εξής

i. Αν $x \in \operatorname{dom} s$, τότε $sub(s, x) = s_x$.

ii. Αν $x \in \mathcal{U} \setminus \operatorname{dom} s$ τότε $sub(s, x) = x$.

iii. Για κάθε $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$, $sub(s, a) = \{sub(s, b) \mid b \in a\}$.

Παρατήρηση 2.7. 1. Η βασική διαφοροποίηση της έννοιας του γενικού συνόλου εξισώσεων από αυτής του επίπεδου είναι ότι οι εξισώσεις πλέον μπορούν να περιέχουν σύνολα του $V_{afa}[X \cup A]$, δηλαδή σύνολα που προκύπτουν ως λύσεις από άλλα συστήματα εξισώσεων. Για παράδειγμα, το $\mathcal{E}$ που ορίσαμε στην αρχή της παραγράφου είναι ένα απόλυτα νόμιμο γενικό σύστημα εξισώσεων.

2. Ο λόγος που δεν επιτρέψαμε η e να παίρνει και ως τιμές άτομα, είναι για να αποφευχθούν προβληματικές καταστάσεις όπως οι

$$e_x = x, \text{ με } x \in X,$$

ή

$$e_x = p, \text{ με } p \in A,$$

μιας και στην πρώτη περίπτωση δε θα είχαμε μοναδικότητα της λύσης, ενώ στη δεύτερη η λύση θα ήταν αδύνατη αφού για κανένα σύνολο δεν ισχύει $s_x = p \in \mathcal{U}$.

3. Ο λόγος που χρησιμοποιήσαμε ίδιο συμβολισμό για λύσεις συστημάτων και αντικαταστάσεις, είναι γιατί όπως θα δούμε παρακάτω κάθε λύση συστήματος είναι μία αντικατάσταση.

Σημείωση. Όπως θα δούμε παρακάτω από το βασικό μας θεώρημα προκύπτει ότι υπάρχει ένας και μοναδικός τελεστής αντικατάστασης sub. Θα γράφουμε λοιπόν $a[s]$ αντί για $sub(s, a)$, μιας και δε θα υπάρχει κάποια ασάφεια ως προς το ποιόν συγκεκριμένο τελεστή αντικατάστασης εννοούμε.

Επίσης για κάθε αντικατάσταση s, θα συμβολίζουμε με $[s]$ τον τελεστή για τον οποίο ισχύει

$$a[s] = sub(s, a), \text{ για κάθε } a \in V_{afa}[\mathcal{U}] \cup \mathcal{U}.$$

Με αυτό το συμβολισμό λοιπόν έχουμε ότι

$$a[s] = \begin{cases} s_a, & \text{αν } a \in dom(s) \\ a, & \text{αν } a \in \mathcal{U} \setminus dom(s) \\ \{b[s] \mid b \in a\}, & \text{αν } a \in V_{afa}[\mathcal{U}]. \end{cases}$$

Η έννοια της αντικατάστασης που μόλις ορίσαμε κάνει πιο εύκολο το έργο της περιγραφής της επίλυσης του συστήματος $\mathcal{E}$. Η λύση s μπορεί να ειδωθεί ως μία συνάρτηση η οποία αντικαθιστά τα x, y, z διατρέχοντας "κατά βάθος" τις εξισώσεις e_x, e_y, e_z (Σχήμα 2.1). Η διαδικασία αυτή αποτελεί μια καλή περιγραφή του τρόπου με τον οποίο οδηγούμαστε στην λύση ενός συστήματος εξισώσεων. Φανερώνει μάλιστα και ένα προβληματικό σημείο στο οποίο θα πρέπει να σταθούμε. Επειδή ακριβώς το Ω είναι μη εδραιωμένο απαιτούνται άπειρα βήματα "αναδρομής" ώστε να φτάσουμε στην ολοκλήρωση της επίλυσης. Αυτό ακριβώς είναι και το βασικό πρόβλημα που πρέπει να αντιμετωπίσουμε για να αποδείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα του τελεστή αντικατάστασης sub. Αν ήμασταν περιορισμένοι

$$
\begin{array}{c}
s_x = x[s] \\
\Big\downarrow \; \text{(ορισμός της } e_x\text{)} \\
\Big\{ \langle y, \Omega \rangle \, , \, z \Big\}[s] \\
\Big\downarrow \; \text{(ορισμός διατ. ζεύγους)} \\
\bigg\{ \Big\{ \{y\} \, , \, \{y \, , \, \Omega\} \Big\} \, , \, z \bigg\}[s] \\
\Big\downarrow \; \text{(ιδιότητα (iii) του } sub\text{)} \\
\bigg\{ \Big\{ \{y\} \, , \, \{y \, , \, \Omega\} \Big\}[s] \, , \, z[s] \bigg\} \\
\Big\downarrow \; \text{(ιδιότητες (iii) και (i) του } sub\text{)} \\
\bigg\{ \Big\{ \, \{y\}[s] \, , \, \{y \, , \, \Omega\}[s] \, \Big\} \, , \, s_z \bigg\} \\
\Big\downarrow \; \text{(ιδιότητες (iii) του } sub\text{)} \\
\bigg\{ \Big\{ \, \{y[s]\} \, , \, \{ \, y[s] \, , \, \Omega[s] \, \} \, \Big\} \, , \, s_z \bigg\} \\
\Big\downarrow \; \text{(ιδιότητες (iii) και (i) του } sub\text{)} \\
\bigg\{ \Big\{ \, \{s_y\} \, , \, \{ \, s_y \, , \, \{\Omega[s]\} \, \} \, \Big\} \, , \, s_z \bigg\} \\
\Big\downarrow \; \text{(ιδιότητα (iii) του } sub\text{)} \\
\bigg\{ \Big\{ \, \{s_y\} \, , \, \{ \, s_y \, , \, \{ \, \{\Omega[s]\} \, \} \, \} \, \Big\} \, , \, s_z \bigg\} \\
\Big\downarrow \\
\vdots \\
\Big\downarrow \; \text{(ιδιότητα (iii) του } sub\text{)} \\
\bigg\{ \Big\{ \, \{s_y\} \, , \, \{ \, s_y \, , \, \{ \, \{ \ldots \} \, \} \, \} \, \Big\} \, , \, s_z \bigg\} \\
\| \\
\bigg\{ \Big\{ \, \{s_y\} \, , \, \{ \, s_y \, , \, \Omega \, \} \, \Big\} \, , \, s_z \bigg\} \\
\Big\downarrow \; \text{(ορ. διατ. ζεύγους)} \\
\Big\{ \, \langle s_y \, , \, \Omega \rangle \, , \, s_z \, \Big\}.
\end{array}
$$

Σχήμα 2.1: Λειτουργία *sub*.

στο σύμπαν των εδραιωμένων συνόλων, το έργο μας θα ήταν εύκολο μιας και η αναδρομή μας θα είχε πάντα κάποια βάση. Τώρα όμως, όπως φαίνεται και στην περίπτωση του Ω δεν μπορούμε να επικαλεστούμε κάτι ανάλογο

$$\begin{aligned} sub(\Omega, s) &= sub(\{\Omega\}, s) \\ &= \{sub(\Omega, s)\} \\ &= \{sub(\{\Omega\}, s)\} \\ &= \dots \\ &= \{\{\dots\{sub(\Omega, s)\}\dots\}\} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Το πώς αντιμετωπίζουμε το παραπάνω πρόβλημα ορισμού του sub φαίνεται από την απόδειξη του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 2.7 (Θεώρημα Τελεστή Αντικατάστασης). *Υπάρχει μοναδικός τελεστής αντικατάσταση $sub(s, b)$, ο οποίος ορίζεται για όλα τα ζεύγη $\langle s, b\rangle$ για τα οποία $\mathrm{dom}\, s \subseteq \mathcal{U}$ και $b \in V_{afa}[\mathcal{U}]$*

Απόδειξη. *Ύπαρξη τελεστή sub.* Έστω $Subst$ η κλάση όλων των συναρτήσεων αντικατάστασης. Ορίζουμε τελεστή $sub : Subst \times (\mathcal{U} \cup V_{afa}[\mathcal{U}])$ τέτοιο ώστε για κάθε αντικατάσταση s και $b \in \mathcal{U} \cup V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$sub(s, b) = \begin{cases} b, & \text{αν } b \in \mathcal{U} \setminus \mathrm{dom}\, s \\ s_b, & \text{αν } b \in \mathrm{dom}\, s \\ sol_b(b), & \text{αν } b \in V_{afa}[\mathcal{U}], \end{cases}$$

όπου sol είναι η μοναδική λύση του γενικευμένου επίπεδου συστήματος εξισώσεων $\mathcal{E}^b = \langle X, A, e\rangle$ που ορίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} X &= trcl(\{b\} \cup \mathrm{ran}\, s) \setminus \mathcal{U} \\ A &= trcl(\{b\} \cup \mathrm{ran}\, s) \cap \mathcal{U} \end{aligned}$$

και για κάθε $x \in X$,

$$e_x = \{s_y \mid y \in x \cap \mathrm{dom}\, s\} \cup \{y \mid y \in x \cap (A \setminus \mathrm{dom}\, s)\} \cup (x \cap X).$$

Θα δείξουμε ότι ο sub πληροί τις προϋποθέσεις ενός τελεστή αντικατάστασης. Σαφώς το πεδίο ορισμού και οι συνθήκες (i) και (ii) συμφωνούν με τον ορισμό.

Μένει λοιπόν η συνθήκη (iii).

Έστω $b \in V_{afa}[\mathcal{U}]$ και αντικατάσταση s, τότε

$$\begin{aligned}
sub(s,b) &= sol_b(b) \\
&= \{s_x \mid x \in b \cap dom\, s\} \cup \{x \mid x \in b \cap (A \setminus dom\, s)\} \cup \\
&\qquad \cup \{sol_b(c) \mid c \in b \cap X\} \\
&= \{sub(s,x) \mid x \in b \cap dom\, s\} \cup \\
&\qquad \cup \{sub(s,x) \mid x \in b \cap (A \setminus dom\, s)\} \cup \\
&\qquad \cup \{sub(s,c) \mid c \in b \cap X\} \\
&= \{sub(s,c) \mid c \in b\}.
\end{aligned}$$

Στις παραπάνω ισότητες χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του sub από τον οποίο προκύπτει άμεσα ότι για $x \in b \cap dom\, s$, $sub(s,x) = s_x$ και για $x \in b \cap (A \setminus dom\, s)$, $sub(s,x) = x$. Επίσης η τρίτη ισότητα δικαιολογείται από το ότι, για κάθε $c \in b \cap X$, το $\mathcal{E}^c$ είναι υποσύστημα εξισώσεων του $\mathcal{E}^b$, επομένως η λύση sol_c του $\mathcal{E}^c$ περιλαμβάνεται στην λύση sol_b του $\mathcal{E}^b$ και επομένως

$$sol_c(c) = sol_b(c) = sub(s,c).$$

Μοναδικότητα τελεστή sub. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει τελεστής sub' που πληροί όπως και ο sub όλες τις προυποθέσεις του ορισμού. Θα δείξουμε ότι

$$sub' = sub\,.$$

Έστω s αντικατάσταση και R η παρακάτω σχέση

$$R = \{\langle sub(s,b), sub'(s,b)\rangle \mid b \in \mathcal{U} \cup V_{afa}[\mathcal{U}]\}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι ο περιορισμός της R σε σύνολα είναι σχέση προσομοίωσης.

Έστω $b \in V_{afa}[\mathcal{U}]$.

- Έστω

$$X \in \mathcal{U} \cap sub(s,b),$$

τότε, αφού b σύνολο, από την ιδιότητα (iii) του ορισμού του τελεστή αντικατάστασης sub έχουμε ότι

$$X = sub(s,y), \text{ για κάποιο } y \in b \cap \mathcal{U}.$$

Άρα
$$X = sub(s, y) = s_y = sub'(s, y) \in sub'(s, b),$$
πάλι από την ιδιότητα (iii) για τον sub'. Άρα
$$\mathcal{U} \cap sub(s, b) \subseteq \mathcal{U} \cap sub'(s, b)$$
και ομοίως δείχνουμε ότι $\mathcal{U} \cap sub'(s, b) \subseteq \mathcal{U} \cap sub(s, b)$.

- Έστω τώρα
$$c \in sub(s, b) \setminus \mathcal{U}\,.$$
Εφόσον το b είναι σύνολο, έχουμε ότι
$$c = sub(s, d) \ \text{ για κάποιο } \ d \in b$$
και άρα
$$\langle c, sub'(s, d)\rangle \in .R$$
Όμοια δείχνουμε και την συμμετρική συνθήκη.

Άρα για κάθε σύνολο b,
$$sub(s, b) = sub'(s, b)$$
και επομένως
$$sub = sub'$$
(αφού προφανώς για $b \in \mathcal{U}$, $sub(s, b) = sub'(s, b)$). $\dashv$

Παρατήρηση 2.8. 1. Η απόδειξη αυτή δείχνει αρκετά χαρακτηριστικά του τρόπου με τον οποίο δουλεύουμε στο σύμπαν $V_{afa}[\mathcal{U}]$. Για παράδειγμα είδαμε ότι για την απόδειξη ισότητας δύο τελεστών πρέπει να κατασκευάσουμε κάποια προσομοίωση μεταξύ τους. Σημαντικό σημείο της απόδειξης επίσης είναι αυτό του ρητού ορισμού του τελεστή sub, στο οποίο φαίνεται πώς αντικαθίσταται η συνηθισμένη αναδρομή με αυτό που θα ονομάζουμε "συναναδρομή". Μάλιστα τις συνθήκες (i) – (iii) στον Ορισμό 2.11 (σελ. 30) του τελεστή αντικατάστασης θα τις καλούμε "συνθήκες συναναδρομής". Με τη βοήθεια του AFA μπορούμε να ορίζουμε μη εδραιωμένα σύνολα τα οποία πληρούν κάποιες "συνθήκες συναναδρομής" χρησιμοποιώντας ακριβώς το γεγονός ότι κάθε σύστημα εξισώσεων που περιγράφει αυτές τις συνθήκες έχει λύση.

2. Η "επιπεδοποίηση" που περιγράψαμε ως τώρα σε διάφορα συστήματα εξισώσεων φαίνεται καθαρά στον ορισμό του sol_b. Να σημειώσουμε εδώ ότι ο λόγος που αυτή η διαδικασία πετυχαίνει στηρίζεται και στον περιορισμό που θέσαμε αρχικά στην έννοια του γενικού συστήματος εξισώσεων. Δηλαδή στο ότι το σύνολο μεταβλητών X αποτελείται μόνο από άτομα. Για να δούμε γιατί το αντίθετο θα αποτελούσε σοβαρό εμπόδιο ας θεωρήσουμε σύστημα $\mathcal{E} = \langle 2, \emptyset, e\rangle$ όπου $e_0 = 1$. Έστω λοιπόν s αντικατάσταση τέτοια ώστε $s(0) = 0$ και $s(1) = 0$. Τότε έχουμε

$$e_0[s] = 1[s] = s(1) = 0$$

και

$$e_0[s] = 1[s] = \{0[s]\} = \{s(0)\} = \{0\} = 1.$$

Δηλαδή

$$e_0[s] \neq e_0[s].$$

2.10 Άλγεβρα αντικαταστάσεων

Θα θέλαμε παρενθετικά σε αυτή την παράγραφο να αναφέρουμε μερικά αποτελέσματα γύρω από την άλγεβρα των αντικαταστάσεων. Αυτά θα τα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να δώσουμε μία ακόμα εύχρηστη ισοδύναμη μορφή του Λήμματος Επίλυσης, αλλά και για να εκφράσουμε επίσης πιο κομψά μερικές ιδιότητες τελεστών συνόλων στο επόμενο κεφάλαιο.

Γνωρίζουμε ότι οι αντικαταστάσεις είναι συναρτήσεις ορισμένες σε υποσύνολα του $\mathcal{U}$. Επομένως γενικά αν t, s αντικαταστάσεις και για κάποιο $p \in \mathcal{U}$, $s(p) \notin \mathcal{U}$, προφανώς η σύνθεση $(t \circ s)p$ δεν ορίζεται. Η κλασική σύνθεση συναρτήσεων λοιπόν δεν μας βοηθάει πάντα στο να συνδυάζουμε αντικαταστάσεις. Γι' αυτό το λόγο οδηγούμαστε στους παρακάτω ορισμούς εναλλακτικών "συνθέσεων".

Ορισμός 2.12. Έστω t, s αντικαταστάσεις.

i. Ορίζουμε $t \star s$ να είναι η αντικατάσταση με πεδίο ορισμού το πεδίο ορισμού της s και για την οποία ισχύει ότι για κάθε $x \in dom(s)$,

$$(t \star s)_x = s_x[t].$$

ii. Ονομάζουμε *συμπεδίο ορισμού* (*codomain*) της s, το σύνολο

$$codom(s) = support(ran(s))$$

και στην περίπτωση που $codom(s) \subseteq dom(t)$ ορίζουμε $t \cdot s$ να είναι η αντικατάσταση με πεδίο ορισμού το πεδίο ορισμού της s και για την οποία ισχύει ότι για κάθε $x \in dom(s)$,

$$(t \cdot s)_x = s_x[t].$$

Παρατήρηση 2.9. 1. Έστω t, s αντικαταστάσεις τέτοιες ώστε

$$ran(s) \subseteq dom(t).$$

Τότε η σύνθεση $t \circ s$ ορίζεται και μάλιστα για κάθε $x \in dom(s)$,

$$\begin{aligned}(t \circ s)_x &= t(s_x) \\ &= s_x[t] && (s_x \in \mathcal{U}) \\ &= (t \star s)_x \\ &= (t \cdot s)_x,\end{aligned}$$

όπου $(t{\cdot}s)_x$ ορίζεται αφού $support(ran(s)) = ran(s) \subset dom(t)$. Άρα οι εναλλακτικές "συνθέσεις" μας είναι συνεπείς επεκτάσεις της κλασικής συνολοθεωρητικής σύνθεσης.

2. Έστω t, s αντικαταστάσεις με

$$ran(s) \subseteq V_{afa}\,.$$

Τότε για κάθε $x \in dom(s)$,

$$(t \star s)_x = (t \cdot s)_x = s_x,$$

όπου $t \cdot s$ ορίζεται μιας και $support(ran(s)) = \emptyset \subseteq dom(t)$. Άρα η $\star$ έχει πολλά δεξιά μοναδιαία στοιχεία.

3. Η $\cdot$ δείχνεται εύκολα ότι είναι προσεταιριστική (όταν ορίζεται).

4. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η "σύνθεση" $\star$ ορίζεται για κάθε ζεύγος αντικαταστάσεων αντίθετα με την $\cdot$ που ορίζεται υπό προϋποθέσεις. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιούμε κυρίως την πρώτη την οποία και θα καλούμε απλά *σύνθεση αντικαταστάσεων*.

Οι παρακάτω ιδιότητες της $\star$ θα μας φανούν χρήσιμες στη συνέχεια.

Πρόταση 2.8. *Έστω u, t, s αντικαταστάσεις.*

i. *Αν $dom(t) \subseteq dom(s)$, τότε*

$$[t \star s] = [t] \circ [s].$$

ii. *Αν $dom(u) \subseteq dom(t)$, τότε*

$$u \star (t \star s) = (u \star t) \star s.$$

iii. *Η κενή αντικατάσταση $i = \emptyset$ είναι το αριστερό μοναδικό στοιχείο της $\star$ και είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. i. Έστω $p \in \mathcal{U}$.

- Αν $p \in dom(s)$, τότε

$$\begin{aligned}p[t \star s] &= s_p[t] \\ &= (p[s])[t] \\ &= ([t] \circ [s])(p).\end{aligned}$$

- Αν $p \notin dom(s)$ τότε $p \notin dom(t)$, οπότε

$$\begin{aligned} p[t \star s] &= p \\ &= p[s] \\ &= (p[s])[t] \\ &= ([t] \circ [s])(p). \end{aligned}$$

Άρα $[t \star s]$ και $[t] \circ [s]$ συμφωνούν στα άτομα.

Έστω τώρα σχέση R τέτοια ώστε

$$R = \{\langle a[t \star s], ([t] \circ [s])(a) \rangle \mid a \in V_{afa}[\mathcal{U}]\}.$$

Η R είναι αρκετά εύκολο να δείξουμε ότι είναι προσομοίωση σε σύνολα και επομένως

$$[t \star s] = [t] \circ [s].$$

ii. Προφανώς οι αντικαταστάσεις $u \star (t \star s)$ και $(u \star t) \star s$ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $dom(s)$. Έστω τώρα $x \in dom(s)$. Τότε

$$\begin{aligned} (u \star (t \star s))_x &= (t \star s)_x[u] && \text{(ορισμός } \star) \\ &= (s_x[t])[u] && \text{(ορισμός } \star) \\ &= s_x[u \star t] && \text{(από (i))} \\ &= ((u \star t) \star s)_x && \text{(ορισμός } \star). \end{aligned}$$

iii. Για κάθε $a \in V_{afa}[U]$ ισχύει

$$a[i] = a,$$

οπότε $i \star s = s$ για οποιαδήποτε αντικατάσταση s και επομένως η i είναι αριστερό μοναδιαίο στοιχείο της $\star$.

Έστω τώρα s αντικατάσταση τέτοια ώστε $s \neq i$. Τότε υπάρχει $x \in \mathcal{U}$ για το οποίο ισχύει $s_x \neq x$. Έστω t αντικατάσταση με $dom(t) = \{x\}$ και $t_x = x$. Τότε

$$(s \star t)_x = s_x \neq x.$$

Άρα η i είναι μοναδικό αριστερό μοναδιαίο στοιχείο. $\dashv$

Παρατήρηση 2.10. Η $i = \emptyset$ δεν είναι δεξιό μοναδιαίο στοιχείο της $\star$, αφού για κάθε αντικατάσταση s έχουμε $s \star i = i$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι αντικαταστάσεις που παίρνουν σύνολα ως τιμές. Τέτοιες είναι για παράδειγμα οι συναρτήσεις λύσεων και εξισώσεων (ενός γενικού συστήματος εξισώσεων). Εμείς θα χρειαστούμε κυρίως μία γενίκευσή τους, την οποία είναι βολικό να ορίσουμε σ' αυτό το σημείο.

Ορισμός 2.13. Μία αντικατάσταση s ονομάζεται *γνήσια* (*proper*) αν για κάθε $x \in dom(s)$,

$$s_x \neq x \Rightarrow s_x \in V_{afa}[\mathcal{U}].$$

Παρατήρηση 2.11. Αν t, s γνήσιες αντικαταστάσεις, τότε $t \star s$ και $t \cdot s$ (όταν ορίζεται) είναι επίσης γνήσιες.

2.11 Γενικό Λήμμα Επίλυσης

Από τη στιγμή που έχουμε στα χέρια μας το θεώρημα ύπαρξης του τελεστή αντικατάστασης είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στην αρχική μας επιδίωξη, της γενίκευσης δηλαδή του Λήμματος Επίλυσης ώστε να εφαρμόζεται και σε γενικά συστήματα εξισώσεων.

Ξεκινάμε με τους παρακάτω ορισμούς που επεκτείνουν ήδη γνωστές μας έννοιες στο καινούργιο πλαίσιο των γενικών συστημάτων εξισώσεων.

Ορισμός 2.14. Έστω $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ γενικό σύστημα εξισώσεων. *Λύση* του $\mathcal{E}$ ονομάζουμε κάθε συνάρτηση s με πεδίο ορισμού το X για την οποία ισχύει ότι, για κάθε $x \in X$,

$$s_x = e_x[s].$$

Ακριβώς όμοια με την περίπτωση του επίπεδου συστήματος εξισώσεων, ορίζουμε και εδώ

$$\textit{solution-set}(\mathcal{E}) = \{s_x \mid x \in X \ \&\ s \text{ λύση του } \mathcal{E}\}.$$

Ο παραπάνω ορισμός της λύσης ενός γενικού συστήματος εξισώσεων είναι συνεπής επέκταση αυτού ενός επίπεδου συστήματος εξισώσεων. Έστω $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ επίπεδο σύστημα και $x \in X$. Τότε, αν s λύση του $\mathcal{E}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
s_x &= \{s_y \mid y \in e_x \cap X\} \cup \{p \mid p \in e_x \cap A\} && \text{(κλασικός ορισμός)}\\
&= \{y[s] \mid y \in e_x \cap X\} \cup \{p[s] \mid p \in e_x \cap A\} && \text{(ιδιότητες } \textit{sub}\text{)}\\
&= e_x[s]. && \text{((iii) του } \textit{sub}\text{)}
\end{aligned}$$

Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι το παράδειγμα και οι παρατηρήσεις που κάναμε στην προηγούμενη παράγραφο συνάδουν με τον συγκεκριμένο τρόπο προσέγγισης της γενικευμένης έννοιας της λύσης που μόλις διατυπώσαμε.

Πριν φτάσουμε στο βασικό θεώρημα της παραγράφου, θα πρέπει να αποδείξουμε ένα Λήμμα το οποίο ουσιαστικά αποτελεί τον πυρήνα του.

Ορισμός 2.15. Έστω $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ και $\mathcal{E}' = \langle X', A', e'\rangle$ δύο συστήματα εξισώσεων. Θα λέμε ότι το $\mathcal{E}'$ αποτελεί *επέκταση* του $\mathcal{E}$ αν

i. $X \subseteq X'$ και

ii. για κάθε $x \in X$, $e'_x = e_x$.

Έστω s, s' λύσεις των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}'$ αντίστοιχα, τέτοιες ώστε για κάθε $x \in X$, $s_x = s'_x$. Λέμε ότι η s' είναι *επέκταση* της s.

Λήμμα 2.9. *Για κάθε γενικό σύστημα εξισώσεων $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ υπάρχει επίπεδο σύστημα εξισώσεων $\mathcal{E}' = \langle X', A', e'\rangle$ που το επεκτείνει και για το οποίο ισχύουν τα εξής*

i. *Κάθε λύση* s *του* $\mathcal{E}$ *επεκτείνεται σε μία λύση* s' *του* $\mathcal{E}'$.

ii. *Αν* s' *λύση του* $\mathcal{E}'$, *τότε* $s' \upharpoonright X$ *είναι λύση του* $\mathcal{E}$.

Απόδειξη. *Ορισμός του* $\mathcal{E}'$. Έστω $\mathcal{E}' = \langle Y, A, e' \rangle$ σύστημα εξισώσεων τέτοιο ώστε

$$Y = (X \cup \bigcup_{x \in X} trcl(e_x)) \setminus A,$$

και για κάθε $y \in Y$,

$$e'_y = \begin{cases} e_y, & \text{αν } y \in Y \\ y, & \text{αν } y \in Y \setminus X. \end{cases}$$

Το $\mathcal{E}'$ είναι προφανώς επίπεδο (αφού για κάθε $y \in Y$, $e'_y \in \mathcal{P}(Y \cup A)$) και επεκτείνει το $\mathcal{E}$ (αφού εξ' ορισμού $X \subseteq Y$ και για κάθε $X \in X$, $e'_x = e_x$).

Απόδειξη του (i). Έστω s λύση του $\mathcal{E}$. Ορίζουμε s' στο Y τέτοια ώστε

$$s'_y = y[s].$$

Προφανώς η s' επεκτείνει την s, αφού για κάθε $x \in X$,

$$s_x = x[s] = s'_x.$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι η s' είναι λύση του $\mathcal{E}'$.

Έστω $y \in Y$.

Αν $y \notin X$,

$$\begin{aligned} s'_y &= y[s] \\ &= \{z[s] \mid z \in y\} \cup (y \cap A) && \text{(ορισμός } sub) \\ &= \{s'_z \mid z \in y\} \cup (y \cap A) && \text{(ορισμός } s' \text{ και μεταβ. του } Y) \\ &= e'_y[s'] && \text{(ορισμός } sub). \end{aligned}$$

Αν $y \in X$,

$$\begin{aligned}
s'_y &= \{z[s] \mid z \in e_y\} \\
&= \{z[s] \mid z \in e_y \cap (Y \setminus X)\} \cup && \text{(ορισμός } sub) \\
&\qquad \cup \{s_z \mid z \in e_y \cap X\} \cup (e_y \cap A) \\
&= \{s'_z \mid z \in e'_y \cap (Y \setminus X)\} \cup && \text{(ορισμός } s' \text{ και} \\
&\qquad \cup \{s'_z \mid z \in e'_y \cap X\} \cup (e'_y \cap A) && \quad s' \text{ επεκτ. της } s) \\
&= e'_y[s'] && \text{(ορισμός } sub).
\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $y \in Y$,

$$s'_y = e'_y[s'],$$

επομένως s' λύση του $\mathcal{E}'$.

Απόδειξη του (ii). Τώρα έστω s' λύση του $\mathcal{E}'$ και $s = s' \restriction X$.

Καταρχάς θα δείξουμε ότι

$$s'_y = y[s], \quad \text{για κάθε } y \in Y.$$

Αυτό, ως συνήθως, θα γίνει βρίσκοντας μία σχέση προσομοίωσης μεταξύ των s'_y και $y[s]$.

Έστω λοιπόν

$$R = \{\langle s'_y, y[s]\rangle \mid y \in Y\}.$$

Έστω $y \in Y$ και $s'_y \, R \, y[s]$.

Θα δείξουμε ότι $s'_y \cap \mathcal{U} = y[s] \cap \mathcal{U}$. Έστω $p \in \mathcal{U}$. Εφόσον s' λύση του $\mathcal{E}'$, έχουμε ότι $s'_y = e'_y[s']$.

- Αν $y \in X$, τότε $y[s] = s_y = s'_y$, επομένως

$$p \in s'_y \Leftrightarrow p \in y[s].$$

- Αν $y \notin X$, τότε $e'_y[s'] = y[s']$, από τον ορισμό του $\mathcal{E}'$, οπότε

$$p \in y[s] \Leftrightarrow p \in y[s'] \Leftrightarrow p \in e'_y[s'] \Leftrightarrow p \in s'_y.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση $p \in s'_y \cap \mathcal{U} \Leftrightarrow p \in y[s] \cap \mathcal{U}$.

Έστω τώρα $a \in s'_y \cap V_{afa}[A]$. Τότε $a = s'_z$, για κάποιο $z \in Y$, και επομένως ισχύει ότι

$$a\,R\,z[s].$$

Συμμετρικά τώρα, έστω $a \in y[s] \cap V_{afa}[A]$. Τότε από την ιδιότητα (iii) του sub έχουμε ότι $a = z[s]$, για κάποιο $z \in y$. Από τη μεταβατικότητα του Y παίρνουμε ότι $z \in Y$. Άρα

$$s'_z\,R\,a.$$

Επομένως, για κάθε $y \in Y$, $s'_y = y[s]$.

Έστω $x \in X$. Τότε

$$\begin{aligned}
s_x = s'_x &= \{s'_y \mid y \in e_x \setminus A\} \cup (e_x \cap A) && (\text{ορισμός } s,\ s' \text{ λύση} \\
& && \ \text{του } \mathcal{E}' \text{ και } e'_x = e_x) \\
&= \{s'_y \mid y \in e_x \cap (Y \setminus X)\} \cup && (Y \cup A = \\
&\qquad \cup \{s'_y \mid y \in e_x \cap X\} \cup (e_x \cap A) && \ (Y \setminus X) \cup X \cup A)) \\
&= \{y[s] \mid y \in e_x \cap (Y \setminus X)\} \cup && (s'_y = y[s],\ \text{για } y \in Y) \\
&\qquad \cup \{y[s] \mid y \in e_x \cap (X \cup A)\} && \\
&= e_x[s]. && (\text{ορισμός } sub)
\end{aligned}$$

Επομένως, s λύση του $\mathcal{E}$. ⊣

Θεώρημα 2.10 (Γενικό Λήμμα Επίλυσης). *Κάθε γενικό σύστημα εξισώσεων $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ έχει μοναδική λύση s. Επίσης το σύνολο λύσεων του $\mathcal{E}$ είναι υποσύνολο του $V_{afa}[A]$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ γενικό σύστημα εξισώσεων. Από το προηγούμενο Λήμμα παίρνουμε ότι υπάρχει επίπεδο σύστημα εξισώσεων $\mathcal{E}'$ που πληροί κάποιες συνθήκες. Το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση s' βάση του Λήμματος Επίλυσης, στην οποία (λόγω των συνθηκών που ικανοποιεί το $\mathcal{E}'$) αντιστοιχεί λύση $s = s' \restriction X$ του $\mathcal{E}$. Η λύση s είναι μοναδική, διαφορετικά αν s_1, ήταν μία άλλη λύση, από το Λήμμα θα είχαμε ότι υπάρχει επέκτασή της s'_1 λύση του $\mathcal{E}'$ τέτοια ώστε $s'_1 \neq s'$, το οποίο είναι άτοπο λόγω της μοναδικότητας της s'.

Επίσης βάση του Λήμματος, κάθε λύση του $\mathcal{E}$ επεκτείνεται σε μία λύση κάποιου επίπεδου συστήματος εξισώσεων $\mathcal{E}'$ με το ίδιο σύνολο παραμέτρων. Επομένως

$$\textit{solution-set}(\mathcal{E}) \subseteq \textit{solution-set}(\mathcal{E}') \subseteq V_{afa}[A].$$ ⊣

Στο επόμενο θεώρημα διατυπώνεται ένα γεγονός που προκύπτει άμεσα από το Γενικό Λήμμα Επίλυσης και το οποίο αν και χωρίς ιδιαίτερη χρηστική αξία έρχεται να επιβεβαιώσει τη διαίσθηση μας. Πριν από αυτό όμως θα χρειαστούμε μία μικρή βοηθητική πρόταση.

Πρόταση 2.11. *Έστω s συνάρτηση αντικατάστασης. Για κάθε σύνολο a ισχύει*

$$support(a) \cap dom\, s = \emptyset \quad \Rightarrow \quad a[s] = a.$$

Απόδειξη. Έστω s συνάρτηση αντικατάστασης.

Έστω

$$R = \{\langle a[s], a\rangle \mid \ a \text{ σύνολο με } support(a) \cap dom\, s = \emptyset\}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η R είναι σχέση προσομοίωσης σε σύνολα.

Έστω a σύνολο με $support(a) \cap dom\, s = \emptyset$.

- Εύκολα παίρνουμε ότι

$$a[s] \cap \mathcal{U} = a \cap U,$$

αφού $a \cap dom\, s = \emptyset$ και για κάθε $b \in a \cap (\mathcal{U} \setminus dom\, s)$, $b[s] = b$.

- Έστω τώρα $b \in a[s]$, σύνολο. Τότε

$$b = c[s], \text{ για κάποιο } c \in a.$$

Έχουμε $c \in V_{afa}[\mathcal{U}]$ (αλλιώς $b \in \mathcal{U}$, το οποίο είναι άτοπο) και επίσης

$$support(c) \subseteq support(a),$$

άρα

$$support(c) \cap dom\, s = \emptyset.$$

Οπότε

$$b\, R\, c.$$

- Συμμετρικά τώρα, έστω $b \in a$, σύνολο. Τότε

$$support(b) \cap dom\, s = \emptyset,$$

όπως και πριν. Ξεκάθαρα $b[s] \in V_{afa}[\mathcal{U}]$ μιας και $b \in V_{afa}[\mathcal{U}]$ (από τις ιδιότητες του sub). Επομένως

$$b[s]\, R\, b. \qquad \dashv$$

Θεώρημα 2.12. (ZFC^-) *Το Λήμμα Επίλυσης είναι ισοδύναμο με την πρόταση "κάθε γενικό σύστημα εξισώσεων έχει μοναδική λύση"* .

Απόδειξη. Το ότι το Λήμμα Επίλυσης συνεπάγεται την παραπάνω πρόταση προκύπτει από το θεώρημα 2.10.

Έστω τώρα ότι δεχόμαστε την πρόταση. Θα αποδείξουμε το Λήμμα Επίλυσης.

Έστω

$$\mathcal{E} = \langle X, A, e \rangle,$$

επίπεδο σύστημα εξισώσεων. Ορίζουμε

$$\mathcal{E}' = \langle X, B, e \rangle,$$

σύστημα εξισώσεων, όπου $B = support(A)$ (ενώ αν $X \cap B = \emptyset$, αντικαθιστούμε το σύνολο μεταβλητών με κάποιο άλλο ώστε $X \cap B = \emptyset$).

Το $\mathcal{E}'$ έχει μοναδική λύση s. Άρα για κάθε $x \in X$,

$$\begin{aligned}
s_x &= e_x[s] && (s \text{ λύση του } \mathcal{E}') \\
&= \{y[s] \mid y \in e_x \cap X\} \cup \{y[s] \mid y \in e_x \cap A\} && (e_x \subseteq X \cup A \text{ και} \\
& && \text{ ιδιότητα (iii) του } sub) \\
&= \{s_y \mid y \in e_x \cap X\} \cup (e_x \cap A) && (\text{Πρόταση 2.11 και} \\
& && \text{ ιδιότητα (iii) του } sub)
\end{aligned}$$

Δηλαδή s λύση και του $\mathcal{E}$. Εύκολα φαίνεται επίσης ότι αν s είναι λύση του $\mathcal{E}$, τότε s λύση και του $\mathcal{E}'$, οπότε s μοναδική. ⊣

Μία ακόμα ισοδύναμη μορφή του Λήμματος Επίλυσης μπορεί εύκολα να διατυπωθεί χρησιμοποιώντας τις έννοιες που ορίσαμε στην Παράγραφο 2.10 οι οποίες αφορούσαν στη σύνθεση αντικαταστάσεων. Σε αντίθεση μάλιστα με το προηγούμενο αποτέλεσμα αυτό θα αποτελέσει σημαντικό εργαλείο στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θα γενικεύσουμε ακόμα περισσότερο τα μέχρι τώρα συμπεράσματά μας γύρω από την συναναδρομή.

Θεώρημα 2.13. (ZFC^-) *Το Λήμμα Επίλυσης είναι ισοδύναμο με την πρόταση "για κάθε γνήσιο τελεστή αντικατάστασης e, υπάρχει μοναδική γνήσια αντικατάσταση s τέτοια ώστε $s = s \star e$"* [5].

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει το Λήμμα Επίλυσης. Τότε από το Θεώρημα 2.12 έχουμε ότι κάθε γενικό σύστημα εξισώσεων έχει μοναδική λύση.

[5]Ανάλογη πρόταση ισχύει και για την περίπτωση του τελεστή $\cdot$ (βλέπε Ορισμό 2.12), με τη διαφορά ότι αντί για $s = s \star e$ θα έχουμε $s = s' \cdot e$ για κάποιο κατάλληλα ορισμένο s'.

Έστω τώρα e γνήσια αντικατάσταση. Τότε το

$$\mathcal{E} = \langle dom(e), support(e) \setminus X, e \rangle,$$

είναι γενικό σύστημα εξισώσεων. Έστω s λύση του. Από τον ορισμό της λύσης γενικού συστήματος εξισώσεων παίρνουμε άμεσα ότι $s = s \star e$.

Αντίστροφα τώρα, έστω ότι ισχύει η πρόταση του θεωρήματος και έστω $\mathcal{E} = \langle X, A, e \rangle$ γενικό σύστημα εξισώσεων. Ορίζουμε συνάρτηση s τέτοια ώστε

$$s = s \star e.$$

Η s είναι καλά ορισμένη αφού $X \subseteq \mathcal{U}$. Έχουμε λοιπόν ότι $dom(s) = X$ και ότι για κάθε $x \in X$,

$$s_x = e_x[s].$$

Άρα η s είναι λύση του $\mathcal{E}$.

Επομένως από Θεώρημα 2.12 παίρνουμε ότι ισχύει το Λήμμα Επίλυσης. $\dashv$

Κεφάλαιο 3

Συναναδρομή

3.1 Προλεγόμενα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να δομήσουμε μια γενική θεωρία συναναδρομής η οποία θα στηρίζεται στην έως τώρα έκθεσή μας γύρω από το Λήμμα Επίλυσης.

Πρώτο μας μέλημα στο δρόμο αυτό πρέπει να είναι η έστω μερική διασάφηση του περιεχομένου της έννοιας της συναναδρομής. Ως τώρα έχουμε συναντήσει τον όρο αυτό σε αρκετά σημεία, κυρίως μέσα σε αποδείξεις ή ορισμούς (βλέπε Ορισμό 2.11 και Θεώρημα Τελεστή Αντικατάστασης). Στα σημεία όμως αυτά παρά το γεγονός ότι δίνονται κάποιες εξηγήσεις για την προέλευση και τη χρήση του όρου, παραμένει σκοτεινό το τι εννοούμε τελικά όταν μιλάμε για "συναναδρομή". Η πρόθεση μας είναι να περιγράψουμε μια διαδικασία ανάλογη της αναδρομής στην κλασική συνολοθεωρία. Αυτό φυσικά μαρτυράται εύκολα και από το δεύτερο συνθετικό του όρου μας[1]. Από πού όμως πηγάζει αυτή η ομοιότητα ανάμεσα στα δύο "σχήματα"; Απουσιάζει λοιπόν καταρχάς μία πιο καθαρή σύνδεση την οποία και στοχεύουμε να αποδείξουμε μέσα από τα αποτελέσματα του κεφαλαίου ξεκινώντας από την παράγραφο αυτή.

Ο καλύτερος τρόπος να προσεγγίσουμε την έννοια της συναναδρομής είναι μέσα από παραδείγματα τα οποία γέννησαν την ανάγκη για δημιουργία της. Θα αναφέρουμε τρία από αυτά τα οποία πιστεύουμε ότι κρίνονται αντιπροσωπευτικά κυρίως για ιστορικούς λόγους[2].

Παράδειγμα 3.1 (*Ρεύματα φυσικών αριθμών*). Με τον όρο ρεύμα φυσικών εννοούμε κάθε ζεύγος

$$\langle n, s \rangle,$$

[1] Η δικαιολόγηση του πρώτου συνθετικού (δηλαδή του "συν") δυστυχώς δεν είναι τόσο ευλογοφανής μιας και η προέλευση του μπορεί να δικαιολογηθεί μόνο μέσω της σύνδεσης θεωρημάτων μας με τη θεωρία κατηγοριών (κάτι που εν μέρει θα γίνει στη συνέχεια).

[2] Τα παραδείγματα αυτά συναντώνται σε κείμενα του θέματος ως αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις τις οποίες η κλασική συνολοθεωρητική προσέγγιση κρίνεται ανεπαρκής να μοντελοποιήσει.

όπου $n \in \omega$ και s είναι επίσης ρεύμα.

Με την πρώτη ματιά γίνεται φανερό ότι ο ορισμός αυτός αποτελεί περισσότερο μια περιγραφή του σχήματος του ρεύματος παρά έναν σαφή συνολοθεωρητικό καθορισμό. Ωστόσο όπως έχουμε δηλώσει και δικαιολογήσει και σ' άλλες περιπτώσεις (βλέπε εισαγωγικά σχόλια προηγούμενου κεφαλαίου) παραμένει πολύ λογική απαίτηση από μέρους μας η απαίτηση ύπαρξης ενός τέτοιου αντικειμένου. Ο ορισμός αυτός του ρεύματος θα λέγαμε ότι αποτελεί μία μη τυποποιημένη μορφή συναναδρομής.

Ας δούμε ακόμα ένα παράδειγμα σ' αυτό το πλαίσιο. Έστω

$$f : \omega \to \omega$$

και έστω g συνάρτηση από το ω στο σύνολο των ρευμάτων τέτοια ώστε

$$g(n) = \langle n, g(2f(n+1)) \rangle.$$

Για κάθε $n \in \omega$, η $g(n)$ είναι ρεύμα. Αυτό όπως και προηγουμένως αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ορισμού με συναναδρομή, το οποίο μάλιστα μας θυμίζει αρκετά κλασικούς αναδρομικούς ορισμούς.

Παράδειγμα 3.2 (*Δέντρα φυσικών αριθμών*). Τα δέντρα φυσικών αριθμών είναι μία φυσική γενίκευση των ρευμάτων. Δέντρο[3] (δυαδικό) θεωρούμε κάθε τριάδα

$$\langle n, t_1, t_2 \rangle,$$

όπου $n \in \omega$ και t_1, t_2 επίσης δέντρα (δυαδικά).

Έστω τώρα τ συνάρτηση από το $\{a, b, c, d\}$ στο σύνολο των δέντρων τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
\tau(a) &= \langle 1, \tau(a), \tau(b) \rangle \\
\tau(b) &= \langle 2, \tau(a), \tau(a) \rangle \\
\tau(c) &= \langle 3, \tau(b), \tau(a) \rangle \\
\tau(d) &= \langle 4, \tau(d), \tau(d) \rangle.
\end{aligned}$$

Ο ορισμός της συνάρτησης τ είναι (ή μάλλον ονομάσαμε να είναι) ορισμός με συναναδρομή σε δέντρα.

Παράδειγμα 3.3 (*Συνολοθεωρία*). Στο παράδειγμα αυτό θα μπορούσαμε να τοποθετήσουμε τον ορισμό του τελεστή αντικατάστασης που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (Ορισμός 2.11). Για λόγους πληρότητας ας αναφέρουμε κάποιον απλούστερο. Έστω h συνάρτηση ορισμένη στο ω, τέτοια ώστε

$$h(n) = \{n, h(n), h(n+1)\}.$$

[3] Η ιδέα είναι ότι το δέντρο $\langle n, t_1, t_2 \rangle$ έχει κορυφή n και t_1, t_2 είναι τα υποδέντρα που έχουν ως κορυφές τα παιδιά της n.

Είναι καθαρό από τα προαναφερθέντα, ότι οι εξισώσεις και στα τρία παραδείγματα έχουν ένα κυκλικό χαρακτήρα στον ορισμό τους, που δυσκολεύει την εύρεση κατάλληλης δομής που να μοντελοποιεί τις λύσεις τους. Βέβαια η δουλειά που έχουμε κάνει ως τώρα μας επιτρέπει να πούμε με ευκολία ότι στην περίπτωση του τρίτου παραδείγματος, το σύστημα *ZFA* αποτελεί ιδανική επιλογή. Το ίδιο θα μπορούσαμε να πούμε και για τα δύο άλλα παραδείγματα, επενδύοντας ίσως λίγο παραπάνω σε κόπο (π.χ. για το Παράδειγμα 3.1 βλέπε [3], κεφ. 14).

Παρατήρηση 3.1. Όπως πιθανώς μπορεί να αντιληφθεί κάθε αναγνώστης που είναι στοιχειωδώς εξοικειωμένος με τη συνολοθεωρία, στο παρόν σημείο ανακύπτει ένα ερώτημα όσον αφορά στην αξία προσπάθειας ανεύρεσης κάποιου εναλλακτικού πλαισίου (δηλαδή εκτός της ZFC) που να μοντελοποιεί τα παραπάνω. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του ορισμού του ρεύματος, είναι σαφές ότι θα μπορούσαμε κάλλιστα να ορίσουμε την έννοια του ρεύματος ως συνάρτηση $g : \omega \to \omega$ και επομένως να πάρουμε ως λύση της εξίσωσης του παραδείγματος την

$$g(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ g(2f(n-1)), & n > 0. \end{cases}$$

Αυτή σίγουρα θα ήταν μία πιο απλή μοντελοποίηση η οποία μάλιστα δε θα απαιτούσε την απομάκρυνσή μας από τη θεωρία ZFC. Από την άλλη βέβαια η προσέγγιση μέσα από το πλαίσιο που περιγράψαμε είναι πιο φυσική. Ο κύριος όμως λόγος που αναζητούμε τις λύσεις μας στην *ZFA* και όχι στην ZFC φαίνεται στο δεύτερο παράδειγμα. Εκεί γίνεται εμφανές ότι είναι πολύ πιο δύσκολο να βρούμε μια φυσική αναπαράσταση της έννοιας του δέντρου στην ZFC. Η πρόθεση μας μάλιστα είναι να αναζητήσουμε μία συνολικότερη πρακτική για τον χειρισμό τέτοιων περιπτώσεων, ενώ εξίσου σημαντικό είναι να προσπαθήσουμε να δούμε αν η αναγωγή ενός συναδρομικού ορισμού σε αναδρομικό (όπως γίνεται στο πρώτο παράδειγμα) μπορεί να επιτευχθεί σε όλες τις περιπτώσεις[4].

Έχοντας στο μυαλό μας και την παραπάνω παρατήρηση, θα προχωρήσουμε να ρίξουμε μία γέφυρα ανάμεσα στους κλασικούς αναδρομικούς ορισμούς και σε αυτούς με συναναδρομή. Αυτό θα επιτευχθεί σε πρώτο στάδιο μέσω της έννοιας των σταθερών σημείων.

3.2 Σταθερά σημεία

Υπάρχουν πολλά γνωστά αποτελέσματα τα οποία αφορούν στην αναδρομή. Θα αναφέρουμε μερικά για να δείξουμε περίπου την κατεύθυνση στην οποία θέλουμε να κινηθούμε.

Μορφή Α. Αναδρομή στους φυσικούς αριθμούς. Έστω $F : V \to V$, τελεστής. Υπάρχει μοναδική συνάρτηση $g : \omega \to V$, τέτοια ώστε, για κάθε $n \in \omega$,

$$g(n) = F(g \upharpoonright n).$$

[4]Για μια πιο εκτενή ανάλυση της σύνδεσης αναδρομής-συναναδρομής βλέπε [11].

Η μορφή αυτή είναι η πιο συχνή[5] και μάλιστα καλύπτει σχεδόν όλες τις περιπτώσεις αναδρομής που συναντούν οι περισσότεροι μαθηματικοί στη ζωή τους.

Μορφή Β. Υπερπεπερασμένη αναδρομή. Έστω $F : V \to V$, τελεστής. Υπάρχει μοναδικός τελεστής $G : Ord \to V$, τέτοιος ώστε, για κάθε $\alpha \in Ord$,

$$G(\alpha) = F(G \restriction \alpha).$$

Αυτή ουσιαστικά αποτελεί μία γενίκευση της προηγούμενης μορφής σε όλο το σύνολο των διατακτικών.

Μορφή Γ. Αναδρομή σε καλά εδραιωμένη σχέση. Έστω R καλά εδραιωμένη σχέση στο σύνολο A και έστω $G : A \times V \to V$ τελεστής. Υπάρχει τελεστής F, τέτοιος ώστε, για κάθε $a \in A$,

$$F(a) = G(a, F \restriction \{b \in A \mid b \in a\}).$$

Σε αυτή τη μορφή περιλαμβάνονται ουσιαστικά όλες οι αναδρομές που χρειαζόμαστε στα μαθηματικά (με εξαίρεση ίσως την περίπτωση στην οποία θέλουμε η R να είναι κλάση).

Μορφή Δ. Σταθερό σημείο. Έστω P ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο, κάθε υποσύνολο του οποίου έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : P \to P$ έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $p \in P$, τέτοιο ώστε

$$f(p) = p.$$

Αυτή η μορφή συνήθως δεν αποτελεί την πρώτη επαφή κάποιου με την έννοια της αναδρομής. Είναι ωστόσο ένα απλό αποτέλεσμα που δίνει μία άλλη εξίσου χρήσιμη οπτική στο θέμα[6]. Αυτή την οπτική, όπως και αυτή της Μορφής Β, θα χρησιμοποιήσουμε κυρίως για να δείξουμε τη σύνδεση με τη συναναδρομή.

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι τελεστή ονομάζουμε κάθε απεικόνιση

$$\Gamma : V_{afa}[\mathcal{U}] \to V_{afa}[\mathcal{U}],$$

που αντιστοιχεί δηλαδή σύνολα σε σύνολα.

Ορισμός 3.1. Έστω Γ τελεστής συνόλων. Ο Γ θα ονομάζεται *μονότονος* (*monotone*) αν για κάθε $a, b \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$a \subseteq b \Rightarrow \Gamma(a) \subseteq \Gamma(b).$$

Ο Γ θα ονομάζεται *γνήσιος* (*proper*) αν για κάθε $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$\Gamma(a) \subseteq V_{afa}[\mathcal{U}].$$

[5] Ακόμα πιο κοινή μορφή βέβαια είναι αυτή στην οποία ο F είναι απλά συνάρτηση (δηλαδή δεν είναι γνήσια κλάση).

[6] Για λόγους πληρότητας στη συνέχεια θα αποδείξουμε τη σύνδεση της μορφής Δ και της Α.

Οι παρακάτω τελεστές συνόλων αποτελούν χρήσιμα για τη συνέχεια παραδείγματα ώστε να επιδείξουμε τα θεωρήματα μας.

Παράδειγμα 3.4.

- $Pow(a) = \mathcal{P}(a)$.
- $Pow_f(a) = \mathcal{P}_{fin}(a)$.
- $Pow_f^A(a) = \mathcal{P}_{fin}(A \cup a)$, όπου A κάποιο σύνολο.
- $Fun(a) = a \rightharpoonup a = \{f \mid f$ μερική συνάρτηση από το a στο $a\}$.
- $Fun_{st}^A(a) = A \times a$, όπου A κάποιο σύνολο.
- $Fun_{tr}^A(a) = A \times a \times a$, όπου A κάποιο σύνολο.

Όλοι οι παραπάνω τελεστές συνόλων αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι μονότονοι και γνήσιοι. Για παράδειγμα, αν $a \subseteq b$, τότε

$$Fun_{st}^A(a) = A \times a \subseteq A \times b = Fun_{st}^A(b)$$

και

$$Fun(a) = a \rightharpoonup a \subseteq b \rightharpoonup b = Fun(b).$$

Παρατήρηση 3.2. 1. Όταν είναι ξεκάθαρο από το πλαίσιο ότι αναφερόμαστε σε "τελεστή συνόλων" θα γράφουμε απλά "τελεστής" .

2. Η σύνθεση τελεστών είναι τελεστής.

3. Δεν είναι όλοι οι τελεστές μονότονοι. Για παράδειγμα ο τελεστής

$$\Gamma(a) = \{\{a\}\}$$

δεν είναι μονότονος, αλλά είναι γνήσιος.

4. Δεν είναι όλοι οι τελεστές γνήσιοι. Ο ταυτοτικός τελεστής

$$\Gamma(a) = a$$

δεν είναι γνήσιος (γιατί αν $\emptyset \neq a \subseteq \mathcal{U}$, τότε προφανώς $a \not\subseteq Vafa[\mathcal{U}]$) αλλά είναι μονότονος. Άλλο παράδειγμα μη γνήσιου τελεστή είναι ο

$$\Gamma(a) = \bigcup a.$$

5. Γενικότερα ισχύει

$$\Gamma \text{ μη γνήσιος } \Leftrightarrow \text{ για κάποιο σύνολο } a,\ \Gamma(a) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset.$$

6. Έστω A οποιοδήποτε σύνολο. Τότε ο $\Gamma(a) = A \cup a$ δεν είναι γνήσιος, αλλά είναι μονότονος.

Η παρακάτω πρόταση μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε πιο πολύπλοκους μονότονους και γνήσιους τελεστές από απλούστερους.

Πρόταση 3.1. i. *Η σύνθεση μονότονων τελεστών είναι μονότονος τελεστής.*

ii. *Έστω Γ, Δ τελεστές, όπου ο Γ είναι γνησίος. Τότε ο $\Gamma \circ \Delta$ είναι γνήσιος τελεστής.*

iii. *Το άθροισμα $\sum_{i \in I} \Gamma_i$ μονότονων τελεστών είναι μονότονος τελεστής, όπου για κάθε $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,*

$$(\sum_{i \in I} \Gamma_i)(a) = \sum_{i \in I} \Gamma_i(a),$$

όπου $\sum_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times A_i$.

iv. *Το γινόμενο $\prod_{i \in I} \Gamma_i$ μονότονων τελεστών είναι μονότονος τελεστής, όπου για κάθε $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,*

$$(\prod_{i \in I} \Gamma_i)(a) = \prod_{i \in I} \Gamma_i(a).$$

v. *Αν $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ είναι μονότονοι τελεστές, τότε $\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n$ είναι μονότονος τελεστής, όπου για κάθε $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,*

$$(\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n)(a) = \Gamma_1(a) \times \cdots \times \Gamma_n(a).$$

Απόδειξη. i. Έστω Γ_1, Γ_2, μονότονοι τελεστές. Τότε $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ προφανώς είναι τελεστής που αντιστοιχεί σύνολα σε σύνολα. Επίσης αν $a \subseteq b$ σύνολα, έχουμε ότι

$$(\Gamma_1 \circ \Gamma_2)(a) = \Gamma_1(\Gamma_2(a)) \subseteq \Gamma_1(\Gamma_2(b)) = (\Gamma_1 \circ \Gamma_2)(b),$$

λόγω της μονοτονίας των Γ_1, Γ_2.

ii. Προφανές.

iii. Προφανώς $\sum_{i \in I} \Gamma_i$ τελεστής που αντιστοιχεί σύνολα σε σύνολα. Έστω τώρα a, b σύνολα τέτοια ώστε $a \subseteq b$. Τότε

$$(\sum_{i \in I} \Gamma_i)(a) = \sum_{i \in I} \Gamma_i(a) = \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times \Gamma_i(a)) \subseteq$$
$$\subseteq \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times \Gamma_i(b)) = \sum_{i \in I} \Gamma_i(b) = (\sum_{i \in I} \Gamma_i)(b).$$

iv, v. Όμοια με (iii). ⊣

Στη συνέχεια θα αποδειχθεί χρήσιμη μία επέκταση της έννοιας του τελεστή (συνόλων) σε τελεστή κλάσεων.

Ορισμός 3.2. *Τελεστής κλάσεων* είναι κάθε αντιστοιχία κλάσεων με κλάσεις. Ένας τελεστής κλάσεων Φ ονομάζεται *συνεχής σε σύνολα* (*set continuous*), αν για κάθε κλάση C

$$\Phi(C) = \bigcup\{\Phi(a) \mid a \in V_{afa}[\mathcal{U}] \ \& \ a \subseteq C\}.$$

Ο μονότονος τελεστής κλάσεων ορίζεται όμοια με τον τελεστή συνόλων.

Πρόταση 3.2. *Κάθε μονότονος τελεστής συνόλων μπορεί να επεκταθεί σε ένα μονότονο τελεστή κλάσεων, ο οποίος είναι συνεχής σε σύνολα.*

Απόδειξη. Έστω Γ μονότονος τελεστής. Ορίζουμε για κάθε κλάση C,

$$\Phi_\Gamma(C) = \bigcup_{a \subseteq C} \Gamma(a),$$

όπου a διατρέχει σύνολα. Προφανώς ο Φ είναι τελεστής κλάσεων, ο οποίος εξ' ορισμού είναι συνεχής σε σύνολα.

Έστω $b \in V_{afa}[\mathcal{U}]$. Τότε

$$\begin{aligned} \Phi_\Gamma(b) &= \bigcup_{a \subseteq b} \Gamma(a) \\ &= \Gamma(b) && (\Gamma \text{ μονότονος}) \end{aligned}$$

Άρα ο Φ_Γ επεκτείνει τον Γ.

Έστω τώρα C, D κλάσεις τέτοιες ώστε $C \subseteq D$. Τότε

$$\begin{aligned} \Phi_\Gamma(C) &= \bigcup_{a \subseteq C} \Gamma(a) \\ &\subseteq \bigcup_{a \subseteq D} \Gamma(a) && (a \subseteq C \Rightarrow a \subseteq D) \\ &= \Phi_\Gamma(D). \end{aligned}$$

Άρα Φ_Γ μονότονος. $\dashv$

Παρατήρηση 3.3. 1. Από δω και πέρα όταν αναφερόμαστε στην επέκταση κάποιου μονότονου τελεστή συνόλων Γ σε κλάσεις θα εννοούμε τον Φ_Γ και μάλιστα θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο (δηλαδή το Γ) για την επέκταση του.

2. Η Πρόταση 3.1 ισχύει και για τελεστές κλάσεων.

Ορισμός 3.3. Έστω Γ μονότονος τελεστής και C κλάση (όχι αναγκαία γνήσια).

i. Το C θα ονομάζεται *ορθό ως προς τον* Γ *ή* Γ-*ορθό* (Γ-*correct*) αν $C \subseteq \Gamma(C)$.

ii. Το C θα ονομάζεται *κλειστό ως προς τον* Γ *ή* Γ-*κλειστό* (Γ-*closed*) αν $\Gamma(C) \subseteq C$.

iii. Το C θα ονομάζεται *σταθερό σημείο* του Γ αν είναι κλειστό και ορθό ως προς τον Γ, δηλαδή αν $\Gamma(C) = C$.

iv. Το C θα ονομάζεται *μέγιστο* (*ελάχιστο*) σταθερό σημείο του Γ αν είναι σταθερό σημείο του Γ και ταυτόχρονα ισχύει ότι, για κάθε σταθερό σημείο D του Γ, έχουμε $D \subseteq C$ ($C \subseteq D$).

Τι είδους κλάσεις είναι όμως αυτά τα σταθερά σημεία που μόλις ορίσαμε; Υπάρχουν σταθερά σημεία για κάθε τελεστή; Αυτές είναι οι πρώτες ερωτήσεις που θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε. Πριν το κάνουμε αυτό θα προσπαθήσουμε να εξειδικεύσουμε την αναζήτηση σταθερών σημείων στα παραδείγματα μονότονων τελεστών που ήδη αναφέραμε. Καλό είναι επίσης να έχουμε στο μυαλό μας τις παρακάτω παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 3.4. 1. Το ελάχιστο (μέγιστο) σταθερό σημείο όταν υπάρχει είναι προφανώς μοναδικό.

2. Ένας τελεστής μπορεί να έχει πολλά σταθερά σημεία σύνολα (π.χ. ο $\Gamma(a) = a$ έχει άπειρα), μπορεί να έχει λίγα (π.χ. ο $\Gamma(a) = \{a\}$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο το σύνολο Ω), ενώ μπόρεί να μην έχει και κανένα (π.χ. ο *Pow* λόγω του θεωρήματος του Cantor δεν μπορεί να έχει κανένα).

3. Μερικές φορές είναι πιο πρακτικό να υπολογίζουμε το $\Gamma(a)$ υπολογίζοντας πρώτα το $\Gamma(X_a)$, όπου X_a είναι σύνολο ατόμων σε 1-1 αντιστοιχία με το a. Θα καλούμε τα στοιχεία του $\Gamma(X_a)$ Γ-*μορφές* στο X_a.

Παράδειγμα 3.5. Ο τελεστής *Pow* όπως είδαμε είναι γνήσιος και μονότονος. Από την προηγούμενη παρατήρηση είδαμε επίσης ότι δεν έχει κανένα σταθερό σημείο το οποίο να είναι σύνολο (για την ακρίβεια δεν έχει καν *Pow*-κλειστό σύνολο). Άρα τα σταθερά σημεία πρέπει να τα αναζητήσουμε στις γνήσιες κλάσεις.

Το ελάχιστο σταθερό σημείο του *Pow* είναι η κλάση *WF* των αγνών καλά εδραιωμένων συνόλων. Το *WF* είναι *Pow*-ορθό, γιατί

$$\begin{aligned} a \in \mathit{WF} &\Rightarrow a \in V_{\beta+1}, \;\; \text{για κάποιο } \beta \in \mathit{Ord} \\ &\Rightarrow a \in \mathcal{P}(V_\beta) \subseteq \mathit{Pow}(\mathit{WF}), \;\; \text{για κάποιο } \beta \in \mathit{Ord}, \end{aligned}$$

οπότε

$$a \in \mathit{Pow}(\mathit{WF}).$$

Το WF είναι επίσης Pow-κλειστό, γιατί

$$\begin{aligned} a \in Pow(WF) &\Rightarrow a \in \bigcup_{b \subseteq WF} \mathcal{P}(b) \\ &\Rightarrow a \in \mathcal{P}(b), \ \text{ για κάποιο } b \subseteq WF \\ &\Rightarrow a \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1}, \ \text{ για κάποιο } \beta \in Ord \quad \text{(από Αξ. Αντικ. υπάρχει } \beta \in Ord, \text{ τ.ω., } b \in V_\beta) \\ &\Rightarrow a \in WF. \end{aligned}$$

Έστω τώρα C σταθερό σημείο του Pow. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι, για κάθε $\alpha \in Ord$,

$$V_\alpha \subseteq C.$$

- Αν $\alpha = 0$, τότε $0 \subseteq C$, προφανές.

- Αν $\alpha = \beta + 1$, τότε

$$\begin{aligned} V_\beta \subseteq C &\Rightarrow \mathcal{P}(V_\beta) \subseteq \mathcal{P}(C) && \text{(Παρατήρηση 3.3.2)} \\ &\Rightarrow V_\alpha \subseteq C. && (C \text{ σταθερό σημείο}) \end{aligned}$$

- Αν α οριακός, τότε

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} C = C.$$

Άρα

$$WF = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha \subseteq C,$$

και επομένως WF ελάχιστο σταθερό σημείο.

Ο Pow έχει μέγιστο σταθερό σημείο την κλάση V_{afa}, δηλαδή την κλάση των αγνών συνόλων. Το V_{afa} είναι Pow-κλειστό, γιατί

$$\begin{aligned} b \in Pow(V_{afa}) &\Rightarrow b \in \bigcup_{a \subseteq V_{afa}} \mathcal{P}(a) \\ &\Rightarrow b \in \mathcal{P}(a), \ \text{ για κάποιο } a \subseteq V_{afa} \\ &\Rightarrow b \subseteq a, \ \text{ για κάποιο } a \subseteq V_{afa} \\ &\Rightarrow b \in V_{afa}. && \text{(υποσύνολο αγνού συνόλου είναι αγνό)} \end{aligned}$$

Το V_{afa} είναι επίσης Pow-ορθό, γιατί

$$\begin{aligned} b \in V_{afa} &\Rightarrow b \subseteq V_{afa} \ \& \ b \in \mathcal{P}(b) \\ &\Rightarrow b \in \bigcup_{a \subseteq V_{afa}} \mathcal{P}(a) \\ &\Rightarrow b \in Pow(V_{afa}). \end{aligned}$$

Έστω τώρα C σταθερό σημείο του Pow. Έστω ότι υπάρχει μη αγνό σύνολο a στο C. Τότε υπάρχει $p \in \mathcal{U}$, τέτοιο ώστε $p \in a$. Άρα

$$\begin{aligned} p \in a \in C = \mathcal{P}(C) &\Rightarrow p \in a \subseteq C \\ &\Rightarrow p \in C \\ &\Rightarrow p \in \mathcal{P}(C) \\ &\Rightarrow p \ \text{ σύνολο}, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα

$$C \subseteq V_{afa},$$

και επομένως V_{afa} μέγιστο σταθερό σημείο.

Οι Pow-μορφές είναι απλά σύνολα ατόμων.

Παρατήρηση 3.5. Αξίζει να επισημάνουμε εδώ ότι το ποιά ακριβώς είναι σταθερά σημεία κάποιου τελεστή εξαρτάται από το ποιά αξιώματα έχουμε δεχθεί. Για παράδειγμα, αν δεχθούμε το Αξίωμα Θεμελίωσης, το μέγιστο σταθερό σημείο του Pow θα είναι η κλάση WF, ενώ αν δεχθούμε το Αξίωμα Αντιθεμελίωσης, θα είναι η κλάση V_{afa}.

Παράδειγμα 3.6. Ο τελεστής Pow_f και η γενίκευσή του Pow_f^A μας δίνουν σταθερά σημεία κλάσεις που είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες. Οι Pow_f^A-μορφές είναι πεπερασμένα σύνολα που αποτελούνται από άτομα και από στοιχεία του A (στην περίπτωση του Pow_f αποτελούνται απλά από άτομα). Τα σταθερά σημεία του Pow_f^A θα είναι κλάσεις με στοιχεία σύνολα τα οποία με μία έννοια είναι "κληρονομικά" πεπερασμένα. Σύνολα δηλαδή που έχουν ως στοιχεία πεπερασμένα σύνολα πεπερασμένων συνόλων με την ίδια ιδιότητα. Στην περίπτωση της ZFC, η κλάση αυτή είναι η HF των κληρονομικά πεπερασμένων καλά εδραιωμένων αγνών συνόλων. Στην ZFA όμως τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα γιατί στο σύμπαν μας πλέον υπάρχουν και άλλα καινούργια κληρονομικά πεπερασμένα σύνολα, όπως για παράδειγμα το Ω. Στο παρόν κείμενο θα περιοριστούμε να πούμε ότι το ελάχιστο σταθερό σημείο του Pow_f^A θα το συμβολίζουμε με $HF^0[\mathrm{A}]$, το μέγιστο σταθερό σημείο με $HF^1[\mathrm{A}]$ και ισχύουν τα εξής (βλέπε [3])

- $HF^0[\mathrm{A}]$, $HF^1[\mathrm{A}]$ είναι γνήσιες κλάσεις,
- $\Omega \in HF^1[\mathrm{A}] \setminus HF^0[\mathrm{A}]$,

- $HF^0[\mathrm{A}] \subsetneq HF^1[\mathrm{A}]$ και
- $a \in HF^0[\mathrm{A}]$ ανν a καλά εδραιωμένο και $a \in HF^1[\mathrm{A}]$.

Παράδειγμα 3.7. Στην περίπτωση του *Fun*, οι *Fun*-μορφές είναι μερικές συναρτήσεις από κάποιο σύνολο ατόμων στον εαυτό του. Το ελάχιστο σταθερό σημείο (άρα και το μέγιστο) είναι γνήσια κλάση. Για να το δούμε αυτό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

- για κάθε σύνολο a, $\emptyset \in Fun(a)$ και επομένως το κενό σύνολο ανήκει και στο ελάχιστο σταθερό σημείο.
- $\{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}$ ανήκει επίσης στο ελάχιστο σταθερό σημείο.
- οι συναρτήσεις $f_\alpha = \{f_\beta \mid \beta < \alpha\} \times \{\emptyset\}$ αποδεικνύεται (χρησιμοποιώντας επαγωγή και τα παραπάνω για $\alpha = 0$) ότι είναι διαφορετικές και ανήκουν στο ελάχιστο σταθερό σημείο.

Φυσικά πέρα από τις συναρτήσεις f_α στο μέγιστο σταθερό σημείο θα υπάρχουν και συναρτήσεις όπως η $\Omega = \{\langle\Omega,\Omega\rangle\}$.

Παράδειγμα 3.8. Στα παραδείγματα της αρχής του κεφαλαίου αναφέραμε δύο έννοιες (ρεύματα και δέντρα φυσικών αριθμών) τις οποίες προσεγγίσαμε περιγραφικά. Μπορούμε πλέον να τις ορίσουμε με σαφήνεια ως σταθερά σημεία τελεστών.

Ο τελεστής Fun^A_{st} έχει μορφές στο X ζεύγη $\langle a, x\rangle$ όπου $a \in A$ και $x \in X$. Το ελάχιστο σταθερό του σημείο είναι προφανώς το κενό σύνολο. Στην *ZFA*, το μέγιστο σταθερό σημείο θα είναι η κλάση των ρευμάτων στο A, των συνόλων δηλαδή της μορφής $\langle a, s\rangle$, όπου $a \in A$ και s ρεύμα στο A. Η κλάση λοιπόν των ρευμάτων φυσικών αριθμών είναι η Fun^ω_{st}.

Ομοίως το μέγιστο σταθερό σημείο του Fun^A_{tr} (στην *ZFA*) είναι η κλάση (πλήρων δυαδικών) δέντρων στο A. Επομένως η κλάση των δέντρων φυσικών αριθμών είναι η Fun^ω_{tr}.

Να σημειώσουμε ότι στην *ZFC* το μέγιστο σταθερό σημείο και των δύο τελεστών είναι το κενό σύνολο (ταυτίζεται δηλαδή με το ελάχιστο).

Δεν είναι τυχαίο ότι όλοι οι τελεστές των παραδειγμάτων μας είναι μονότονοι και έχουν ελάχιστα και μέγιστα σταθερά σημεία. Θα δείξουμε γενικεύοντας αυτή την παρατήρησή μας ότι το να είναι κάποιος τελεστής μονότονος αποτελεί ικανή συνθήκη για την ύπαρξη σταθερού σημείου.

Παρατήρηση 3.6. 1. Η παραπάνω συνθήκη δεν είναι αναγκαία. Δηλαδή υπάρχουν μη μονότονοι τελεστές με σταθερά σημεία. (π.χ. ο τελεστής $\Gamma(a) = \{a\}$ έχει σταθερό σημείο το Ω, αλλά δεν είναι μονότονος).

2. Υπάρχουν τελεστές (μη μονότονοι φυσικά) που δεν έχουν σταθερό σημείο. Για παράδειγμα, έστω A μη κενό σύνολο και Γ_A τελεστής τέτοιος ώστε για κάθε

$a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$\Gamma_A(a) = A \setminus a.$$

Ο Γ_A προφανώς δεν είναι μονότονος, ενώ επίσης δεν έχει σταθερό σημείο. Έστω C σταθερό σημείο. Αν C σύνολο, έχουμε ότι

$$C = \Gamma(C) = A \setminus C \neq C,$$

ενώ αν C γνήσια κλάση, τότε

$$C = \Gamma(C) = \bigcup_{a \subseteq C} \Gamma(a) = \bigcup_{a \subseteq C} (A \setminus a) \subseteq A \neq C.$$

Θα διατυπώσουμε δύο ξεχωριστά θεωρήματα για την ύπαρξη ελάχιστου και μέγιστου σταθερού σημείου κι αυτό γιατί δεν είναι ακριβώς "δυϊκά" στην απόδειξή τους. Αρχίζουμε με αυτό που αφορά στο ελάχιστο σταθερό σημείο.

Θεώρημα 3.3 (Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου). *Κάθε μονότονος τελεστής Γ έχει ελάχιστο σταθερό σημείο το οποίο συμβολίζουμε με Γ_*. Το ελάχιστο αυτό σημείο μπορεί να χαρακτηριστεί με οποιοδήποτε από τους παρακάτω τρόπους*

i.
$$\Gamma_* = \bigcup_{\alpha} \Gamma_\alpha,$$

όπου Γ_α ορίζεται με υπερπεπερασμένη αναδρομή έτσι ώστε για κάθε $\alpha \in Ord$,

$$\Gamma_\alpha = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } \alpha = 0 \\ \Gamma(\Gamma_\beta), & \text{αν } \alpha = \beta + 1 \\ \bigcup_{\beta<\alpha} \Gamma_\beta, & \text{αν } \alpha \text{ οριακός.} \end{cases}$$

ii. *Το Γ_* είναι η ελάχιστη Γ-κλειστή κλάση.*

Απόδειξη. Έστω Γ_* ορισμένο όπως στην (i). Για να αποδείξουμε το θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι το Γ_* ικανοποιεί την (ii) και ότι επίσης είναι Γ-ορθό.

Θα δείξουμε ότι το Γ_* είναι Γ-κλειστό. Έστω $b \in V_{afa}[\mathcal{U}]$. Τότε

$$\begin{aligned} b \in \Gamma(\Gamma_*) &\Rightarrow b \in \bigcup_{a \subseteq \Gamma_*} \Gamma(a) \\ &\Rightarrow b \in \Gamma(a), \text{ για κάποιο } a \subseteq \Gamma_* \\ &\Rightarrow b \in \Gamma(a), \text{ για κάποιο } a \subseteq \Gamma_\alpha \ \&\ \alpha \in Ord && (\text{από Αξ. Αντιχ. υπάρχει} \\ & && \ \alpha \in Ord, \text{ τ.ω. } a \subseteq \Gamma_\alpha) \\ &\Rightarrow b \in \Gamma(\Gamma_\alpha), \text{ για κάποιο } \alpha \in Ord && (\Gamma \text{ μονότονος}) \\ &\Rightarrow b \in \Gamma_*. && (\text{ορισμός } \Gamma_*) \end{aligned}$$

Τώρα έστω C Γ-κλειστή κλάση. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε $\alpha \in Ord$, $\Gamma_\alpha \subseteq C$:

- Αν $\alpha = 0$, τότε προφανώς
$$\emptyset \subseteq C.$$
- Αν $\alpha = \beta + 1$, τότε
$$\Gamma_\alpha = \Gamma(\Gamma_\beta) \subseteq \Gamma(C) \subseteq C.$$
- Αν α οριακός, τότε
$$\Gamma_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \Gamma_\beta \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} C = C.$$

Άρα
$$\Gamma_* = \bigcup_\alpha \Gamma_\alpha \subseteq \bigcup_\alpha C = C.$$
και επομένως το Γ_* είναι η ελάχιστη Γ-κλειστή κλάση.

Μένει να δείξουμε ότι το Γ_* είναι Γ-ορθό. Έστω $b \in V_{afa}[\mathcal{U}]$. Τότε

$$\begin{aligned} b \in \Gamma_* &\Rightarrow b \in \Gamma_{\alpha+1}, \text{ για κάποιο } \alpha \in Ord \\ &\Rightarrow b \in \Gamma(\Gamma_\alpha), \text{ για κάποιο } \alpha \in Ord \\ &\Rightarrow b \in \Gamma(\Gamma_*), && (\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_* \text{ και } \Gamma \text{ μονότονος}) \end{aligned}$$

Άρα το Γ_* είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο του Γ. ⊣

Ο χαρακτηρισμός (ii) του Θεωρήματος 3.3 μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για να αποδείξουμε για κάποια κλάση C ότι $\Gamma_* \subseteq C$ αρκεί να αποδείξουμε ότι η C είναι Γ-κλειστή. Αυτό γενικεύεται στην παρακάτω μέθοδο απόδειξης.

Πρόταση 3.4 (Επαγωγική Αρχή για το ελάχιστο σταθερό σημείο). *Έστω Γ μονότονος τελεστής και C τυχαία κλάση. Τότε*
$$\Gamma(C \cap \Gamma_*) \subseteq C \;\Rightarrow\; \Gamma_* \subseteq C.$$
Δηλαδή για να αποδείξουμε ότι $\Gamma_* \subseteq C$, αρκεί να δείξουμε ότι $\Gamma(C \cap \Gamma_*) \subseteq C$.

Απόδειξη. Έστω $\Gamma(C \cap \Gamma_*) \subseteq C$. Γ μονότονος, άρα αφού $C \cap \Gamma_* \subseteq \Gamma_*$, θα έχουμε ότι
$$\Gamma(C \cap \Gamma_*) \subseteq \Gamma(\Gamma_*) = \Gamma_*.$$
Επομένως
$$\Gamma(C \cap \Gamma_*) \subseteq C \cap \Gamma_*,$$
δηλαδή $C \cap \Gamma_*$, Γ-κλειστό.

Από το δεύτερο χαρακτηρισμό του Θεωρήματος 3.3 τώρα παίρνουμε ότι
$$\Gamma_* \subseteq C \cap \Gamma_*,$$

και επομένως

$$\Gamma_* \subseteq C. \qquad \dashv$$

Η ως τώρα διατυπωμένη θεωρία για τα ελάχιστα σταθερά σημεία μας επιτρέπει να ολοκληρώσουμε κάπως την αναφορά που κάναμε περί σύνδεσης μεταξύ αναδρομής και σταθερών σημείων. Θα αποδείξουμε λοιπόν το θεώρημα αναδρομής στους φυσικούς αριθμούς με τη βοήθεια του Θεωρήματος 3.3.

Πρόταση 3.5 (Αναδρομή στους φυσικούς αριθμούς). *Έστω τελεστής F. Υπάρχει μοναδική συνάρτηση g ορισμένη στο ω, τέτοια ώστε για κάθε $n \in \omega$,*

$$g(n) = F(g \restriction n).$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τελεστή Γ τέτοιο ώστε για κάθε $h \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$\Gamma(h) = \{\langle a, F(h \restriction a)\rangle \mid a \in V_{afa}[\mathcal{U}] \cap \operatorname{dom} h\}.$$

Ο Γ εύκολα δείχνεται ότι είναι μονότονος. Άρα από το Θεώρημα 3.3, παίρνουμε ότι υπάρχει ελάχιστο σταθερό σημείο το οποίο ας συμβολίσουμε εδώ g. Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι το g είναι συνάρτηση ορισμένη στο ω και για την οποία ισχύει $g = \Gamma(g)$ και επομένως ικανοποιεί την ζητούμενη σχέση

$$g(n) = F(g \restriction n), \text{ για κάθε } n \in \omega. \qquad \dashv$$

Ας παρατηρήσουμε τώρα τον τελεστή Γ που ορίζεται έτσι ώστε για κάθε $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$\Gamma(a) = \{0\} \cup \{S(b) \mid b \in a \cap V_{afa}[\mathcal{U}]\},$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι $S(b) = b \cup \{b\}$.

Ο Γ είναι μονότονος και επομένως έχει ελάχιστο σταθερό σημείο το οποίο εύκολα φαίνεται ότι είναι το σύνολο $\Gamma_* = \omega$ των φυσικών αριθμών. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.4 μπορούμε να δείξουμε την Επαγωγική Αρχή για τους φυσικούς αριθμούς.

Πρόταση 3.6 (Επαγωγική Αρχή για τους φυσικούς αριθμούς). *Έστω A τυχαίο υποσύνολο του ω. Για να αποδείξουμε ότι $A = \omega$, αρκεί να δείξουμε ότι $0 \in A$ και ότι για κάθε n,*

$$n \in A \;\Rightarrow\; S(n) \in A.$$

Απόδειξη. Η πρόταση αποτελεί μία απλή αναδιατύπωση της Πρότασης 3.4 (όπου $C = A$ και $\Gamma_* = \omega$) η οποία μας λέει ότι για να δείξουμε ότι $\omega \subseteq A$ (δηλαδή $A = \omega$, αφού $A \subset \omega$) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\Gamma(A \cap \omega) \subseteq A,$$

δηλαδή ότι

$$\{0\} \cup \{S(b) \mid b \in A \cap V_{afa}[\mathcal{U}]\} \subseteq A,$$

το οποίο είναι ακριβώς αυτό που απαιτεί και η πρότασή μας. $\dashv$

Η σύνδεση της συναναδρομής με τα σταθερά σημεία θα φανεί καλύτερα (αν και από τα παραδείγματα έχουμε πάρει ήδη μία ιδέα) από το θεώρημα που θα ακολουθήσει το επόμενο Λήμμα, όπως και από την πρόταση στην οποία διατυπώνουμε την "Συν-επαγωγική Αρχή"

Λήμμα 3.7. *Έστω* Γ *μονότονος και*

$$\Gamma^* = \bigcup\{a \mid a\ \Gamma\text{-ορθό}\}.$$

i. *Για κάθε* $a \subseteq \Gamma^*$, *υπάρχει* Γ*-ορθό σύνολο* b, *τέτοιο ώστε,* $a \subseteq b$.

ii. *Για κάθε* $a \subseteq C$, *όπου* C Γ*-ορθό, υπάρχει σύνολο* $b \subseteq C$, *τέτοιο ώστε,* $a \subseteq \Gamma(b)$.

Απόδειξη. i. Έστω $c \in a$. Τότε

$$c \in \Gamma^* = \bigcup\{a \mid a\ \Gamma\text{-ορθό}\},$$

άρα $c \in b_c$ για κάποιο b_c Γ-ορθό.

Ορίζουμε

$$b = \bigcup_{c\in a} b_c.$$

Τότε

$$\begin{aligned} b = \bigcup_{c\in a} b_c \subseteq \bigcup_{c\in a} \Gamma(b_c) & \qquad (b_c\ \Gamma\text{-ορθό}) \\ \subseteq \bigcup_{c\in a} \Gamma(b) & \qquad (b_c \subseteq b \quad \text{και} \quad \Gamma\ \text{μονότονος}) \\ = \Gamma(b). & \end{aligned}$$

ii. Ομοίως. ⊣

Θεώρημα 3.8 (Θεώρημα Μέγιστου Σταθερού Σημείου). *Κάθε μονότονος τελεστής* Γ *έχει μέγιστο σταθερό σημείο το οποίο συμβολίζουμε με* Γ^*. *Το μέγιστο αυτό σημείο μπορεί να χαρακτηριστεί με οποιονδήποτε από τους παρακάτω τρόπους*

i. $\Gamma^* = \bigcup\{a \mid a\ \Gamma\text{-ορθό}\}$.

ii. *Το* Γ^* *είναι η μέγιστη* Γ*-ορθή κλάση.*

Απόδειξη. Έστω Γ^* ορισμένο όπως στο (i). Για να αποδείξουμε το θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι το Γ^* ικανοποιεί την (ii) και ότι επίσης είναι Γ-κλειστό.

Ας δείξουμε αρχικά ότι το Γ^* είναι Γ-ορθό. Έστω $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$. Τότε

$$\begin{aligned}
a \in \Gamma^* &\Rightarrow a \in \bigcup\{b \mid b \ \Gamma\text{-ορθό}\} && (\text{ορισμός } \Gamma^*)\\
&\Rightarrow a \in b \subseteq \Gamma(b), \text{ για κάποιο } b \ \Gamma\text{-ορθό}\\
&\Rightarrow a \in b \subseteq \Gamma(b) \subseteq \Gamma(\Gamma^*), \text{ για κάποιο } b \ \Gamma\text{-ορθό} && (b \subseteq \Gamma^* \text{ και}\\
& && \Gamma \text{ μονότονος})\\
&\Rightarrow a \in \Gamma(\Gamma^*).
\end{aligned}$$

Άρα $\Gamma^* \subseteq \Gamma(\Gamma^*)$, δηλαδή Γ^*, Γ-ορθό.

Έστω C Γ-ορθή κλάση. Θα δείξουμε ότι $C \subseteq \Gamma^*$. Έστω $b \in C$. Ορίζουμε ακολουθία $\{a_n\}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
a_0 &= \{b\} \text{ και}\\
a_{n+1} &\subseteq C \text{ τέτοιο ώστε } \ a_n \subseteq \Gamma(a_{n+1}).
\end{aligned}$$

Η ακολουθία αυτή υπάρχει λόγω του Λήμματος 3.7.

Έστω τώρα

$$a = \bigcup_n a_n.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
d \in a &\Rightarrow d \in a_n, \text{ για κάποιο } n && (\text{ορισμός } a)\\
&\Rightarrow d \in \Gamma(a_{n+1}), \text{ για κάποιο } n && (a_n \subseteq \Gamma(a_{n+1}))\\
&\Rightarrow d \in \Gamma(a), \text{ για κάποιο } n && (\Gamma(a_{n+1}) \subseteq \Gamma(a), \text{ αφού } a_{n+1} \subseteq a\\
& && \text{ και } \Gamma \text{ μονότονος})
\end{aligned}$$

Άρα $a \subseteq \Gamma(a)$ και επομένως $a \subseteq \Gamma^*$ και άρα $b \in \Gamma^*$. Δηλαδή $C \subseteq \Gamma^*$, το οποίο σημαίνει ότι το Γ^* είναι η μέγιστη Γ-ορθή κλάση.

Αποδείξαμε λοιπόν τον δεύτερο χαρακτηρισμό του Γ^* και μένει να δείξουμε ότι το Γ^* είναι Γ-κλειστό. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\Gamma^* \ \Gamma\text{-ορθό} &\Rightarrow \Gamma^* \subseteq \Gamma(\Gamma^*)\\
&\Rightarrow \Gamma(\Gamma^*) \subseteq \Gamma(\Gamma(\Gamma^*)) && (\Gamma \text{ μονότονος})\\
&\Rightarrow \Gamma(\Gamma^*) \ \Gamma\text{-ορθό}\\
&\Rightarrow \Gamma(\Gamma^*) \subseteq \Gamma^*. && (\text{χαρακτηρισμός (ii)})
\end{aligned}$$

Άρα Γ^* είναι μέγιστο σταθερό σημείο του Γ. ⊣

Όπως και στην περίπτωση του Θεωρήματος Ελάχιστου Σταθερού Σημείου (Θεώρημα 3.3), έτσι κι εδώ ο χαρακτηρισμός (ii) του προηγούμενου θεωρήματος μας οδηγεί στην παρατήρηση ότι για να αποδείξουμε για κάποια κλάση C ότι $C \subseteq \Gamma^*$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η C είναι Γ-ορθή. Το συμπέρασμα αυτό γενικεύεται στην εξής πρόταση.

Πρόταση 3.9 (Συν-επαγωγική Αρχή για το μέγιστο σταθερό σημείο). *Έστω Γ μονότονος τελεστής και C τυχαία κλάση. Τότε*

$$C \subseteq \Gamma(C \cup \Gamma^*) \Rightarrow C \subseteq \Gamma^*.$$

Δηλαδή για να αποδείξουμε ότι $C \subseteq \Gamma^*$, αρκεί να δείξουμε ότι $C \subseteq \Gamma(C \cup \Gamma^*)$.

Απόδειξη. Έστω $C \subseteq \Gamma(C \cup \Gamma^*)$. Γ μονότονος και $\Gamma^* \subseteq C \cup \Gamma^*$, άρα

$$\Gamma^* = \Gamma(\Gamma^*) \subseteq \Gamma(C \cup \Gamma^*).$$

Επομένως

$$C \cup \Gamma^* \subseteq \Gamma(C \cup \Gamma^*),$$

δηλαδή $C \cup \Gamma^*$ Γ-ορθό. Από το χαρακτηρισμό (ii) του Θεωρήματος Μέγιστου Σταθερού Σημείου (Θεώρημα 3.8) λοιπόν παίρνουμε ότι

$$C \cup \Gamma^* \subseteq \Gamma^*,$$

και επομένως

$$C \subseteq \Gamma^*. \qquad \dashv$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να σχηματοποιήσουμε λίγο καλύτερα μία αναλογία ανάμεσα στις έννοιες αναδρομή και συναναδρομή με τον ακόλουθο τρόπο :

$$\frac{\text{αναδρομή}}{\text{συναναδρομή}} = \frac{\text{συνάρτηση από κάποιο ελάχιστο σταθερό σημείο}}{\text{συνάρτηση σε κάποιο μέγιστο σταθερό σημείο}}$$

Καλό είναι να έχουμε στο μυαλό μας αυτή τη συσχέτιση μιας και αναπαριστά αρκετά[7] καλά το περιεχόμενο της μεταφοράς που θέλουμε να επιτύχουμε αντικαθιστώντας κλασικές μεθόδους (αναδρομή, επαγωγή) της *ZFC* με καινούργιες (συναναδρομή, συν-επαγωγή) της *ZFA*.

Το επόμενο παράδειγμα συνεχίζει τις παρατηρήσεις μας πάνω στους φυσικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 3.9. Ο τελεστής

$$\Gamma(a) = \{0\} \cup \{S(b) \mid b \in a \cap V_{afa}[\mathcal{U}]\}$$

[7] Η αναλογία αυτή σίγουρα δεν είναι πλήρης. Η αλήθεια είναι ότι υπάρχουν πολλά είδη αναδρομής που ξεφεύγουν από την περιγραφή "συνάρτηση από κάποιο ελάχιστο σταθερό σημείο". Από την άλλη επίσης όλες οι συναναδρομές που θα δούμε είναι ουσιαστικά "συναρτήσεις σε κάποιο μέγιστο σταθερό σημείο". Η μερική πάντως αυτή αναλογία δικαιολογεί σε κάποιο βαθμό την επιλογή ονόματος.

είδαμε ότι έχει ελάχιστο σταθερό σημείο το σύνολο ω. Εφόσον ο Γ είναι μονότονος θα έχει και μέγιστο σταθερό σημείο Γ^*.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$\Gamma^* \cap WF \subseteq \omega.$$

Έστω ότι υπάρχει $a \in \Gamma^* \cap WF$, τέτοιο ώστε, $a \notin \omega$. Έστω $a \in (\Gamma^* \cap WF) \setminus \omega$ με ελάχιστη τάξη. Τότε $a = S(b)$, για κάποιο b (αφού $a \neq 0$), οπότε

$$\begin{aligned} b \in a \Rightarrow\ & rank(b) < rank(a) && \text{(ορισμός } rank\text{)} \\ &\Rightarrow b \in \omega && \text{(επαγ. υποθ.)} \\ &\Rightarrow a \in \omega, && (a = S(b) \in \omega) \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως στην *ZFC* έχουμε ότι $\Gamma^* = \omega$.

Τι γίνεται όμως στην *ZFA*; Εκεί θα δείξουμε ότι

$$\Gamma^* = \Omega \cup \omega.$$

Το $\Omega \cup \omega$ είναι φανερά σταθερό σημείο του Γ (αφού $\Omega = \Omega \cup \{\Omega\} = S(\Omega) \in \Omega$). Έστω τώρα $a \in \Gamma^* \setminus WF$. Ορίζουμε ακολουθία $\{a_n\}$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} a_0 &= a \\ a_n &= S(a_{n+1}). \end{aligned}$$

Η ακολουθία αυτή υπάρχει αφού

$$b \in \Gamma^* \Rightarrow b \in S(c), \text{ για κάποιο } c \in \Gamma^* \setminus WF.$$

Το a επομένως είναι λύση του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned} x_0 &= S(x_1) \\ x_1 &= S(x_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 2.3 παίρνουμε ότι $a = \Omega$. Επομένως το $\Omega \cup \omega$ είναι μέγιστο σταθερό σημείο του Γ.

Τέλος θα αναφέρουμε μερικά γενικά αποτελέσματα και ορισμούς για τελεστές.

Πρόταση 3.10. i. *Για κάθε τελεστή* Γ, *ισχύει*

$$\Gamma_* \subseteq \Gamma^*.$$

ii. *Έστω* Γ, Δ *μονότονοι τελεστές τέτοιοι ώστε για κάθε* $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$\Gamma(a) \subseteq \Delta(a).$$

Τότε

$$\Gamma_* \subseteq \Delta_* \quad \textit{και} \quad \Gamma^* \subseteq \Delta^*.$$

iii. *Έστω* Γ, Δ *μονότονοι τελεστές τέτοιοι ώστε για κάθε* $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$\Gamma(a) \subseteq \Delta^*.$$

Τότε

$$\Gamma^* \subseteq \Delta^*.$$

Απόδειξη. i. Προφανές από τους ορισμούς ελάχιστου και μέγιστου σταθερού σημείου.

ii. Εφόσον Δ_* σταθερό σημείο του Δ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Gamma(\Delta_*) &= \bigcup_{a \subseteq \Delta_*} \Gamma(a) \\
&\subseteq \bigcup_{a \subseteq \Delta_*} \Delta(a) \\
&= \Delta(\Delta_*) \\
&= \Delta_*.
\end{aligned}$$

Δηλαδή $\Gamma(\Delta_*) \subseteq \Delta_*$, οπότε από τη Επαγωγική Αρχή για το ελάχιστο σταθερό σημείο παίρνουμε ότι

$$\Gamma_* \subseteq \Delta_*.$$

Ομοίως παίρνουμε ότι

$$\Gamma^* \subseteq \Delta(\Gamma^*),$$

και από την Συν-Επαγωγική Αρχή για το μέγιστο σταθερό σημείο τελικά έχουμε ότι

$$\Gamma^* \subseteq \Delta^*.$$

iii. Το Γ^* είναι σταθερό σημείο του Γ, οπότε

$$\begin{aligned}
\Gamma^* &= \Gamma(\Gamma^*) \\
&= \bigcup_{a \subseteq \Gamma^*} \Gamma(a) \\
&\subseteq \bigcup_{a \subseteq \Gamma^*} \Delta^* \\
&= \Delta_*.
\end{aligned}$$

⊣

Ορισμός 3.4. Ένας τελεστής Γ θα λέμε ότι *διατηρεί τις τομές ανά δύο* (*commutes with binary intersections*) αν για κάθε $a, b \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$\Gamma(a \cap b) = \Gamma(a) \cap \Gamma(b).$$

Επίσης, θα λέμε ότι *διατηρεί τις τομές* αν για κάθε $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$\Gamma(\bigcap a) = \bigcap_{c \in a} \Gamma(c).$$

Ανάλογα μιλάμε για τελεστές που *διατηρούν τις τομές κλάσεων* όταν για κάποιο τελεστή κλάσεων Φ, ισχύει ότι για κάθε συλλογή κλάσεων $\{C_i\}$,

$$\Phi(\bigcap_i C_i) = \bigcap_i \Phi(C_i).$$

Παρατήρηση 3.7. 1. Έστω Γ μονότονος τελεστής. Τότε για κάθε για κάθε $a, b \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$\Gamma(a \cap b) \subseteq \Gamma(a) \cap \Gamma(b),$$

αφού Γ μονότονος και $a \cap b \subseteq a$, $a \cap b \subseteq b$.

2. Οι τελεστές Pow, Pow_f, Pow_f^A, Fun, Fun_{st}^A, Fun_{tr}^A διατηρούν τις τομές.

3. Υπάρχουν μονότονοι τελεστές που δεν διατηρούν τις τομές. Για παράδειγμα ο

$$\Gamma(a) = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν} \quad a \subseteq \{\emptyset\} \\ a, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

είναι μονότονος, αλλά

$$\Gamma(\{0,1\}) \cap \Gamma(\{0,2\}) = \{\emptyset\} \neq \emptyset = \Gamma(\{0,1\} \cap \{0,2\}).$$

Ορισμός 3.5. Για κάθε κλάση $C \subseteq V_{afa}[\mathcal{U}]$ ορίζουμε

$$-C = \{a \in V_{afa}[\mathcal{U}] \mid a \notin C\},$$

την οποία καλούμε *συμπληρωματική κλάση* της C.

Για κάθε τελεστή Γ ορίζουμε $\hat{\Gamma}$ να είναι η αντιστοιχία συνόλων σε κλάσεις για την οποία ισχύει

$$\hat{\Gamma}(a) = -\Gamma(-a), \text{ για κάθε } a \in V_{afa}[\mathcal{U}].$$

Παρατήρηση 3.8. 1. Δύο ιδιότητες που προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της συμπληρωματικής κλάσης είναι οι παρακάτω.

Έστω C, D κλάσεις. Τότε

$$-(-C) = C \quad \text{και} \quad C \subseteq D \Rightarrow -D \subseteq -C.$$

2. Η αντιστοιχία $\hat{\Gamma}$ δεν είναι τελεστής συνόλων με την αυστηρή έννοια του όρου μιας και αντιστοιχεί σύνολα σε κλάσεις. Παρά το γεγονός αυτό διατηρεί τις περισσότερες καλές ιδιότητες του Γ και γι' αυτό θα την ονομάζουμε και *δυϊκό τελεστή*.

3. Δικαιολογώντας και την προηγούμενη παρατήρηση θα δώσουμε ένα παράδειγμα στο οποίο ο δυϊκός τελεστής αντιστοιχεί σύνολο σε κλάση.

Έστω

$$p \in \mathcal{U}\,.$$

Τότε προφανώς

$$\begin{aligned} \{p\} \notin \mathcal{P}(V_{afa}[\mathcal{U}]) &\Rightarrow \{p\} \notin Pow(V_{afa}[\mathcal{U}]) \\ &\Rightarrow \{p\} \notin Pow(-\emptyset) \\ &\Rightarrow \{p\} \in -Pow(-\emptyset) \\ &\Rightarrow \{p\} \in \hat{Pow}(\emptyset). \end{aligned}$$

Άρα το $\hat{Pow}(\emptyset)$ είναι γνήσια κλάση.

Πρόταση 3.11. *Έστω Γ μονότονος τελεστής.*

i. $\hat{\Gamma}$ *μονότονος (θεωρούμενος ως τελεστής κλάσεων).*

ii. *Αν ο Γ διατηρεί τις τομές κλάσεων τότε για κάθε κλάση C,*

$$\hat{\Gamma}(C) = \bigcup_{a \subseteq C} \hat{\Gamma}(a),$$

όπου a διατρέχει σύνολα, δηλαδή ο $\hat{\Gamma}$ είναι συνεχής σε σύνολα.

iii. *Το $-\Gamma^*$ είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο του $\hat{\Gamma}$ και το $-\Gamma_*$ το μέγιστο σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. i. Έστω C, D κλάσεις. Τότε

$$\begin{aligned} C \subseteq D &\Rightarrow -D \subseteq -C && \text{(Παρατήρηση 3.8.1)} \\ &\Rightarrow \Gamma(-D) \subseteq \Gamma(-C) && \text{(}\Gamma\text{ μονότονος)} \\ &\Rightarrow -\Gamma(-C) \subseteq -\Gamma(-D) && \text{(Παρατήρηση 3.8.1)} \\ &\Rightarrow \hat{\Gamma}(C) \subseteq \hat{\Gamma}(D) && \text{(ορισμός }\hat{\Gamma}\text{).} \end{aligned}$$

ii. Έστω C κλάση. Τότε

$$\begin{aligned}
b \in \hat{\Gamma}(C) &\Rightarrow b \in -\Gamma(-C) && (\text{ορισμός } \hat{\Gamma})\\
&\Rightarrow b \notin \Gamma(-C)\\
&\Rightarrow \text{υπάρχει σύνολο } a \subseteq C \text{ τ.ω. } b \notin \Gamma(-a) && (-C = \bigcap_{a \subseteq C} -a \text{ και}\\
& && \Gamma \text{ διατηρεί τις τομές})\\
&\Rightarrow b \in \hat{\Gamma}(a), \text{για κάποιο σύνολο } a \subseteq C\\
&\Rightarrow b \in \bigcup_{a \subseteq C} \hat{\Gamma}(a).
\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
b \in \bigcup_{a \subseteq C} \hat{\Gamma}(a) &\Rightarrow b \in \hat{\Gamma}(a), \text{για κάποιο } a \subseteq C\\
&\Rightarrow b \in \hat{\Gamma}(C) && (\hat{\Gamma} \text{ μονότονος από (i)}).
\end{aligned}$$

iii. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}(-\Gamma^*) &= -\Gamma(\Gamma^*) && (\text{Παρατήρηση 3.8.1 και ορισμός } \hat{\Gamma})\\
&= -\Gamma^* && (\Gamma^* \text{ σταθερό σημείο του } \Gamma).
\end{aligned}$$

Άρα το $-\Gamma^*$ είναι σταθερό σημείο του $\hat{\Gamma}$.
Έστω τώρα C σταθερό σημείο του $\hat{\Gamma}$. Τότε

$$\begin{aligned}
C = \hat{\Gamma}(C) = -\Gamma(-C) &\Rightarrow -C = \Gamma(-C) && (\text{Παρατήρηση 3.8.1})\\
&\Rightarrow -C \text{ σταθερό σημείο του } \Gamma\\
&\Rightarrow -C \subseteq \Gamma^* && (\Gamma^* \text{ μέγιστο σταθερό}\\
& && \text{σημείο του } \Gamma)\\
&\Rightarrow -\Gamma^* \subseteq C. && (\text{Παρατήρηση 3.8.1})
\end{aligned}$$

$\dashv$

3.3 Συνάλγεβρες

Στις επόμενες παραγράφους θα προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε με όσο το δυνατό πιο φυσικό τρόπο βασικές έννοιες και αποτελέσματα του Κεφαλαίου 2. Η γενίκευση αυτή θα στηριχθεί σε μεγάλο βαθμό στην έννοια του σταθερού σημείου τελεστή που αναπτύξαμε. Θα αρχίσουμε επανεξετάζοντας την έννοια του συστήματος εξισώσεων την οποία ήδη έχουμε μεταλλάξει αρκετές φορές. Στην αρχή είχαμε ορίσει το επίπεδο σύστημα εξισώσεων το οποίο είναι επίσης μία τριάδα

$$\mathcal{E} = \langle X, A, e \rangle,$$

όπου e είναι συνάρτηση από το X στο $\mathcal{P}(X \cup A)$. Έπειτα (κι από άλλα στάδια) περάσαμε στον ορισμό του γενικού συστήματος εξισώσεων το οποίο είναι επίσης μία τριάδα

$$\mathcal{E} = \langle X, A, e \rangle,$$

όπου όμως e αυτή τη φορά είναι συνάρτηση από το X στο $V_{afa}[X \cup A]$.

Παρατηρούμε ότι ένα σύστημα εξισώσεων γενικά δεν είναι τίποτα άλλο από ένα σύνολο (ατόμων) μαζί με μία απεικόνιση του συνόλου αυτού σε κάποιο σύνολο συνόλων. Μάλιστα θα μπορούσαμε να έχουμε ορίσει εξ' αρχής το σύστημα εξισώσεων να είναι δυάδα

$$\mathcal{E} = \langle X, e \rangle,$$

όπου X και e θα είναι όπως πριν και στο οποίο το A θα μπορούσε να οριστεί να είναι το σύνολο $support(ran(e)) \setminus X$.

Ορισμός 3.6. Έστω Γ-μονότονος τελεστής. Γ-*συνάλγεβρα* (Γ-*coalgebra*) είναι κάθε διατεταγμένο ζεύγος

$$\mathcal{E} = \langle b, e \rangle,$$

όπου b είναι κλάση (όχι απαραίτητα γνήσια) και e είναι συνάρτηση από το b στο $\Gamma(b)$.

Ήδη με μια πρώτη ματιά η έννοια της συνάλγεβρας μοιάζει να έχει πολλά κοινά με αυτή του συστήματος εξισώσεων. Πράγματι, έστω $\mathcal{E} = \langle X, A, e \rangle$ ένα επίπεδο σύστημα εξισώσεων και Pow^A ο τελεστής που ορίζεται έτσι ώστε για κάθε $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$Pow^A(a) = \mathcal{P}(A \cup a).$$

Έστω τώρα $\mathcal{E}' = \langle X, e' \rangle$ η Pow^A-συνάλγεβρα, όπου $e' : X \to Pow^A(X)$ με

$$e'_x = e_x, \text{ για κάθε } x \in X.$$

Εύκολα φαίνεται ότι τα $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}'$ περιγράφουν ουσιαστικά το ίδιο αντικείμενο.

Παρατήρηση 3.9. Αξίζει να σχολιάσουμε ότι οι λύσεις του συστήματος εξισώσεων $\mathcal{E}$ βρίσκονται στο μέγιστο σταθερό σημείο του μονότονου τελεστή $Pow^{X \cup A}$ (βλέπε ανάλογα παραδείγματα προηγούμενης παραγράφου). Δηλαδή

$$solution\text{-}set(\mathcal{E}) \subseteq V_{afa}[\mathcal{U}] = (Pow^{X \cup A})^*.$$

Το ότι το σύνολο λύσεων ενός συστήματος εξισώσεων περιέχεται στο μέγιστο σταθερό σημείο κάποιου κατάλληλου τελεστή είναι αναδιατύπωση ενός σημαντικού θεωρήματος που θα συναντήσουμε σε επόμενη παράγραφο και το οποίο ονομάζουμε Γενικό Λήμμα Επίλυσης για Τελεστές.

Στον ορισμό της $\mathcal{E}'$ είναι σημαντικό να προσέξουμε ότι τα άτομα του συνόλου X δεν βρίσκονται πουθενά μέσα στον τελεστή Pow^A, μιας και $A \cap X = \emptyset$ (αφού το $\mathcal{E} = \langle X, A, e \rangle$ είναι επίπεδο σύστημα εξισώσεων). Αυτό δυστυχώς δεν ισχύει αναγκαστικά για τυχαία συνάλγεβρα. Θέλοντας λοιπόν να ξεχωρίσουμε αυτές τις προβληματικές περιπτώσεις οδηγούμαστε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 3.7. Έστω Γ μονότονος τελεστής. Ένα σύνολο $X \subseteq \mathcal{U}$ καλείται *νέο για τον* Γ (*new for* Γ) αν για κάθε αντικατάσταση t με $dom(t) = X$, και για κάθε $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$ ισχύει ότι

$$\Gamma(a[t]) = \Gamma(a)[t].$$

Παράδειγμα 3.10. Ένας από τους πιο απλούς μονότονους τελεστές που συναντήσαμε μέχρι τώρα είναι ο *Pow*. Θα δείξουμε ότι γι' αυτόν κάθε σύνολο $X \subseteq \mathcal{U}$ είναι νέο. Έστω λοιπόν $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$ και t αντικατάσταση με $dom(t) = X$. Θα δείξουμε ότι

$$Pow(a[t]) = Pow(a)[t].$$

Έστω $b \in Pow(a[t]) = \mathcal{P}(a[t])$, δηλαδή $b \subseteq a[t]$. Έστω c τέτοιο ώστε

$$c = \{d \in a \mid d[t] \in b\}.$$

Προφανώς $c[t] = b$ και $c \in Pow(a)$, άρα

$$b \in Pow(a)[t].$$

Έστω τώρα $b \in Pow(a)[t] = \mathcal{P}(a)[t]$. Τότε υπάρχει c τέτοιο ώστε

$$c \subseteq a \text{ και } b = c[t].$$

Άρα $c[t] \subseteq a[t]$, οπότε

$$b \in Pow(a[t]).$$

Όμοια με τον *Pow*, δείχνεται ότι και για τον Pow_f κάθε σύνολο ατόμων είναι νέο.

Παράδειγμα 3.11. Ο τελεστής Pow^A δεν συμπεριφέρεται όπως και ο *Pow* (φυσικά μιλάμε για την περίπτωση όπου $A \neq \emptyset$), μιας και υπάρχουν σύνολα ατόμων τα οποία δεν είναι νέα γι' αυτόν. Για παράδειγμα έστω $A = \{p\}$, $X = \{p\}$ και t αντικατάσταση με $t(p) = q$, όπου $p, q \in \mathcal{U}$ και $p \neq q$. Τότε έχουμε

$$Pow^A(\emptyset[t]) = \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\{p\}),$$

ενώ

$$Pow^A(\emptyset)[t] = \mathcal{P}(A)[t] = \mathcal{P}(\{q\}),$$

Επομένως το $\{p\}$ δεν είναι νέο για τον $Pow^{\{p\}}$.

Ωστόσο ισχύει μία ανάλογη γενική πρόταση για τον Pow^A (όπως για τον *Pow*). Κάθε σύνολο $X \subseteq \mathcal{U}$ για το οποίο ισχύει $X \cap A = \emptyset$ είναι νέο για τον Pow^A. Έστω $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$ και t αντικατάσταση με $dom(t) = X$. Τότε

$$\begin{aligned} Pow^A(a[t]) &= \mathcal{P}(A \cup a[t]) \\ &= \mathcal{P}((A \cup a)[t]) && (dom(t) \cap A = \emptyset) \\ &= \mathcal{P}(A \cup a)[t] && (\text{Παράδειγμα } 3.10) \\ &= Pow^A(a)[t]. \end{aligned}$$

Όμοια με παραπάνω παίρνουμε ότι και για τον Pow_f^A κάθε σύνολο ατόμων ξένο με το A είναι νέο.

Παράδειγμα 3.12. Για τον τελεστή *Fun* ισχύει ότι κανένα σύνολο ατόμων με τρία διαφορετικά στοιχεία δεν είναι νέο. Έστω για παράδειγμα $X = \{p, q, r\}$, $a = X$ και t αντικατάσταση με

$$\begin{aligned} t(p) &= q \\ t(q) &= q \\ t(r) &= r. \end{aligned}$$

Τότε

$$b = \{\langle p, q\rangle, \langle q, r\rangle\} \in \mathit{Fun}(a),$$

επομένως

$$b[t] = \{\langle p, q\rangle, \langle q, r\rangle\}[t] = \{\langle q, q\rangle, \langle q, r\rangle\} \in \mathit{Fun}(a)[t],$$

το οποίο είναι άτοπο μιας και το $b[t]$ δεν είναι συνάρτηση. Άρα

$$\mathit{Fun}(a)[t] \neq \mathit{Fun}(a[t]).$$

Ο παρακάτω ορισμός έρχεται να ονομάσει τις υγιείς περιπτώσεις συναλγεβρών που θέλουμε να μελετήσουμε προς το παρόν.

Ορισμός 3.8. Έστω Γ μονότονος τελεστής. *Επίπεδη* Γ*-συνάλγεβρα* (*Flat* Γ*-coalgebra*) θα ονομάζουμε κάθε Γ-συνάλγεβρα $\mathcal{E} = \langle X, e\rangle$ στην οποία το X είναι σύνολο ατόμων νέο για τον Γ.

Παρατήρηση 3.10. 1. Ο όρος "συνάλγεβρα" που εισάγαμε στην παράγραφο αυτή προέρχεται από τη θεωρία κατηγοριών. Θα ήταν ωφέλιμο να διασαφηνίσουμε κάπως την παραπάνω ορολογία, μιας και έμμεσα θα βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση και άλλων εννοιών που θα συναντήσουμε από εδώ και πέρα (αλλά και της ίδιας της έννοιας της συναναδρομής που είναι και το θέμα ολόκληρου του κεφαλαίου).

Με τον όρο "άλγεβρα" στα μαθηματικά συνήθως[8] εννοούμε μία δομή

$$\mathfrak{A} = \langle A, f_0, f_1, \ldots\rangle,$$

όπου f_i είναι συναρτήσεις από το $A \times A$ στο A. Παρατηρούμε εύκολα ότι η άλγεβρα περιγράφεται πλήρως από την δράση των f_i πάνω στο $A \times A$. Επομένως κάλλιστα θα μπορούσαμε να ορίσουμε άλγεβρα $\mathfrak{A}$ να είναι το ζεύγος

$$\langle A, f\rangle,$$

όπου

$$f : T(A) \to A$$

με $T(A) = \omega \times A \times A$ και $f(i, a, b) = f_i(a, b)$ για κάθε $i \in \omega$, $a, b \in A$. Δηλαδή η άλγεβρα δεν είναι τίποτα άλλο από μία απεικόνιση

$$T(A) \xrightarrow{f} A$$

[8]Για ευκολία θα περιοριστούμε σε άλγεβρες με διμελείς πράξεις.

Από την άλλη τώρα η συνάλγεβρα είναι ένα ζεύγος

$$\langle X, e\rangle,$$

όπου

$$e : X \to \Gamma(X).$$

Δηλαδή ουσιαστικά είναι κι αυτή μια απεικόνιση

$$\Gamma(X) \xleftarrow{\;e\;} X$$

Στη θεωρία κατηγοριών είναι αρκετά συνηθισμένο να χρησιμοποιούμε το πρόθεμα "συν" ("co" στα αγγλικά) μπροστά από το όνομα (στην περίπτωσή μας "άλγεβρα" ή "algebra" στα αγγλικά) μιας έννοιας η οποία προκύπτει από κάποια άλλη με απλή αντιστροφή κάποιων βελών.

2. Συνοψίζοντας αυτή την παράγραφο σε μία πρόταση θα λέγαμε ότι

> "Η συνάλγεβρα είναι η φυσική γενίκευση της έννοιας του συστήματος εξισώσεων σε ένα τυχαίο μονότονο τελεστή."

3.4 Μορφισμοί

Ακολουθώντας τη συνήθεια στα μαθηματικά, μετά από τον ορισμό μιας αλγεβρικής δομής οδηγούμαστε στη μελέτη των συναρτήσεων μεταξύ τέτοιων δομών. Η πρακτική αυτή πηγάζει από την ανάγκη μας να διακρίνουμε ποιοτικά τις δομές. Ο καλύτερος τρόπος να γίνει αυτό είναι μελετώντας συναρτήσεις που σέβονται τις πράξεις. Στην άλγεβρα οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται μορφισμοί. Επιθυμούμε λοιπόν κι εδώ να ορίσουμε μία παραπλήσια έννοια μορφισμού συναλγεβρών ώστε να αντλήσουμε πληροφορίες για την ίδια τη δομή των συναλγεβρών που εξετάζουμε.

Ποιο όμως είναι το αντίστοιχο των πράξεων στην περίπτωση μιας συνάλγεβρας $\mathcal{E} = \langle a, e\rangle$; Ο μόνος υποψήφιος είναι η συνάρτηση e, επομένως εδώ τα πράγματα είναι καθαρά. Από την άλλη όμως τι ακριβώς θα εννοούμε όταν θα λέμε για παράδειγμα ότι ο μορφισμός των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}'$ με $\mathcal{E} = \langle a, e\rangle$ και $\mathcal{E}' = \langle a', e'\rangle$ "σέβεται" τις e και e'; Αυτό πιστεύουμε θα φανεί καλύτερα αν θυμηθούμε απλά αντίστοιχη περίπτωση στη θεωρία ομάδων.

> Έστω $G = \langle A, +\rangle$, $H = \langle B, \cdot\rangle$ ομάδες και f μορφισμός από την G στην H. Τότε η f είναι συνάρτηση από το A στο B και επίσης
>
> $$f(a + b) = f(a) \cdot f(b), \text{ για κάθε } a, b \in G.$$

Αναλόγως θα μπορούσαμε να απαιτήσουμε και στην περίπτωση των συναλγεβρών.

> Έστω $\mathcal{E} = \langle a, e\rangle$, $\mathcal{E}' = \langle a', e'\rangle$ συνάλγεβρες και f μορφισμός από την $\mathcal{E}$ στην $\mathcal{E}'$. Τότε η f είναι συνάρτηση από το a στο a' και επίσης
>
> $$f(e(b)) = e'(f(b)), \text{ για κάθε } b \in a.$$

Οι παρακάτω ορισμοί προέρχονται από τις προηγούμενες παρατηρήσεις.

Ορισμός 3.9. Έστω Γ μονότονος τελεστής και $\mathcal{E} = \langle a, e\rangle$, $\mathcal{E}' = \langle a', e'\rangle$ Γ-συνάλγεβρες.

i. Γ-*μορφισμός* (Γ-*morphism*) από την $\mathcal{E}$ στην $\mathcal{E}'$ θα καλείται κάθε αντικατάσταση r για την οποία ισχύει

$$e_b[r] = e'(b[r]), \quad \text{για κάθε } b \in a.$$

γράφουμε συμβολικά $r : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$.

ii. *Αναδιοργάνωση* (*Reorganization*) του $\mathcal{E}$ στο $\mathcal{E}'$ θα καλείται κάθε μορφισμός $r : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ για τον οποίο ισχύει

$$a[r] = a'.$$

Για μεγαλύτερη ευκολία θα εισάγουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 3.10. Έστω r αντικατάσταση και $A \in V_{afa}[\mathcal{U}]$. Ορίζουμε $[r]_a$ να είναι ο περιορισμός του τελεστή αντικατάστασης $[r]$ στο σύνολο a, δηλαδή

$$[r]_a = [r] \upharpoonright a.$$

Παρατήρηση 3.11. 1. Ο Ορισμός 3.9.i μπορεί να αναδιατυπωθεί πλέον ακόμα πιο απλά.

i′. Γ-μορφισμός από την $\mathcal{E}$ στην $\mathcal{E}'$ θα καλείται κάθε αντικατάσταση r για την οποία ισχύει

$$e' \circ [r]_a = [r]_{\Gamma(a)} \circ e.$$

2. Μιας και κινούμαστε πάντα σε ένα πλαίσιο παράλληλο με την άλγεβρα και αφού αυτά που λέμε αφορούν σε μορφισμούς καλό είναι να δώσουμε και έναν ορισμό ισοδύναμο του 3.9.i εκφρασμένο με όρους διαγραμμάτων.

i″. Γ-μορφισμός από την $\mathcal{E}$ στην $\mathcal{E}'$ θα καλείται κάθε αντικατάσταση r η οποία καθιστά το παρακάτω διάγραμμα αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "e"] \arrow[d, "{[r]_a}"'] & \Gamma(a) \arrow[d, "{[r]_{\Gamma(a)}}"] \\ a' \arrow[r, "e'"'] & \Gamma(a') \end{tikzcd}$$

3. Έστω $\mathcal{E} = \langle X, e\rangle$, $\mathcal{E}' = \langle X', e'\rangle$ επίπεδες συνάλγεβρες και r μορφισμός από την $\mathcal{E}$ στην $\mathcal{E}'$. Τότε εύκολα

$$dom(e' \star r) = dom(r \star e)$$

και

$$r_x[e'] = e_x[r] \ \text{ για κάθε } x \in X.$$

Άρα

$$e' \star r = r \star e.$$

Αντίστροφα τώρα, αν $e' \star r = r \star e$, τότε

$$dom(r) = dom(e' \star r) = dom(r \star e) = dom(e) = X.$$

και από τον ορισμό του $\star$ παίρνουμε

$$r_x[e'] = e_x[r] \ \text{ για κάθε } x \in dom(r) = X.$$

Άρα η r είναι Γ-μορφισμός.

Επομένως για την περίπτωση επίπεδων συναλγεβρών $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}'$ θα μπορούσαμε να ορίσουμε εναλλακτικά τον 3.9.i ως εξής

i‴. Γ-μορφισμός από την $\mathcal{E}$ στην $\mathcal{E}'$ θα καλείται κάθε αντικατάσταση r για την οποία ισχύει

$$e' \star r = r \star e.$$

4. Στην περίπτωση τυχαίων αλγεβρικών δομών $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ που περιγράφονται από τις συναρτήσεις $g : T(A) \to A$ και $h : T(B) \to B$ (βλέπε Παρατήρηση 3.10) και μορφισμού $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ έχουμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & T(A) \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "T(f)"] \\
B & T(B) \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

Η $T(f)$ είναι η μοναδική συνάρτηση που καθιστά το διάγραμμα αντιμεταθετικό, δηλαδή ισχύει

$$h \circ T(f) = f \circ g.$$

Παρατηρούμε ότι

- η παραπάνω σχέση μοιάζει πάρα πολύ με αυτή της Παρατήρησης 3.11.1.
- το διάγραμμα αυτό διαφέρει από αυτό της Παρατήρησης 3.11.2 μόνο στη φορά των βελών (κάτι που περιμέναμε βάση της Παρατήρησης 3.10).

Αυτά συνηγορούν στο ότι ο ορισμός του Γ-μορφισμού που δώσαμε συνάδει με την πρόθεση να περάσουμε την έννοια του μορφισμού αλγεβρικών δομών στο πλαίσιο των συναλγεβρών.

Αν μία συνάλγεβρα είναι απλά αναδιοργάνωση κάποιας άλλης, τότε ουσιαστικά οι δύο συνάλγεβρες είναι ίδιες.

Πρόταση 3.12. *Έστω r αναδιοργάνωση του $\mathcal{E} = \langle a, e\rangle$ στο $\mathcal{E}' = \langle a', e'\rangle$. Τότε*

$$\mathcal{E}[r] = \mathcal{E}' .$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e[r] &= \{\langle b, e_b\rangle \mid b \in a\}[r] \\ &= \{\langle b[r], e_b[r]\rangle \mid b \in a\} && \text{(ορισμός τελεστή αντικατ.)} \\ &= \{\langle b[r], e'(b[r])\rangle \mid b \in a\} && \text{(r μορφισμός)} \\ &= e' && \text{(r επί).} \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[r] &= \langle a, e\rangle[r] \\ &= \langle a[r], e[r]\rangle && \text{(ορισμός τελεστή αντικατ.)} \\ &= \langle a', e'\rangle && \text{(προηγ. σχέση)} \\ &= \mathcal{E}' . \end{aligned}$$ ⊣

Στην επόμενη παράγραφο θα δείξουμε ότι αν $\mathcal{E}'$ είναι αναδιοργάνωση της $\mathcal{E}$, τότε $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}'$ έχουν τις ίδιες "λύσεις". Αλλά πρώτα πρέπει να ορίσουμε τι είναι λύση.

3.5 Λύσεις

Έχουμε πλέον αρχίσει να συνηθίζουμε στην ιδέα ότι η συνάλγεβρα είναι ουσιαστικά μία γενίκευση του συστήματος εξισώσεων. Είναι λογικό λοιπόν να προσπαθήσουμε να ορίσουμε και για τις συνάλγεβρες την έννοια της λύσης που είναι άρρηκτα δεμένη με τα συστήματα εξισώσεων. Θέλουμε μάλιστα αυτός ο ορισμός να συμφωνεί όσο το δυνατό περισσότερο με αυτό που δώσαμε εκεί.

Έστω $\mathcal{E} = \langle a, e\rangle$ μία Γ-συνάλγεβρα. Καταρχάς η συνθήκη που θα θέλαμε να ικανοποιεί η λύση της $\mathcal{E}$ θα πρέπει να είναι αντίστοιχη με αυτής των συστημάτων εξισώσεων, δηλαδή θα πρέπει

$$s_b = e_b[s] \ \text{ για κάθε } b \in a. \tag{3.1}$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι γενικά δεν είναι δυνατό κάθε συνάλγεβρα $\mathcal{E}$ να έχει λύση s που να ικανοποιεί μια τέτοια σχέση. Για παράδειγμα αν $e_b \in \mathcal{U}$, για κάποιο $b \in a$, δεν υπάρχει λύση για την $\mathcal{E}$. Ποιές συνάλγεβρες λοιπόν επιδέχονται λύση; Ας υποθέσουμε ότι η $\mathcal{E}$ είναι επίπεδη (οπότε $a \subseteq \mathcal{U}$) και ότι ο Γ είναι γνήσιος. Τότε

$$e : a \to \Gamma(a) \subseteq V_{afa}[\mathcal{U}]$$

και επομένως η $\mathcal{E}$ είναι απλά ένα γενικευμένο σύστημα εξισώσεων[9] το οποίο βάση του Γενικού Λήμματος Επίλυσης έχει μοναδική λύση, δηλαδή υπάρχει αντικατάσταση s που ικανοποιεί την (3.1). Αυτά μας αρκούν για να προχωρήσουμε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 3.11. Έστω Γ μονότονος γνήσιος τελεστής και $\mathcal{E} = \langle X, e\rangle$ επίπεδη Γ-συνάλγεβρα. Μία αντικατάσταση θα ονομάζεται *λύση* της $\mathcal{E}$ αν

$$dom(s) = X \ \ \& \ \ s_x = e_x[s], \text{ για κάθε } x \in X.$$

Ορίζουμε επίσης το *σύνολο λύσεων* της $\mathcal{E}$ να είναι το σύνολο

$$solution\text{-}set(\mathcal{E}) = ran(s).$$

Ο ορισμός δυστυχώς δεν μας δίνει πολλές πληροφορίες για τη φύση των λύσεων αυτών. Γνωρίζουμε βεβαίως από το Γενικό Λήμμα Επίλυσης ότι η λύση αυτή είναι μοναδική και ότι βρίσκεται στην κλάση $V_{afa}[\mathcal{U}]$ (ή για να είμαστε πιο ακριβείς στην κλάση $V_{afa}[support(ran(e)) \setminus X]$), αλλά δεν γνωρίζουμε πώς αυτό εξαρτάται από τον τελεστή Γ. Πού ακριβώς βρίσκεται το σύνολο λύσεων της $\mathcal{E}$ (σε σχέση με τον τελεστή Γ πάντα); Σε αυτά θα απαντήσουμε με τα επόμενα αποτελέσματα, αφού πρώτα ορίσουμε μία χρήσιμη γενίκευση της έννοιας του κανονικού συστήματος εξισώσεων.

Ορισμός 3.12. Έστω Γ μονότονος τελεστής. Μία Γ-συνάλγεβρα $\langle a, e\rangle$ θα ονομάζεται *κανονική* (*canonical*) αν

$$e_b = b, \quad \text{για κάθε } b \in a.$$

Παράδειγμα 3.13. Αν Γ μονότονος τελεστής, τότε η Γ-συνάλγεβρα $\langle \Gamma^*, id_{\Gamma^*}\rangle$, όπου id_{Γ^*} η ταυτοτική στο Γ^*, είναι κανονική.

Λήμμα 3.13. *Έστω Γ μονότονος τελεστής, $\mathcal{E} = \langle X, e\rangle$ επίπεδη Γ-συνάλγεβρα και s αντικατάσταση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

i. *Η s είναι λύση της $\mathcal{E}$.*

ii. $s \star e = s$.

iii. $dom(s) = X$ *και* $\mathcal{E}[s]$ *είναι κανονική* Γ-*συνάλγεβρα.*

iv. *Η s αναδιοργανώνει την $\mathcal{E}$ σε κάποια κανονική Γ-συνάλγεβρα.*

v. *Η s είναι Γ-μορφισμός από την $\mathcal{E}$ στην $\langle \Gamma^*, id_{\Gamma^*}\rangle$, όπου id_{Γ^*} η ταυτοτική στο Γ^*.*

Απόδειξη. ((i)⇒(ii)) Εφόσον s λύση της $\mathcal{E}$ θα έχουμε

$$dom(s) = X$$

[9] Το γενικευμένο σύστημα εξισώσεων $\mathcal{E}' = \langle X, support(ran(e) \setminus X), e\rangle$ (βλέπε Παράγραφο 3.2).

και
$$s_x = e_x[s], \text{ για κάθε } x \in X.$$
Άρα
$$s \star e = s.$$

((ii)⇒(iii)) Καταρχάς εφόσον $s \star e = s$ θα έχουμε
$$dom(s) = dom(s \star e) = dom(e) = X.$$
Μένει λοιπόν να δείξουμε ακόμα ότι η $\mathcal{E}[s]$ είναι κανονική Γ-συνάλγεβρα.

Έχουμε
$$\mathcal{E}[s] = \langle X, e\rangle[s] = \langle X[s], e[s]\rangle.$$
Ισχύει ότι
$$\begin{aligned}
e[s] &= \{\langle x, e_x\rangle \mid x \in X\}[s] & \\
&= \{\langle x, e_x\rangle[s] \mid x \in X\} & \text{(ορισμός τελεστή αντικατ.)}\\
&= \{\langle x[s], e_x[s]\rangle \mid x \in X\} & \text{(ορισμός τελεστή αντικατ.)}\\
&= \{\langle s_x, (s \star e)_x\rangle \mid x \in X\} & (\text{ορισμός } \star)\\
&= \{\langle s_x, s_x\rangle \mid x \in X\} & (s \star e = s).
\end{aligned}$$
Άρα $dom(e[s]) = ran(e[s]) = X[s]$. Επίσης, αν $a \in X[s]$, τότε
$$a = x[s], \text{ για κάποιο } x \in X$$
και
$$(e[s])_a = (e[s])_{s_x} = s_x.$$
Δηλαδή για κάθε $a \in X[s]$,
$$(e[s])_a = a.$$
Τέλος θα δείξουμε ότι $ran(e[s]) \subseteq \Gamma(X[s])$, οπότε η $\mathcal{E}[s]$ είναι Γ-συνάλγεβρα. Ισχύει ότι
$$\begin{aligned}
ran(e[s]) = X[s] = X[e][s] \quad & (\text{για κάθε } x \in X,\ x[e][s] = e_x[s] = \\
& \qquad = (s \star e)_x = s_x = x[s])\\
\subseteq \Gamma(X)[s] \quad & (ran(e) \subseteq \Gamma(X))\\
= \Gamma(X[s]) \quad & (dom(s) = X \text{ και } X \text{ νέο για τον } \Gamma).
\end{aligned}$$

((iii)⇒(iv)) Θα δείξουμε ότι η s αναδιοργανώνει την $\mathcal{E}$ στην $\mathcal{E}[s]$. Εφόσον $\mathcal{E}[s] = \langle X[s], e[s]\rangle$, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει
$$e[s] \circ [s]_X = [s]_{\Gamma(x)} \circ e.$$

Προφανώς οι δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού X. Επίσης, εφόσον η $e[s]$ είναι ταυτοτική στο $X[s]$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} e[s] &= \{\langle x, e_x\rangle \mid x \in X\}[s] \\ &= \{\langle s_x, e_x[s]\rangle \mid x \in X\} && \text{(ορισμός τελ. αντικατ.)} \\ &= id_{X[s]}\,. \end{aligned}$$

Δηλαδή για κάθε $x \in X$,

$$s_x = e_x[s].$$

Επομένως για κάθε $x \in X$,

$$\begin{aligned} (e[s] \circ [s]_X)_x &= e[s]_{s_x} \\ &= s_x && (e[s] \text{ ταυτοτική στο } X[s]) \\ &= e_x[s] \\ &= e_x[s]_{\Gamma(X)} && (e_x \in \Gamma(X)) \\ &= ([s]_{\Gamma(X)} \circ e)_x. \end{aligned}$$

((iv)⇒(v)) Έστω τώρα ότι η s αναδιοργανώνει την $\mathcal{E}$ στην κανονική Γ-συνάλγεβρα $\mathcal{E}' = \langle a, e'\rangle$. Τότε $a = X[s]$ και επίσης αφού η s είναι μορφισμός θα ισχύει ότι για κάθε $x \in X$

$$\begin{aligned} (e' \circ [s]_X)_x = ([s]_{\Gamma(X)} \circ e)_x &\Rightarrow e'_{s_x} = e_x[s] \\ &\Rightarrow\ s_x = e_x[s] && (e' \text{ ταυτοτική στο } X[s]). \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} a &= X[s] \\ &= X[e][s] && (\text{για κάθε } x \in X,\, x[e][s] = e_x[s] = s_x) \\ &\subseteq \Gamma(X)[s] && (ran(e) \subseteq \Gamma(X)) \\ &= \Gamma(X[s]) && (dom(s) = X \text{ και } X \text{ νέο για τον } \Gamma) \\ &= \Gamma(a), \end{aligned}$$

δηλαδή το a είναι Γ-ορθό. Επομένως από το θεώρημα μέγιστου σταθερού σημείου παίρνουμε ότι

$$a \subseteq \Gamma^*.$$

Επομένως η s είναι Γ-μορφισμός από την $\mathcal{E}$ στην $\langle \Gamma^*, id_{\Gamma^*}\rangle$.

((v)⇒(i)) Η s είναι μορφισμός, άρα για κάθε $x \in X$

$$(id_{\Gamma^*} \circ [s]_X)_x = ([s]_{\Gamma(X)} \circ e)_x \Rightarrow s_x = e_x[s],$$

δηλαδή s λύση της $\mathcal{E}$. $\dashv$

Παρατήρηση 3.12. Σχηματικά το Λήμμα 3.13.iv μπορεί να αποδωθεί από το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "s"'] & \Gamma(X) \arrow[dl, "{[s]_{\Gamma(X)}}"] \\
\Gamma^* &
\end{tikzcd}$$

το οποίο είναι αντιμεταθετικό αφού η s είναι μορφισμός, οπότε

$$[s]_{\Gamma(X)} \circ e = id_{\Gamma^*} \circ [s]_X .$$

Επίσης σχηματικά μπορεί να περιγραφεί και το Λήμμα 3.13.v ως εξής

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "s"'] & \Gamma(X) \arrow[d, "{[s]_{\Gamma(a)}}"] \\
a \arrow[r, "id_a"'] & \Gamma(a)
\end{tikzcd}$$

όπου και αυτό το διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό αφού s μορφισμός και επομένως

$$[s]_{\Gamma(a)} \circ e = id_a \circ [s]_a .$$

Πόρισμα 3.14 (Λήμμα Επίλυσης για Τελεστές). *Έστω Γ μονότονος γνήσιος τελεστής και $\mathcal{E} = \langle X, e \rangle$ επίπεδη Γ-συνάλγεβρα. Τότε η $\mathcal{E}$ έχει μοναδική λύση και*

$$\textit{solution-set}(\mathcal{E}) \subseteq \Gamma^* .$$

Απόδειξη. Έστω

$$\mathcal{E}' = \langle X, support(ran(e)) \setminus X, e \rangle .$$

Το $\mathcal{E}'$ είναι γενικό σύστημα εξισώσεων και επομένως από το Γενικό Λήμμα Επίλυσης έχει μοναδική λύση s' για την οποία ισχύει ότι

$$dom(s') = X \ \text{ και } \ s'_x = e_x[s'], \text{ για κάθε } x \in X .$$

Άρα η s' είναι μοναδική λύση και της $\mathcal{E}$.

Από το Λήμμα 3.13.v τώρα παίρνουμε ότι

$$\textit{solution-set}(\mathcal{E}) = ran(s') \subseteq \Gamma^* . \qquad \dashv$$

Η επόμενη πρόταση συνδέει την έννοια της λύσης με αυτή της αναδιοργάνωσης.

Πρόταση 3.15. *Έστω γνήσιος τελεστής* Γ, $\mathcal{E} = \langle X, e\rangle$ *και* $\mathcal{E}' = \langle X', e'\rangle$ *επίπεδες* Γ*-συνάλγεβρες. Έστω επίσης* $r : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ Γ*-μορφισμός με* $\mathrm{dom}(r) = X$ *και* s *λύση της* $\mathcal{E}'$*. Τότε η* $s \circ r$ *είναι λύση της* $\mathcal{E}$*. Αν μάλιστα η* r *είναι αναδιοργάνωση, τότε τα* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{E}'$ *έχουν κοινά σύνολα λύσεων.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
(s \star r) \star e &= s \star (r \star e) && \text{(Πρόταση 2.8.ii)}\\
&= s \star (e' \star r) && \text{(Παρατήρηση 3.11.3)}\\
&= (s \star e') \star r && \text{(Πρόταση 2.8.ii)}\\
&= s \star e && \text{(Λήμμα 3.13.ii)}.
\end{aligned}$$

Άρα $s \star r = s \circ r$ είναι λύση της $\mathcal{E}$.

Αν τώρα r είναι αναδιοργάνωση, τότε $X[r] = X'$, οπότε

$$X[s \star r] = \{r_x[s] \mid x \in X\} = \textit{solution-set}(\mathcal{E}'). \qquad \dashv$$

3.6 Ομοιόμορφοι τελεστές

Από το Λήμμα Επίλυσης για τελεστές εύκολα παίρνουμε ότι για κάθε τελεστή Γ, όλα τα σύνολα λύσεων επίπεδων Γ-συναλγεβρών περιέχονται στο σταθερό σημείο Γ^*, δηλαδή για κάθε $\mathcal{E}$ επίπεδη Γ-συνάλγεβρα έχουμε

$$\textit{solution-set}(\mathcal{E}) \subseteq \Gamma^*,$$

οπότε

$$\bigcup\{\textit{solution-set}(\mathcal{E}) \mid \mathcal{E} \text{ επίπεδη } \Gamma\text{-συνάλγεβρα}\} \subseteq \Gamma^*. \tag{3.2}$$

Ισχύει άραγε η ισότητα στην παραπάνω σχέση; Θα μπορούσε δηλαδή η (3.2) να αποτελέσει ένα νέο χαρακτηρισμό για το Γ^* (πέρα από αυτόν του Θεωρήματος 3.8); Η απάντηση είναι γενικά όχι. Ας πάρουμε για παράδειγμα τον τελεστή *Fun*. Γνωρίζουμε (από Παράδειγμα 3.12) ότι κανένα σύνολο ατόμων με περισσότερα από δύο στοιχεία δεν μπορεί να είναι νέο γι' αυτόν. Άρα οι επίπεδες *Fun*-συνάλγεβρες $\langle X, e\rangle$ (για σταθερό σύνολο X) είναι πεπερασμένου πλήθους, αφού υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους συναρτήσεις e από το X στο $\mathit{Fun}(X)$ (δηλαδή *Fun*-μορφές). Επομένως η ένωση των συνόλων λύσεων όλων των επίπεδων συναλγεβρών είναι πεπερασμένη. Αλλά ξέρουμε (πάλι από Παράδειγμα 3.12) ότι το Fun^* είναι γνήσια κλάση, οπότε

$$\bigcup\{\textit{solution-set}(\mathcal{E}) \mid \mathcal{E} \text{ επίπεδη } \mathit{Fun}\text{-συνάλγεβρα}\} \subsetneq \mathit{Fun}^*.$$

Όπως είδαμε η ισότητα δεν ισχύει γενικά στην (3.2). Παρόλα αυτά όμως υπάρχει μία κατηγορία τελεστών, για την οποία ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα και για την οποία ισχύει η ισότητα. Αυτό το είδος τελεστών λοιπόν θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε και να μελετήσουμε.

Ορισμός 3.13. Ένας τελεστής Γ θα λέμε ότι *αντιμετατίθεται με όλες σχεδόν τις αντικαταστάσεις* (*commutes with almost all substitutions*) αν σχεδόν όλα τα σύνολα ατόμων είναι νέα γι' αυτόν, δηλαδή αν υπάρχει σύνολο $X_\Gamma \subseteq \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε κάθε σύνολο $Y \subseteq \mathcal{U}$ με $Y \cap X_\Gamma = \emptyset$ είναι νέο για τον Γ. Το σύνολο X_Γ θα το ονομάζουμε *σύνολο αποφυγής* (*avoidance set*) για τον Γ.

Παρατήρηση 3.13. Η έκφραση "σχεδόν όλα" στον ορισμό δηλώνει απλά ότι το σύνολο αποφυγής είναι σύνολο και όχι γνήσια κλάση, δηλαδή με μία έννοια είναι "μικρό" και επομένως η κλάση όλων των ξένων προς αυτό συνόλων είναι "μεγάλη".

Ορισμός 3.14. Ένας τελεστής Γ θα ονομάζεται *ομοιόμορφος* (*uniform*) αν είναι μονότονος, γνήσιος και αντιμετατίθεται με όλες σχεδόν τις αντικαταστάσεις.

Παράδειγμα 3.14. Στο Παράδειγμα 3.10 είχαμε δει ότι για τους τελεστές Pow και Pow_f κάθε σύνολο ατόμων είναι νέο, δηλαδή τα σύνολα διαφυγής τους είναι το κενό σύνολο

$$X_{Pow} = X_{Pow_f} = \emptyset.$$

Επίσης στην ίδια παράγραφο (Παράδειγμα 3.11)είχαμε αποδείξει ότι για τους τελεστές Pow^A και Pow_f^A (για $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{U}$) κάθε σύνολο ατόμων ξένο προς το A είναι νέο, δηλαδή τα σύνολα διαφυγής τους είναι το σύνολο A

$$X_{Pow^A} = X_{Pow_f^A} = A.$$

Παρατήρηση 3.14. 1. Φυσικά δεν είναι όλοι οι τελεστές ομοιόμορφοι. Ήδη έχουμε δει παραδείγματα μη μονότονων ή μη γνήσιων τελεστών (βλέπε Παρατήρηση 3.2).

2. Υπάρχουν μη ομοιόμορφοι τελεστές οι οποίοι είναι μονότονοι και γνήσιοι. Ένα παράδειγμα είναι ο τελεστής *Fun* που αναφέραμε λίγο πριν. Για τον τελεστή αυτόν έχουμε δει ότι κάθε σύνολο ατόμων με περισσότερα από δύο στοιχεία δεν είναι νέο, άρα το σύνολο διαφυγής X_Γ αν υπήρχε θα έπρεπε να συμπεριλαμβάνει όλα αυτά τα σύνολα, το οποίο είναι άτοπο αφού τότε θα ήταν γνήσια κλάση.

3. Υπάρχουν τελεστές που αντιμετατίθενται με όλες σχεδόν τις αντικαταστάσεις αλλά δεν είναι ομοιόμορφοι. Για παράδειγμα ο $\Gamma(a) = \{a\}$ έχει αυτή την ιδιότητα αλλά όπως έχουμε δει δεν είναι μονότονος.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει τη δυνατότητα να κατασκευάζουμε νέους ομοιόμορφους τελεστές από απλούστερους.

Πρόταση 3.16. i. *Αν a σύνολο με $a \subseteq V_{afa}[\mathcal{U}]$, τότε ο τελεστής Γ με*

$$\Gamma(b) = a, \text{ για κάθε } b \in V_{afa}[\mathcal{U}]$$

είναι ομοιόμορφος.

ii. *Αν ο Γ είναι μονότονος τελεστής που αντιμετατίθεται με όλες σχεδόν τις αντικαταστάσεις και Δ είναι ομοιόμορφος τελεστής, τότε ο $\Delta \circ \Gamma$ είναι ομοιόμορφος τελεστής επίσης. Ειδικότερα, αν Γ, Δ ομοιόμορφοι τελεστές, τότε $\Delta \circ \Gamma$ ομοιόμορφος τελεστής.*

iii. *Αν* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ *ομοιόμορφοι τελεστές, τότε* $\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n$ *ομοιόμορφος τελεστής.*

iv. *Αν* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ *ομοιόμορφοι τελεστές, τότε* $\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_n$ *ομοιόμορφος τελεστής, όπου*

$$(\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_n)(a) = \Gamma_1(a) \cup \cdots \cup \Gamma_n(a), \text{ για κάθε } a \in V_{afa}[\mathcal{U}].$$

Απόδειξη. i. Ο Γ προφανώς είναι γνήσιος ($a \subseteq V_{afa}[\mathcal{U}]$) και μονότονος ($b_1 \subseteq b_2 \Rightarrow \Gamma(b_1) = a \subseteq a = \Gamma(b_2)$). Έστω τώρα $X_\Gamma = support(a)$. Έστω σύνολο $Y \subseteq \mathcal{U}$ ξένο προς το X_Γ και αντικατάσταση t με $dom(t) = Y$. Τότε για κάθε $b \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$\Gamma(b[t]) = a = a[t] = \Gamma(b)[t].$$

Άρα X_Γ σύνολο αποφυγής του Γ και επομένως Γ ομοιόμορφος.

ii. Από Πρόταση 3.1 παίρνουμε ότι $\Delta \circ \Gamma$ μονότονος και γνήσιος. Έστω X_Γ και X_Δ τα σύνολα αποφυγής των Γ και Δ αντίστοιχα. Έστω $X = X_\Gamma \cup X_\Delta$, $Y \subseteq \mathcal{U}$ σύνολο ξένο προς το X και αντικατάσταση t με $dom(t) = Y$. Τότε για κάθε $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$\begin{aligned}
(\Delta \circ \Gamma)(a)[t] &= \Delta(\Gamma(a))[t] \\
&= \Delta(\Gamma(a)[t]) && (\Delta \text{ ομοιόμορφος}) \\
&= \Delta(\Gamma(a[t])) && (\Gamma \text{ ομοιόμορφος}) \\
&= (\Delta \circ \Gamma)(a[t]).
\end{aligned}$$

Άρα X σύνολο αποφυγής για τον $\Delta \circ \Gamma$ και επομένως $\Delta \circ \Gamma$ ομοιόμορφος.

iii, iv. Όμοια με (ii) χρησιμοποιώντας Πρόταση 3.1. ⊣

Οι επόμενες δύο προτάσεις αν και απλές είναι αρκετά χρήσιμες για τη συνέχεια.

Πρόταση 3.17. *Έστω* Γ *ομοιόμορφος τελεστής με σύνολο αποφυγής* X_Γ. *Τότε για κάθε* $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$support(\Gamma(a)) \setminus X_\Gamma \subseteq support(a) \setminus X_\Gamma.$$

Ειδικότερα για κάθε $X \subseteq \mathcal{U}$,

$$support(\Gamma(X)) \subseteq X \cup X_\Gamma.$$

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει $x \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε

$$x \in support(\Gamma(a)) \setminus X_\Gamma \;\text{ και }\; x \notin support(a) \setminus X_\Gamma.$$

Έστω επίσης $y \in \mathcal{U} \setminus (X_\Gamma \cup support(\Gamma(a)))$ (προφανώς υπάρχει τέτοιο) και αντικατάσταση $s = \{\langle x, y\rangle\}$. Τότε

$$\{y\} \cap X_\Gamma = \emptyset$$

και

$$\Gamma(a[s]) = \Gamma(a) \neq \Gamma(a)[s],$$

το οποίο είναι άτοπο αφού Γ ομοιόμορφος και $\{y\}$ νέο για τον Γ. $\dashv$

Πρόταση 3.18. *Έστω $\mathcal{E} = \langle a, e\rangle$ Γ-συνάλγεβρα, $X \subseteq \mathcal{U}$ σύνολο νέο για τον Γ και $t : X \to B$ αντικατάσταση με $\mathrm{ran}(t) = b$. Τότε υπάρχει αντικατάσταση $e' : X \to \Gamma(X)$ τέτοια ώστε η t να αναδιοργανώνει την $\langle X, e'\rangle$ στην $\mathcal{E}$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Τότε εφόσον t είναι επί και X νέο για τον Γ,

$$e_{t_x} \in \Gamma(a) = \Gamma(X[t]) = \Gamma(X)[t].$$

Άρα για κάθε $x \in X$ υπάρχει $b_x \in \Gamma(X)$ τέτοιο ώστε

$$e_{t_x} = b_x[t].$$

Ορίζουμε λοιπόν με τη βοήθεια του Αξιώματος Επιλογής την αντικατάσταση $e' : X \to \Gamma(X)$ έτσι ώστε

$$e'_x = b_x, \text{ για κάθε } x \in X.$$

Ισχύει λοιπόν

$$e'_x[t] = e_{t_x} \text{ για κάθε } x \in X,$$

δηλαδή η t είναι Γ-μορφισμός και επομένως αφού είναι και επί θα είναι αναδιοργάνωση της $\langle X, e'\rangle$ στην $\mathcal{E}$. $\dashv$

Παρατήρηση 3.15. Η προηγούμενη πρόταση μπορεί να γίνει πιο εύκολα κατανοητή με τη βοήθεια του επόμενου διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "t"'] & \Gamma(X) \arrow[d, "{[t]_{\Gamma(X)}}"] \\
a \arrow[r, "e"'] & \Gamma(a)
\end{tikzcd}$$

Το διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό αφού t μορφισμός, οπότε

$$e \circ t = [t]_{\Gamma(X)} \circ e'.$$

Η t είναι επί από την υπόθεση, ενώ η $[t]_{\Gamma(X)}$ όπως φαίνεται και από την απόδειξη της πρότασης είναι επίσης επί λόγω της ομοιομορφίας του Γ και του γεγονότος ότι το X είναι νέο για τον Γ.

Τέλος θα αποδείξουμε αυτό το οποίο υποσχεθήκαμε στην αρχή της παραγράφου.

Θεώρημα 3.19 (Θεώρημα Αναπαράστασης για το Γ^*). *Αν Γ ομοιόμορφος τελεστής, τότε*

$$\Gamma^* = \bigcup\{\textit{solution-set}(\mathcal{E}) \mid \mathcal{E} \text{ επίπεδη } \Gamma\text{-συνάλγεβρα}\}.$$

Απόδειξη. Έστω

$$C = \bigcup\{\textit{solution-set}(\mathcal{E}) \mid \mathcal{E} \text{ επίπεδη } \Gamma\text{-συνάλγεβρα}\}.$$

Έχουμε αναφέρει ξανά ότι από το Λήμμα Επίλυσης για Τελεστές παίρνουμε εύκολα ότι $C \subseteq \Gamma^*$. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι $\Gamma^* \subseteq C$. Από το Θεώρημα Μέγιστου Σταθερού Σημείου παίρνουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι κάθε Γ-ορθό σύνολο περιέχεται στην κλάση C.

Έστω λοιπόν a Γ-ορθό σύνολο. Εφόσον ο Γ είναι ομοιόμορφος θα υπάρχει $X \subseteq \mathcal{U}$ νέο για τον Γ το οποίο είναι ισοπληθικό με το a. Έστω t μία 1-1 και επί αντικατάσταση από το X στο a. Από την Πρόταση 3.18 έχουμε ότι υπάρχει $e' : X \to \Gamma(X)$ τέτοια ώστε η t να αναδιοργανώνει την $\langle X, e'\rangle$ στην κανονική Γ-συνάλγεβρα $\langle a, i\rangle$, όπου $i : a \to \Gamma(a)$ ταυτοτική. Επομένως αφού t μορφισμός έχουμε ότι για κάθε $x \in X$,

$$t_x = e'_x[t],$$

δηλαδή η t είναι λύση της $\langle X, e'\rangle$, άρα

$$\textit{solution-set}(\langle X, e'\rangle) = \textit{ran}(t) = a$$

και εφόσον η $\langle X, e'\rangle$ είναι επίπεδη έχουμε ότι $a \subseteq C$. ⊣

3.7 Γενικό Λήμμα Επίλυσης για Τελεστές

Όπως ακριβώς κάναμε και στην περίπτωση των συστημάτων εξισώσεων περνώντας από τα επίπεδα συστήματα στα γενικά, έτσι κι εδώ θέλουμε να περάσουμε από τις επίπεδες συνάλγεβρες στις γενικές. Το βήμα αυτό γενίκευσης συνίσταται κυρίως στη διεύρυνση, σε κάθε επίπεδη Γ-συνάλγεβρα $\langle X, e\rangle$, του πεδίου τιμών της e ώστε αυτό να περιλαμβάνει τιμές και από το σταθερό σημείο κάποιου τελεστή (εξαρτημένου από τον Γ). Ας κάνουμε όμως τα πράγματα πιο συγκεκριμένα.

Ορισμός 3.15. Έστω Γ ομοιόμορφος τελεστής και X σύνολο ατόμων. Ορίζουμε τον τελεστή Γ_X έτσι ώστε για κάθε $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

$$\Gamma_X(a) = \Gamma(X \cup a).$$

Θα συμβολίζουμε με $\Gamma^*[X]$ το μέγιστο σταθερό σημείο του Γ_X και θα ονομάζουμε τα στοιχεία του *παραμετρικά* Γ-*αντικείμενα του* X (*parametric* Γ-*objects over* X).

Παρατήρηση 3.16. 1. Ο παραπάνω ορισμός του $\Gamma^*[X]$ είναι απόλυτα νόμιμος, αφού ο τελεστής Γ_X έχει πάντα σταθερό σημείο. Έστω $a, b \in V_{afa}[\mathcal{U}]$. Τότε

$$\begin{aligned} a \subseteq b &\Rightarrow X \cup a \subseteq X \cup b \\ &\Rightarrow \Gamma(X \cup a) \subseteq \Gamma(X \cup b) \qquad (\Gamma \text{ μονότονος}) \\ &\Rightarrow \Gamma_X(a) \subseteq \Gamma_X(b). \end{aligned}$$

Δηλαδή Γ_X μονότονος.

2. Επιλέξαμε το σύμβολο $\Gamma^*[X]$ αντί του Γ^*_X για να τονίσουμε ότι τα στοιχεία του X θα τα μεταχειριζόμαστε ως παραμέτρους.

Ορισμός 3.16. Έστω Γ ομοιόμορφος τελεστής. *Γενική* Γ-*συνάλγεβρα* (*General* Γ-*coalgebra*) θα ονομάζουμε κάθε ζεύγος $\langle X, e\rangle$, όπου X σύνολο ατόμων νέο για τον Γ και

$$e : X \to \Gamma^*[X].$$

Παρατήρηση 3.17. 1. Σημειώνουμε ότι αυστηρά μιλώντας μία γενική Γ-συνάλγεβρα $\langle X, e\rangle$ γενικά δεν είναι Γ-συνάλγεβρα. Θα είναι (και μάλιστα επίπεδη) αν

$$ran(e) \subseteq \Gamma(X),$$

το οποίο δεν ισχύει φυσικά σε όλες τις περιπτώσεις (ειδικά στις πιο ενδιαφέρουσες). Για το λόγο αυτό ίσως θα μπορούσαμε αντί για τον όρο "γενική" να έχουμε χρησιμοποιήσει τον όρο "γενικευμένη" συνάλγεβρα. Δεν το κάναμε κυρίως για να διατηρήσουμε την ορολογία των συστημάτων εξισώσεων.

2. Έχουμε ήδη δει σε προηγούμενη παράγραφο ότι

$$(Pow^{X\cup A})^* = V_{afa}[X \cup A],$$

επομένως

$$(Pow^A)^*[X] = ((Pow^A)_X)^* = (Pow^{X\cup A})^* = V_{afa}[X \cup A],$$

δηλαδή τα παραμετρικά Pow^A-αντικείμενα του X είναι τα στοιχεία του συνόλου $V_{afa}[X \cup A]$. Μια γενική Pow^A-συνάλγεβρα $\langle X, e\rangle$ λοιπόν είναι ακριβώς ένα γενικό σύστημα εξισώσεων $\langle X, A, e\rangle$. Αυτό δείχνει ότι όλες οι γενικεύσεις που έχουμε κάνει ως τώρα είναι συνεπείς επεκτάσεις των αποτελεσμάτων του προηγούμενου κεφαλαίου.

3. Κάθε γενική Γ-συνάλγεβρα $\mathcal{E} = \langle X, e\rangle$ έχει μοναδική λύση. Έστω το γενικό σύστημα εξισώσεων $\mathcal{E}' = \langle X, \emptyset, e\rangle$ με $e : X \to V_{afa}[X]$ τέτοια ώστε

$$e'_x = e_x, \text{ για κάθε } x \in X.$$

Από το Γενικό Λήμμα Επίλυσης παίρνουμε ότι το $\mathcal{E}'$ έχει μοναδική λύση s' η οποία προφανώς είναι και μοναδική λύση της $\mathcal{E}$.

Βασιζόμενοι στην Παρατήρηση 3.17.2 προχωρούμε στον ορισμό της λύσης γενικής συνάλγεβρας, ο οποίος όπως είναι φυσικό είναι πανομοιότυπος με αυτόν που δώσαμε για το γενικό σύστημα εξισώσεων και την επίπεδη συνάλγεβρα. Για λόγους πληρότητας παρόλα αυτά είναι σκόπιμο να τον ξαναδιατυπώσουμε κι εδώ.

Ορισμός 3.17. Έστω Γ ομοιόμορφος τελεστής και $\mathcal{E} = \langle X, e\rangle$ γενική Γ-συνάλγεβρα. Μία αντικατάσταση θα ονομάζεται *λύση* της $\mathcal{E}$ αν

$$dom(s) = X$$

και

$$s_x = e_x[s], \text{ για κάθε } x \in X.$$

Όπως συνήθως, ορίζουμε το σύνολο λύσεων της $\mathcal{E}$ να είναι το σύνολο

$$\textit{solution-set}(\mathcal{E}) = \{s_x \mid x \in X \,\&\, s \text{ λύση της } \mathcal{E}\}.$$

Είμαστε έτοιμοι πλέον να ολοκληρώσουμε τη γενίκευση των αποτελεσμάτων του προηγούμενου κεφαλαίου διατυπώνοντας το Γενικό Λήμμα Επίλυσης, αυτή τη φορά για συνάλγεβρες. Πριν από αυτό όμως θα χρειαστούμε ένα Λήμμα.

Λήμμα 3.20. *Έστω Γ ομοιόμορφος τελεστής και X, Y ξένα μεταξύ τους σύνολα ατόμων τα οποία είναι νέα για τον Γ. Έστω επίσης*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E} = \langle X \cup Y, e\rangle, \text{ επίπεδη } \Gamma\text{-συνάλγεβρα, με λύση } s,\\
&\mathcal{E}_0 = \langle Y, e \restriction Y\rangle, \text{ σύστημα εξισώσεων, με λύση } s^0, \text{ και}\\
&\mathcal{E}_1 = \langle X, e^1\rangle, \text{ σύστημα εξισώσεων, με λύση } s^1 \text{ και } e^1 \text{ τέτοιο ώστε,}\\
&\qquad\qquad e^1_x = e_x[s], \text{ για κάθε } x \in X.
\end{aligned}$$

Τότε ισχύει ότι για κάθε $z \in X \cup Y$,

$$s_z = \begin{cases} s^1_z, & \text{αν } z \in X \\ (s^1 \star s^0)_z, & \text{αν } z \in Y. \end{cases}$$

Συγκεκριμένα, η λύση της $\mathcal{E}_1$ είναι περιορισμός της λύσης της $\mathcal{E}$ στο X.

Απόδειξη. Έστω s αντικατάσταση που ικανοποιεί τη σχέση του Λήμματος. Θα αποδείξουμε ότι η s είναι λύση της $\mathcal{E}$.

Θα δείξουμε αρχικά ότι για κάθε $z \in X \cup Y \cup X_\Gamma$,

$$z[s] = z[s^0][s^1],$$

όπου X_Γ σύνολο αποφυγής του Γ. Έστω λοιπόν $z \in X \cup Y \cup X_\Gamma$.

- Αν $z \in X$, τότε

$$\begin{aligned}
z[s] &= s_z && \text{(ορισμός τελ. αντικ.)}\\
&= s^1_z && \text{(ορισμός } s)\\
&= z[s^1] && \text{(ορισμός τελ. αντικ.)}\\
&= z[s^0][s^1] && (z \notin \mathrm{dom}(s^0)).
\end{aligned}$$

- Αν $z \in Y$, τότε

$$\begin{aligned}
z[s] &= s_z && \text{(ορισμός τελ. αντικ.)}\\
&= (s^1 \star s^0)_z && \\
&= s^0_z[s^1] && \text{(ορισμός } \star)\\
&= z[s^0][s^1] && \text{(ορισμός τελ. αντικ.).}
\end{aligned}$$

- Αν $z \in X_\Gamma$, τότε $z \notin X \cup Y$ γιατί

$$\begin{aligned} X, Y \text{ νέα για τον } \Gamma &\Rightarrow X \cup Y \text{ νέο για τον } \Gamma \\ &\Rightarrow (X \cup Y) \cap X_\Gamma = \emptyset. \end{aligned}$$

Άρα

$$z \notin dom(s) \quad \text{και} \quad z \notin dom(s^0) \cup dom(s^1),$$

οπότε από τον ορισμό του τελεστή αντικατάστασης έχουμε

$$\begin{aligned} z[s] &= s_z \\ &= z \\ &= z[s^1] \\ &= z[s^0][s^1]. \end{aligned}$$

Επομένως $[s]$ και $[s^1] \circ [s^0]$ συμφωνούν στα άτομα της κλάσης $V_{afa}[X \cup Y \cup X_\Gamma]$, οπότε συμφωνούν και στα σύνολα (βλέπε Παράγραφο 2.9). Από την Πρόταση 3.17 τώρα παίρνουμε ότι

$$\Gamma(X \cup Y) \subseteq V_{afa}[X \cup Y \cup X_\Gamma],$$

δηλαδή

$$ran(e) \subseteq V_{afa}[X \cup Y \cup X_\Gamma].$$

Έστω $x \in X$. Τότε

$$\begin{aligned} s_x &= s^1_x && \text{(ορισμός } s\text{)} \\ &= e_x[s^0][s^1] && (s^1 \text{ λύση του } \mathcal{E}_1) \\ &= e_x[s] && (e_x \in V_{afa}[X \cup Y \cup X_\Gamma]) \end{aligned}$$

Έστω $y \in Y$. Τότε

$$\begin{aligned} s_y &= y[s^0][s^1] && \text{(ορισμός } s\text{)} \\ &= s^0_y[s^1] && \text{(ορισμός τελ. αντικ.)} \\ &= e_y[s^0][s^1] && (s^0 \text{ λύση του } \mathcal{E}_0) \\ &= e_y[s] && (e_y \in V_{afa}[X \cup Y \cup X_\Gamma]) \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $z \in X \cup Y$

$$s_z = e_z[e],$$

δηλαδή η s είναι λύση της $\mathcal{E}$. $\dashv$

Παρατήρηση 3.18. 1. Στο παραπάνω Λήμμα χρησιμοποιήσαμε αόριστα τον χαρακτηρισμό "σύστημα εξισώσεων" για τα $\mathcal{E}_0$ και $\mathcal{E}_1$. Αυτό το κάναμε γιατί αυστηρά μιλώντας τα $\mathcal{E}_0$ και $\mathcal{E}_1$ δεν είναι γενικά συστήματα εξισώσεων, αφού για παράδειγμα $ran(e^1) \subsetneq V_{afa}[Y]$. Στην απόδειξη χειριστήκαμε τα $\mathcal{E}_0$ και $\mathcal{E}_1$ ως γενικά συστήματα εξισώσεων μόνο όσον αφορά στον ορισμό της λύσης, το οποίο κάναμε κυρίως για λόγους ευκολίας, επομένως θα μπορούσαμε κάλλιστα να τα είχαμε θεωρήσει απλά ως ζεύγη στα οποία οι συναρτήσεις $e \upharpoonright Y$ και e^1 "επιδέχονται" λύσης.

2. Μιας και το Λήμμα μοιάζει κάπως μπερδεμένο είναι καλό να δώσουμε ένα διάγραμμα ώστε να γίνει πιο φανερό που βρίσκονται περίπου τα πεδία τιμών των e, $e \upharpoonright Y$ και e^1.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e^1"] \arrow[d, "id_X"'] & \Gamma(X \cup Y)[s^0] = \Gamma(X \cup ran(s^0)) \subseteq V_{afa}[X] \\
X \cup Y \arrow[r, "e"] & \Gamma(X \cup Y) \arrow[u, "{[s^0]}"'] \arrow[d, "id_{\Gamma(X \cup Y)}"] \\
Y \arrow[u, "id_Y"] \arrow[r, "e \upharpoonright Y"] & \Gamma(X \cup Y) \subseteq V_{afa}[X \cup Y]
\end{tikzcd}$$

Είναι καλό να σημειώσουμε ότι στην απόδειξη του Γενικού Λήμματος Επίλυσης θα χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω Λήμμα αντίστροφα, δηλαδή αρχίζοντας με το σύστημα εξισώσεων $\mathcal{E}_1$.

Θεώρημα 3.21 (Γενικό Λήμμα Επίλυσης για Τελεστές - Solution Lemma Lemma). *Αν ο Γ είναι ομοιόμορφος τελεστής, τότε κάθε γενική Γ-συνάλγεβρα $\mathcal{E}$ έχει μοναδική λύση και*

$$\textit{solution-set}(\mathcal{E}) \subseteq \Gamma^*.$$

Απόδειξη. Έστω Γ ομοιόμορφος τελεστής και $\mathcal{E}_1 = \langle X, e^1 \rangle$ γενική Γ-συνάλγεβρα. Από την παρατήρηση 3.17.3 ήδη γνωρίζουμε ότι η $\mathcal{E}_1$ έχει μοναδική λύση, επομένως μένει να δείξουμε ότι

$$\textit{solution-set}(\mathcal{E}_1) \subseteq \Gamma^*.$$

Η $\mathcal{E}_1$ είναι Γ-συνάλγεβρα, οπότε $ran(e^1) \subseteq \Gamma^*[X]$. Από το Λήμμα 3.7 λοιπόν παίρνουμε ότι υπάρχει Γ_X-ορθό σύνολο $b \subseteq \Gamma^*[X]$ τέτοιο ώστε

$$ran(e^1) \subseteq \Gamma_X(b) = \Gamma(X \cup b).$$

Έστω τώρα Y σύνολο ατόμων τέτοιο ώστε

- $Y \cap support(b) = \emptyset$,
- $Y \cap X = \emptyset$,
- Y νέο για τον Γ,

- $card(Y) = card(b)$.

Έστω επίσης $t : Y \to b$ 1-1 και επί και $r : X \cup Y \to X \cup b$ τέτοια ώστε για κάθε $z \in X \cup Y$,

$$r_z = \begin{cases} z, & \text{αν } z \in X \\ t_z, & \text{αν } z \in Y. \end{cases}$$

Η r είναι προφανώς 1-1 και επί. Ορίζουμε τώρα $e' : X \cup b \to \Gamma(X \cup b)$ τέτοια ώστε για κάθε $a \in X \cup b$,

$$e'_a = \begin{cases} e^1_a, & \text{αν } a \in X \\ a, & \text{αν } a \in b. \end{cases}$$

Η e' έχει όντως πεδίο τιμών $\Gamma(X \cup b)$ γιατί

$$ran(e') \subseteq \Gamma(X \cup b) \qquad \text{(ορισμός } b\text{)}$$

και

$$b \subseteq \Gamma(X \cup b) \qquad (b \ \Gamma\text{-ορθό από ορισμό})$$

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.18 στην Γ-συνάλγεβρα $\mathcal{E}' = \langle X \cup b, e' \rangle$ και στην αντικατάσταση r παίρνοντας επίπεδη Γ-συνάλγεβρα $\mathcal{E} = \langle X \cup Y, e \rangle$ τέτοια ώστε η r να είναι αναδιοργάνωση της $\mathcal{E}$ στην $\mathcal{E}'$.

Ας θεωρήσουμε τώρα την Γ-συνάλγεβρα $\mathcal{E}_0 = \langle Y, e \restriction Y \rangle$. Θα δείξουμε ότι η t είναι λύση της $\mathcal{E}_0$. Έστω $y \in Y$. Τότε

$$\begin{aligned} t_y &= r_y && (y \in Y) \\ &= y[r] && \text{(ορισμός τελ. αντικ.)} \\ &= e'_y[r] && (y \notin dom(e')) \\ &= e_y[r] && \\ &= e_{r_y} && (r \text{ αναδιοργάνωση της } \mathcal{E} \text{ στην } \mathcal{E}') \\ &= e_{t_y}. && \end{aligned}$$

Άρα t λύση της $\mathcal{E}_0$.

Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα 3.20 στα $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_0$ και $\mathcal{E}_1$ παίρνουμε ότι η λύση s^1 της $\mathcal{E}_1$ είναι ο περιορισμός στο X της λύσης s της $\mathcal{E}$, οπότε από το Λήμμα Επίλυσης για Τελεστές παίρνουμε ότι

$$solution\text{-}set(\mathcal{E}) \subseteq \Gamma^*,$$

άρα εφόσον $s^1 = s \restriction X$ έχουμε

$$solution\text{-}set(\mathcal{E}_1) \subseteq solution\text{-}set(\mathcal{E}),$$

δηλαδή

$$solution\text{-}set(\mathcal{E}_1) \subseteq \Gamma^*. \qquad \dashv$$

Παρατήρηση 3.19. 1. Το παρακάτω διάγραμμα πιστεύουμε θα βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση της απόδειξης του θεωρήματος

$$\begin{tikzcd} X \cup Y \arrow[r, "e"] \arrow[d, "r"'] & \Gamma(X \cup Y) \arrow[d, "{[r]_{\Gamma(X\cup Y)}}"] \\ X \cup b \arrow[r, "e'"'] & \Gamma(X \cup b) \end{tikzcd}$$

Με τον τρόπο που φαίνεται στο διάγραμμα περάσαμε από την συνάλγεβρα $\mathcal{E}'$ στην επίπεδη συνάλγεβρα $\mathcal{E}$, το οποίο ήταν και το κρίσιμο βήμα για να εφαρμόσουμε το Λήμμα Επίλυσης για Τελεστές.

3.8 Λείοι τελεστές

Αφήνουμε πίσω πλέον τις μεταλλάξεις θεωρημάτων συστημάτων εξισώσεων και προχωράμε στον κύριο στόχο μας που προαναγγείλαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Αναζητούμε λοιπόν μία ικανοποιητική θεώρηση της έννοιας της συναναδρομής. Σίγουρα αυτή σε κάποιο βαθμό έχει επιτευχθεί αλλά λείπει ένα πιο ολοκληρωμένο και βαθύ αποτέλεσμα. Το κεντρικό αυτό αποτέλεσμα στο οποίο στοχεύουμε είναι το Θεώρημα Συναναδρομής το οποίο αποτελεί ίσως τον τελευταίο κρίκο σε αυτή τη μακριά αλυσίδα γενικεύσεων θεωρημάτων. Είναι η συνέχεια του Λήμματος Επίλυσης για Τελεστές και βασίζεται κι αυτό σε έννοιες τις οποίες έχουμε χρησιμοποιήσει ως τώρα. Όπως όμως και στην περίπτωση του Λήμματος Επίλυσης για Τελεστές έτσι κι εδώ θα χρειαστεί οι υποθέσεις μας να γίνουν λίγο πιο περιοριστικές κυρίως όσον αφορά στους τελεστές στους οποίους θα εφαρμόζεται το θεώρημα. Θα πρέπει να ορίσουμε ένα νέο είδος τελεστών που θα βρίσκονται στην κλάση των ομοιόμορφων αλλά για τους οποίους θα έχουμε μερικές ακόμα "καλές" ιδιότητες.

Πριν όμως το κάνουμε αυτό θα πρέπει να επεκτείνουμε λίγο την έννοια της αντικατάστασης (τη μόνη που αφήσαμε χωρίς αλλαγές ως τώρα) ώστε να μπορεί να ορίζεται σε κλάσεις ατόμων (και όχι μόνο σε σύνολα).

Ορισμός 3.18. *Αντικατάσταση* θα ονομάζουμε κάθε συνάρτηση

$$s : X \to V_{afa}[\mathcal{U}] \cup \mathcal{U},$$

με $X \subseteq \mathcal{U}$ κλάση. Ο τελεστής

$$[\ ]_{res} : V_{afa}[\mathcal{U}] \cup \mathcal{U} \to V_{afa}[\mathcal{U}] \cup \mathcal{U}$$

για τον οποίο ισχύει για κάθε αντικατάσταση s,

$$a[s]_{res} = a[s \upharpoonright support(a)], \text{ για κάθε } a \in V_{afa}[\mathcal{U}],$$

θα ονομάζεται κι αυτός τελεστής αντικατάστασης της s.

Παρατήρηση 3.20. 1. Ο τελεστής $[\ ]_{res}$ είναι καλά ορισμένος, αφού για κάθε $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$ το $support(a)$ είναι σύνολο, οπότε ορίζεται και το $[s \restriction support(a)]$.

2. Αν s αντικατάσταση με $dom(s)$ σύνολο, τότε η s είναι αντικατάσταση και με την παλιά έννοια (βλέπε Ορισμό 2.11) και επίσης

$$a[s]_{res} = a[s \restriction support(a)] = a[s], \text{ για κάθε } a \in V_{afa}[\mathcal{U}].$$

Άρα οι νέες έννοιες είναι συνεπείς επεκτάσεις των παλιών.

3. Για ευκολία (και βασισμένοι στην προηγούμενη παρατήρηση) θα παραλείπουμε τον δείκτη res στον συμβολισμό $[s]_{res}$. Γενικεύουμε επίσης με προφανή τρόπο και την χρήση του συμβολισμού του περιορισμού τελεστή και στον τελεστή $[s]_{res}$.

Είμαστε έτοιμοι τώρα να ορίσουμε τη νέα ομάδα τελεστών που θα μελετήσουμε από δω και πέρα.

Ορισμός 3.19. Έστω Γ τελεστής.

i. Μία κλάση ατόμων X θα ονομάζεται *πολύ νέα για τον* Γ (*very new for* Γ) αν για κάθε s με $dom(s) = X$ και για κάθε $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$,

   - $\Gamma(a)[s] = \Gamma(a[s])$,
   - αν $[s]_a$ 1-1, τότε $[s]_{\Gamma(a)}$ 1-1.

ii. Ο Γ θα ονομάζεται *λείος* (*smooth*) αν

   - Γ μονότονος,
   - Γ γνήσιος,
   - σχεδόν όλα τα σύνολα ατόμων είναι πολύ νέα για τον Γ, δηλαδή υπάρχει $Y_\Gamma \subseteq \mathcal{U}$ σύνολο τέτοιο ώστε το συμπληρωματικό $\mathcal{U} \setminus Y_\Gamma$ να είναι πολύ νέο για τον Γ.

Το σύνολο Y_Γ θα ονομάζεται *σύνολο υπεραποφυγής* (*avoidance set*) του Γ.

Παράδειγμα 3.15. Ο τελεστής Pow είναι μονότονος και γνήσιος (βλέπε Παράδειγμα 3.10). Θα δείξουμε ότι ο Pow έχει σύνολο υπεραποφυγής $Y_{Pow} = \emptyset$ και επομένως είναι λείος. Έστω s αντικατάσταση με $dom(s) = \mathcal{U}$ και $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$. Έστω τώρα ότι $[s]_a$ 1-1 και έστω $b, c \subseteq a$ με $b \neq c$. Ας υποθέσουμε ότι $b \setminus c \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει $d \in b \setminus c$, οπότε $d[s]_a \in b[s]_a \setminus c[s]_a$ (γιατί $[s]$ 1-1). Ισχύει επίσης ότι $Pow(a[s]) = Pow(a)[s]$, γιατί έχουμε δείξει ότι ο Pow έχει σύνολο διαφυγής $X_{Pow} = \emptyset$. Άρα ο είναι Pow λείος. Όμοια δείχνεται ότι και ο Pow_f είναι λείος. Ενώ ανάλογα δείχνεται ότι και οι ομοιόμορφοι τελεστές Pow^A και Pow_f^A είναι επίσης λείοι με σύνολο υπεραποφυγής το A.

Παρατήρηση 3.21. 1. Υπάρχουν ομοιόμορφοι τελεστές που δεν είναι λείοι. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τον τελεστή

$$\Gamma(a) = \mathcal{P}(a) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}(a)).$$

Από την Πρόταση 3.1 εύκολα παίρνουμε ότι ο Γ είναι ομοιόμορφος αφού

$$\Gamma = Pow \cup (Pow \circ Pow)$$

και Pow ομοιόμορφος.

Έστω τώρα s αντικατάσταση και $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$. Τότε αφού ο Pow είναι ομοιόμορφος με σύνολο αποφυγής $X_{Pow} = \emptyset$, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\Gamma(a[s]) &= Pow(a[s]) \cup Pow(Pow(a[s]))\\ &= Pow(a)[s] \cup Pow(Pow(a)[s])\\ &= Pow(a)[s] \cup Pow(Pow(a))[s]\\ &= (Pow(a) \cup Pow(Pow(a)))[s]\\ &= \Gamma(a)[s].\end{aligned}$$

Άρα Γ ομοιόμορφος. Έστω τώρα αντικατάσταση s με $dom(s) = \{x, y\}$, $s_x = 0$ και $s_y = 1$. Προφανώς $[s]_2$ 1-1. Αλλά $\{\{x\}\}, \{y\} \in \Gamma(2)$ και

$$\{\{x\}\}[s] = \{\{x\}[s]\} = \{\{s_x\}\} = \{\{0\}\} = \{1\} = \{y[s]\} = \{y\}[s].$$

Δηλαδή ο $[s]_{\Gamma(2)}$ δεν είναι 1-1 και επομένως ο Γ δεν είναι λείος (γιατί αν Y_Γ ήταν το σύνολο υπεραποφυγής, πάντα μπορούμε να βρούμε στοιχεία $x, y \in \mathcal{U} \setminus Y_\Gamma$ να ορίσουμε την παραπάνω s).

2. Έστω Γ λείος τελεστής με σύνολο υπεραποφυγής Y_Γ και έστω $Y \subseteq \mathcal{U}$ σύνολο με $Y \cap Y_\Gamma = \emptyset$. Έστω επίσης αντικατάσταση s με $dom(s) = Y$ και $a \in V_{afa}[\mathcal{U}]$. Ορίζουμε αντικατάσταση s' με $dom(s') = \mathcal{U} \setminus Y_\Gamma$ τέτοια ώστε

$$s'_x = \begin{cases} s_x, & \text{αν } x \in dom(s)\\ x, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Ο Γ είναι λείος, άρα

$$\Gamma(a[s']) = \Gamma(a)[s'].$$

Αλλά προφανώς $[s'] = [s]$, οπότε

$$\Gamma(a[s]) = \Gamma(a)[s].$$

Δηλαδή ο Γ είναι ομοιόμορφος. Δείξαμε λοιπόν ότι κάθε λείος τελεστής είναι ομοιόμορφος και επομένως όλα τα θεωρήματα για ομοιόμορφους τελεστές ισχύουν και για λείους.

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια του Γ-σχήματος η οποία σε συνδυασμό με αυτή του λείου τελεστή θα μας δώσει τα αποτελέσματα που απαιτούνται για να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το Θεώρημα Συναναδρομής. Τα αποτελέσματα και οι ορισμοί αυτοί αποτελούν ουσιαστικά ένα "παιχνίδι" που θέλουμε να κάνουμε ανάμεσα στα ονόματα (δηλαδή στις μεταβλητές) συνόλων και στις αναφορές τους (δηλαδή στα ίδια τα σύνολα).

Ορισμός 3.20. Έστω C κλάση και Γ τελεστής. *Γ-σχήμα για την C* (*Γ-notation scheme for C*) θα ονομάζουμε κάθε 1-1 και επί αντικατάσταση

$$den : X \to C,$$

όπου το πεδίο ορισμού X είναι κλάση ατόμων πολύ νέα για τον Γ.

Αν $x \in X$ και $c \in C$ τέτοια ώστε

$$c = den(x),$$

θα λέμε ότι *το c είναι η αναφορά του x* ή ότι *το x είναι το όνομα του c* και θα γράφουμε επίσης

$$\ulcorner c \urcorner = x.$$

Παρατήρηση 3.22. Έστω Γ τελεστής, C κλάση και $den : X \to C$ Γ-σχήμα για την C. Τότε

$$X[den] = ran(den) = C,$$

αφού η den είναι επί. Επίσης αν Γ ομοιόμορφος και X νέο για τον Γ, τότε

$$\Gamma(X)[den] = \Gamma(X[den]) = \Gamma(C),$$

επομένως

$$[den]_{\Gamma(X)} : \Gamma(X) \to \Gamma(C),$$

δηλαδή ο $[den]_{\Gamma(X)}$ είναι μία αντιστοιχία Γ-μορφών και στοιχείων του $\Gamma(C)$.

Υπάρχει όμως για κάθε τελεστή Γ και κλάση C κάποιο Γ-σχήμα; Η απάντηση είναι θετική αλλά υπό την προϋπόθεση ότι ο Γ είναι ομοιόμορφος.

Πρόταση 3.22. *Για κάθε ομοιόμορφο τελεστή Γ και κλάση C υπάρχει Γ-σχήμα den.*

Απόδειξη. Έστω Y_Γ το σύνολο υπεραποφυγής του Γ. Ορίζουμε $f : C \to \mathcal{U}$ τέτοια ώστε

$$f(c) = new(c, Y_\Gamma), \text{ για κάθε } c \in C.$$

Προφανώς f 1-1. Έστω τώρα $den : ran(f) \to C$ με

$$den = f^{-1}.$$

Η den είναι Γ-σχήμα για την C. $\dashv$

Η επόμενη πρόταση σε αντίθεση με την προηγούμενη αφορά σε λείους τελεστές.

Πρόταση 3.23. *Έστω* Γ *λείος τελεστής, κλάση* C *και* $\mathrm{den} : X \to C$ Γ*-σχήμα της* C*. Τότε για κάθε* Γ*-συνάλγεβρα* $\mathcal{E} = \langle C, e \rangle$*, υπάρχει μοναδική απεικόνιση* $\overline{e} : X \to \Gamma(X)$ *τέτοια ώστε η* $\mathrm{den} : \langle X, \overline{e} \rangle \to \mathcal{E}$ *να είναι* Γ*-μορφισμός, δηλαδή να ισχύει*

$$e \circ [den]_X = [den]_{\Gamma(X)} \circ \overline{e}. \tag{3.3}$$

Απόδειξη. Εφόσον ο Γ είναι λείος και η den είναι Γ-σχήμα έχουμε ότι ο $[den]_{\Gamma(X)}$ είναι 1-1, επομένως υπάρχει αντίστροφος

$$[den]^{-1}_{\Gamma(X)} : \Gamma(C) \to \Gamma(X) \quad (\text{βλέπε Παρατήρηση 3.22}).$$

Ορίζουμε τώρα

$$\overline{e} = [den]^{-1}_{\Gamma(X)} \circ e \circ [den]_X.$$

Προφανώς η $\overline{e}$ είναι μοναδική και ικανοποιεί την (3.3). ⊣

Ορισμός 3.21. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της παραπάνω πρότασης, θα λέμε ότι η $\overline{e}$ είναι η Γ-*ανύψωση* (Γ-*lift*) της e από την den. Ειδικότερα η Γ-ανύψωση

$$\overline{id}_{\Gamma^*} : X \to \Gamma(C)$$

(συνήθως θα παραλείπουμε τον δείκτη Γ^*) της ταυτοτικής

$$id_{\Gamma^*} : \Gamma^* \to \Gamma(\Gamma^*) = \Gamma^*$$

θα ονομάζεται *κανονική απεικόνιση* (*canonical map*), ενώ για κάθε $a \in C$ το σύνολο

$$\overline{id}(\ulcorner a \urcorner)$$

θα ονομάζεται *κανονική* Γ-*μορφή* (*canonical* Γ-*form*) του a.

Παρατήρηση 3.23. Η ιδέα της "ανύψωσης" που μόλις περιγράψαμε αποτελεί το βασικό εργαλείο του "παιχνιδιού" για το οποίο μιλήσαμε πριν. Διαισθητικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι η $\overline{e}$ δρα στα ονόματα κατ' αντιστοιχία με τον τρόπο που δρα η e στις αναφορές τους. Αυτό φαίνεται καλύτερα από το παρακάτω αντιμεταθετικό (από την κατασκευή της $\overline{e}$) διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\overline{e}"] \arrow[d, shift right=2, "{[den]_X}"'] & \Gamma(X) \arrow[d, shift right=2, "{[den]^{-1}_{\Gamma(X)}}"'] \\
C \arrow[r, "e"'] \arrow[u, shift right=2, "{[den]^{-1}_X}"'] & \Gamma(C) \arrow[u, shift right=2, "{[den]_{\Gamma(X)}}"']
\end{tikzcd}$$

2. Στην περίπτωση της κανονικής απεικόνισης $\overline{id}$ έχουμε για κάθε $a \in C$,

$$
\begin{aligned}
\overline{id}(\ulcorner a \urcorner)[den]_{\Gamma(X)} &= ([den]^{-1}_{\Gamma(X)} \circ id \circ [den]_X)(a)[den]_{\Gamma(X)} && \text{(ορ. ανύψ.)}\\
&= (id_{\ulcorner a \urcorner [den]}[den]^{-1})[den]\\
&= id_{den(\ulcorner a \urcorner)}\\
&= id_a && \text{(ορ. } \ulcorner\ \urcorner\text{)}\\
&= a.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή αν στην κανονική Γ-μορφή $\overline{id}(\ulcorner a \urcorner)$ αντικαταστήσουμε τα ονόματα με τις αναφορές τους, τότε παίρνουμε a. Η σχέση αυτή μάλιστα μας δίνει και έναν τρόπο να υπολογίζουμε την $\overline{id}$. Έστω $a \in \Gamma^*$. Τότε

$$
\begin{aligned}
\overline{id}(\ulcorner a \urcorner) &= a[den]^{-1}_{\Gamma(X)}\\
&= \{b[den]^{-1}_{\Gamma(X)} \mid b \in a\}\\
&= \{\ulcorner b \urcorner \mid b \in a\}.
\end{aligned}
$$

Το διάγραμμα της παρατήρησης 1 στην περίπτωση της κανονικής απεικόνισης γίνεται ως εξής

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\overline{id}"] \arrow[d, bend right, "{[den]_X}"'] & \Gamma(X) \arrow[d, bend left, "{[den]_{\Gamma(X)}}"] \\
\Gamma^* \arrow[u, bend right, "{[den]_X^{-1}}"'] \arrow[r, "id"'] & \Gamma^* \arrow[u, bend left, "{[den]^{-1}_{\Gamma(X)}}"]
\end{tikzcd}
$$

Όπως και πριν το διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό.

Πριν προχωρήσουμε στο Θεώρημα Συναναδρομής χρειαζόμαστε ένα ακόμα αποτέλεσμα που αφορά στην ανύψωση. Θα αποδείξουμε πρώτα ένα βοηθητικό αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.24. *Έστω* Γ *ομοιόμορφος τελεστής και* $\mathcal{E}_1 = \langle X_1, e^1\rangle$, $\mathcal{E}_2 = \langle X_2, e^2\rangle$ *και* $\mathcal{E}_3 = \langle X_3, e^3\rangle$ Γ*-συνάλγεβρες, όπου* $\mathcal{E}_1$ *και* $\mathcal{E}_2$ *είναι επίπεδες. Έστω* $r^1 : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ *και* $r^2 : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3$ Γ*-μορφισμοί. Τότε* $r^2 \circ r^1 : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_3$ *είναι επίσης* Γ*-μορφισμός.*

Απόδειξη. Έστω X_Γ το σύνολο αποφυγής του Γ. Από την Πρόταση 3.17 έχουμε ότι

$$support(\Gamma(X_1)) \subseteq X_1 \cup X_\Gamma,$$

οπότε για κάθε $x \in X_1$,

$$e^1_x \in V_{afa}[X_1 \cup X_\Gamma].$$

Για κάθε $x \in X_1 \cup X_\Gamma$, έχουμε ότι

$$x[r^2 \circ r^1] = ([r^1] \circ [r^2])(x),$$

αφού για $x \in X$ είναι προφανές ενώ για $x \in X_\Gamma$ προκύπτει από το ότι $X_1 \cap X_\Gamma = X_2 \cap X_\Gamma = \emptyset$. Επομένως οι $[r^2 \circ r^1]$ και $[r^1] \circ [r^2]$ συμφωνούν στο $X_1 \cup X_\Gamma$, οπότε συμφωνούν και στην κλάση $V_{afa}[X_1 \cup X_\Gamma]$ (βλέπε Κεφάλαιο 2, Παράγραφο τελεστή αντικατάστασης**).

Έχουμε λοιπόν για κάθε $x \in X_1$

$$\begin{aligned} e^3_{(r^2 \circ r^1)_x} &= e^2_{r^1_x}[r^2] && (r^2 \text{ μορφισμός}) \\ &= e^1_x[r^1][r^2] && (r^1 \text{ μορφισμός}) \\ &= e^1_x[r^2 \circ r^1]. \end{aligned}$$

⊣

Λήμμα 3.25 (Λήμμα Ανύψωσης (*Lifting Lemma*)). *Έστω $\langle C, e\rangle$ Γ-συνάλγεβρα και*

$$den : X \to C,$$
$$den' : Y \to C,$$

δύο Γ-σχήματα για την C. Έστω $\varepsilon : Y \to X$ με

$$\varepsilon = den^{-1} \circ den',$$

Γ-σχήμα για το X. Έστω επίσης $\overline{e}$ και $\overline{e'}$ οι Γ-ανυψώσεις των e και e' από τις den και den' αντίστοιχα. Τότε η $\overline{e'}$ είναι η Γ-ανύψωση της e' από την ε.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$den : \langle X, \overline{e}\rangle \to \langle C, e\rangle$$

και

$$\varepsilon : \langle Y, \overline{e'}\rangle \to \langle X, \overline{e}\rangle.$$

Άρα από Λήμμα 3.24 έχουμε ότι η $den \circ \varepsilon$ είναι Γ-μορφισμός της $\langle Y, \overline{e'}\rangle$ στη $\langle C, e\rangle$. Αλλά

$$den \circ \varepsilon = den',$$

άρα

$$den' : \langle Y, \overline{e'}\rangle \to \langle C, e\rangle$$

και επομένως από την Πρόταση 3.23 παίρνουμε ότι η $\overline{e'}$ είναι η Γ-ανύψωση του $\overline{e}$ από τον ε. ⊣

3.9 Θεώρημα Συναδρομής

Στα προλεγόμενα του κεφαλαίου αναφέραμε τις πιο συχνές μορφές αναδρομής. Ας θυμηθούμε μία από αυτές :

Για κάθε τελεστή $F : V \to V$, υπάρχει μοναδικός τελεστής $G : Ord \to V$ τέτοιος ώστε για κάθε $a \in Ord$,

$$G(a) = F(G \restriction a).$$

Το βασικό ερώτημα που θέσαμε και το οποίο τροφοδότησε όλα όσα είπαμε ως τώρα είναι κατά πόσο μπορεί να υπάρξει ένα ανάλογο αποτέλεσμα στην ZFA. Την απάντηση θα δώσουμε στην παρούσα παράγραφο, παρουσιάζοντας το Θεώρημα Συναναδρομής. Η ομοιότητα του θεωρήματος αυτού με την κλασική αναδρομή πιστεύουμε ότι είναι ικανή ώστε να δικαιολογεί και την ονομασία του, αν και πρέπει πάντα να έχουμε υπόψη μας ότι πολλές ομοιότητες είναι μόνο φαινομενικές μιας και το σύμπαν στο οποίο δουλεύουμε εδώ είναι διαφορετικό. Ας δούμε όμως πάλι την παραπάνω μορφή αναδρομής. Παρατηρούμε ότι κύριος μοχλός ορισμού της G είναι ο τελεστής F ο οποίος καθορίζει "βηματικά" το πέρασμα από μερικές τιμές της G σε μια άλλη. Κάτι ανάλογο θέλουμε να πετύχουμε κι εδώ. Θα θέλαμε λοιπόν κάτι σαν το παρακάτω

Για κάθε τελεστή π, υπάρχει μοναδικός τελεστής φ τέτοιος ώστε

$$\varphi = T(\pi, \varphi),$$

όπου $T(\pi, \varphi)$ μία σχέση ανάμεσα στους π και φ.

Τον ρόλο των G και F εδώ παίζουν τα π και φ. Επίσης, όπως και πριν έτσι κι εδώ η φ θα προκύπτει με εφαρμογή της π σε "προηγούμενες" τιμές της φ. Εδώ φυσικά εντοπίζονται και ουσιαστικά εμπόδια όπως και οι δομικές διαφορές ανάμεσα στην αναδρομή και στην συναναδρομή τα οποία πιστεύουμε ότι θα φανούν καλύτερα μέσα από την ίδια την απόδειξη. Υπενθυμίζουμε πριν προχωρήσουμε στο θεώρημα ότι για τεχνικούς λόγους θα αναγκαστούμε να κάνουμε ένα παιχνίδι ανάμεσα σε ονόματα συνόλων και σε αναφορές τους. Αυτό γίνεται άμεσα αντιληπτό ήδη από την διατύπωση του θεωρήματος.

Θεώρημα 3.26 (Θεώρημα Συναναδρομής). *Έστω Γ λείος τελεστής. Για κάθε*

$$\pi : C \to \Gamma(C),$$

υπάρχει μοναδική απεικόνιση

$$\varphi : C \to \Gamma^*,$$

η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$\varphi(c) = \overline{\pi}_{\ulcorner c \urcorner}[\varphi \circ den], \text{ για κάθε } c \in C, \tag{3.4}$$

όπου den ένα οποιοδήποτε Γ-σχήμα για την C και $\overline{\pi}$ η Γ-ανύψωση της π από την den.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε κατά σειρά

- την ύπαρξη της φ
- την μοναδικότητα της φ
- την ανεξαρτησία της φ από το Γ-σχήμα den (δηλαδή ότι η φ ικανοποιεί την (3.4) για οποιοδήποτε Γ-σχήμα den).

Έστω $den : X \to C$ ένα Γ-σχήμα για την C και $\overline{\pi} : X \to \Gamma(X)$ η Γ-ανύψωση της π από την den.

Ύπαρξη. Το X είναι νέο σύνολο ατόμων για τον Γ, επομένως η

$$\mathcal{E} = \langle X, \overline{\pi} \rangle$$

είναι επίπεδη Γ-συνάλγεβρα. Έστω s η λύση της $\mathcal{E}$. Από το Λήμμα Επίλυσης για Τελεστές ισχύει ότι

$$ran(s) \subseteq \Gamma^*.$$

Ισχύει επίσης (αφού s λύση της $\mathcal{E}$) ότι

$$s_x = \overline{\pi}_x[s], \text{ για κάθε } x \in X,$$

οπότε

$$s_{\ulcorner a \urcorner} = \overline{\pi}_{\ulcorner c \urcorner}[s], \text{ για κάθε } a \in \Gamma^*.$$

Ορίζουμε τώρα $\varphi : C \to \Gamma^*$ τέτοια ώστε

$$\varphi = s \circ den^{-1}\,.$$

Έχουμε ότι για κάθε $c \in C$,

$$\begin{aligned} \varphi(c) &= (s \circ den^{-1})_c \\ &= s_{\ulcorner c \urcorner} \\ &= \overline{\pi}_{\ulcorner c \urcorner}[s] \\ &= \overline{\pi}_{\ulcorner c \urcorner}[\varphi \circ den]. \end{aligned}$$

Δηλαδή η φ ικανοποιεί την σχέση (3.4).

Μοναδικότητα. Έστω $\varphi' : C \to \Gamma^*$ για την οποία ισχύει ότι

$$\varphi'(c) = \overline{\pi'}_{`c'}[\varphi' \circ den'], \text{ για κάθε } c \in C,$$

όπου $den' : Y \to C$ ένα Γ-σχήμα για την C, $\overline{\pi'} : Y \to \Gamma(Y)$ η Γ-ανύψωση της π' από την den' και $`c' = (den')^{-1}(c)$.

Ισχύει ότι $den'_{`c'} = c$, άρα

$$\varphi'(den'_{`c'}) = \overline{\pi'}_{`c'}[\varphi' \circ den'], \text{ για κάθε } c \in C,$$

επομένως αφού η den^{-1} είναι επί,

$$(\varphi' \circ den')(y) = \overline{\pi'}_y[\varphi' \circ den'], \text{ για κάθε } y \in Y,$$

δηλαδή η $\varphi' \circ den'$ είναι λύση της επίπεδης Γ-συνάλγεβρας $\langle Y, \overline{\pi'} \rangle$

Έστω τώρα $\varepsilon : Y \to X$ η 1-1 και επί αντικατάσταση με

$$\varepsilon = den^{-1} \circ den' .$$

Η ε είναι Γ-σχήμα για το X. Από το Λήμμα Ανύψωσης επομένως παίρνουμε ότι η $\overline{\pi'}$ είναι η Γ-ανύψωση της $\overline{\pi}$ από την ε και συγκεκριμένα ότι η ε είναι Γ-μορφισμός

$$\varepsilon : \langle Y, \overline{\pi'} \rangle \to \langle X, \overline{\pi} \rangle.$$

Από την Πρόταση 3.15 λοιπόν έχουμε ότι η $s \circ \varepsilon$ είναι λύση της $\langle Y, \overline{\pi'} \rangle$, άρα (αφού κάθε συνάλγεβρα έχει μοναδική λύση)

$$s \circ \varepsilon = \varphi' \circ den' .$$

Καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned} \varphi' &= (s \circ \varepsilon) \circ (den')^{-1} \\ &= s \circ (den^{-1} \circ den') \circ (den')^{-1} \\ &= s \circ den^{-1} \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

Δηλαδή η φ είναι η μοναδική που ικανοποιεί τη σχέση (3.4) (ανεξαρτήτως Γ-σχήματος).

Ανεξαρτησία. Από την απόδειξη μοναδικότητας της φ φαίνεται ξεκάθαρα ότι η απεικόνιση Γ-σχήματος δεν παίζει κανένα ρόλο. Επομένως η φ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή Γ-σχήματος, δηλαδή ικανοποιεί την (3.4) για οποιοδήποτε Γ-σχήμα den. $\dashv$

Παρατήρηση 3.24. 1. Θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε διαγραμματικά το μέρος αυτό της απόδειξης το οποίο αναφέρεται στην μοναδικότητα της φ. Έτσι θα αποσαφηνιστεί αρκετά το τεχνικό μέρος της στο οποίο "παίζουμε" μεταξύ ονομάτων και αναφορών.

Αρχίζουμε λοιπόν με τον τελεστή $\pi : C \to \Gamma(C)$

$$C \xrightarrow{\quad \pi \quad} \Gamma(C)$$

Χρησιμοποιώντας το Γ-σχήμα den "ανυψωνόμαστε" στο επίπεδο των ονομάτων.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "den"'] & \Gamma(X) \arrow[d, "{[den]_{\Gamma(X)}}"] \\ C \arrow[r, "\pi"] & \Gamma(C) \end{tikzcd}$$

Από την Πρόταση 3.23 σχηματίζουμε την Γ-ανύψωση $\overline{\pi} : X \to \Gamma(X)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\overline{\pi}"] \arrow[d, "den"'] & \Gamma(X) \arrow[d, "{[den]_{\Gamma(X)}}"] \\
C \arrow[r, "\pi"] & \Gamma(C)
\end{tikzcd}$$

Από το Λήμμα Επίλυσης για Τελεστές τώρα παίρνουμε λύση $s : X \to \Gamma^*$ και τον αντίστοιχο τελεστή $[s] : \Gamma(X) \to \Gamma^*$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\overline{\pi}"] \arrow[dr, "s"] \arrow[dd, "den"'] & & \Gamma(X) \arrow[dl, "{[s]}"'] \arrow[dd, "{[den]_{\Gamma(X)}}"] \\
& \Gamma^* & \\
C \arrow[rr, "\pi"] & & \Gamma(C)
\end{tikzcd}$$

Η $\varphi : C \to \Gamma^*$ δεν είναι τίποτα άλλο από τη σύνθεση της den^{-1} (δηλαδή της $\ulcorner\ \urcorner$) με την s.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\overline{\pi}"] \arrow[dr, "s"] \arrow[dd, bend right, "den"'] & & \Gamma(X) \arrow[dl, "{[s]}"'] \arrow[dd, "{[den]_{\Gamma(X)}}"] \\
& \Gamma^* & \\
C \arrow[uu, bend right, "\ulcorner\ \urcorner"'] \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\pi"] & & \Gamma(C)
\end{tikzcd}$$

Μπορούμε σ' αυτό το σημείο να παρατηρήσουμε ότι ακόμα κι αν ορίζαμε την φ ως σύνθεση οποιονδήποτε άλλων συναρτήσεων που στο διάγραμμα βρίσκονται σε βέλος που οδηγεί από το C στο Γ^*, θα παίρναμε πάλι ίδια συνάρτηση. Είναι σαφές επίσης ότι η φ είναι μοναδική, αφού οι den και s είναι μοναδικές (για σταθερό Γ-σχήμα). Από τα διαγράμματα φαίνεται ότι χρειαζόμασταν να περάσουμε στο επίπεδο των ατόμων - συμβόλων ώστε να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα που έχουμε αποδείξει π.χ. για επίπεδες συνάλγεβρες.

2. Για το μέρος της απόδειξης που αναφέρεται σε μοναδικότητα της φ ένα βοηθητικό διάγραμμα είναι το εξής

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\overline{\pi}"] \arrow[d, "den"'] & \Gamma(X) \arrow[d, "{[den]_{\Gamma(X)}}"] \\
C \arrow[r, "\pi"] & \Gamma(C) \\
Y \arrow[u, "den'"] \arrow[r, "\overline{\pi'}"] \arrow[uu, bend left=60, "\varepsilon"] & \Gamma(Y) \arrow[u, "{[den']_{\Gamma(X)}}"'] \arrow[uu, bend right=60, "{[\varepsilon]_{\Gamma(Y)}}"']
\end{tikzcd}
$$

Η ε έχει οριστεί ως $\varepsilon = den^{-1} \circ den'$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ε είναι Γ-σχήμα για την X, συσχετίζουμε τις λύσεις των συναλγεβρών $\langle Y, \overline{\pi'} \rangle$ και $\langle X, \overline{\pi} \rangle$. Αυτό ουσιαστικά μας δίνει και τη μοναδικότητα.

Επίλογος

Κλείνοντας αυτή την εργασία, πιστεύουμε ότι έχουμε πετύχει εν μέρει αυτό το οποίο είχαμε θέσει ως αρχικό στόχο. Ήρθαμε δηλαδή σε επαφή με τις κύριες χρήσεις του Αξιώματος Αντιθεμελίωσης και κυρίως με τη θεωρία της συναναδρομής. Πολύ περισσότερο όμως, ο δρόμος από τον οποίο περάσαμε από την απλή διατύπωση του Λήμματος Επίλυσης μέχρι την πιο γενική του μορφή το Θεώρημα Συναναδρομής, μας εξοικείωσε με την έννοια του μη εδραιωμένου συνόλου, η οποία αποτελεί μία μάλλον παράταιρη έννοια στη συνηθισμένη συνολοθεωρία.

Από την άλλη βέβαια, μας μένει η αίσθηση του ανολοκλήρωτου ενός ταξιδιού. Παρά το γεγονός ότι σε μεγάλο βαθμό φτάσαμε σε ένα ικανοποιητικό σημείο τις γενικεύσεις μας και τα συμπεράσματα μας, υπάρχουν ακόμα πολλά σημεία της θεωρίας της *ZFA* που παραμένουν σκοτεινά. Δεν ξεκαθαρίσαμε, για παράδειγμα, απόλυτα τη σύνδεση αναδρομής και συναναδρομής (αν και σαφώς δείξαμε τους δυνατούς δεσμούς των δύο) και γι αυτό παρακινούμε τον αναγνώστη να ανατρέξει σε εργασίες πιο πλήρεις από την παρούσα (βλέπε [11]) που εξετάζουν πιο ολοκληρωμένα το ζήτημα. Είναι πολύ λογικό επίσης να πλανάται στο μυαλό μας η απορία για το αν όντως η θεωρία της *ZFA* μας προσφέρει κάτι καινούργιο ή όχι. Όπως είπαμε και στην εισαγωγή, επιλέξαμε να μην παρουσιάσουμε εφαρμογές, μιας και οι πιο ενδιαφέρουσες από αυτές θα έπιαναν πολύ περισσότερο χώρο από όσο θα μπορούσαμε να αφιερώσουμε εδώ. Παρόλα αυτά πιστεύουμε ότι το ερώτημα αυτό έχει απαντηθεί σε κάποιο βαθμό από την ίδια την αξία των θεωρημάτων της θεωρίας, τα οποία αναμφίβολα είναι ενδιαφέροντα καθ' αυτά. Σίγουρα η *ZFA* δεν μπορεί να μας δώσει από μόνη της κάτι ισχυρότερο από αυτό που μας δίνει η *ZFC*, με την έννοια ότι η συνέπεια της *ZFC* συνεπάγεται αυτή της *ZFA* (βλέπε [1], [3]). Αλλά όπως και στην περίπτωση εναλλακτικών μοντέλων της ανάλυσης (non-standard analysis) έτσι κι εδώ, προσβλέπουμε κυρίως στην εναλλακτική οπτική που μας δίνει η θεωρία αυτή και όχι στην αποδεικτική δύναμη.

Τέλος θεωρούμε ότι πρέπει να αναφέρουμε μερικά ενδιαφέροντα ανοικτά θέματα που εμφανίζονται ακόμα και μέσα από την ανάλυση μας στη μικρή αυτή εργασία. Καταρχάς ένα σημαντικό ζητούμενο είναι η βελτίωση μερικών "άτεχνων" θεωρημάτων. Για παράδειγμα θα ήταν χρήσιμο (έστω και για αισθητικούς λόγους) να αναδιατυπωνόταν το Θεώρημα Συναναδρομής σε μία μορφή η οποία δεν θα απαιτούσε την αναφορά σε "ονόματα" και "αναφορές" (η απαλλαγή του δηλαδή από αυτό το "παιχνίδι" στο οποίο έχουμε αναφερθεί). Εξίσου ενδιαφέρουσα κατεύθυνση είναι και αυτή του ανοίγματος της θεωρίας σε τεχνικές από την κλασική συνολοθεωρία (για την περίπτωση του εξαναγκασμού για παράδειγμα βλέπε [13]). Αλλά ακόμα και μέσα στην ίδια τη θεωρία της ZFA μένουν να αναπτυχθούν ενδιαφέροντα ζητήματα, όπως η Θεωρία Συναναδρομής (βλέπε [10]), η ανάλυση διάφορων μέγιστων σταθερών σημείων (πχ του HF^1) ή η ανάλυση των ομαλών και των λείων τελεστών. Φυσικά μεγάλο εύρος από ανοικτά προβλήματα μπορούμε να βρούμε στη μοντελοποίηση διαφόρων εννοιών έξω από τα μαθηματικά, όπως στη φιλοσοφία (βλέπε [3], [2]) και στη θεωρητική πληροφορική (βλέπε [3]).

Καταλήγοντας λοιπόν, πιστεύουμε ότι η θεωρία αυτή έχει αρκετά να δώσει τόσο μέσα στα μαθηματικά όσο και έξω από αυτά. Εμείς βέβαια, όπως πάντα στα μαθηματικά, δεν μπορούμε παρά να κοιτάμε παρόμοιες προσπάθειες με την ελπίδα ότι η μη θεμελιωμένη πίστη μας σε αυτές μας θα αποδώσει καρπούς στο μέλλον.

Ευρετήριο συμβόλων

Ευρετήριο όρων

Βιβλιογραφία

[1] Peter Aczel. *Non-Well-Founded Sets*. Number 14 in CSLI Lecture Notes. CSLI Publications, Stanford, 1988.

[2] Jon Barwise and John Etchemendy. *The Liar: an Essay on Truth and Circularity*. Oxford University Press, Oxford, 1987.

[3] Jon Barwise and Lawrence S. Moss. *Vicious Circles*. Number 60 in CSLI Lecture Notes. CSLI Publications, Stanford, 1996.

[4] Keith J. Devlin. *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[5] Herbert. B. Enderton. *Elements of Set Theory*. Academic Press, New York, 1977.

[6] Thomas E. Forster. *Set Theory with a Universal Set, Exploring an Untyped Universe*. Clarendon Press, Oxford, second edition, 1995.

[7] Κορνηλία Κάλφα. *Αξιωματική Θεωρία Συνόλων*. Εκδόσεις Ζήτη, 1996.

[8] Kenneth Kunen. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, volume 102 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam, 1980.

[9] Γιάννης Ν. Μοσχοβάκης. *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία*. Εκδόσεις Νεφέλη, 1993.

[10] Lawrence S. Moss. Parametric corecursion. *Theoretical Computer Science*, 260(1-2):139–163, 2001.

[11] Lawrence S. Moss and Norman Danner. On the foundations of corecursion. *Logic Journal of the IGPL*, 5(2):231–257, 1997.

[12] Αθανάσιος Τζουβάρας. *Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής*. Εκδόσεις Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, 1992.

[13] Athanassios Tzouvaras. Forcing and antifoundation. *Archive for Mathematical Logic*, 44(5):645–661, 2005.