Μεταπτυχιακο Προγραμμα Σπουδων στη
Λογικη και Θεωρια Αλγοριθμων και
Υπολογισμου

Tarski's High School Algebra Problem

Σκλήνος Ρίζος

Ιούλιος 2008

Ευχαριστίες

Πρώτα απ΄ όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Δημητρακόπουλο, το μάθημα του οποίου (το χειμερινό εξάμηνο του 2005) στάθηκε η αφορμή να ακολουθήσω τον πολύ όμορφο κλάδο της λογικής, ενώ η ζωή μου βρισκόταν σε ένα εντελώς διαφορετικό μονοπάτι. Η αγάπη του για το αντικείμενο καθώς και η υπομονή και επιμονή του, σε ότι αφορά την διδασκαλία, δεν μπορεί να περάσουν απαρατήρητα.

Δεν θα μπορούσα να παραλείψω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής· τον καθηγητή κ. Μοσχοβάκη, όπου η παρουσία του, τα δύο χρόνια της φοίτησης μου, αποτελούσε μία συνεχή πηγή έμπνευσης και προσπάθειας. Τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Ράπτη, ο οποίος σχεδόν μόνος του προσπαθεί να εκσυγχρονίσει το μαθηματικό τμήμα και βρίσκεται πάντα εκεί, για κάθε τι που απασχολεί τους φοιτητές.

Ακόμα, ένα μεγάλο ευχαριστώ ανήκει στην οικογένεια μου που με στηρίζει σε κάθε μου απόφαση όσο παράλογη ή λογική κι αν είναι, με μοναδικό κριτήριο την ευτυχία μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κοπέλα μου, Ρωξάνη, που υπόμεινε πολλά Σαββατοκύριακα διαβάσματος, με στήριξε σε όλες τις δύσκολες στιγμές και η αγχολυτική παρουσία της μου έδινε κουράγιο να προσπαθώ ακόμα περισσότερο.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εξισωτική Λογική

Το παρόν κεφάλαιο αναπτύσει την " εξισωτική " λογική. Η αφορμή για την ανάπτυξη αυτού του τομέα της λογικής είναι η κατανόηση των μεθόδων που χρησιμοποιούν οι μαθητές του Λυκείου για να λύνουν εξισώσεις. Ο όρος " εξισωτική " δεν είναι απολύτως ακριβής και μία καλύτερη προσέγγιση του αντικειμένου δίνεται από τον όρο " ταυτοτική " λογική. Η ιδέα πίσω από αυτό είναι ότι μας ενδιαφέρουν οι εξισώσεις που ισχύουν ταυτοτικά (αν και προφανώς οι μαθητές του Λυκείου " ταλαιπωρούνται " λύνοντας εξισώσεις ως προς αγνώστους).

Αν ρωτήσουμε έναν μαθητή Λυκείου αν μπορεί να μας πει κάποιον νόμο που ισχύει ταυτοτικά στο $\mathfrak{N} =< \mathbb{N}, +, 0 >$ τότε χωρίς σκέψη θα μας απαντήσει κάποιον από τους γνωστούς κανόνες $x+0=x$ ή $x+y=y+x$ ή $(x+y)+z=x+(y+z)$. Στο εξής θα αναφερόμαστε σε αυτούς τους κανόνες ως CAZ.

Εαν θέλουμε να προκαλέσουμε λίγη σκέψη παραπάνω μπορούμε να τον ρωτήσουμε αν γνωρίζει κάποιον κανόνα (εκτός των παραπάνω) που να ισχύει ταυτοτικά στο $\mathfrak{N}$. Τότε αν η σκέψη του είναι σωστή θα μας απαντήσει κάτι όπως $x+y=y+(0+x)$. Ο μαθητής για να απαντήσει στο ερώτημά μας " σχημάτισε " μία απόδειξη από το CAZ χρησιμοποιώντας κάποιους κανόνες.

Μπορούμε να προχωρήσουμε ένα βήμα πιο πέρα ρωτώντας τον αν γνωρίζει μία εξίσωση που να ισχύει ταυτοτικά στο $\mathfrak{N}$ αλλά δεν μπορούμε να την συνάγουμε από το CAZ. Προφανώς αυτό το ερώτημα ξεπερνάει τις δυνατότητές του αλλά είναι ένα πολύ ενδιαφέρον ερώτημα στα πλαίσια της λογικής.

Στην συνέχεια θα αναπτύξουμε τα κατάλληλα εργαλεία για να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα. Επίσης θα ορίσουμε τους κανόνες απόδειξης της " εξισωτικής " λογικής, οι οποίοι είναι αρκετά απλοί και διαισθητικά αποδεκτοί, και θα αποδείξουμε θεωρήματα Πληρότητας και Εγκυρότητας γι' αυτήν.

1.1 Εξισωτικοί Κανόνες

Σ' όλο το κεφάλαιο η γλώσσα στην οποία δουλεύουμε είναι η $\mathfrak{L} = \{+, 0\}$ εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά. Το σύνολο των όρων, T, αυτής της γλώσσας ορίζεται κατα τα γνωστά και συμβολίζουμε με $\mathfrak{G} =< T, +_T, 0 >$ την **Άλγεβρα των Όρων** της γλώσσας μας. Επειδή $0 \in T$ η $\mathfrak{G}$ είναι δομή στην γλώσσα μας. Ακόμα η $\mathfrak{G}$ έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Τα σύνολα $Var, \{0\}, ran(+_T)$ είναι ξένα ανά δύο.

2. Εαν $\sigma, \tau, \sigma', \tau' \in T$ και $\sigma +_T \tau = \sigma' +_T \tau'$ τότε $\sigma = \sigma'$ και $\tau = \tau'$.

3. Εαν $U \subseteq T$ και (i) $Var \cup \{0\} \subseteq U$ και (ii) U είναι κλειστή για $+_T$ τότε $U = T$.

Στην ουσία οι παραπάνω ιδιότητες χαρακτηρίζουν την $\mathfrak{G}$ εως ισομορφισμού επομένως αρκεί να κάνουμε χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων χωρίς να αναφερόμαστε καθόλου στους ορισμούς των T και $+_T$.

Ορισμός 1.1. **Απόδειξη** *είναι μία πεπερασμένη ακολουθία τύπων που οδηγούν από ένα δοσμένο σύνολο Γ τύπων, τις υποθέσεις, σ΄ ένα τύπο ϕ, το συμπέρασμα της απόδειξης. Οι τύποι σε μία απόδειξη που δεν είναι υποθέσεις σχετίζονται με προηγούμενους στην ακολουθία της απόδειξης με συγκεκριμένους κανόνες, τους* **κανόνες συμπερασμού**.

Ορισμός 1.2. *(Κανόνες Συμπερασμού για την $\mathfrak{L}$)*

- $(R0)$ $\sigma = \sigma$ *για κάθε όρο* $\sigma \in T$ *(Ταυτολογία)*

- $(R1)$ *Εαν* $\tau = \sigma$ *τότε* $\sigma = \tau$ *(Κανόνας Συμμετρικότητας)*

- $(R2)$ *Εαν* $\sigma = \rho$ *και* $\rho = \tau$ *τότε* $\sigma = \tau$ *(Κανόνας Μεταβατικότητας)*

- $(R3)$ *Εαν* $\sigma = \sigma'$ *και* $\tau = \tau'$ *τότε* $\sigma + \tau = \sigma' + \tau'$ *(Κανόνας Προσθετικότητας)*

- $(R4)$ *Εαν* $\sigma = \tau$ *και* $f : Var \to T$ *και* $Sub_f\sigma, Sub_f\tau$ *οι όροι που παίρνουμε από τους* σ, τ *αντίστοιχα αν αντικαταστήσουμε κάθε μεταβλητή* u *με τον όρο* $f(u)$, *τότε* $Sub_f\sigma = Sub_f\tau$*(Κανόνας Αντικατάστασης).*

Τώρα μπορούμε να πούμε πως για κάθε σύνολο τύπων Γ μία απόδειξη από το Γ είναι μία πεπερασμένη ακολουθία τύπων $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ όπου κάθε ϕ_i είναι είτε στοιχείο του Γ ή ταυτολογία $(R0)$ ή συνεπάγεται από έναν ή δύο προηγούμενους τύπους της ακολουθίας και έναν από τους κανόνες $R1 - R4$.

Μπορούμε να σχηματίσουμε το σύνολο υποθέσεων Γ_{CAZ} με τις ακόλουθες εξισώσεις.

$\phi_C := (u_0 + u_1) = (u_1 + u_0)$
$\phi_A := ((u_0 + u_1) + u_2) = (u_0 + (u_1 + u_2))$
$\phi_Z := (u_0 + 0) = u_0$

Ως παράδειγμα δείνουμε την απόδειξη της $(u_0 + u_1) = (u_1 + (0 + u_0))$ από το Γ_{CAZ}

1.$(u_0 + 0) = u_0$	ϕ_Z
2.$u_0 = (u_0 + 0)$	$1, (R1)$
3.$(u_0 + 0) = (0 + u_0)$	ϕ_C και $(R4)$ με $f(u_1) = 0$
4.$u_0 = (0 + u_0)$	$2, 3(R2)$
5.$u_1 = u_1$	(R_0)
6.$(u_0 + u_1) = ((0 + u_0) + u_1)$	$4, 5(R3)$
7.$((0 + u_0) + u_1) = (u_1 + (0 + u_0))$	ϕ_C και $(R4)$ με $f(u_0) = 0 + u_0$
8.$(u_0 + u_1) = (u_1 + (0 + u_0))$	$6, 7(R2)$

1.2 Δίνοντας ζωή στα σύμβολα

Ακόμα για να μπορέσουμε να διατυπώσουμε και τυπικά το ερώτημα που θέσαμε στην πρώτη παράγραφο πρέπει να δώσουμε " ζωή " στην γλώσσα μας. Για παράδειγμα η ϕ_C είναι αλήθεια ή ψέμμα;Προφανώς η απάντηση εξαρτάται από την δομή που βρισκόμαστε. Στην $\mathfrak{N} =< \mathbb{N}, +, 0 >$ είναι αλήθεια, κάτι που θα συμβολίζουμε με $W^{\mathfrak{N}}(\phi_C) = 1$, από την άλλη στην δομή $\mathfrak{N}^* =< \mathbb{N}, exp, 0 >$ όπου $exp(x, y) = x^y$ είναι ψέμμα και $W^{\mathfrak{N}^*}(\phi_C) = 0$.

Επειδή ενδιαφερόμαστε για ταυτότητες θα λέμε ότι για έναν τύπο $\psi := \sigma = \tau$ ισχύει $W^{\mathfrak{A}}(\psi) = 1$ αν-ν για οποιαδήποτε τιμή στις μεταβλητές των σ, τ οι δύο αυτοί όροι παίρνουν την ίδια τιμή στην δομή $\mathfrak{A}$.

Διατυπωμένη διαφορετικά η παραπάνω πρόταση λέει $\overline{u}^{\mathfrak{A}}(\sigma) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(\tau)$ για κάθε αποτίμηση u της δομής $\mathfrak{A}$, όπου τυπικά η αποτίμηση u είναι μία συνάρτηση από το σύνολο των μεταβλητών της γλώσσας μας στο σύμπαν της δομής $\mathfrak{A}$.

Ο υπολογισμός της τιμής ενός όρου στην δομή μας, δεδομένης μιας αποτίμησης, βασίζεται στο παρακάτω πολύ σημαντικό Θεώρημα. Χωρίς αυτό δεν είναι τόσο προφανές ότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε όρο μοναδική τιμή.

Θεώρημα 1.1. *(Θεμελιώδες Θεώρημα Ομομορφισμού)*
Για κάθε δομή $\mathfrak{A} =< A, +_{\mathfrak{A}}, 0_{\mathfrak{A}} >$ και κάθε αποτίμηση $u : Var \to A$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός h της $\mathfrak{G} =< T, +_T, 0 >$ στην $\mathfrak{A}$ έτσι που $h(v) = u(v)$ για κάθε $v \in Var$. Θα συμβολίζουμε αυτόν τον ομομορφισμό με $\overline{u}^{\mathfrak{A}}$.

Απόδειξη:
Για την απόδειξη του Θεωρήματος θα χρειαστούμε τους εξής ορισμούς και λήμματα.

Ορισμός 1.3. *Ένα υποσύνολο H του T ονομάζεται* **τμήμα** *αν $\{0\} \cup Var \subseteq H$ και αν $x +_T y \in H$ τότε $x, y \in H$.*

Ορισμός 1.4. *Μία συνάρτηση, j, ονομάζεται* **μερική** *εαν $Dom(j) = H$ για κάποιο τμήμα H και $Ran(j) \subseteq A$ έτσι που*

$$j(0) = 0_{\mathfrak{A}}$$

$$j(v) = u(v), \quad \text{για κάθε } v \in Var$$

$$j(x +_T y) = j(x) +_{\mathfrak{A}} j(y), \quad \text{για κάθε } x, y \text{ έτσι που } x +_T y \in H$$

Λήμμα 1.1.
Εαν j_1, j_2 είναι μερικές συναρτήσεις και $x \in Dom(j_1) \cap Dom(j_2)$ τότε $j_1(x) = j_2(x)$.

Απόδειξη
Έστω G το υποσύνολο του T έτσι που $x \in G$ αν $j_1(x) = j_2(x)$ για j_1, j_2 μερικές συναρτήσεις και $x \in Dom(j_1) \cap Dom(j_2)$.

- $\{0\} \cup Var \subseteq G$. Πράγματι, $j(0) = 0_{\mathfrak{A}}, j(v) = u(v)$ για κάθε μερική συνάρτηση j.
- Έστω x, y τυχαία στοιχεία του G και j_1, j_2 μερικές συναρτήσεις έτσι που $x +_T y \in Dom(j_1) \cap Dom(j_2)$ τότε $j_1(x +_T y) = j_1(x) +_{\mathfrak{A}} j_1(y) = j_2(x) +_{\mathfrak{A}} j_2(y) = j_2(x +_T y)$.

Τελικά το G είναι το T κάτι που αποδεικνύει το λήμμα. $\square$

Λήμμα 1.2.
Κάθε στοιχείο του T ανήκει στο πεδίο ορισμού μιας μερικής συνάρτησης.

Απόδειξη
Έστω G το υποσύνολο του T έτσι που τα στοιχεία του G ανήκουν στο πεδίο ορισμού κάποιας μερικής συνάρτησης.

- Το $\{0\} \cup Var \subseteq G$. Πράγματι το $\{0\} \cup Var$ είναι τμήμα και η συνάρτηση j με $Dom(j) = \{0\} \cup Var$ και $j(0) = 0_{\mathfrak{A}}$, $j(v) = u(v)$ για κάθε $v \in Var$ είναι μερική, αφού για κανένα x, y, $x + y \in \{0\} \cup Var$.

- Έστω x, y στοιχεία του G και j_1, j_2 μερικές συναρτήσεις έτσι που $x \in Dom(j_1)$ και $y \in Dom(j_2)$, τότε μπορούμε να βρούμε μία μερική συνάρτηση, j, όπου $x, y \in Dom(j)$. Πράγματι, επιλέγουμε την j με $Dom(j) = Dom(j_1) \cup Dom(j_2)$ προφανώς $Dom(j)$ είναι τμήμα, αφού $\{0\} \cup Var \subseteq Dom(j)$ και αν $x +_T y \in Dom(j)$ τότε $x +_T y \in Dom(j_1) \cup Dom(j_2)$ επομένως αν $x +_T y \in Dom(j_1)$ τότε $x, y \in Dom(j_1)$ άρα $x, y \in Dom(j)$ και αντίστοιχα αν $x +_T y \in Dom(j_2)$. Και την ορίζουμε ως $j|Dom(j_1) = j_1$ και $j|Dom(j_2) = j_2$ ο ορισμός είναι καλός λόγω του **Λήμματος 1.1**. Η j είναι μερική διότι $\{0\} \cup Var \subseteq Dom(j_1) \cap Dom(j_2)$ και αν $x +_T y \in Dom(j_1)$ τότε $j(x +_T y) = j_1(x +_T y) = j_1(x) +_{\mathfrak{A}} j_1(y) = j(x) +_{\mathfrak{A}} j(y)$, όμοια εαν $x +_T y \in Dom(j_2)$.

  Εαν τώρα $x +_T y \in Dom(j)$ τότε $x +_T y \in G$ και ισχύει το ζητούμενο. Επομένως παίρνουμε την περίπτωση που $x +_T y \notin Dom(j)$. Παίρνουμε το σύνολο $H' = Dom(j) \cup \{x +_T y\}$· προφανώς είναι τμήμα και ορίζουμε την j' ως $j'|Dom(j) = j$ και $j'(x +_T y) = j(x) +_{\mathfrak{A}} j(y)$, αρκεί να δείξουμε ότι j' είναι μερική συνάρτηση, πράγματι η j' συμφωνεί με την j στο σύνολο $\{0\} \cup Var$ και εαν $w +_T z \in Dom(j)$ τότε $j'(w +_T z) = j(w +_T z) = j(w) +_{\mathfrak{A}} j(z) = j'(w) +_{\mathfrak{A}} j'(z)$· εαν $w +_T z = x +_T y$ τότε $w = x$ και $z = y$ επομένως $j'(x +_T y) = j(x) +_{\mathfrak{A}} j(y) = j'(x) +_{\mathfrak{A}} j'(y)$.

Και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το **Θεώρημα**. Συνδυάζοντας τα **Λήμματα 1.1,1.2**, έχουμε ότι για κάθε $\tau \in T$ υπάρχει μοναδικό $a \in A$ έτσι που $a = j(\sigma)$ για κάποια μερική συνάρτηση j. Θέτουμε ως h την συνάρτηση με $Dom(h) = T$ και για κάθε $\sigma \in T$, $h(\sigma)$ είναι το μοναδικό $a \in A$. Θα δείξουμε ότι η h είναι ομομορφισμός με $h(v) = u(v)$ για κάθε $v \in Var$. Πράγματι, $h(0) = 0_{\mathfrak{A}}$ και $h(v) = u(v)$ για κάθε $v \in Var$, αφού αυτά ισχύουν για κάθε μερική συνάρτηση j. Ακόμα για κάθε $\sigma, \tau \in T$ υπάρχει μερική συνάρτηση j έτσι που $\sigma +_T \tau \in Dom(j)$ επομένως $h(\sigma +_T \tau) = j(\sigma +_T \tau) = j(\sigma) +_{\mathfrak{A}} j(\tau) = h(\sigma) +_{\mathfrak{A}} h(\tau)$.

Δείχνουμε την μοναδικότητα της h. Έστω h_1 ομομορφισμός με $Dom(h_1) = T$. Τότε προφανώς T είναι τμήμα και h_1 είναι μερική συνάρτηση, όμοια η h είναι μερική συνάρτηση επομένως από **Λήμμα 1.1** $h(\sigma) = h_1(\sigma)$ για κάθε $\sigma \in T$. $\square$
Τελικά το ερώτημά μας παίρνει την εξής τυπική μορφή.

Ερώτημα:Μπορούμε να βρούμε εξίσωση ψ στην γλώσσα $\mathfrak{L}$ έτσι που $W^{\mathfrak{R}}(\psi) = 1$ αλλά $\Gamma_{CAZ} \nvdash \psi$;

Ακόμα χρησιμοποιώντας το **Θεώρημα 1.1** μπορούμε να δούμε ότι σημασιολογικά, η έννοια της αντικατάστασης που εμφανίζεται στον κανόνα $(R4)$, είναι ένα " παιγνίδι " αποτιμήσεων. Πράγματι, έστω $f : Var \to T$ και Sub_f η διαδικασία που αντιστοιχεί κάθε όρο σ στον όρο $Sub_f(\sigma)$ δηλαδή τον όρο που αποκτάμε από τον σ αν αντικαταστήσουμε κάθε μεταβλητή που συμμετέχει σε αυτόν, έστω v, με τον όρο $f(v)$. Από τον ορισμό έχουμε ότι $Sub_f(v) = f(v)$ για κάθε $v \in Var$ ακόμα $Sub_f(0) = 0$ και $Sub_f(\sigma +_T \tau) = Sub_f(\sigma) +_T Sub_f(\tau)$ για κάθε $\sigma, \tau \in T$. Και έτσι οδηγούμαστε με φυσικό τρόπο στο επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 1.2. *(Θεώρημα Αντικατάστασης Τιμών)*
Έστω $\mathfrak{A} =< A, +_{\mathfrak{A}}, 0_{\mathfrak{A}} >$ δομή, u αποτίμηση της $\mathfrak{A}$, f αποτίμηση της $\mathfrak{S} =< T, +_T, 0 >$ και $\sigma \in T$. Τότε $\overline{u}^{\mathfrak{A}}(Sub_f(\sigma)) = \overline{u'}^{\mathfrak{A}}(\sigma)$ όπου $u'(v) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(f(v))$.

Απόδειξη:
Δείχνουμε ότι η σύνθεση $\overline{u}^{\mathfrak{A}} \circ Sub_f$ είναι ομομορφισμός της $\mathfrak{S}$ στην $\mathfrak{A}$. Πράγματι,

- $\overline{u}^{\mathfrak{A}} \circ Sub_f(0) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(0) = 0_{\mathfrak{A}}$.
- $\overline{u}^{\mathfrak{A}} \circ Sub_f(\sigma +_T \tau) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(Sub_f(\sigma +_T \tau)) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(Sub_f(\sigma) +_T Sub_f(\tau)) = \overline{u}^{\mathfrak{A}} \circ Sub_f(\sigma) +_{\mathfrak{A}} \overline{u}^{\mathfrak{A}} \circ Sub_f(\tau)$.

Ακόμα $\overline{u}^{\mathfrak{A}} \circ Sub_f(v) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(f(v)) = u'(v)$. Και από την μοναδικότητα του ομομορφισμού του **Θεωρήματος 1.1** προκύπτει το ζητούμενο. □

1.3 Εγκυρότητα και Πληρότητα της Εξισωτικής Λογικής

Ένα αποδεικτικό σύστημα είναι **έγκυρο** αν δεν οδηγεί από αληθείς υποθέσεις σε ψευδή συμπεράσματα. Τώρα που έχουμε δώσει " ζωή " στις εξισώσεις της γλώσσας μας είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα εγκυρότητας για την εξισωτική λογική. Πριν προχωρήσουμε μας είναι χρήσιμο να ορίσουμε την εννοιολογική ερμηνεία της συνέπειας.

Ορισμός 1.5. *Έστω Γ σύνολο εξισώσεων της $\mathfrak{L}$ και ψ μία εξίσωση της $\mathfrak{L}$. Μία δομή $\mathfrak{A}$ ικανοποιεί την ψ αν-ν $W^{\mathfrak{A}}(\psi) = 1$. Τέλος $\Gamma \models \psi$ αν-ν η ψ ικανοποιείται σε κάθε δομή που ικανοποιεί το Γ.*

Θεώρημα 1.3. *(Θεώρημα Εγκυρότητας)*
$\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \models \psi$

Απόδειξη:
Έστω $\Gamma \vdash \psi$ τότε από τον ορισμό της απόδειξης έχουμε μία ακολουθία $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ από το Γ με $\phi_n = \psi$. Θα δείξουμε με επαγωγή στο i ότι κάθε ϕ_i ικανοποιείται από κάθε δομή $\mathfrak{A}$ που ικανοποιεί το Γ.

- Για $i = 1$ έχουμε ϕ_1 μπορεί να είναι είτε ταυτολογία $(R0)$ ή να ανήκει στο Γ και στις δύο περιπτώσεις ισχύει το ζητούμενο, δηλαδή για κάθε $\mathfrak{A} \models \Gamma$ έχουμε $W^{\mathfrak{A}}(\phi_1) = 1$.

- Έστω ισχύει για κάθε ϕ_j, $j \leq i$. Δείχνουμε το ζητούμενο για $i+1$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

  1. Εαν ϕ_{i+1} είναι ταυτολογία ή ανήκει στο Γ τότε το ζητούμενο ισχύει όπως στην πρώτη περίπτωση.
  2. Εστω $\phi_{i+1}(:= \tau = \sigma)$ προκύπτει από κάποιο $\phi_j(:= \sigma = \tau)$, $j < i+1$ και τον κανόνα $(R1)$. Τότε από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε $W^{\mathfrak{A}}(\phi_j) = 1$ για κάθε $\mathfrak{A} \models \Gamma$, επομένως για κάθε αποτίμηση u στην $\mathfrak{A}$ έχουμε $\overline{u}^{\mathfrak{A}}(\sigma) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(\tau)$ άρα $\overline{u}^{\mathfrak{A}}(\tau) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(\sigma)$ επομένως $W^{\mathfrak{A}}(\tau = \sigma) = 1$ άρα $W^{\mathfrak{A}}(\phi_{i+1})$.
  3. Έστω $\phi_{i+1}(:= \sigma = \tau)$ προκύπτει από τους $\phi_j(:= \sigma = \rho), \phi_k(:= \rho = \tau), j, k < i+1$ και τον κανόνα $(R2)$ τότε όμοια με πριν, από Επαγωγική Υπόθεση, $\overline{u}^{\mathfrak{A}}(\sigma) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(\rho)$ και $\overline{u}^{\mathfrak{A}}(\rho) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(\tau)$ άρα $\overline{u}^{\mathfrak{A}}(\sigma) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(\tau)$ και τελικά $W^{\mathfrak{A}}(\phi_{i+1}) = 1$.
  4. Έστω $\phi_{i+1}(:= \sigma + \tau = \sigma' + \tau')$ προκύπτει από τους $\phi_j(:= \sigma = \sigma'), \phi_k(:= \tau = \tau'), j, k < i+1$ και τον κανόνα $(R3)$, τότε από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε $\overline{u}^{\mathfrak{A}}(\sigma) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(\sigma')$ και $\overline{u}^{\mathfrak{A}}(\tau) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(\tau')$ ακόμα $\overline{u}^{\mathfrak{A}}(\sigma+\tau) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(\sigma) +_{\mathfrak{A}} \overline{u}^{\mathfrak{A}}(\tau) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(\sigma') +_{\mathfrak{A}} \overline{u}^{\mathfrak{A}}(\tau') = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(\sigma' + \tau')$, επομένως $W^{\mathfrak{A}}(\phi_{i+1}) = 1$.
  5. Έστω $\phi_{i+1}(:= Sub_f(\sigma) = Sub_f(\tau))$ προκύπτει από κάποιον $\phi_j(:= \sigma = \tau)$, τότε από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε ότι για κάθε αποτίμηση u στην $\mathfrak{A}$(όπου $\mathfrak{A}$ δομή που ικανοποιεί το Γ) ισχύει $\overline{u}^{\mathfrak{A}}(\sigma) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(\tau)$ άρα και για την u' όπου $u'(v) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(f(v))$, επομένως έχουμε $\overline{u}^{\mathfrak{A}}(Sub_f(\sigma)) \overset{\text{Θεώρημα 1.2}}{=} \overline{u'}^{\mathfrak{A}}(\sigma) \overset{\text{Επαγωγική Υπόθεση}}{=} \overline{u'}^{\mathfrak{A}}(\tau) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(Sub_f(\tau))$, άρα $W^{\mathfrak{A}}(\phi_{i+1}) = 1$. □

Το Θεώρημα Πληρότητας δεν είναι τόσο απλό όσο αυτό της Εγκυρότητας. Πρέπει να δείξουμε ότι για δεδομένα Γ και ψ πάντα υπάρχει απόδειξη $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ με $\phi_n = \psi$ από το Γ εκτός αν υπάρχει μοντέλο του Γ που δεν ικανοποιεί τον ψ.

Θεώρημα 1.4. *(Θεώρημα Πληρότητας)*
$\Gamma \models \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \psi$.

Απόδειξη:
Θα δείξουμε το αντιθετοανάστροφο δηλαδή εαν $\Gamma \not\vdash \psi$ τότε υπάρχει μοντέλο $\mathfrak{A}$ τέτοιο που $W^{\mathfrak{A}}(\phi) = 1$ για κάθε $\phi \in \Gamma$ αλλά $W^{\mathfrak{A}}(\psi) = 0$. Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το εξής ισχυρότερο Λήμμα, το οποίο μας λέει ότι για κάθε σύνολο εξισώσεων μπορούμε να βρούμε μία δομή που ικανοποιεί ακριβώς ό,τι αποδεικνύεται από τις εξισώσεις αυτές. Το ισχυρό σημείο αυτού του λήμματος είναι ότι δεν κάνει χρήση της δοσμένης εξίσωσης ψ. □

Λήμμα 1.3.
Για κάθε σύνολο εξισώσεων Γ υπάρχει δομή $\mathfrak{A}$ έτσι που για κάθε ψ έχουμε $\mathfrak{A} \models \psi$ αν-ν $\Gamma \vdash \psi$.

Απόδειξη:
Για να κατασκευάσουμε την δομή $\mathfrak{A}$ ξεκινάμε από την άλγεβρα των όρων $\mathfrak{G} = < T, +_T, 0 >$ και ορίζουμε την σχέση I_Γ στο T, έτσι που για κάθε $\sigma, \tau \in T$ $\sigma I_\Gamma \tau$ αν-ν $\Gamma \vdash \sigma = \tau$. Δείχνουμε ότι η I_Γ είναι σχέση ισοδυναμίας στο T.

- (Αυτοπαθής) $\sigma I_\Gamma \sigma$ λόγω του κανόνα $(R0)$.
- (Συμμετρική) Αν $\sigma I_\Gamma \tau$, τότε $\tau I_\Gamma \sigma$ λόγω του κανόνα $(R1)$.
- (Μεταβατική) Αν $\sigma I_\Gamma \rho$ και $\rho I_\Gamma \tau$, τότε $\sigma I_\Gamma \tau$ λόγω του κανόνα $(R2)$.

Επομένως μπορούμε να πάρουμε το σύνολο $|\mathfrak{A}| = T/I_\Gamma$ (το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας). Παρατηρούμε ότι για κάθε $\sigma \in T$ υπάρχει $[\sigma] \in |\mathfrak{A}|$ και είναι το $[\sigma] = \{\tau \in T | \sigma I_\Gamma \tau\}$. Ακόμα ορίζουμε ως $0_\mathfrak{A} = [0]$ την κλάσση ισοδυναμίας του 0. Και τέλος ορίζουμε $[\sigma] +_\mathfrak{A} [\tau] = [\sigma +_T \tau]$. Ο ορισμός αυτός είναι καλός λόγω του κανόνα $(R3)$ έτσι που αν έχουμε δύο διαφορετικούς αντιπροσώπους των κλάσεων $[\sigma]$ και $[\tau]$, έστω σ' και τ' αντίστοιχα, τότε $[\sigma] = [\sigma']$ και $[\tau] = [\tau']$ επομένως $\sigma I_\Gamma \sigma'$ και $\tau I_\Gamma \tau'$ άρα από τον κανόνα $(R3)$ έχουμε ότι $\sigma +_T \tau I_\Gamma \sigma' +_T \tau'$ επομένως $[\sigma +_T \tau] = [\sigma' +_T \tau']$.

Αυτό που μένει να δείξουμε είναι ότι η δομή που κατασκευάσαμε ικανοποιεί το **Λήμμα 1.3**. Για να το πετύχουμε αυτό πρέπει να βρούμε έναν τρόπο υπολογισμού του $\overline{u}^\mathfrak{A}(\sigma)$ για κάθε όρο σ και κάθε αποτίμηση u. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εαν σε κάθε απεικόνιση $f : Var \to T$ αντιστοιχίσουμε την αποτίμηση u_f έτσι που $u_f(v) = [f(v)]$ για κάθε μεταβλητή $v \in Var$. Τέλος αποδεικνύουμε τον εξής ισχυρισμό.

Ισχυρισμός:
Για κάθε απεικόνιση $f : Var \to T$ και κάθε όρο $\sigma \in T$ ισχύει $\overline{u_f}^\mathfrak{A}(\sigma) = [Sub_f \sigma]$.
Απόδειξη:
Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα των όρων.

- Εαν είναι ο όρος 0 τότε $\overline{u_f}^\mathfrak{A}(0) = 0_\mathfrak{A} = [0] = [Sub_f(0)]$.
- Εαν είναι μεταβλητή , έστω η v, τότε $\overline{u_f}^\mathfrak{A}(v) = u_f(v) = [f(v)] = [Sub_f(v)]$.
- Εαν είναι της μορφής $\sigma +_T \tau$ όπου για τους σ, τ ισχύει το ζητούμενο, έχουμε $\overline{u_f}^\mathfrak{A}(\sigma +_T \tau) = \overline{u_f}^\mathfrak{A}(\sigma) +_\mathfrak{A} \overline{u_f}^\mathfrak{A}(\tau) = [Sub_f(\sigma)] +_\mathfrak{A} [Sub_f(\tau)] = [Sub_f(\sigma) +_T Sub_f(\tau)] = [Sub_f(\sigma +_T \tau)]$. □

Ας θεωρήσουμε την απεικόνιση $f^* : Var \to T$ έτσι που $f^*(v) = v$ για κάθε $v \in Var$. Η Sub_{f^*} είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο T αφού η ταυτοτική απεικόνιση είναι ομομορφισμός της $\mathfrak{G}$ στον εαυτό της και $f^*(v) = v$ επομένως από το **Θεώρημα 1.1** έχουμε το ζητούμενο.

Θέτοντας ως αποτίμηση u^* την $u^*(v) = u_{f^*}(v) = [v]$ για κάθε $v \in Var$ παίρνουμε ως ειδική περίπτωση του ισχυρισμού μας ότι

$$\overline{u^*}^\mathfrak{A}(\sigma) = \overline{u_{f^*}}^\mathfrak{A}(\sigma) = [Sub_{f^*}\sigma] = [\sigma], \quad \text{για κάθε } \sigma \in T \tag{1.1}$$

Ακόμα για τυχαία αποτίμηση u της $\mathfrak{A}$ μπορούμε να επιλέξουμε απεικόνιση $f : Var \to T$ (για παράδειγμα $f(v) \in u(v)$ για κάθε $v \in Var$) έτσι που

$$\overline{u}^\mathfrak{A}(\rho) = [Sub_f \rho], \quad \text{για κάθε } \rho \in T \tag{1.2}$$

Τώρα έχουμε ό,τι χρειαζόμαστε για να αποδείξουμε το ζητούμενο.

$(\Rightarrow)$ Έστω ψ τύπος της $\mathfrak{L}$ της μορφής $\sigma = \tau$ και $\Gamma \nvdash \psi$ τότε δεν ισχύει $\sigma I_\Gamma \tau$, επομένως $[\sigma] \neq [\tau]$ άρα από την (1.1) έχουμε ότι υπάρχει αποτίμηση u^* έτσι που $\overline{u^*}^\mathfrak{A}(\sigma) \neq \overline{u^*}^\mathfrak{A}(\tau)$ άρα $W^\mathfrak{A}(\psi) = 0$.

($\Leftarrow$)Έστω $\Gamma \vdash \psi$, όπου ψ της μορφής $\sigma = \tau$ και u τυχαία αποτίμηση της $\mathfrak{A}$ τότε χρησιμοποιώντας την (1.2) επιλέγουμε απεικόνιση $f : Var \to T$ έτσι που $\overline{u}^{\mathfrak{A}}(\rho) = [Sub_f(\rho)]$ για κάθε $\rho \in T$ και γι αυτή την f και τον κανόνα $(R4)$ έχουμε $\Gamma \vdash Sub_f(\sigma) = Sub_f(\tau)$ άρα $Sub_f(\sigma) I_\Gamma Sub_f(\tau)$ επομένως $[Sub_f(\sigma)] = [Sub_f(\tau)]$ συνεπώς $\overline{u}^{\mathfrak{A}}(\sigma) = \overline{u}^{\mathfrak{A}}(\tau)$ και επειδή η u ήταν τυχαία έχουμε ότι $W^{\mathfrak{A}}(\psi) = 1$. □

1.4 Δομικοί Μετασχηματισμοί

Η έννοια της αποδειξιμότητας (συμβολικά $\Gamma \vdash \phi$) ορίζεται με κανόνες συμπερασμού που η εφαρμογή τους βασίζεται καθαρά στα σύμβολα ενός τύπου και όχι στην σημασία τους. Γι΄ αυτό το λόγο η αποδειξιμότητα θεωρείται συντακτική έννοια. Από την άλλη πλευρά η έννοια της συνέπειας (συμβολικά $\Gamma \models \phi$) ορίζεται με την βοήθεια των τιμών των όρων και την αλήθεια ή το ψεύδος των τύπων, επομένως έχει σημασιολογική υφή. Από τα προηγούμενα θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας έχουμε ότι $\Gamma \vdash \phi$ αν-ν $\Gamma \models \phi$ για κάθε εξίσωση ϕ και κάθε σύνολο εξισώσεων Γ.

Το βασικό ερώτημα που τέθηκε στην αρχή περικλείει και τις δύο έννοιες ωστόσο χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Πληρότητας και Εγκυρότητας το ερώτημα μπορεί να μεταφραστεί σε καθαρά σημασιολογικούς όρους ως εξής:Υπάρχει εξίσωση ψ της $\mathfrak{L}$ έτσι που $W^{\mathfrak{R}}(\psi) = 1$ αλλά $\Gamma_{CAZ} \not\models \psi$;

Αν θυμηθούμε ότι $\Gamma_{CAZ} \models \psi$ αν ψ είναι αλήθεια σε κάθε δομή που ικανοποιεί το Γ_{CAZ} και ότι οι δομές που ικανοποιούν το Γ_{CAZ} είναι αβελιανές ημιομάδες με ουδέτερο στοιχείο, τότε το ερώτημά μας παίρνει την εξής μορφή.

Ερώτημα: Μπορούμε να βρούμε μία εξίσωση ψ της $\mathfrak{L}$ έτσι που $W^{\mathfrak{R}}(\psi) = 1$ αλλά $W^{\mathfrak{A}}(\psi) = 0$ για τουλάχιστον μία αβελιανή ημιομάδα με ουδέτερο στοιχείο;

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ορισμένοι δομικοί μετασχηματισμοί (π.χ υποδομές, ομομορφικές εικόνες, ευθέα γινόμενα) διατηρούν την αλήθεια των εξισώσεων και μ΄ αυτό τον τρόπο θα απαντήσουμε αρνητικά στο κύριο ερώτημα του κεφαλαίου. Η ιδέα είναι ότι ξεκινώντας από την δομή $\mathfrak{R}$ μπορούμε με δομικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν την αλήθεια των εξισώσεων να φτάσουμε σε οποιαδήποτε αβελιανή ημιομάδα με ουδέτερο στοιχείο.

Θεώρημα 1.5.
$\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$ και ψ εξίσωση της $\mathfrak{L}$. Αν $W^{\mathfrak{A}_2}(\psi) = 1$, τότε $W^{\mathfrak{A}_1}(\psi) = 1$.

Απόδειξη:
$W^{\mathfrak{A}_2}(\sigma = \tau) = 1$ αν-ν $\mathfrak{A}_2 \models \forall\overline{v}(\sigma(\overline{v}) = \tau(\overline{v}))$ και επειδή οι καθολικές προτάσεις διατηρούνται υπό υποδομές έχουμε $\mathfrak{A}_1 \models \forall\overline{v}(\sigma(\overline{v}) = \tau(\overline{v}))$ άρα $W^{\mathfrak{A}_1}(\sigma = \tau) = 1$. □

Θεώρημα 1.6.
Έστω $\mathfrak{A}_2$ είναι ομομορφική εικόνα του $\mathfrak{A}_1$ και ψ εξίσωση της $\mathfrak{L}$. Αν $W^{\mathfrak{A}_1}(\psi) = 1$, τότε $W^{\mathfrak{A}_2}(\psi) = 1$.

Απόδειξη:

$W^{\mathfrak{A}_1}(\sigma = \tau)$ αν-ν $\mathfrak{A}_1 \models \forall\overline{v}(\sigma(\overline{v}) = \tau(\overline{v}))$ και επειδή $\forall\overline{v}(\sigma(\overline{v}) = \tau(\overline{v}))$ είναι θετική πρόταση, διατηρείται ύπο ομομορφισμούς, επομένως $\mathfrak{A}_2 \models \forall\overline{v}(\sigma(\overline{v}) = \tau(\overline{v}))$ άρα $W^{\mathfrak{A}_2}(\sigma = \tau)$. $\square$

Ο επόμενος μετασχηματισμός δεν είναι τόσο τετριμμένος γι αυτό θα δώσουμε πρώτα τον ορισμό του.

Ορισμός 1.6. *Έστω J ένα μη-κενό σύνολο δεικτών και για κάθε $j \in J$, $\mathfrak{A}_j = < A_j, +_j, 0_j >$.* **Ευθύ Γινόμενο** $\prod_J \mathfrak{A}_j$ *των δομών $\mathfrak{A}_j$ είναι η δομή $\mathfrak{B} = < B, +, 0 >$ όπου B είναι το $\prod_J A_j = \{f : J \to \bigcup A_j | f(j) \in A_j \text{για κάθε } j \in J\}$, $(f+g)(j) = f(j) +_j g(j)$ και 0 είναι το στοιχείο του B όπου $0(j) = 0_j$ για κάθε $j \in J$. Στην περίπτωση που $\mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}$ για κάθε j, τότε αντί για $\prod_J \mathfrak{A}_j$ γράφουμε $\mathfrak{A}^J$ και $\mathfrak{A}^J$ καλείται η $J-$ευθεία δύναμη της $\mathfrak{A}$.*

Θεώρημα 1.7. *Έστω $\mathfrak{B} = \prod_J \mathfrak{A}_j$ και ψ εξίσωση της $\mathfrak{L}$ έτσι που $W^{\mathfrak{A}_j}(\psi) = 1$ για κάθε $j \in J$. Τότε $W^{\mathfrak{B}}(\psi) = 1$.*

Απόδειξη:

Αντιστοιχούμε σε κάθε αποτίμηση u της $\mathfrak{B}$ τις αποτιμήσεις u_j των $\mathfrak{A}_j$ για κάθε $j \in J$ έτσι που $u_j(v) = (u(v))(j)$ για κάθε $v \in Var$. Δείχνουμε ότι για κάθε όρο $\sigma \in T$ ισχύει $(\overline{u}^{\mathfrak{B}}(\sigma))(j) = \overline{u_j}^{\mathfrak{A}_j}(\sigma)$, με επαγωγή στον όρο σ.

- Αν σ είναι ο όρος 0 τότε $(\overline{u}^{\mathfrak{B}}(0))(j) = 0(j) = 0_j = \overline{u_j}^{\mathfrak{A}_j}(0)$.
- Αν σ είναι μεταβλητή, έστω η v, τότε $(\overline{u}^{\mathfrak{B}}(v))(j) = (u(v))(j) = u_j(v) = \overline{u_j}^{\mathfrak{A}_j}(v)$.
- Αν σ είναι της μορφής $\tau + \rho$, όπου για τους τ, ρ ισχύει το ζητούμενο, τότε έχουμε $(\overline{u}^{\mathfrak{B}}(\tau+\rho))(j) = (\overline{u}^{\mathfrak{B}}(\tau)+\overline{u}^{\mathfrak{A}}(\rho))(j) = (\overline{u}^{\mathfrak{B}}(\tau))(j) +_j (\overline{u}^{\mathfrak{B}}(\rho))(j) = \overline{u_j}^{\mathfrak{A}_j}(\tau) +_j \overline{u_j}^{\mathfrak{A}_j}(\rho) = \overline{u_j}^{\mathfrak{A}_j}(\tau + \rho)$.

Έστω, προς άτοπο, εξίσωση $\psi (:= \sigma = \tau)$ τέτοια που $W^{\mathfrak{A}_j}(\psi) = 1$ για κάθε $j \in J$, και u αποτίμηση στην $\mathfrak{B}$ έτσι που $\overline{u}^{\mathfrak{B}}(\sigma) \neq \overline{u}^{\mathfrak{B}}(\tau)$. Τότε για κάποιο $j \in J$ έχουμε $(\overline{u}^{\mathfrak{B}}(\sigma))(j) \neq (\overline{u}^{\mathfrak{B}}(\tau))(j)$ τότε όμως $\overline{u_j}^{\mathfrak{A}_j}(\sigma) \neq \overline{u_j}^{\mathfrak{A}_j}(\tau)$ επομένως στην δομή $\mathfrak{A}_j$ έχουμε ότι $W^{\mathfrak{A}_j}(\psi) = 0$, άτοπο. $\square$

Το επόμενο Θεώρημα δίνει αρνητική απάντηση στο ερώτημά μας, κάτι που συμφωνεί με την διαίσθησή μας, αλλά χρειάστηκε αρκετή προεργασία και ανάπτυξη περιοχών που δεν βρίσκονται στα χέρια των μη-μυημένων στην λογική.

Θεώρημα 1.8. *Έστω ψ εξίσωση της $\mathfrak{L}$ και $\mathfrak{A}$ τυχαία αβελιανή ημιομάδα με ουδέτερο στοιχείο. Εαν $W^{\mathfrak{R}}(\psi) = 1$, τότε $W^{\mathfrak{A}}(\psi) = 1$.*

Απόδειξη:

Θα δείξουμε πως να κατασκευάσουμε δομές $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ έτσι που $\mathfrak{B}_1$ είναι $J-$ευθεία δύναμη της $\mathfrak{R}$ για κάποιο σύνολο δεικτών J, $\mathfrak{B}_2$ είναι υποδομή της $\mathfrak{B}_1$ και $\mathfrak{A}$ είναι ομομορφική εικόνα της $\mathfrak{B}_2$.

$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{R}^{|\mathfrak{A}|}$, δηλαδή παίρνουμε ώς σύνολο δεικτών το σύμπαν της $\mathfrak{A}$ και έστω $\mathfrak{B}_1 =< B_1, +_1, 0_1 >$.

Έστω $B_2 \subseteq B_1$ έτσι που $f \in B_2$ αν-ν $f(a) = 0$ για όλα εκτός απο πεπερασμένα το πλήθος $a \in |\mathfrak{A}|$. Είναι φανερό ότι 0_1 ανήκει στο B_2 αφού είναι παντού 0 και ακόμα η B_2 είναι κλειστή για $+_1$ αφού αν δύο συναρτήσεις είναι παντού 0 εκτός από πεπερασμένα το πλήθος σημεία τότε και το άθροισμά τους είναι παντού 0 εκτός από το πολύ το άθροισμα των σημείων που δεν μηδενίζονται οι αρχικές άρα πάλι πεπερασμένο το πλήθος σημεία. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε την υποδομή $\mathfrak{B}_2 =< B_2, +_2, 0_2 >$ ως την δομή με σύμπαν το B_2, $+_2$ τον περιορισμό της $+_1$ στο B_2 και $0_2 = 0_1$.

Δείχνουμε ότι η $\mathfrak{A}$ είναι ομομορφική εικόνα της δομής $\mathfrak{B}_2$. Έχουμε ότι για κάθε $f \in B_2$ και $a \in A$· $f(a) \in \mathbb{N}$ επομένως με $f(a) \cdot a$ θα συμβολίζουμε το αποτέλεσμα της πρόσθεσης του a στον εαυτό του $f(a)$ φορές. Επειδή $f(a) \neq 0$ για πεπερασμένο το πλήθος $a \in A$ μπορούμε να σχηματίσουμε το $\sum_{a\in A}(f(a) \cdot a)$, ισχυριζόμαστε ότι $h(f) = \sum_{a\in A}(f(a) \cdot a)$ είναι ο ομομορφισμός που θέλουμε.

- h είναι επί. Πράγματι, έστω $a \in A$ τότε επιλέγοντας f έτσι που $f(a) = 1$ και παντού αλλού 0 έχουμε $h(f) = a$.
- $h(0_2) = 0$, αφού $0_2(a) = 0$ για κάθε $a \in A$.
- $h(f +_2 g) = \sum_{a\in A}(f +_2 g)(a) \cdot a = \sum_{a\in A}(f(a) +_A g(a)) \cdot a = \sum_{a\in A} f(a) \cdot a +_A \sum_{a\in A} g(a) \cdot a = h(f) +_A h(g)$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 1.1. *Εαν $W^{\mathfrak{R}}(\psi) = 1$ τότε $\{\phi_C, \phi_A, \phi_Z\} \models \psi$.*

Πόρισμα 1.2. *Εαν $W^{\mathfrak{R}}(\psi) = 1$ τότε $\{\phi_C, \phi_A, \phi_Z\} \vdash \psi$.*

Το τελευταίο πόρισμα μας λέει ότι κάθε εξίσωση που ισχύει στην $\mathfrak{R}$ αποδεικνύεται από το CAZ χρησιμοποιώντας τους κανόνες $(R0) - (R4)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι και τα αντίστροφα των **Πορισμάτων 1.1,1.2** ισχύουν και αυτό μας δίνει μία νέα σημαντική έννοια, αυτήν της βάσης μιας εξισωτικής θεωρίας.

Ορισμός 1.7. *Έστω $\mathfrak{A}$ δομή και Γ σύνολο εξισώσεων. Λέμε ότι Γ αποτελεί βάση για την εξισωτική θεωρία της δομής $\mathfrak{A}$ αν $W^{\mathfrak{A}}(\psi) = 1$ αν-ν $\Gamma \vdash \psi$ για κάθε εξίσωση ψ.*

Το επόμενο Θεώρημα είναι άμεσο.

Θεώρημα 1.9.
Το σύνολο εξισώσεων CAZ αποτελεί βάση για την εξισωτική θεωρία της $\mathfrak{R}$.

1.5 Ταυτότητες σε άλλες δομές

Σ' αυτή την παράγραφο θα επεκτείνουμε την ισχύ του **Θεωρήματος 1.9** σε άλλες δομές οι οποίες έρχονται φυσικά στο μυαλό μας και θα καταλήξουμε με ένα πρόβλημα που θα μας απασχολήσει στο υπόλοιπο της εργασίας.

Αν σκεφτούμε την $\mathfrak{I} =< \mathbb{Z}, +, 0 >$ τότε το $\{\phi_C, \phi_A, \phi_Z\}$ ικανοποιείται σε αυτήν, επομένως και κάθε συνέπεια αυτων των εξισώσεων ισχύει στην $\mathfrak{I}$. Αντίστροφα, εαν ψ είναι μία ταυτότητα που ισχύει στην $\mathfrak{I}$, τότε επειδή $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{I}$ έχουμε ότι η ψ ισχύει στην $\mathfrak{R}$ (**Θεώρημα 1.5**) επομένως αποδεικνύεται από το CAZ, συνεπώς το CAZ αποτελεί βάση για την εξισωτική θεωρία της $\mathfrak{I}$.

Όμοια η δομή $\mathfrak{B} =< \mathbb{N}^*, \cdot, 1 >$ των θετικών ακεραίων έχει υποδομή, την $\mathfrak{B}' =< \{2^k | k \in \mathbb{N}\}, \cdot, 1 >$, που απεικονίζεται ομομορφικα από την log_2 επί της $\mathfrak{R}$. Επομένως λόγω των **Θεωρημάτων 1.5,1.6** αν $W^{\mathfrak{B}}(\psi) = 1$ τότε $W^{\mathfrak{R}}(\psi) = 1$

και συνεπώς $\Gamma_{CAZ} \vdash \psi$. Άρα το CAZ αποτελεί βάση και για την εξισωτική θεωρία της δομής $\mathfrak{B}$.

Ακόμα επειδή η $\mathfrak{B}$ είναι υποδομή των $\mathfrak{N}' =< \mathbb{N}, \cdot, 1 >, \mathfrak{I}' =< \mathbb{Z}, \cdot, 1 >$ το τελευταίο αποτέλεσμα μας δίνει ότι το CAZ είναι βάση για την εξισωτική θεωρία των $\mathfrak{N}', \mathfrak{I}'$. Ωστόσο σε αυτές τις δύο δομές συμβαίνει κάτι περίεργο, και στις δύο έχουμε ότι $0 \cdot x = 0$ για κάθε x στις δομές μας. Μήπως τελικά έχουμε βρεί μία εξίσωση που δεν αποδεικνύεται από το CAZ;

Η απάντηση είναι ναι και όχι. Πράγματι αυτή η εξίσωση δεν αποδεικνύεται από το CAZ (κάτι που θα ήταν αντιφατικό με το ότι το CAZ αποτελεί βάση για τις εξισωτικές θεωρίες των $\mathfrak{N}', \mathfrak{I}'$), όμως η γλώσσα μας έχει μόνο ένα σύμβολο σταθεράς που σ' αυτές τις δύο δομές ερμηνεύεται ως ο αριθμός 1, επομένως η εξίσωση $0 \cdot x = 0$ δεν μπορεί να εκφραστεί με τύπο της γλώσσα μας. Τελικά , όπως αποδείξαμε, κάθε τύπος της $\mathfrak{L}$ που ισχύει στις $\mathfrak{N}', \mathfrak{I}'$ αποδεικνύεται από το CAZ.

Φυσικά αν περάσουμε στην δομή $< \mathbb{Z}, \cdot, 1, 0 >$ τότε χρειαζόμαστε μία πιο πλούσια γλώσσα για να εκφράσουμε τις εξισώσεις της. Συγκεκριμένα διαλέγουμε την γλώσσα με **Άλγεβρα Όρων** $< T, +_T, 1, 0 >$ με δύο σταθερές και σ' αυτήν την άλγεβρα επιλέγουμε μία βάση για την εξισωτική θεωρία της $< \mathbb{Z}, \cdot, 1, 0 >$ που περιέχει τις εξισώσεις $(u_0 +_T 1) = u_0$ και $(u_0 +_T 0) = 0$.

Ένα πιο ενδιαφέρον παράδειγμα είναι η δομή ενός δακτυλίου $\mathfrak{K} =< \mathbb{Z}, +, \cdot, 1, 0 >$. Σ' αυτήν την περίπτωση πρέπει να πλουτίσουμε περαιτέρω την γλώσσα μας, $\mathfrak{L}''$, με ακόμα ένα διθέσιο συναρτησιακό σύμβολο και μπορούμε να δείξουμε ότι οι εξισώσεις CAZ για κάθε μία από τις δομές $< \mathbb{Z}, +, 0 >, < \mathbb{Z}, \cdot, 1 >$ μαζί με τις $u_0 \cdot (u_1 + u_2) = (u_0 \cdot u_1) + (u_0 \cdot u_2)$ και $u_0 \cdot 0 = 0$ αποτελούν βάση για την εξισωτική θεωρία του $\mathfrak{K}$. Για συντομία θα αναφερόμαστε σε αυτό το σύνολο των 8 εξισώσεων ως Γ.

Αν και θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε την ίδια μέθοδο που εφαρμόσαμε στην περίπτωση της $\mathfrak{N}$, εδώ θα εκμεταλλευτούμε κάποια στοιχεία της θεωρίας δακτυλίων. Από το σύνολο των όρων της γλώσσας μας θα ξεχωρίσουμε ένα υποσύνολο F που τα στοιχεία του είναι " τυπικά " πολυώνυμα.

Ορισμός 1.8. **Ψηφία** *της $\mathfrak{L}''$ είναι οι εξής όροι (αναδρομικά).*

- *Το 0 είναι ψηφίο.*
- *Αν g είναι ψηφίο, τότε $g + 1$ είναι ψηφίο.*

Ορισμός 1.9. **Τυπικές δυνάμεις** *τυχαίας μεταβλητής u_l είναι οι εξής όροι της $\mathfrak{L}''$ (αναδρομικά).*

- *Η u_l είναι τυπική δύναμη της u_l.*
- *Αν ο f είναι τυπική δύναμη της u_l, τότε ο $f \cdot u_l$ είναι τυπική δύναμη της u_l.*

Ορισμός 1.10. *Ένας όρος της $\mathfrak{L}''$ είναι* **τυπικό μονώνυμο** *εαν είναι της μορφής $k \cdot f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ όπου k είναι ψηφίο, f_i, $1 \leq i \leq n$ είναι τυπικές δυνάμεις μεταβλητών και αν f_i είναι τυπική δύναμη της u_l τότε κανένα f_j με $j < i$ δεν είναι τυπική δύναμη μεταβλητής u_m με $m \leq l$.*

Ορισμός 1.11. *Ένας όρος της $\mathfrak{L}''$ είναι* **τυπικό πολυώνυμο** *εαν είναι της μορφής $g_1 + \ldots + g_n$ όπου τα g_i, $1 \leq i \leq n$ είναι τυπικά μονώνυμα και αν $g_i = k \cdot u_{i_1}^{l_1} \cdot \ldots \cdot u_{i_n}^{l_n}$ και $g_j = \lambda \cdot u_{j_1}^{w_1} \cdot \ldots \cdot u_{j_m}^{w_m}$ με $i < j$ τότε είτε υπάρχει $\xi \leq n$ έτσι που για κάθε $\rho < \xi$ έχουμε $i_\rho = j_\rho$ και $l_\rho = w_\rho$ και είτε $i_\xi > j_\xi$ ή $i_\xi = j_\xi$ και $l_\xi > w_\xi$, ή $n > m$ και για κάθε $\rho \leq m$ έχουμε $i_\rho = j_\rho$ και $l_\rho = w_\rho$.*

Οι παραπάνω ορισμοί μας δίνουν την δυνατότητα να αποδείξουμε τα επόμενα δύο βασικά λήμματα.

Λήμμα 1.4.
Για κάθε όρο σ της $\mathfrak{L}''$ υπάρχει τυπικό πολυώνυμο τ της $\mathfrak{L}''$ έτσι που $\Gamma \vdash \sigma = \tau$.

Απόδειξη:
Με επαγωγή στον όρο σ.

- Εαν σ είναι ο όρος 0 τότε 0 είναι τυπικό πολυώνυμο και $0 = 0$ είναι ταυτολογία άρα $\Gamma \vdash 0 = 0$.
- Εαν σ είναι ο όρος 1 τότε όμοια με πριν το 1 είναι τυπικό πολυώνυμο και $\Gamma \vdash 1 = 1$.
- Εαν σ είναι της μορφής $\tau + \rho$, όπου για τους όρους τ, ρ ισχύει το ζητούμενο, τότε έχουμε από την Επαγωγική Υπόθεση ότι $\Gamma \vdash \tau = \tau'$ και $\Gamma \vdash \rho = \rho'$ όπου $\tau' = g_1 + \ldots + g_n$ και $\rho' = f_1 + \ldots + f_m$ τυπικά πολυώνυμα. Ισχυριζόμαστε ότι το τυπικό πολυώνυμο $h = h_1 + \ldots + h_k$ όπου $k \leq m + n$ και h_i είναι είτε κάποιο g_j είτε κάποιο f_w ή το άθροισμα των ψηφίων δύο μονωνύμων με τις ίδιες μεταβλητές στις ίδιες τυπικές δυνάμεις, έτσι που το h ικανοποιεί τον **Ορισμό 1.11**, είναι αυτό που ζητάμε. Είναι άμεσο ότι χρησιμοποιώντας την επιμεριστικότητα της $\cdot$ επί της $+$ καθώς και τις εξισώσεις CAZ για την πρόσθεση έχουμε το εξής $\Gamma \vdash \tau' + \rho' = h$ και επειδή $\Gamma \vdash \tau + \rho = \tau' + \rho'$ έχουμε ότι $\Gamma \vdash \sigma = h$ όπου h τυπικό πολυώνυμο.
- Αν σ είναι της μορφής $\tau \cdot \rho$, όπου για τους τ, ρ ισχύει το ζητούμενο, τότε όπως πριν έχουμε ότι υπάρχουν τυπικά πολυώνυμα $\tau' = g_1 + \ldots + g_n, \rho' = f_1 + \ldots + f_m$ και φυσικά το τυπικό πολυώνυμο που ζητάμε είναι το $h = h_1 + \ldots + h_k$ όπου $k \leq m \cdot n$ και h_i είναι της μορφής $g_j \cdot f_w$ ή είναι το άθροισμα των ψηφίων δύο ή περισσότερων μονωνύμων της μορφής $g_j \cdot f_w$ με τις ίδιες μεταβλητές στις ίδιες τυπικές δυνάμεις, έτσι που h ικανοποιεί τον **Ορισμό 1.11**. Είναι άμεσο ότι χρησιμοποιώντας την επιμεριστικότητα της $\cdot$ επί της $+$ και τις εξισώσεις CAZ για την πρόσθεση και των πολλαπλασιασμό έχουμε ότι $\Gamma \vdash \tau' \cdot \rho' = h$ και επειδή $\Gamma \vdash \tau \cdot \rho = \tau' \cdot \rho'$ έχουμε ότι $\Gamma \vdash \sigma = h$ όπου h τυπικό πολυώνυμο. $\square$

Λήμμα 1.5.
Εαν τ, ρ είναι τυπικά πολυώνυμα της $\mathfrak{L}''$ τέτοια που $W^{\mathfrak{K}}(\tau = \rho) = 1$ τότε είναι τα ίδια πολυώνυμα.

Απόδειξη:
Συμβολίζουμε με $f(u_1, \ldots, u_n)$, το τυπικό πολυώνυμο f μαζί με τις ελεύθερες μεταβλητές που συμμετέχουν σ' αυτό. Έστω, προς άτοπο, ότι $\tau(u_1, \ldots, u_n)$ δεν είναι το $\rho(u_1, \ldots, u_n)$, τότε επειδή κάθε πολυώνυμο αναπαριστάται μοναδικά ως τυπικό πολυώνυμο (**Ορισμός 1.11**) έχουμε ότι $\tau^{\mathfrak{K}}(u_1, \ldots, u_n)$ δεν είναι το $\rho^{\mathfrak{K}}(u_1, \ldots, u_n) (\in \mathbb{Z}[u_1, \ldots, u_n])$ και η διαφορά τους δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, επομένως ορίζεται ο βαθμός του πολυωνύμου $deg_{u_1}(\tau^{\mathfrak{K}}(u_1, \ldots, u_n) - \rho^{\mathfrak{K}}(u_1, \ldots, u_n)) = k \in \mathbb{N}$. Συνεπώς το πολυώνυμο $(\tau^{\mathfrak{K}} - \rho^{\mathfrak{K}})(u_1, a_2, \ldots, a_n)$ έχει το πολύ k ρίζες για κάθε $(a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$, όμως από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\tau^{\mathfrak{K}}(j, a_2, \ldots, a_n) = \rho^{\mathfrak{K}}(j, a_2, \ldots, a_n)$$

για $1 \leq j \leq k+1$, άτοπο. $\square$

Από τα παραπάνω λήμματα εύκολα βλέπουμε ότι η Γ αποτελεί βάση για την εξισωτική θεωρία της $\mathfrak{K}$. Στην ουσία ισχύει κάτι ισχυρότερο δηλαδή τα δύο λήμματα μας οδηγούν στην αποκρισιμότητα της εξισωτικής θεωρίας της $\mathfrak{K}$. Πράγματι, έστω $\sigma = \tau$ ένας τύπος της $\mathfrak{L}''$, τότε από το **Λήμμα 1.4** υπάρχουν τυπικά πολυώνυμα σ' και τ' έτσι που $\Gamma \vdash \sigma = \sigma'$ και $\Gamma \vdash \tau = \tau'$. Επειδή $W^{\mathfrak{K}}(\sigma = \sigma') = 1$ και $W^{\mathfrak{K}}(\tau = \tau') = 1$ έχουμε, χρησιμοποιώντας το **Λήμμα 1.5**, ότι $W^{\mathfrak{K}}(\sigma = \tau) = 1$ αν-ν το τυπικό πολυώνυμο τ' είναι το τυπικό πολυώνυμο σ', κάτι που προφανώς μπορεί να αποφασιστεί. Ακόμα αν $W^{\mathfrak{K}}(\sigma = \tau) = 1$ τότε $\Gamma \vdash \sigma = \sigma'$ και $\Gamma \vdash \tau = \sigma$ κάτι που αποδεικνύει ότι το Γ αποτελεί βάση για την εξισωτική θεωρία της $\mathfrak{K}$.

Επίσης η ίδια απόδειξη λειτουργεί στην περίπτωση οποιασδήποτε ακέραιας περιοχής. Και ακόμα με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι Γ αποτελεί βάση για την εξισωτική θεωρία της $< \mathbb{N}, \cdot, +, 0, 1 >$.

Τέλος θα θέσουμε το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει στο υπόλοιπο της εργασίας.

Ερώτημα:Εαν εμπλουτίσουμε την δομή $\mathfrak{K}$ με ακόμα ένα διθέσιο συναρτησιακό σύμβολο, το exp, και $\mathfrak{N} =< \mathbb{N}, +, \cdot, exp, 0, 1 >$, όπου $x \ exp \ y = x^y$, μπορούμε να βρούμε βάση για την εξισωτική θεωρία της $\mathfrak{N}$;

O Alfred Tarski προχώρησε το πρόβλημα περαιτέρω ρωτώντας αν η βάση για την εξισωτική θεωρία της $\mathfrak{N}$ προκύπτει από το Γ και τις εξής εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} (a)\ u_0^0 = 1 & (d)\ u_0^{(u_1+u_2)} = u_0^{u_1} \cdot u_0^{u_2} \\ (b)\ u_0^1 = u_0 & (e)\ (u_0 \cdot u_1)^{u_2} = u_0^{u_2} \cdot u_1^{u_2} \\ (c)\ 1^{u_0} = 1 & (f)\ ((u_0)^{u_1})^{u_2} = u_0^{(u_1 \cdot u_2)} \end{array}$$

Συμπληρωματικά αναφέρουμε ότι ο Charles Martin έδειξε ότι το σύνολο Γ μαζί με τις εξισώσεις $(d) - (f)$ δεν αποτελεί βάση για την εξισωτική θεωρία της δομής $\mathfrak{Z}' =< \mathbb{N}, +, \cdot, exp >$. Συγκεκριμένα η εξής εξίσωση

$$(x^y + x^y)^x \cdot (y^x + y^x)^y = (x^x + x^x)^y \cdot (y^y + y^y)^x$$

είναι αλήθεια στην $\mathfrak{Z}'$ αλλά δεν αποδεικνύεται από το Γ μαζί με τις εξισώσεις $(d) - (f)$. Ακόμα ο Martin έδειξε ότι η $\mathfrak{Z}'$ δεν έχει πεπερασμένη βάση.

Πολύ ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι σχεδόν όλα τα σημαντικά αποτελέσματα που αποδείχθηκαν σε αυτή την ενότητα μεταφέρονται σχεδόν αυτούσια στην πλουσιότερη γλώσσα που περιλαμβάνει το συναρτησιακό σύμβολο exp. Έτσι στα επόμενα κεφάλαια θα δείξουμε ότι υπάρχει διαδικασία απόφασης για την ισότητα δύο όρων της νέας γλώσσας και ότι το σύνολο Γ μαζί με τις εξισώσεις $(a) - (f)$ δεν αποτελούν βάση για την εξισωτική θεωρία της $\mathfrak{N}' =< \mathbb{N}, +, \cdot, exp, 1 >$. Στην ουσία κάτι ισχυρότερο ισχύει, η εξισωτική θεωρία της $\mathfrak{N}'$ δεν έχει πεπερασμένη βάση. Για το πρώτο αποτέλεσμα θα χρειαστούμε την βοήθεια της ανάλυσης, αλλά πώς μπορούμε να κάνουμε ανάλυση στους φυσικούς ή ακόμα και στους ακεραίους;

Έτσι το επόμενο κεφάλαιο έπεται φυσικά δείχνοντας ότι δύο όροι της επαυξημένης γλώσσας είναι ίσοι στους φυσικούς αν-ν είναι ίσοι στους πραγματικούς.

Κεφάλαιο 2

Ιεραρχία του Hardy και οι νόμοι της εκθετικοποίησης

Οι ιδέες του παρόντος κεφαλαίου έχουν αρκετά βαθιές ρίζες και βασίζονται σε μία πρωτοποριακή εργασία του Hardy, που αφορά τις τάξεις του απείρου. Ο Hardy μελετώντας συναρτήσεις (μιας μεταβλητής) σε μία αρκετά πλούσια γλώσσα ($\mathfrak{L}_H = \{+, -, \cdot, \div, (\sqrt[n]{})_{n\in\mathbb{N}}, e, log, (r)_{r\in\mathbb{R}}\}$)έδειξε ότι αυτές που τελικώς ορίζονται δεν διασταυρώνονται άπειρα ανα δύο. Αυτό σημαίνει ότι από κάποιο σημείο και μετά είτε είναι ίσες, ή η μία είναι μεγαλύτερη της άλλης.

Θα δείξουμε ότι στην γλώσσα $\mathfrak{L}_M = \{0, 1, +, \cdot, -, ^{-1}, exp\}$ η εξισωτική θεωρία των φυσικών είναι αποκρίσιμη (κάτω από κάποιους ασθενείς περιορισμούς). Με άλλα λόγια μπορούμε να αποφανθούμε δεδομένης μιας εξίσωσης $\tau = \sigma$ αν ισχύει ταυτοτικά στους φυσικούς. Ακόμα θα δείξουμε ότι οι νόμοι της εκθετικοποίησης είναι ίδιοι στους φυσικούς και τους πραγματικούς.

2.1 Όροι και απονομή τιμών

Σ' αυτή την παράγραφο θα κάνουμε έναν τεχνικό διαχωρισμό όρων. Θα χωρίσουμε τους όρους σε $\mathbb{R}-$όρους και $\mathbb{Z}-$όρους. Η διαφορά στην γλώσσα είναι σχεδόν ανεπαίσθητη. Για τους $\mathbb{R}-$όρους η γλώσσα θα περιέχει (εκτός των $0, 1, +, -, \cdot, ^{-1}$) δύο μονοθέσια συναρτησιακά τα e, log,ενώ η γλώσσα για τους $\mathbb{Z}-$όρους θα περιέχει ένα διθέσιο συναρτησιακό το exp. Ωστόσο αυτός ο διαχωρισμός είναι αναγκαίος για να χρησιμοποιήσουμε τις ιδέες του Hardy.

Ορισμός 2.1. *Το σύνολο των* $\mathbb{R}-$**όρων** *είναι το ελάχιστο σύνολο, T, έτσι που τα $\{0, 1\} \cup Var \subseteq T$ και αν $\tau, \sigma \in T$ τότε $(\tau)^{-1}, (log\tau), (e^{\tau}), (\tau + \sigma), (\tau - \sigma), (\tau \cdot \sigma)$ είναι όροι.*

Ορισμός 2.2. *Το σύνολο των* $\mathbb{Z}-$**όρων** *είναι το ελάχιστο σύνολο, T, έτσι που τα $\{0, 1\} \cup Var \subseteq T$ και αν $\tau, \sigma \in T$ τότε $(\tau)^{-1}, (\tau exp \sigma), (\tau + \sigma), (\tau - \sigma), (\tau \cdot \sigma)$ είναι όροι.*

Οι όροι καθορίζουν μερικές συναρτήσεις στους πραγματικούς. Στην συνέχεια θα ορίσουμε πότε ένας όρος τ ορίζεται στο $\bar{a}$ με τιμή b και πότε δεν ορίζεται στο $\bar{a}$.

Ορισμός 2.3. *Έστω $u : Var \to \mathbb{R}$ τότε ορίζουμε με ταυτόχρονη αναδρομή τις έννοιες:*
τ^u ορίζεται να είναι το τ.
τ^u δεν ορίζεται.
*$\mathbb{Z}-$**όροι**:*
$i)$ 0^u ορίζεται να είναι το 0.
1^u ορίζεται να είναι το 1.
$ii)$ Για κάθε $v \in Var$, v^u ορίζεται να είναι το $u(v)$.
$iii)$ Εαν τ^u δεν ορίζεται ή ορίζεται να είναι το 0 τότε $(\tau)^{-1}$ δεν ορίζεται.
Εαν τ^u ορίζεται να είναι το r και $r \neq 0$ τότε $((\tau)^{-1})^u$ ορίζεται να είναι το r^{-1}.
$iv)$Εαν κάποιο από τα τ^u, σ^u δεν ορίζεται τότε $(\tau+\sigma)^u, (\tau\cdot\sigma)^u, (\tau-\sigma)^u$ και $(\tau exp \sigma)^u$ δεν ορίζονται.
Εαν τ^u ορίζεται να είναι το r και σ^u ορίζεται να είναι το μ τότε:
$(\tau+\sigma)^u$ ορίζεται να είναι το $r+\mu$.
$(\tau\cdot\sigma)$ ορίζεται να είναι το $r\cdot\mu$.
$(\tau-\sigma)$ ορίζεται να είναι το $r-\mu$.
$v)$ Εαν τ^u ορίζεται να είναι το 0 τότε το $(\tau exp \sigma)^u$ δεν ορίζεται.
Εαν τ^u ορίζεται να είναι το r,$r \neq 0$, και σ^u ορίζεται να είναι το μ τότε $(\tau exp \sigma)^u$ ορίζεται να είναι το $e^{\mu log|r|}$.

*$\mathbb{R}-$**όροι**:*
Ακριβώς όπως οι $\mathbb{Z}-$όροι για τα $0, 1, Var, ^{-1}, +, -, \cdot$ και
Εαν τ^u δεν ορίζεται,τότε $(log\tau)^u, (e\tau)^u$ δεν ορίζονται.
Εαν τ^u ορίζεται να είναι το r, τότε $(e\tau)^u$ είναι το e^r.
Εαν τ^u ορίζεται να είναι το r, $r \neq 0$, τότε $(log\tau)^u$ είναι το $log|r|$.
Εαν τ^u ορίζεται να είναι το 0, τότε $(log\tau)^u$ δεν ορίζεται.

Σημείωση:Ο λόγος που δεν ορίζουμε στους $\mathbb{Z}-$όρους $0^r = 0$ για $r \neq 0$ και $0^0 = 1$ είναι γιατί τότε το πρόβλημα ισότητας στους φυσικούς είναι τετριμμένα αναποκρίσιμο. Για παράδειγμα $0^{(p(\bar{x})^2)} = 0$ (όπου $p(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$) αν-ν $p(\bar{x})$ δεν έχει λύσεις στους φυσικούς, το τελευταίο πρόβλημα όμως έχει αποδειχθεί από τον Matijasevic αναποκρίσιμο στους ακεραίους. Το επόμενο λήμμα ολοκληρώνει τον συλλογισμό μας.

Λήμμα 2.1.
$\mathfrak{L}_{\mathbb{Z}}$:Δεδομένης μίας διοφαντικής εξίσωσης να αποφασιστεί αν αυτή έχει λύση στους ακεραίους.
$\mathfrak{L}_{\mathbb{N}}$:Δεδομένης μίας διοφαντικής εξίσωσης να αποφασιστεί αν αυτή έχει λύση στους φυσικούς.
$\mathfrak{L}_{\mathbb{Z}} \propto \mathfrak{L}_{\mathbb{N}}$ (δηλαδή το πρόβλημα $\mathfrak{L}_{\mathbb{Z}}$ ανάγεται στο $\mathfrak{L}_{\mathbb{N}}$).

Απόδειξη:
Μετατρέπουμε την διοφαντική εξίσωση $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ στην $q(y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n) = 0$ όπου $q(y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n)$ είναι το $p(y_1 - z_1, \ldots, y_n - z_n)$ και έχουμε:

$(\Rightarrow)$ Εαν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ είναι λύση της $p(x_1, \ldots, x_n)$ (δηλαδή ένα " ναι " στιγμιότυπο του πρώτου προβλήματος) τότε μπορούμε να βρούμε $b_1, c_1, \ldots, b_n, c_n \in \mathbb{N}$

έτσι που $b_i - c_i = a_i$ για $1 \leq i \leq n$ και $q(b_1, c_1, \ldots, b_n, c_n) = 0$.

($\Leftarrow$) Εαν $b_1, c_1, \ldots, b_n, c_n \in \mathbb{N}$ είναι λύση της $q(y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n) = 0$ (δηλαδή ένα " ναι " στιγμιότυπο του δεύτερου προβλήματος) τότε για τα $a_i = b_i - c_i \in \mathbb{Z}$,$1 \leq i \leq n$ ισχύει $p(a_1, \ldots, a_n) = 0$. $\square$

Τώρα είμαστε σε θέση να δώσουμε τον βασικό ορισμό.

Ορισμός 2.4. *$\tau \equiv \sigma$ αν για κάθε u είτε τ^u, σ^u δεν ορίζονται ή τ^u ορίζεται να είναι το r και σ^u ορίζεται να είναι το μ και $r = \mu$.*

Τελικά το πρόβλημα απόφασης παίρνει την εξής μορφή.

Δεδομένων των τ, μ υπάρχει διαδικασία που να αποφασίζει αν $\tau \equiv \sigma$;

2.2 Ιεραρχία του Hardy

Θα χρησιμοποιήσουμε μία παραλλαγή των μεθόδων του Hardy για να αποδείξουμε κάποια άνω φράγματα στον αριθμό των ριζών λογαριθμικο-εκθετικών συναρτήσεων (στην περίπτωσή μας θα περιοριστούμε σε $\mathbb{R}-$όρους). Η πολύ σημαντική συμβολή του Hardy στο συγκεκριμένο θέμα είναι η τυποποίηση της μεθόδου που χρειαζόμαστε για να αποδείξουμε ιδιότητες των λογαριθμικο-εκθετικών συναρτήσεων. Από όλη την κλάση αυτών των συναρτήσεων αρκεί να δείξουμε την προς απόδειξη ιδιότητα για συναρτήσεις μιας συγκεκριμένης μορφής,αυτό μπορεί να επιτευχεί με επαγωγή σε τρία μεγέθη επομένως η απόδειξη ιδιοτήτων στις λογαριθμικο-εκθετικές συναρτήσεις απαιτεί υπερπεπερασμένη επαγωγή στον ω^3. Ας γίνουμε όμως πιο συγκεκριμένοι.
Πρώτα θα ορίσουμε την τάξη ενός $\mathbb{R}-$όρου.

Ορισμός 2.5. *Η τάξη$_\leq$ του $\mathbb{R}-$όρου τ είναι ≤ 0 εαν κανένα από τα e, log δεν συμμετέχουν σε αυτόν.*
Η τάξη$_\leq$ του $\mathbb{R}-$όρου τ είναι $\leq n+1$ εαν όλες οι εμφανίσεις των e, log επισυνάπτονται σε όρους τάξης$_\leq$ $\leq n$.
Η τάξη του $\mathbb{R}-$όρου τ είναι ο ελάχιστος φυσικός έτσι που η τάξη$_\leq$ του τ είναι $\leq m$.

Εύκολα μπορύμε να δούμε ότι η τάξη ενός $\mathbb{R}-$όρου είναι αποτελεσματικά υπολογίσιμη καθώς και ότι η κλάση των όρων τάξης n είναι κλειστή για $+, -, \cdot, ^{-1}$.

Θα συμβολίζουμε με f_n όρους τάξης $\leq n$.

Ορισμός 2.6. *f_n καλείται* **ακέραιος** *αν είναι της μορφής*

$$\sum_i \rho_{n-1,i} \cdot e^{\sigma_{n-1,i}} \cdot \prod_{j=1}^{h_i} (log \tau_{n-1,i}^{[j]})^{k_{j,i}}$$

όπου $\rho_{n-1,i}, \sigma_{n-1,i}, \tau_{n-1,i}^{[j]}$ είναι όροι τάξης $\leq n-1$ και $k_{j,i} \geq 0$.
Ακόμα $k_{1,i} + \ldots + k_{h_i,i}$ καλείται ο **βαθμός λογάριθμου** *ενός τυπικού όρου (δηλαδή ενός προσθετέου) και το μέγιστο των βαθμών λογαρίθμου όλων των όρων καλείται ο βαθμός λογαρίθμου του f_n.*

Εαν ο βαθμός λογαρίθμου του f_n είναι λ και σ' αυτό συμβάλλουν μ όροι τότε ο f_n καλείται **λογαριθμικού τύπου** (λ, μ).
Περαιτέρω εαν $\lambda = 0$,τότε f_n καλείται **ακέραιος εκθετικός**,*και μ καλείται ο τύπος του f_n. Αν επιπρόσθετα $\mu = 1$,τότε f_n καλείται* **απλός εκθετικός**.

Ορισμός 2.7. *Εαν f_n είναι $g_n \cdot (h_n)^{-1}$, όπου g_n, h_n είναι ακέραιοι,τότε f_n καλείται* **ρητός**. *Εαν g_n, h_n είναι εκθετικοί, τότε f_n καλείται* **ρητός εκθετικός**.

Λήμμα 2.2.
Κάθε f_n είναι (πρωτογενώς αναδρομικά) ισοδύναμος με κάποιον ρητό g_n.

Απόδειξη:
f_n είναι αλγεβρική έκφραση $A(h_1, \ldots, h_n)$ με $h_1, \ldots, h_n$ τάξης το πολύ n,θεωρούμε αυτή την αλγεβρική έκφραση ως μία πεπερασμένη ακολουθία πράξεων μεταξύ των h_i. Έτσι έχουμε ότι

$$f_n = g_1 \Box_1 g_2 \Box_2 g_3 \Box_3 \ldots \Box_{m-1} g_m$$

όπου $\Box_i = +$ή $-$ ή $\cdot$ και $g_i = h_{i_j}$ ή $(h_{i_j})^{-1}$ για i_j με $1 \leq i_j \leq n$. Να σημειώσουμε εδώ ότι κάποια g_i μπορεί να παίρνουν τις ίδιες τιμές. Με επαγωγή στον αριθμό των αλγεβρικών πράξεων θα δείξουμε ότι το αποτέλεσμα των πράξεων αυτών είναι ρητός ακέραιος της μορφής $\rho_n \cdot (\sigma_n)^{-1}$.

- Για $m = 1$. Διακρίνουμε περιπτώσεις.

  1. $\Box_1 = +$ή $-$ ή $\cdot$ και $g_1 = h_{1_j}$,$g_2 = h_{2_j}$. Τότε $g_1 \Box_1 g_2$ είναι πρωτογενώς αναδρομικά ισοδύναμος είτε με $(h_{1_j} + h_{2_j}) \cdot (1)^{-1}$ είτε με $(h_{1_j} - h_{2_j}) \cdot (1)^{-1}$ ή με $(h_{1_j} \cdot h_{2_j}) \cdot (1)^{-1}$.
  2. $\Box_1 = +$ ή $-$ και $g_1 = h_{1_j}, g_2 = (h_{2_j})^{-1}$. Τότε $g_1 \Box g_2$ είναι πρωτογενώς αναδρομικά ισοδύναμος είτε με $(h_{1_j} \cdot h_{2_j} + 1) \cdot (h_{2_j})^{-1}$ ή με $(h_{1_j} \cdot h_{2_j} - 1) \cdot (h_{2_j})^{-1}$.
  3. $\Box_1 = \cdot$ και $g_1 = h_{1_j}, g_2 = (h_{2_j})^{-1}$. Τότε $g_1 \Box g_2$ είναι πρωτογενώς αναδρομικά ισοδύναμος με $h_{1_j} \cdot (h_{2_j})^{-1}$.
  4. $\Box_1 = +$ ή $-$ και $g_1 = (h_{1_j})^{-1}, g_2 = (h_{2_j})^{-1}$. Τότε $g_1 \Box g_2$ είναι πρωτογενώς αναδρομικά ισοδύναμος είτε με $(h_{1_j} + h_{2_j}) \cdot (h_{1_j} \cdot h_{2_j})^{-1}$ ή με $(h_{1_j} - h_{2_j}) \cdot (h_{1_j} \cdot h_{2_j})^{-1}$.
  5. $\Box_1 = \cdot$ και $g_1 = (h_{1_j})^{-1}, g_2 = (h_{2_j})^{-1}$. Τότε $g_1 \Box g_2$ είναι πρωτογενώς αναδρομικά ισοδύναμος με $1 \cdot (h_{1_j} \cdot h_{2_j})^{-1}$.
  6. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις εύκολα ανάγονται στις προηγούμενες

- Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για m. Δείχνουμε ότι ισχύει για $m+1$. Έχουμε ότι $g_1 \Box_1 g_2 \Box_2 g_3 \Box_3 \ldots \Box_{m+1} g_{m+2} \overset{\text{Επαγωγική Υπόθεση}}{\equiv} \rho_n \cdot (\sigma_n)^{-1} \Box_{m+1} g_{m+2}$. Διακρίνουμε πάλι περιπτώσεις:

  1. $\Box_{m+1} = +$ ή $-$ και $g_{m+2} = h_{m+2_j}$. Τότε $\rho_n \cdot (\sigma_n)^{-1} \Box_{m+1} g_{m+2}$ είναι πρωτογενώς αναδρομικά ισοδύναμος είτε με $(\rho_n + h_{m+2_j} \cdot \sigma_n) \cdot (\sigma_n)^{-1}$ ή με $(\rho_n - h_{m+2_j} \cdot \sigma_n) \cdot (\sigma_n)^{-1}$.
  2. $\Box_{m+1} = \cdot$ και $g_{m+2} = h_{m+2_j}$. Τότε $\rho_n \cdot (\sigma_n)^{-1} \Box_{m+1} g_{m+2}$ είναι πρωτογενώς αναδρομικά ισοδύναμος με $(\rho_n \cdot h_{m+2_j}) \cdot (\sigma_n)^{-1}$.

3. $\square_{m+1} = +$ ή $-$ και $g_{m+2} = (h_{m+2_j})^{-1}$. Τότε $\rho_n \cdot (\sigma_n)^{-1} \square_{m+1} g_{m+2}$ είναι πρωτογενώς αναδρομικά ισοδύναμος είτε με $(\rho_n \cdot h_{m+2_j} + \sigma_n) \cdot (h_{m+2_j} \cdot \sigma_n)^{-1}$ ή με $(\rho_n \cdot h_{m+2_j} - \sigma_n) \cdot (h_{m+2_j} \cdot \sigma_n)^{-1}$.

4. $\square_{m+1} = \cdot$ και $g_{m+2} = (h_{m+2_j})^{-1}$. Τότε $\rho_n \cdot (\sigma_n)^{-1} \square_{m+1} g_{m+2}$ είναι πρωτογενώς αναδρομικά ισοδύναμος με $\rho_n \cdot (h_{m+2_j} \cdot \sigma_n)^{-1}$.

Και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Λήμμα 2.3.
Εαν $f_n = \rho_{n-1} \cdot e^{\sigma_{n-1}}$ είναι απλός εκθετικός, τότε $\frac{\partial}{\partial x} f_n$ είναι απλός εκθετικός με τον ίδιο παράγοντα $e^{\sigma_{n-1}}$.

Απόδειξη:
$\frac{\partial}{\partial x} f_n = \frac{\partial}{\partial x}(\rho_{n-1} \cdot e^{\sigma_{n-1}}) = [\frac{\partial}{\partial x}(\rho_{n-1}) + \rho_{n-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{n-1})] \cdot e^{\sigma_{n-1}}$. $\square$

Λήμμα 2.4.
Εαν f_n είναι ακέραιος εκθετικός τύπου μ τότε $\frac{\partial}{\partial x} f_n$ είναι ακέραιος εκθετικός τύπου μ, εκτός εαν κάποιος από τους προσθετέους είναι σταθερός στο x, οπότε $\frac{\partial}{\partial x} f_n$ είναι τύπου $< \mu$.

Απόδειξη:
Από το **Λήμμα 2.3** έχουμε ότι $\frac{\partial}{\partial x} f_n = \frac{\partial}{\partial x}(\sum_{i=1}^{\mu} \rho_{n-1,i} \cdot e^{\sigma_{n-1,i}}) = \sum_{i=1}^{\mu} [\frac{\partial}{\partial x}(\rho_{n-1,i}) + \rho_{n-1,i} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{n-1,i})] \cdot e^{\sigma_{n-1,i}}$. Ακόμα αν κάποιος από τους προσθετέους, έστω ο ξ, είναι σταθερός στο x τότε $\frac{\partial}{\partial x}(\rho_{n-1,\xi}) = 0$ και $\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{n-1,\xi}) = 0$, άρα ο $\frac{\partial}{\partial x} f_n$ θα είναι ακέραιος εκθετικός τύπου $< \mu$. $\square$

Λήμμα 2.5.
Εαν f_n είναι ακέραιος λογαριθμικού τύπου (λ, μ) τότε $\frac{\partial}{\partial x} f_n$ είναι είτε τύπου (λ, μ) είτε τύπου (λ, μ_1) με $\mu_1 < \mu$ ή τύπου $(\lambda - 1, h_1)$ εαν $\mu = 1$.

Απόδειξη:
Με υπερπεπερασμένη επαγωγή στον ω^2.

- Εαν f_n ακέραιος εκθετικός τότε ισχύει το ζητούμενο από τα **Λήμματα 2.3,2.4**.
- Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για λ για κάθε μ. Δείχνουμε ότι ισχύει για $\lambda + 1$.
- Έστω f_n λογαριθμικού τύπου $(\lambda+1, 1)$ και $g = \rho_{n-1} e^{\sigma_{n-1}} (log\tau_{n-1}^{[1]})^{k_1} \cdot \ldots \cdot (log\tau_{n-1}^{[h]})^{k_h}$ με $k_1 + \ldots + k_h = \lambda + 1$. Τότε $\frac{\partial}{\partial x} g = g_1 + g_2$ όπου

  $$g_1 = [\frac{\theta}{\theta x}(\rho_{n-1}) + \frac{\theta}{\theta x}(\sigma_{n-1}) \cdot \rho_{n-1}] e^{\sigma_{n-1}} \cdot (log\tau_{n-1}^{[1]})^{k_1} \cdot \ldots \cdot (log\tau_{n-1}^{[h]})^{k_h}$$

  και

  $$g_2 = \rho_{n-1} e^{\sigma_{n-1}} \cdot$$

  $$[k_1 \frac{\frac{\theta}{\theta x}(\tau_{n-1}^{[1]})}{\tau_{n-1}^{[1]}} (log\tau_{n-1}^{[1]})^{k_1 - 1} \cdot \ldots \cdot (log\tau_{n-1}^{[h]})^{k_h} + \ldots$$

$$+(log\tau_{n-1}^{[1]})^{k_1}\cdot\ldots\cdot k_h\frac{\frac{\theta}{\theta x}(\tau_{n-1}^{[h]})}{\tau_{n-1}^{[h]}}(log\tau_{n-1}^{[h]})^{k_h-1}]$$

Επομένως $\frac{\partial}{\partial x}g$ είναι είτε λογαριθμικού τύπου $(\lambda+1,1)$ (από το g_1) ή (λ,h_2) όπου $h_2\leq h$(από το g_2 εαν $\rho_{n-1}e^{\sigma_{n-1}}$ είναι σταθερό ως προς x).

Ακόμα έχουμε ότι f_n-g είναι λογαριθμικού τύπου (λ,μ), επομένως από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε ότι $\frac{\partial}{\partial x}(f_n-g)$ έχει λογαριθμικό τύπο είτε (λ,μ) είτε (λ,μ_1) με $\mu_1<\mu$ ή $(\lambda-1,h_1)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1. $\frac{\partial}{\partial x}(f_n-g)$ έχει λογαριθμικό τύπο (λ,μ). Ακόμα έχουμε ότι $\frac{\partial}{\partial x}f_n=\frac{\partial}{\partial x}(f_n-g)+\frac{\partial}{\partial x}g$. Επομένως, εαν $\frac{\partial}{\partial x}g$ είναι λογαριθμικού τύπου $(\lambda+1,1)$ έχουμε ότι $\frac{\partial}{\partial x}f_n$ είναι λογαριθμικού τύπου $(\lambda+1,1)$, εαν είναι λογαριθμικού τύπου (λ,h_2) τότε $\frac{\partial}{\partial x}f_n$ είναι λογαριθμικού τύπου $(\lambda,\mu+h_2)$. Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει το ζητούμενο.
2. $\frac{\partial}{\partial x}(f_n-g)$ έχει λογαριθμικό τύπο (λ,μ_1), όπου $\mu_1<\mu$. Τότε όπως πριν ανάλογα με το $\frac{\partial}{\partial x}g$ θα είναι είτε λογαριθμικού τύπου $(\lambda+1,1)$ ή τύπου (λ,μ_1+h_2).
3. $\frac{\partial}{\partial x}(f_n-g)$ έχει λογαριθμικό τύπο $(\lambda-1,h_1)$. Τότε πάλι ανάλογα με το $\frac{\partial}{\partial x}g$ θα είναι είτε λογαριθμικού τύπου $(\lambda+1,1)$ ή τύπου (λ,h_2).

- Έστω ότι ισχύει για $(\lambda+1,\mu)$. Δείχνουμε ότι ισχύει για $(\lambda+1,\mu+1)$.
- Όπως πριν επιλέγουμε κάποιον προσθετέο, έστω g, που συμβάλλει στον λογαριθμικό βαθμό του $\frac{\partial}{\partial x}f_n$. Ακολουθούμε την ίδια ανάλυση με πριν και διακρίνουμε περιπτώσεις:

  1. $\frac{\partial}{\partial x}(f_n-g)$ έχει λογαριθμικό τύπο $(\lambda+1,\mu)$. Τότε ανάλογα με το $\frac{\partial}{\partial x}g$ το $\frac{\partial}{\partial x}f_n$ έχει λογαριθμικό τύπο είτε $(\lambda+1,\mu+1)$ ή $(\lambda+1,\mu)$.
  2. $\frac{\partial}{\partial x}(f_n-g)$ έχει λογαριθμικό τύπο $(\lambda+1,\mu_1)$. Τότε όμοια με πριν το $\frac{\partial}{\partial x}f_n$ έχει λογαριθμικό τύπο είτε $(\lambda+1,\mu_1+1)$ (όπου $\mu_1+1\leq\mu+1$) ή $(\lambda+1,\mu_1)$.

Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή μας και έτσι ισχύει το ζητούμενο για κάθε ακέραιο όρο f_n λογαριθμικού τύπου (λ,μ). □

Λήμμα 2.6.
$\frac{\partial}{\partial x}f_n$ είναι τάξης $\leq n$.

Απόδειξη:
Με επαγωγή στο n

- Για $n=0$. Τότε από το **Λήμμα 2.2** (χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι f_0 είναι αλγεβρική έκφραση πολυωνύμων καθώς και την τελική μορφή που προκύπτει από την πρωτογενώς αναδρομική διαδικασία) $f_0=P(\bar{x})\cdot(Q(\bar{x}))^{-1}$ όπου $P(\bar{x}),Q(\bar{x})$ πολυώνυμα. Επομένως

$$\frac{\partial}{\partial x}f_0=(\frac{\partial}{\partial x}P(\bar{x})\cdot Q(\bar{x})-P(\bar{x})\cdot\frac{\partial}{\partial x}Q(\bar{x}))\cdot([Q(\bar{x})]^2)^{-1}$$

  και $\frac{\partial}{\partial x}f_0$ είναι τάξης 0.

- Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για n. Δείχνουμε ότι ισχύει για $n+1$. Ακολουθούμε την ιδέα του **Λήμματος 2.2** έτσι ο f_{n+1} είναι αλγεβρική έκφραση

$$A(e^{\rho_{n,1}}, \ldots, e^{\rho_{n,m}}, log\tau_{n,1}, \ldots, \tau_{n,s}, h_{n,1}, \ldots, h_{n,k}).$$

Βλέπουμε την αλγεβρική έκφραση ως μία ακολουθία πράξεων, έτσι έχουμε:

$$f_{n+1} = g_1 \Box_1 g_2 \Box_2 g_2 \ldots \Box_{m-1} g_m$$

όπου $\Box_i = +$ ή $-$ ή $\cdot$ και $g_i = h_{i_j}$ ή $(h_{i_j})^{-1}$ ή $e^{\rho_{i_j}}$ ή $(e^{\rho_{i_j}})^{-1}$ ή $log\tau_{i_j}$ ή $(log\tau_{i_j})^{-1}$(παραλείποντας τους δείκτες που δείχνουν την τάξη των όρων). Δείχνουμε το ζητούμενο με επαγωγή στον αριθμό των πράξεων.

  - Για $m = 1$. Κάνουμε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις.
    1. Έστω $\Box_1 = \cdot$ και $g_1 = e^{\rho_{1_j}}, g_2 = log\tau_{2_j}$. Τότε $\frac{\partial}{\partial x}(g_1 \Box_1 g_2)$ είναι $\frac{\partial}{\partial x}(\rho_{1_j}) \cdot e^{\rho_{1_j}} \cdot log\tau_{2_j} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{2_j}) \cdot (\tau_{2_j})^{-1} \cdot e^{\rho_{1_j}} \cdot log\tau_{2_j}$, άρα $\frac{\partial}{\partial x}(g_1 \Box_1 g_2)$ είναι τάξης $\leq n+1$.
    2. Έστω $\Box_1 = \cdot$ και $g_1 = e^{\rho_{1_j}}, g_2 = (log\tau_{2_j})^{-1}$. Τότε $\frac{\partial}{\partial x}(g_1 \Box_1 g_2)$ είναι $(\frac{\partial}{\partial x}(\rho_{1_j}) \cdot e^{\rho_{1_j}} \cdot log\tau_{2_j} - \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{2_j}) \cdot (\tau_{2_j})^{-1} \cdot e^{\rho_{1_j}} \cdot log\tau_{2_j}) \cdot ([log\tau_{2_j}]^2)^{-1}$, πάλι έχουμε ότι $\frac{\partial}{\partial x}(g_1 \Box_1 g_2)$ είναι τάξης $\leq n+1$.
    3. Έστω $\Box_1 = +$ και $g_1 = e^{\rho_{1_j}}, g_2 = log\tau_{2_j}$. Τότε $\frac{\partial}{\partial x}(g_1 \Box_1 g_2)$ είναι $\frac{\partial}{\partial x}(\rho_{1_j}) \cdot e^{\rho_{1_j}} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{2_j}) \cdot (\tau_{2_j})^{-1} \cdot log\tau_{2_j}$, και πάλι $\frac{\partial}{\partial x}(g_1 \Box_1 g_2)$ είναι τάξης $\leq n+1$.
    4. Εύκολα ελέγχουμε τις υπόλοιπες περιπτώσεις.
  - Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για m. Δείχνουμε ότι ισχύει για $m+1$. Έχουμε ότι $f_{n+1} = g_1 \Box_1 g_2 \Box_2 \ldots \Box_{m+1} g_{m+2}$ και διακρίνουμε περιπτώσεις για τα $\Box_{m+1}, g_{m+2}$.
    1. $\Box_{m+1} = \cdot$ και $g_{m+2} = e^{\rho_{m+2_j}}$. Τότε, θέτοντας $C = g_1 \Box_1 g_2 \Box_2 \ldots \Box_m$ g_{m+1} έχουμε $\frac{\partial}{\partial x} f_{n+1} = \frac{\partial}{\partial x} C \cdot e^{\rho_{m+2_j}} + C \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\rho_{m+2_j}) e^{\rho_{m+2_j}}$ και από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε το ζητούμενο.
    2. $\Box_{m+1} = \cdot$ και $g_{m+2} = (log\tau_{m+2_j})^{-1}$. Τότε, όμοια με πριν $\frac{\partial}{\partial x} f_{n+1} = (\frac{\partial}{\partial x} C \cdot log\tau_{m+2_j} - \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{m+2_j}) \cdot (\tau_{m+2_j})^{-1} \cdot log\tau_{m+2_j} \cdot C) \cdot ([log\tau_{m+2_j}]^2)^{-1}$ και από την Επαγωγική Υπόθεση ισχύει το ζητούμενο.
    3. Εύκολα ελέγχουμε τις υπόλοιπες περιπτώσεις

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\Box$

Ας επανέλθουμε τώρα στην συμβολή του Hardy στον τομέα. O Hardy έδειξε ότι για να αποδείξουμε κάποια ιδιότητα Φ στην κλάση των $\mathbb{R}-$όρων (υποθέτοντας ότι $f \equiv g \Rightarrow (\Phi(f) \leftrightarrow \Phi(g))$) πρέπει να προχωρήσουμε ως εξής:
(I) Να αποδείξουμε $\Phi(f)$ για f τάξης 0.
(II) Να υποθέσουμε $\Phi(f)$ για κάθε όρο f τάξης $< n$.
(III) Να αποδείξουμε $\Phi(f_n)$ για f_n απλό εκθετικό.
(IV) Να αποδείξουμε $\Phi(f_n)$ για f_n ακέραιο εκθετικό με επαγωγή στον τύπο της f_n.
(V) Να αποδείξουμε $\Phi(f_n)$ για f_n λογαριθμικού τύπου $(\lambda+1, 1)$ υποθέτοντας ότι ισχύει $\Phi(f_n)$ για κάθε f_n λογαριθμικού βαθμού λ.

(VI) Να αποδείξουμε $\Phi(f_n)$ για f_n λογαριθμικού τύπου $(\lambda+1,\mu+1)$ υποθέτοντας ότι ισχύει $\Phi(f_n)$ για κάθε f_n λογαριθμικού τύπου $(\lambda+1,\mu)$.
(VII) Να αποδείξουμε $\Phi(f_n)$ για κάθε ρητό f_n.

Η πραγματικά καλή ιδέα του Hardy βρίσκεται στον εντοπισμό των σωστών μεγεθών αλλά και της κατάλληλης μορφής μιας υποκλάσης των λογαριθμικο-εκθετικών συναρτήσεων που αποτελεί τον θεμελιακό λίθο των συναρτήσεων αυτών.

2.3 Βαθμός Λογαριθμικο-εκθετικών Συναρτήσεων

Η βασική ιδέα είναι να ορίσουμε μία ποσότητα στους φυσικούς, τέτοια που αν κάποια λογαριθμικο-εκθετική συνάρτηση έχει πλήθος ριζών παραπάνω από αυτή την ποσότητα, τότε είναι ταυτοτικά 0. Η αναπόφευκτη σύγκριση με αυτό που συμβαίνει στους δακτυλίους πολυωνύμων μας οδηγεί με φυσικό τρόπο στην έννοια του " βαθμού " λογαριθμικο-εκθετικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.1.
Υπάρχει πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $d(x,\tau)$, όπου x μεταβλητή και τ όρος, έτσι που:
(a) Η d παίρνει τιμές στους φυσικούς.
(b) Εαν $\tau=\tau(x_1,\ldots,x_n)$ και $x=x_i$ για $1\leq i\leq n$, τότε για κάθε $a_1,\ldots,a_{i-1}$, $a_{i+1},\ldots,a_n$ στους πραγματικούς και κάθε ανοικτό διάστημα I στο οποίο ο $\tau(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_n)$ ορίζεται παντού, εαν υπάρχουν παραπάνω από $d(x,\tau)$ σημεία a στο I έτσι που $\tau(a_1,\ldots,a_{i-1},a,a_{i+1},\ldots,a_n)=0$ τότε για κάθε β στο I, $\tau(a_1,\ldots,a_{i-1},\beta,a_{i+1},\ldots,a_n)=0$.

Σημείωση: Για παράδειγμα, εαν ο $\tau(x,\bar{y})$ ορίζεται παντού, τότε το **Θεώρημα 2.1** λέει ότι για κάθε $\bar{a}\in\mathbb{R}^{n-1}$ εαν ο $\tau(x,\bar{a})$ έχει πάνω από $d(x,\tau)$ ρίζες στο $\mathbb{R}$, τότε είναι ταυτοτικά 0.

Το **Θεώρημα 2.1** αποδεικνύεται καλύτερα σε συνδυασμό με το παρακάτω.

Θεώρημα 2.2.
Υπάρχει πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $s(x,\tau)$, όπου x μεταβλητή και τ όρος έτσι που:
(a) Η s παίρνει τιμές στους φυσικούς.
(b) Εαν $\tau=\tau(x_1,\ldots,x_n)$ και $x=x_i$ για $1\leq i\leq n$, τότε για κάθε $a_1,\ldots,a_{i-1}$, $a_{i+1},\ldots,a_n$ στους πραγματικούς και κάθε διάστημα I, εαν υπάρχουν παραπάνω από $s(x,\tau)$ σημεία του I στα οποία ο $\tau(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_n)$ είναι μη ορίσιμος τότε, δεν ορίζεται για κάθε $\beta\in I$.

Απόδειξη:
Θα ακολουθήσουμε τα βήματα που δόθηκαν παραπάνω.
(I) Εαν τ είναι τάξης 0 τότε από το **Λήμμα 2.2** μπορούμε να βρούμε πολυώνυμα f,g έτσι που $\tau\equiv f\cdot g^{-1}$, επομένως θέτουμε $d(x,\tau)=deg_x(f)$ και $s(x,\tau)=deg_x(g)$.
(II) Έστω ότι ισχύει.

(III) τ είναι ο $f_n = \sigma_{n-1} e^{\beta n-1}$, τότε $d(x,\tau) = d(x,\sigma_{n-1})$ και $s(x,\tau) = s(x,\sigma_{n-1})$ $+s(x,\beta_{n-1})$.

(IV) Έστω ισχύει αν ο τ είναι $f_n = \sum_{k=1}^{m} \sigma_{n-1}^{[k]} e^{\beta_{n-1}^{[k]}}$. Δείχνουμε την περίπτωση που ο τ είναι $f_n = \sum_{k=1}^{m+1} \sigma_{n-1}^{[k]} e^{\beta_{n-1}^{[k]}}$. Τότε έχουμε $s(x,\tau) = s(x, \sum_{k=1}^{m} \sigma_{n-1}^{[k]} e^{\beta_{n-1}^{[k]}})+$ $s(x, \sigma_{n-1}^{[m+1]} e^{\beta_{n-1}^{[m+1]}})$ (Από την Επαγωγική Υπόθεση και την βάση).

Για το $d(x,\tau)$ εργαζόμαστε ως εξής:

Έστω $\delta = d(x, \sigma_{n-1}^{[m+1]} e^{\beta_{n-1}^{[m+1]}})$, σταθεροποιούμε κάποιες τιμές $\bar{a}$ και ένα διάστημα I στο οποίο ο $\tau(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ ορίζεται παντού. Για αυτές τις τιμές ο f_n δεν έχει πάνω από δ ρίζες κοινές με τον $\sigma_{n-1}^{[m+1]} e^{\beta_{n-1}^{[m+1]}}$ εκτός εαν ο $\sigma_{n-1}^{[m+1]} e^{\beta_{n-1}^{[m+1]}}$ για την συγκεκριμένη αναθεση τιμών είναι παντού 0 στο I. Στην τελευταία περίπτωση, f_n δεν έχει παραπάνω από $\delta_1 = d(x, \sum_{k=1}^{m} \sigma_{n-1}^{[k]} e^{\beta_{n-1}^{[k]}})$ ή είναι παντού 0 στο διάστημα I.

Στην άλλη περίπτωση όπου ο όρος $\sigma_{n-1}^{[m+1]} e^{\beta_{n-1}^{[m+1]}}$ δεν έχει πάνω από δ ρίζες για την συγκεκριμένη ανάθεση τιμών στο I, θέτουμε $h_n = f_n \cdot (\sigma_{n-1}^{[m+1]} e^{\beta_{n-1}^{[m+1]}})^{-1}$ ο οποίος είναι αποτελεσματικά ισοδύναμος με τον $1 + g_n$ όπου g_n είναι ακέραιος εκθετικός τύπου m. Θα εκτιμήσουμε το πλήθος ριζών του h_n, εκτιμώντας το πλήθος ριζών του $\frac{\partial}{\partial x} h_n$ που είναι αποτελεσματικά ισοδύναμος με τον $\frac{\partial}{\partial x} g_n$. Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι μεταξύ δύο ριζών του h_n υπάρχει ρίζα του $\frac{\partial}{\partial x} g_n$. Ωστόσο, υπάρχει η μικρή δυσκολία, ότι μεταξύ δύο ριζών του h_n μπορεί ο $\frac{\partial}{\partial x} g_n$ και ο h_n να μην ορίζονται στο σημείο που θα ήταν ρίζα του $\frac{\partial}{\partial x} g_n$.

Παρακάμπτουμε την δυσκολία ως εξής. Οι ρίζες του $\sigma_{n-1}^{[m+1]} e^{\beta_{n-1}^{[m+1]}}$ στο I επάγουν μία αποσύνθεση του I σε λιγότερα από $\delta + 1$ διαστήματα στα οποία ο h_n ορίζεται παντού. Σε κάθε τέτοιο διάστημα οι $g_n, \frac{\partial}{\partial x} g_n$ ορίζονται παντού. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

A. h_n έχει λιγότερες από $(\delta + 1) \cdot (d(x, \frac{\partial}{\partial x} g_n) + 1)$ ρίζες στο I

B. σε κάποιο υποδιάστημα I_1 του I, $\frac{\partial}{\partial x} g_n$ είναι ταυτοτικά 0.

Στην περίπτωση B στο διάστημα I_1, $\frac{\partial}{\partial x} h_n$ είναι ταυτοτικά 0, επομένως h_n είναι κάποια σταθερά και $f_n = \lambda \cdot \sigma_{n-1}^{[m+1]} e^{\beta_{n-1}^{[m+1]}}$ για κάποια σταθερά λ. Σ' αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε μιγαδική ανάλυση για να αποδείξουμε ότι $f_n = \lambda \cdot$ $\sigma_{n-1}^{[m+1]} e^{\beta_{n-1}^{[m+1]}}$ σ' όλο το I. Πράγματι, η f_n είναι αναλυτική σε κάποια ανοικτή συνεκτική (μιγαδική) γειτονιά του I, και το I_1 περιέχει σημείο συσσώρευσης του I, επομένως το ζητούμενο έπεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.3. *(Αρχή Αναλυτικής Συνεχίσεως)*
Αν το Ω είναι τόπος στο $\mathbb{C}$, οι $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφες και το σύνολο $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο Ω, τότε $f = g$.

Τελικά $f_n = \lambda \cdot \sigma_{n-1}^{[m+1]} e^{\beta_{n-1}^{[m+1]}}$ σ' όλο το I. Τώρα, στην περίπτωση που $\lambda = 0$, f_n είναι ταυτοτικά 0, εαν $\lambda \neq 0$ τότε f_n δεν έχει πάνω από δ ρίζες στο I.

Στην περίπτωση A έχουμε ότι f_n δεν έχει παραπάνω από $(\delta+1) \cdot (d(x, \frac{\partial}{\partial x} g_n) +$ $1) + \delta$ ρίζες στο I.

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα για τις διάφορες περιπτώσεις έχουμε ότι

$$d(x,\tau) = \delta_1 + (\delta + 1) \cdot (d(x, \frac{\partial}{\partial x} g_n) + 2)$$

(V) τ είναι ο f_n, όπου f_n είναι ακέραιος λογαριθμικού τύπου $(\lambda+1,1)$, επομένως f_n είναι της μορφής

$$g_n + \rho_{n-1}e^{\beta_{n-1}}(log\tau_{n-1}^{[1]})^{k_1} \cdot \ldots \cdot (log\tau_{n-1}^{[h]})^{k_h}$$

όπου g_n είναι λογαριθμικού βαθμού $\leq \lambda$ και $k_1+\ldots+k_h = \lambda+1$. Τα επιχειρήματα είναι περίπου όμοια με πριν με μία επιπρόσθετη δυσκολία.

Ορίζουμε $s(x,\tau) = s(x,g_n) + s(x,\rho_{n-1}e^{\beta_{n-1}}) + \sum_{j=1}^{h} s(x,\tau_{n-1}^{[j]}) + \sum_{j=1}^{h} d(x,\tau_{n-1}^{[j]})$. Για τον ορισμό του $d(x,\tau)$, σταθεροποιούμε πάλι κάποιες τιμές $\bar{a}$ και κάποιο διάστημα I στο οποίο ο f_n ορίζεται παντού. Έστω $\delta = d(x,\rho_{n-1}e^{\beta_{n-1}})$. Εαν $\rho_{n-1}e^{\beta_{n-1}}$ είναι ταυτοτικά 0 στο I, τότε f_n δεν έχει πάνω από $d(x,g_n)$ ρίζες στο I. Έστω τώρα ότι $\rho_{n-1}e^{\beta_{n-1}}$ δεν είναι ταυτοτικά 0 στο I και $h_n = f_n \cdot (\rho_{n-1}e^{\beta_{n-1}})^{-1}$. Τότε οι ρίζες του $\rho_{n-1}e^{\beta_{n-1}}$ επάγουν μία αποσύνθεση του I σε λιγότερα από $\delta+1$ υποδιαστήματα όπου ο h_n ορίζεται παντού σε καθ' ένα από αυτά. Προφανώς h_n είναι αποτελεσματικά ισοδύναμος με τον

$$g_n \cdot (\rho_{n-1}e^{\beta_{n-1}})^{-1} + (log\tau_{n-1}^{[1]})^{k_1} \cdot \ldots \cdot (log\tau_{n-1}^{[h]})^{k_h}.$$

Ακόμα έστω $j_n = g_n \cdot (\rho_{n-1}e^{\beta_{n-1}})^{-1}$. Τότε j_n είναι λογαριθμικού βαθμού $\leq \lambda$, επομένως από το **Λήμμα 2.5** $\frac{\partial}{\partial x}j_n$ είναι λογαριθμικού βαθμού $\leq \lambda$. Επίσης $\frac{\partial}{\partial x}(log\tau_{n-1}^{[1]})^{k_1} \cdot \ldots \cdot (log\tau_{n-1}^{[h]})^{k_h}$ είναι λογαριθμικού βαθμού $\leq \lambda$. Επομένως $\frac{\partial}{\partial x}h_n$ είναι λογαριθμικού βαθμού $\leq \lambda$ και $\frac{\partial}{\partial x}h_n$ είναι παντού ορισμένη σε κάθε επαγόμενο υποδιάστημα. Άρα όπως στο (IV) έχουμε τις περιπτώσεις:

A. h_n έχει $\leq (\delta+1) \cdot (d(x, \frac{\partial}{\partial x}h_n) + 1)$ ρίζες στο I

B. Σε κάποιο υποδιάστημα I_1 του I, h_n είναι σταθερή.

Ακριβώς όπως στην περίπτωση (IV) έχουμε:

$$d(x,\tau) = d(x,g_n) + (\delta+1)(d(x, \frac{\partial}{\partial x}h_n) + 2).$$

(VI) τ είναι ο f_n όπου f_n είναι ακέραιος λογαριθμικού τύπου $(\lambda+1,\mu+1)$. Τότε f_n είναι της μορφής

$$g_n + \rho_{n-1}e^{\beta_{n-1}}(log\tau_{n-1}^{[1]})^{k_1} \cdot \ldots \cdot (log\tau_{n-1}^{[h]})^{k_h}$$

όπου g_n είναι λογαριθμικού τύπου $(\lambda+1,\mu)$ και $k_1+\ldots+k_h = \lambda+1$. Τα επιχειρήματα είναι ακριβώς ίδια με πριν.
(VII) τ είναι ο f_n, όπου f_n είναι ρητός της μορφής $\frac{h_n}{g_n}$. Τότε θέτουμε $d(x,\tau) = d(x,h_n)$ και $s(x,\tau) = s(x,h_n) + d(x,g_n)$.
Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

2.4 Νόμοι Εκθετικοποίησης

Τα επόμενα θεωρήματα δίνουν μία μέθοδο για τον έλεγχο νόμων στους φυσικούς.

Θεώρημα 2.4.
Έστω $\tau(x_1,\ldots,x_n)$ $\mathbb{Z}-$όρος ή $\mathbb{R}-$όρος που ορίζεται παντού στο $\mathbb{R}^n$. Τότε $\tau \equiv 0$ στο $\mathbb{R}^n$ αν-ν $\tau \equiv 0$ στο $\mathbb{N}^n$.

Απόδειξη:
Περίπτωση 1η. τ είναι $\mathbb{R}-$όρος. Με επαγωγή στον αριθμό των μεταβλητών που εμφανίζονται στον τ.

- Για $n = 1$. Έστω $\tau(x) \equiv 0$ στο $\mathbb{N}$ και $k = d(x, \tau)$ τότε έχουμε ότι $\tau(i) = 0$ για $1 \leq i \leq k + 1$ επομένως από το **Θεώρημα 2.1** έχουμε ότι $\tau(x) \equiv 0$ στο $\mathbb{R}$.

- Έστω ότι ισχύει για n. Δείχνουμε ότι ισχύει για $n+1$. Έστω $\tau(x_1, \ldots, x_{n+1})$ ταυτοτικά 0 στο $\mathbb{N}^{n+1}$ και $k_1 = d(x_1, \tau)$. Τότε $\tau(i, x_2, \ldots, x_{n+1}) \equiv 0$ για $1 \leq i \leq k_1+1$ στο $\mathbb{N}^n$ επομένως από την Επαγωγική Υπόθεση $\tau(i, x_2, \ldots, x_{n+1}) \equiv 0$ για $1 \leq i \leq k_1 + 1$ στο $\mathbb{R}^n$. Έστω τυχαία $n-$άδα $\bar{a} = (a_2, \ldots, a_{n+1})$ τότε από το **Θεώρημα 2.1** $\tau(x_1, \bar{a}) \equiv 0$ στο $\mathbb{R}$, επομένως $\tau(x_1, \bar{a}) \equiv 0$ στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\bar{a}$, άρα $\tau(x_1, \ldots, x_{n+1}) \equiv 0$.

Περίπτωση 2η. τ είναι $\mathbb{Z}-$όρος. Βρίσκουμε $\mathbb{R}-$όρο σ, αντικαθιστώντας τα $\theta\ exp\ \rho$ με $e^{\rho log \theta}$, έτσι που $\sigma \equiv \tau$ και το πρόβλημα ανάγεται στην **1η Περίπτωση**. □

Πόρισμα 2.1.
Οι εκθετικοί νόμοι των φυσικών και των πραγματικών είναι οι ίδιοι.

Απόδειξη:
Έστω, προς άτοπο, ότι δεν είναι. Τότε υπάρχουν όροι τ, σ έτσι που $\tau \equiv \sigma$ στους φυσικούς αλλά όχι στους πραγματικούς. Τότε όμως $\tau - \sigma \equiv 0$ στους φυσικούς αλλά όχι στους πραγματικούς, άτοπο από το **Θεώρημα 2.4**. □

Τέλος δίνουμε έναν αλγόριθμο που αποφασίζει πότε μία εξίσωση είναι ταυτότητα στους φυσικούς.

Ορισμός 2.8. *Ένας $\mathbb{Z}-$όρος $\tau(\bar{x})$ λέγεται* **ολικά κληρονομικά υπολογίσιμος** *στο $\mathbb{N}$ εαν κάθε υποόρος Y του τ ορίζεται παντού στο $\mathbb{N}$, παίρνει τιμές στο $\mathbb{Z}$, και εαν Y συμμετέχει σε εκθετικό τότε παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}$.*

Θεώρημα 2.5.
Υπάρχει πρωτογενώς αναδρομική διαδικασία που αποφασίζει, δεδομένων ολικά κληρονομικά υπολογίσιμων τ, σ, αν $\tau \equiv \sigma$.

Απόδειξη:
Για να αποφασίσουμε εαν $\tau \equiv \sigma$ βρίσκουμε τ^*, σ^* $\mathbb{R}-$όρους έτσι που $\tau \equiv \tau^*$ και $\sigma \equiv \sigma^*$. Προχωρούμε με επαγωγή στον αριθμό μεταβλητών που εμφανίζονται στους όρους μας.

- Για $n = 1$. Υπολογίζουμε το $d(x, \tau^* - \sigma^*)$ και ελέγχουμε για $1 \leq j \leq d(x, \tau^* - \sigma^*)$ αν $\tau(j) = \sigma(j)$. Εαν για κάποια τιμή του j οι δύο όροι δεν είναι ίσοι τότε απαντάμε “ Όχι ”. Αλλιώς, απαντάμε “ Ναι ”.

- Έστω ότι ισχύει για n. Δείχνουμε ότι ισχύει για $n+1$. Υπολογίζουμε το $d(x_1, \tau^* - \sigma^*)$ και για κάθε $1 \leq j \leq d(x_1, \tau^* - \sigma^*)$ αποφασίζουμε χρησιμοποιώντας την Επαγωγική Υπόθεση εαν $\tau(j, x_2, \ldots, x_{n+1}) \equiv \sigma(j, \ldots, x_{n+1})$. Εαν για κάποια τιμή του j απαντήσουμε " Όχι ", τότε απαντάμε " Όχι ". Αλλιώς απαντάμε " Ναι ". $\square$

Στην ουσία η πρωτογενώς αναδρομική διαδικασία που περιγράψαμε ελέγχει $\prod_{i=1}^{n} d(x_i, \tau^* - \sigma^*)$ τιμές των δεδομένων όρων.

Η πολύ καλή ιδέα του Hardy μας οδήγησε στον ορισμό του " βαθμού " λογαριθμικο-εκθετικών συναρτήσεων. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματά μας με την θεωρία πολυωνύμων παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν μεγάλες διαφορές, πραγματικά για να ελέγξουμε αν δύο πολυώνυμα είναι ίσα αρκεί να ελέγξουμε πεπερασμένο πλήθος τιμών τους. Το ίδιο δείξαμε ότι συμβαίνει και στις λογαριθμικο-εκθετικές συναρτήσεις.

Τα αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου θα χρησιμοποιηθούν κατά ουσιαστικό τρόπο για την επίτευξη του στόχου μας, και η κύρια συνδρομή τους βρίσκεται στο ότι πλέον (**Θεώρημα 2.4**) μας επιτρέπεται η χρήση διαφορικής άλγεβρας.

Κεφάλαιο 3

Η λύση του Wilkie

Η απλούστερη περίπτωση στο πρόβλημα που έθεσε ο Tarski είναι:

Δεδομένων δύο όρων f, g της $\mathfrak{L} = \{+, \cdot, exp, 1\}$ έτσι που $\mathbb{N} \models f \approx g$, είναι αλήθεια ότι $EXP \vdash f \approx g$;

όπου EXP το εξής σύνολο εξισώσεων:

$$HSI \begin{cases} 1.1 (i) x + y \approx y + x & (ii) x \cdot y \approx y \cdot x \\ 1.2\ x + (y + z) \approx (x + y) + z & (ii) x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z \\ 1.3\ x \cdot (y + z) \approx (x \cdot y) + (x \cdot z) & \\ 1.4\ 1 \cdot x \approx x & \\ 1.5 (i) x^1 \approx x & (ii) 1^x \approx 1 \\ 1.6\ (x \cdot y)^z \approx x^z \cdot y^z & \\ 1.7\ x^{(y+z)} \approx x^y \cdot x^z & \\ 1.8\ (x^y)^z \approx x^{(y \cdot z)} & \end{cases}$$

Χωρίς να χρειάζεται να δοθούν ιδιαίτερες εξηγήσεις οι παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται και " High School Identities ".

Ο Wilkie απαντάει αρνητικά στο ερώτημα του Tarski με το εξής αντιπαράδειγμα. $f_0 \approx g_0$, όπου:

$$f_0 := (x+1)^x + (x^2+x+1)^x)^y \cdot ((x^3+1)^y + (x^4+x^2+1)^y)^x$$

$$g_0 := ((x+1)^y + (x^2+x+1)^y)^x \cdot ((x^3+1)^x + (x^4+x^2+1)^x)^y$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει στους φυσικούς λόγω της παραγοντοποίησης των $x^3 + 1, x^4 + x^2 + 1$ σε $(x+1)(x^2-x+1)$ και $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ αντίστοιχα, αλλά δεν μπορεί να αποδειχθεί στο EXP, όπως θα δείξουμε σε επόμενο κεφάλαιο, επειδή ο $(x^2 - x + 1)$ δεν είναι καν όρος της $\mathfrak{L}$.

Στην συνέχεια δείχνουμε ότι αυτός είναι ο μόνος λόγος που το σύνολο εξισώσεων EXP είναι ανεπαρκές.

Πριν προχωρήσουμε, να παρατηρήσουμε ότι η δομή $\mathfrak{N} =< \mathbb{N}, +, \cdot, exp, 1 >$ δίνει τις φυσικές ερμηνείες στα σύμβολα της γλώσσας, καθώς και ότι σ' αυτή την δομή αλλά και στην $\mathfrak{R}^+ =< \mathbb{R}^+, +, \cdot, exp, 1 >$ (πάλι με τις φυσικές ερμηνείες των συμβόλων) μπορούμε να δούμε τους όρους ως ολικές συναρτήσεις.

Ακόμα δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι από το αποτέλεσμα του προηγούμενου κεφαλαίου (**Θεώρημα 2.4**) ισχύει ότι

Πόρισμα 3.1.
$W^{\mathfrak{N}}(\psi) = 1$ αν-ν $W^{\mathfrak{R}^+}(\psi) = 1$, για κάθε εξίσωση ψ.

Απόδειξη
Έχουμε ότι $\mathfrak{L} \subseteq \{0, 1, +, -, \cdot, ^{-1}, exp\}$ και ακόμα όλοι οι όροι της $\mathfrak{L}$ είναι παντού ορίσιμοι. □

3.1 Κανονική Μορφή Όρων

Για να βρούμε μία βάση της εξισωτικής θεωρίας της $\mathfrak{N}$ επεκτείνουμε την γλώσσα και το σύνολο εξισώσεων EXP ως εξής.

Ορισμός 3.1. *Έστω $\rho(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$. Καλούμε το $\rho(x_1, \ldots, x_n)$* **θετικό** *αν $\rho(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^+$ όποτε $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}^+$. Ένα θετικό πολυώνυμο καλείται* **αυστηρά θετικό** *αν επιπλέον όλοι οι συντελεστές του είναι θετικοί.*

Έστω $\mathcal{P}_n$ το σύνολο των θετικών πολυωνύμων σε n μεταβλητές. Για κάθε $\rho \in \mathcal{P}_n$, έστω t_ρ ένα νέο $n-$θέσιο συναρτησιακό σύμβολο και $\mathfrak{L}^*$ η γλώσσα που προκύπτει αν προσθέσουμε στην $\mathfrak{L}$ όλα τα νέα συναρτησιακά σύμβολα t_ρ (για $\rho \in \bigcup_n \mathcal{P}_n$).

Επίσης ορίζουμε ως EXP^* την εξισωτική θεωρία που προκύπτει από την EXP προσθέτοντας όλες τις εξισώσεις $f \approx g$ έτσι που f, g είναι όροι της $\mathfrak{L}^*$ που δεν περιέχουν το σύμβολο exp και $W^{\mathfrak{N}}(f \approx g) = 1$ (ή προφανώς ισοδύναμα από το **Πόρισμα 3.1**, $W^{\mathfrak{R}^+}(f \approx g) = 1$).

Παρατηρήσεις:

- Οι δομές $\mathfrak{N}, \mathfrak{R}^+$ μπορούν να επεκταθούν σε $\mathfrak{L}^*-$δομές με φυσικό τρόπο ερμηνεύοντας τα νέα συναρτησιακά σύμβολα t_ρ ως ρ.
- Έχουμε προσθέσει αριθμήσιμο το πλήθος νέων συμβόλων στην $\mathfrak{L}$, επομένως η $\mathfrak{L}^*$ παραμένει αριθμήσιμη.
- Οι όροι της $\mathfrak{L}$ που δεν περιείχαν το σύμβολο exp είναι αυστηρά θετικά πολυώνυμα, επομένως κάποιες εξισώσεις τέτοιων όρων που ήδη αποδεικνυόντουσαν από το EXP έχουν προστεθεί ως αξιώματα. Με αυτή την έννοια η EXP^* δεν είναι η " οικονομικότερη " θεωρία, που αποτελεί βάση για την $\mathfrak{N}$.

Η διαδικασία που ακολουθεί μας δίνει μία έννοια κανονικής μορφής των όρων της γλώσσας $\mathfrak{L}^*$.

Αρχικά σταθεροποιούμε ένα n (αυτό θα είναι ο αριθμός των μεταβλητών που θα συμμετέχουν στους όρους μας) και υποθέτουμε ότι η $\mathfrak{L}$ περιέχει τις μεταβλητές $y_1, \ldots, y_n, x_1 \ldots, x_k, \ldots$.

Έστω P_m το σύνολο των ανάγωγων (επί του $\mathbb{Z}$) στοιχείων του $\mathcal{P}_m$ που είναι διαφορετικά από το 1 ή μίας μεταβλητής. Ακόμα έστω M_m το σύνολο των μονωνύμων του $\mathcal{P}_m$ (με συντελεστή 1) που είναι διαφορετικά του 1.

Επειδή κανένας παράγοντας θετικού πολυωνύμου δεν μπορεί να έχει ρίζες στο $\mathbb{R}^+$ έχουμε ότι κάθε στοιχείο του $\mathcal{P}_m$ (διαφορετικό του 1) παραγοντοποιείται μοναδικά ως γινόμενο ενός στοιχείου από το M_m και στοιχείων του P_m. (3.1)

Τέλος σταθεροποιούμε μία απαρίθμηση $< p_1, q_1 >, \ldots, < p_m, q_m >, \ldots$ όρων της $\mathfrak{L}^*$, που δεν περιέχουν το σύμβολο exp, με τις εξής ιδιότητες:

$$\begin{array}{l}\forall k \in \mathbb{N}, p_{k+1} = t_\rho(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_{k'}) \text{ ή } p_{k+1} = y_i \text{ για κάποιο } i \leq n \\ q_{k+1} = t_\mu(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_{k''}) \text{ για κάποια } k', k'' \leq k,\ \rho \in P_{n+k'} \text{ και} \\ \mu \in M_{n+k''}.\end{array} \tag{3.2}$$

$$\begin{array}{l}\forall k', k'' \in \mathbb{N}, \forall \rho \in P_{n+k'}, \forall \mu \in M_{n+k''},\ \text{υπάρχει κάποιο } l \in \mathbb{N} \text{ έτσι που} \\ EXP^* \vdash p_l \approx t_\rho(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_{k'}) \text{ και} \\ EXP^* \vdash q_l \approx t_\mu(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_{k''}).\end{array} \tag{3.3}$$

$$\begin{array}{l}\forall k'' \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*, i \leq n, \forall \mu \in M_{n+k''},\ \text{υπάρχει κάποιο } l \in \mathbb{N} \text{ έτσι που} \\ EXP^* \vdash p_l \approx y_i \text{ και } EXP^* \vdash q_l \approx t_\mu(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_{k''}).\end{array} \tag{3.4}$$

$$\begin{array}{l}\forall k, l \in \mathbb{N}^*, k \leq l,\ \text{αν } EXP^* \vdash \forall y_1 \ldots y_n x_1 \ldots x_{l-1}(p_k \approx p_l \wedge q_k \approx q_l) \\ \text{τότε } k = l.\end{array} \tag{3.5}$$

Η 3.2 έχει οντολογική υφή και μας λέει ότι οι δυάδες της απαρίθμησης έχουν ως πρώτο μέλος συναρτησιακό σύμβολο που ερμηνεύεται ως ανάγωγο πολυώνυμο ή y_i και ως δεύτερο μέλος συναρτησιακό σύμβολο που ερμηνεύεται ως μονώνυμο.

Οι 3.3,3.4 μας λένε ότι η απαρίθμηση είναι εξαντλητική ως προς τις δυάδες ανάγωγων-μονωνύμων και y_i-μονωνύμων.

Τέλος η 3.5 μας λέει ότι η απαρίθμηση είναι απέριττη, για παράδειγμα τα επόμενα δεν θα μπορούσαν να ήταν διαφορετικά στοιχεία της απαρίθμησης, $< t_{y_1^2+y_1+1}, t_{y_1^3} >$ και $< t_{1+y_1^2+y_1}, t_{y_1^3} >$ αφού $EXP^* \vdash \forall y_1(t_{y_1^2+y_1+1} \approx t_{1+y_1^2+y_1} \wedge t_{y_1^3} \approx t_{y_1^3})$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι μία τέτοια απαρίθμηση μπορεί να κατασκευαστεί αν ορίσουμε μία κανονική μορφή στα μονώνυμα και έπειτα στα πολυώνυμα περίπου παρόμοια με τους **Ορισμούς 1.8-1.11**.

Στη συνέχεια, ορίζουμε ακολουθίες όρων της $\mathfrak{L}^*, < u_i >_{i \in \mathbb{N}^*}, < s_i >_{i \in \mathbb{N}^*}, < \tau_i >_{i \in \mathbb{N}^*}$ ως εξής:

$$u_1 = p_1, s_1 = q_1, \tau_1 = p_1^{q_1} \tag{3.6}$$

Για $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{l}u_{i+1} = p_{i+1}(y_1, \ldots, y_n, \tau_1, \ldots, \tau_i) \\ s_{i+1} = q_{i+1}(y_1, \ldots, y_n, \tau_1, \ldots, \tau_i) \\ \tau_{i+1} = u_{i+1}^{s_{i+1}}\end{array} \tag{3.7}$$

Το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι κάθε όρος της $\mathfrak{L}^*$ μπορεί να αναπαρασταθεί από κάποιον όρο σε κανονική μορφή. Κατα κύριο λόγο η κανονική μορφή είναι ένα πολυώνυμο όπου έχει ως " μεταβλητές " άλλους όρους. Η ιδέα είναι ότι αναπαριστώντας κάθε όρο με πολυώνυμο τότε η εξίσωση δύο πολυωνύμων θα είναι αξίωμα της EXP^* όμως αυτά τα δύο πολυώνυμα είναι ίσα για συγκεκριμένες τιμές (δηλαδή τους όρους που έχουν ως ορίσματα) επομένως αρκεί να δείξουμε ότι τα ορίσματα των κανονικών μορφών είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα επί του $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.1.
Έστω f όρος της $\mathfrak{L}$ με μεταβλητές μεταξύ των $y_1, \ldots, y_n$. Τότε υπάρχει ένα αυστηρά θετικό πολυώνυμο $\rho_f \in \mathcal{P}_{n+m}$ έτσι που $EXP^* \vdash f \approx t_{\rho_f(y_1, \ldots, y_n, \tau_1, \ldots, \tau_m)}$.

Απόδειξη:
Με επαγωγή στον όρο f.

- Εαν f είναι η σταθερά 1, τότε 1 είναι αυστηρά θετικό πολυώνυμο και $\mathbb{N} \models 1 \approx t_1$ (όπου t_1 είναι νέο συναρτησιακό σύμβολο που " μπήκε " στην $\mathfrak{L}^*$ επειδή 1 είναι θετικό πολυώνυμο) [1], επομένως η εξίσωση $1 \approx t_1$ είναι αξίωμα της EXP^* και $EXP^* \vdash 1 \approx t_1$.

- Εαν f είναι μεταβλητή, έστω η y_i, τότε όμοια με πριν y_i είναι αυστηρά θετικό πολυώνυμο και $EXP^* \vdash y_i \approx t_{y_i}$.

- Έστω f είναι της μορφής $h + g$, όπου για τους h, g υπάρχουν αυστηρά θετικά πολυώνυμα $\rho_h \in \mathcal{P}_{n+m'}, \rho_g \in \mathcal{P}_{n+m''}$, έτσι που $EXP^* \vdash h \approx t_{\rho_h}(y_1, \ldots, y_n, \tau_1, \ldots, \tau_{m'})$ και $EXP^* \vdash g \approx t_{\rho_g}(y_1, \ldots, y_n, \tau_1, \ldots, t_{m''})$. Τότε επιλέγουμε ως αυστηρά θετικό πολυώνυμο το $\rho_h + \rho_g$ (άθροισμα αυστηρά θετικών πολυωνύμων είναι αυστηρά θετικό πολυώνυμο) και δείχνουμε το ζητούμενο, έχουμε ότι $\mathbb{N} \models t_{\rho_h}(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_{m'})+$
$t_{\rho_g}(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_{m''}) \approx t_{\rho_h+\rho_g}(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m)$,
όπου $m = max\{m', m''\}$ (προφανώς δεν παίζει ρόλο αν πρώτα δώσουμε τιμές στα πολυώνυμα και μετά τα προσθέσουμε ή το αντίστροφο). Επομένως

$$\begin{aligned} &t_{\rho_h}(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_{m'}) + t_{\rho_g}(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_{m''}) \approx \\ &t_{\rho_h+\rho_g}(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m) \end{aligned} \tag{3.8}$$

είναι αξίωμα του EXP^*. Η εξής τυπική απόδειξη ολοκληρώνει τον συλλογισμό μας

1.$f \approx h + g$	Υπόθεση
2.$h \approx t_{\rho_h}(y_1, \ldots, y_n, \tau_1, \ldots, \tau_{m'})$	Επαγωγική Υπόθεση
3.$g \approx t_{\rho_g}(y_1, \ldots, y_n, \tau_1, \ldots, \tau_{m''})$	Επαγωγική Υπόθεση
4.$f \approx t_{\rho_h} + t_{\rho_g}$	Κ.Πρόσθεσης
5.$t_{\rho_h} + t_{\rho_g} \approx t_{\rho_h+\rho_g}$	3.8 Κ.Αντικατάστασης
6.$f \approx t_{\rho_h+\rho_g}$	Κ.Μεταβατικότητας

- Έστω f της μορφής $h \cdot g$. Τότε όμοια με πριν το αυστηρά θετικό πολυώνυμο που αναπαριστά τον όρο f είναι το $\rho_h \cdot \rho_g$.

- Έστω f της μορφής h^g, όπου για τους h, g ισχύει η επαγωγική υπόθεση. Τότε παρατηρούμε ότι λόγω της 3.1 και επειδή κάθε αυστηρά θετικό πολυώνυμο (εκτός του 1) γράφεται ως άθροισμα μονωνύμων , $h^g \approx t_{\rho_h}^{t_{\rho_g}}$ και $t_{\rho_h}^{t_{\rho_g}} \approx (t_{a_1} \cdot \ldots \cdot t_{a_k})^{(t_{\beta_1}+\ldots+t_{\beta_\lambda})} \cdot (t_{a_1} \cdot \ldots \cdot t_{a_k})^{\xi}$ όπου $a_1, \ldots, a_k$ είναι ανάγωγα πολυώνυμα, $\beta_1, \ldots, \beta_\lambda$ είναι (μη-σταθερά) μονώνυμα και ξ είναι φυσικός.

  Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι εαν $\rho \in \mathcal{P}_{n+m_0}$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο, και $\mu \in M_{n+m_1}$, τότε υπάρχει αυστηρά θετικό $a \in \mathcal{P}_{n+m_2}$ έτσι που:

$$EXP^* \vdash t_a(y_1, \ldots, y_n, \tau_1, \ldots, \tau_{m_2}) \approx$$

$$t_\rho(y_1, \ldots, y_n, \tau_1, \ldots \tau_{m_0})^{t_\mu(y_1, \ldots, y_n, \tau_1, \ldots \tau_{m_1})}$$

  Διακρίνουμε περιπτώσεις (για το ρ):

[1] Θα χρησιμοποιούμε για ευκολία και καλύτερη εποπτεία αυτή την ισοδύναμη διατύπωση του $W^{\mathfrak{N}}(1 \approx t_1) = 1$.

1. Εαν ρ είναι το σταθερό ανάγωγο πολυώνυμο 1 τότε μπορούμε να πάρουμε το a να είναι ταυτοτικά το 1 και έχουμε

$1.t_\rho(y_1,\dots,y_n,\tau_1,\dots\tau_{m_0}) \approx 1$	Υπόθεση
$2.t_\rho^{t_\mu} \approx 1$	Αξίωμα 1.5(ii)
$3.t_a(y_1,\dots,y_n) \approx 1$	Υπόθεση
$4.t_a \approx t_\rho^{t_\mu}$	Κ.Μεταβατικότητας

2. Εαν $\rho \in P_{n+m_0}$ ή $\rho(y_1,\dots,y_n,x_1,\dots,x_{m_0})$ είναι κάποιο από τα y_i τότε από τις 3.3,3.4 αντίστοιχα, έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $l \in \mathbb{N}^*$ έτσι που $EXP^* \vdash p_l \approx t_\rho(y_1,\dots,y_n,x_1,\dots,x_{m_0})$ και $EXP^* \vdash q_l \approx t_\mu(y_1,\dots,y_n,x_1,\dots,x_{m_1})$, άρα μπορούμε να πάρουμε $m_2 = l$ και $a(y_1,\dots,y_n,x_1,\dots,x_l) \in P_{n+l}$ το x_l. Τότε η εξής τυπική απόδειξη ολοκληρώνει τον συλλογισμό μας

$1.t_\rho(y_1,\dots,y_n,x_1,\dots,x_{m_0}) \approx p_l$	3.3 ή 3.4
$2.t_\mu(y_1,\dots,y_n,x_1,\dots,x_{m_1}) \approx q_l$	3.3 ή 3.4
$3.t_\rho^{t_\mu} \approx p_l^{q_l}$	$1,2,$ Κ.Αντικατάστασης
$4.t_a(y_1,\dots,y_n,\tau_1,\dots,\tau_l) \approx \tau_l$	Ταυτότητα και Κ.Αντικατάστασης
$5.p_l^{q_l} \approx \tau_l$	3.6 ή 3.7
$6.t_\rho^{t_\mu} \approx t_a$	Κ.Μεταβατικότητας

3. Η περίπτωση που μένει, αφού ρ είναι ανάγωγο, είναι να είναι κάποιο από τα x_i. Έστω $\rho(y_1,\dots,y_n,x_1,\dots,x_{m_0})$ είναι το x_j, για $j \leq m_0$. Τότε έχουμε $EXP^* \vdash t_\rho(y_1,\dots,y_n,\tau_1,\dots,\tau_{m_0}) \approx \tau_j$. Ακόμα $EXP^* \vdash \tau_j \approx t_{\rho'}(y_1,\dots,y_n,\tau_1,\dots,\tau_{k'})^{\tau_{\mu'}(y_1,\dots,y_n,\tau_1,\dots,\tau_{k''})}$ για κάποια $k', k'' \leq j-1$ και $\rho' \in P_{n+k'}, \mu' \in P_{n+k''}$ (από τις 3.6,3.7), επομένως αυτή η περίπτωση ανάγεται στην προηγούμενη αντικαθιστώντας το ρ με ρ' και το μ με $\mu \cdot \mu'$ ως εξής:

$1.t_\rho \approx t_{\rho'}(y_1,\dots,y_n,\tau_1,\dots,\tau_{k'})^{\tau_{\mu'}(y_1,\dots,y_n,\tau_1,\dots,\tau_{k''})}$	Υπόθεση
$2.t_\rho^{t_\mu} \approx (t_{\rho'}^{t_{\mu'}})^{t_\mu}$	Κ.Αντικατάστασης
$3.(t_{\rho'}^{t_{\mu'}})^{t_\mu} \approx t_{\rho'}^{(t_{\mu'} \cdot t_\mu)}$	Αξίωμα1.8
$4.(t_{\mu'} \cdot t_\mu) \approx t_{\mu' \cdot \mu}$	Υπόθεση
$5.t_{\rho'}^{(t_{\mu' \cdot \mu})} \approx t_a$	Περίπτωση 2
$6.t_\rho^{t_\mu} \approx t_a$	Κ.Μεταβατικότητας

Και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Εαν f είναι όρος της $\mathfrak{L}^*$ και $y_1,\dots,y_n$ οι μεταβλητές που εμφανίζονται σε αυτόν τότε συμβολίζουμε με $\overline{\overline{f}}$ την μετάφραση αυτού του όρου στο $\mathfrak{N}$ ή στο $\mathfrak{R}^+$. Αυτό δεν δημιουργεί σύγχυση διότι από την μία $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}^+$, και από την άλλη η συνάρτηση που μεταφράζει την f στην δομή $\mathfrak{R}^+$ καθορίζεται πλήρως από την συνάρτηση που μεταφράζει την f στην $\mathfrak{N}$ (για κάθε g όρο της $\mathfrak{L}^*$, αν $\mathfrak{N} \models f \approx g$ τότε $\mathfrak{R}^+ \models f \approx g$).

Το επομένο λογικό βήμα είναι να αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις $\overline{\overline{y_1}},\dots,\overline{\overline{y_n}},\overline{\overline{\tau_1}},\dots,\overline{\overline{\tau_k}},\dots$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητες. Αυτό είναι αρκετό για να εξασφαλίσουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.
Έστω f, g όροι της $\mathfrak{L}$ έτσι που $\mathbb{N} \models f \approx g$. Τότε $EXP^* \vdash f \approx g$.

Άμεσο πόρισμα του θεωρήματος αυτού είναι ότι η EXP^* αποτελεί βάση, με κάπως ανορθόδοξο τρόπο, αφού η EXP^* είναι θεωρία σε διαφορετική γλώσσα, για την εξισωτική θεωρία της $\mathfrak{N}$.

Ένα πολύ ενδιαφέρον ανοιχτό ερώτημα είναι αν η EXP^* αποτελεί βάση για την εξισωτική θεωρία την $\mathfrak{N}^*$, όπου $\mathfrak{N}^*$ η φυσική επέκταση της $\mathfrak{N}$ στην γλώσσα $\mathfrak{L}^*$.

Η απόδειξη της αλγεβρικής ανεξαρτησίας των $\overline{\overline{y_1}}, \ldots, \overline{\overline{y_n}}, \overline{\overline{\tau_1}}, \ldots, \overline{\overline{\tau_k}}, \ldots$ δεν είναι ένα ιδιαίτερα εύκολο ζήτημα και θα αφιερώσουμε τις επόμενες παραγράφους για να αναπτύξουμε τα εργαλεία που χρειαζόμαστε για την επίτευξη του στόχου μας. Ένα από αυτά είναι η διαφορική άλγεβρα, για να κάνουμε όμως χρήση της διαφορικής άλγεβρας χρειαζόμαστε την ισχυρότητα του συνεχούς. Το αποτέλεσμα του προηγούμενου κεφαλαίου που μας επιτρέπει το “ πέρασμα ” από το διακριτό στο συνεχές αποδεικνύεται καθοριστικής σημασίας.

3.2 Διαφορική Άλγεβρα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε χρήση Διαφορικής Άλγεβρας για να αποδείξουμε ότι τα $\overline{\overline{y_1}}, \ldots, \overline{\overline{y_n}}, \overline{\overline{\tau_1}}, \ldots, \overline{\overline{\tau_k}}, \ldots$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα. Η χρήση της διαφορικής άλγεβρας μοιάζει να είναι αναπόφευκτη. Οι προτάσεις που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αρκετά ισχυρές και εκτός από την αλγεβρική ανεξαρτησία μας δίνουν και την μορφή “ εκθετικών ” ή “ λογαριθμικών ” στοιχείων του διαφορικού μας δακτυλίου. Αυτό, χρησιμοποιείται μαζί με την απαρίθμηση του προηγούμενου κεφαλαίου (3.1-3.5) για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την επαγωγική υπόθεση στο κύριο θεώρημα που θα αποδείξουμε στην συνέχεια. Ξεκινώντας από κάτι φαινομενικά πολύ ισχυρότερο, την διαφορική ανεξαρτησία, θα “ επεκτείνουμε ” το διαφορικό σώμα μας δείχνοντας κάθε φορά την αλγεβρική ανεξαρτησία των στοιχείων που προσθέτουμε.

Πριν ξεκινήσουμε την εφαρμογή ιδεών από την διαφορική άλγεβρα θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 3.2. Διαφορικός δακτύλιος *R είναι ένας δακτύλιος εφοδιασμένος με μία “ παράγωγο ” $d : R \to R$ έτσι που να ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz:*

$$d(r_1 \cdot r_2) = d(r_1) \cdot r_2 + d(r_2) \cdot r_1$$

.

Ορισμός 3.3. Διαφορικό σώμα *F είναι ένα σώμα εφοδιασμένο με μία “ παράγωγο ” $d : F \to F$ που ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz.*

Ένα φυσικό παράδειγμα διαφορικού σώματος είναι το σώμα των ρητών συναρτήσεων επί των μιγαδικών σε μία μεταβλητή, εφοδιασμένο με την συνηθισμένη παράγωγο ως προς την μεταβλητή αυτή.

Ακόμα δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι η θεωρία των διαφορικών σωμάτων απαρτίζεται από τα συνηθισμένα αξιώματα της θεωρίας σωμάτων μαζί με τα εξής αξιώματα για την παράγωγο:

$$\forall u \forall v d(u \cdot v) \approx d(u) \cdot v + d(v) \cdot u$$

$$\forall u \forall v d(u + v) \approx d(u) + d(v)$$

.

Ορισμός 3.4. *Εαν F είναι διαφορικό σώμα τότε το $k = \{u \in F | d(u) = 0\}$ ονομάζεται το* **σώμα σταθερών** *του F.*

3.3 Αλγεβρική Ανεξαρτησία

Τώρα είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα από την διαφορική άλγεβρα που θα χρειαστούμε. Θεωρούμε ότι όλα τα σώματα έχουν χαρακτηριστική 0.

Πρόταση 3.1.
Έστω F, G διαφορικά σώματα (με παράγωγο $'$), $F \subseteq G$, που έχουν το ίδιο σώμα σταθερών, και έστω $a \in G$ υπερβατικός επί του F. Τότε:

(i)Εαν $b \in F$ και $a' = b' \cdot a$ (στο G), τότε $F(a)$ είναι κλειστό για $'$ και εαν $X, Y \in F(a)$ είναι τέτοια που $X' = Y' \cdot X$ τότε $X = a^m \cdot u$ και $Y = m \cdot b + v$, για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$ και $u, v \in F$ έτσι που $u' = v' \cdot u$.

(ii) Εαν $b \in F - \{0\}$ και $a' = \frac{b'}{b}$ (στο G) τότε $F(a)$ είναι κλειστό για $'$ και εαν $X, Y \in F(a)$ είναι τέτοια που $X' = Y' \cdot X$ τότε $X = b^m \cdot u$ και $Y = m \cdot a + v$, για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$ και $u, v \in F$ έτσι που $u' = v' \cdot u$.

Πρόταση 3.2.
Έστω F, G διαφορικοί δακτύλιοι (με παράγωγο $'$) και F σώμα, $F \subseteq G$, που έχουν το ίδιο σώμα σταθερών, ακόμα έστω $a \in G$ είναι αλγεβρικός επί του F. Τότε:

(i) Εαν $b \in F$ και $a' = b' \cdot a$, τότε $a^m = u$ και $m \cdot b = v$ για κάποιο $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ και $u, v \in F$ έτσι που $u' = v' \cdot v$.

(ii) Εαν $b \in F - \{0\}$ και $a' = \frac{b'}{b}$, τότε $a \in F$.

Τώρα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στην ακολουθία $\tau_1, \tau_2, \ldots$ των όρων μία ακολουθία $F_0, F_1, \ldots$ σωμάτων συναρτήσεων με πεδία ορισμού υποσύνολα του $\mathbb{R}^+$.

Πρώτα, για $i = 1, \ldots, n$, έστω ότι $Y_i = Y_i(r)$ είναι συναρτήσεις ($\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$) πραγματικά αναλυτικές και διαφορικά ανεξάρτητες επί του $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα, οι $Y_i^{(j)}$ (η j-οστή παράγωγος της Y_i) για $i = 1, \ldots, n$, $j \in \mathbb{N}$ είναι διαφορικά ανεξάρτητες επί του $\mathbb{R}$.
Παρατήρηση:Εαν $f_1, f_2, \ldots$ είναι τυχαίες πραγματικά αναλυτικές και αλγεβρικά ανεξάρτητες συναρτήσεις, και εαν η ακέραια περιοχή $\mathbb{R}[f_1, f_2, \ldots]$ είναι κλειστή για παραγώγιση, τότε το σώμα $\mathbb{R}(f_1, f_2, \ldots)$ είναι με φυσικό τρόπο ένα διαφορικό σώμα συναρτήσεων με πεδία ορισμού ανοικτά διαστήματα του $\mathbb{R}^+$. Αυτό συμβαίνει διότι εαν $a, b \in \mathbb{R}[f_1, f_2, \ldots]$ και b δεν είναι ταυτοτικά 0, τότε η συνάρτηση $\frac{a}{b}$ είναι άπειρα παραγωγίσιμη στο σύνολο $D_b = \{r \in \mathbb{R}^+ | b(r) \neq 0\}$, και η συλλογή όλων των D_b συνόλων (όπου $b \in \mathbb{R}[f_1, f_2, \ldots]$) δημιουργεί ένα γνήσιο φίλτρο υποσυνόλων του $\mathbb{R}^+$. Επομένως από δω και στο εξής μπορούμε να μιλάμε για το διαφορικό σώμα $\mathbb{R}(f_1, f_2, \ldots)$ (όποτε οι $f_1, f_2, \ldots$ ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες).

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη παρατήρηση, έστω ότι F_{-1} είναι το διαφορικό σώμα $\mathbb{R}(Y_i^{(j)} | i = 1, \ldots, n, j \in \mathbb{N})$. Θεωρούμε την συνάρτηση $logY_1 (= r \mapsto logY_1(r))$, επειδή $logY_1 = \frac{Y_i'}{Y_i} \in F_{-1}$ έχουμε ότι ο δακτύλιος $F_{-1}[logY_1]$ είναι κλειστός για παραγώγιση. Επομένως ο $logY_1$ είναι υπερβατικός επί του F_{-1}. Αν όχι, τότε από την **Πρόταση 3.2**(ii) θα είχαμε ότι $logY_1 \in F_{-1}$ και αυτό θα δημιουργούσε μία μη-τετριμμένη διαφορική εξάρτηση μεταξύ των $Y_i^{(j)}$. Άρα, έχουμε από την **Πρόταση 3.1**(ii) ότι εαν X, Y είναι στοιχεία του διαφορικού σώματος $F_{-1}(logY_1)$ τέτοια που $X' = Y'X$, τότε $X = cY_1^m$ για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$ και $c \in \mathbb{R}$.

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι επαναλαμβάνοντας τα ίδια επειξηρήματα για τα $logY_2, logY_3, \ldots, logY_n$ αποκτούμε το διαφορικό σώμα $F_0 := F_{-1}(logY_1, \ldots, logY_n)$. Για το οποίο ισχύει:
Εαν $X, Y \in F_0$ και $X' = Y'X$, τότε

$$X = c\prod_{i=1}^{n} Y_i^{m_i}, \quad \text{για } c \in \mathbb{R}, m_i \in \mathbb{Z}(i = 1, \ldots, n)$$

Έστω $h(y_1, \ldots, y_n)$ τυχαίος όρος της $\mathcal{L}^*$. Συμβολιζουμε με $\overline{h}$ την συνάρτηση $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ που ορίζεται ως $\overline{h}(r) = \overline{\overline{h}}(Y_1(r), Y_2(r), \ldots, Y_n(r))$.

Η ιδέα μας είναι να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω προτάσεις για να δείξουμε την αλγεβρική ανεξαρτησία των τ_i επί του F_0 (που περιέχει τα Y_i). Ωστόσο αυτό δεν είναι τόσο εύκολο όπως στην περίπτωση των $logY_i$ διότι το $F_0[\overline{\tau_1}]$, για παράδειγμα, δεν είναι κλειστό για παραγώγιση. Λόγω της μορφής των $\tau_i(= u_i^{s_i})$ είναι λογικό να προσθέσουμε στο F_0 τις συναρτήσεις $log\overline{u_i}$, διότι γνωρίζουμε ότι $(\overline{\tau_i})' = (\overline{u_i}^{\overline{s_i}})' = (e^{\overline{s_i} \cdot log\overline{u_i}})' = (\overline{s_i} \cdot log\overline{u_i})' \cdot \tau_i$, επομένως προσθέτοντας τις εν λόγω συναρτήσεις " κλείνουμε " το σώμα ως προς την παραγώγιση και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις **Προτάσεις 3.1,3.2**.

Στην συνέχεια διαχωρίζουμε κάποιες τεχνικές λεπτομέρειες των όρων p_i, οι οποίοι υπενθυμίζουμε ότι είναι είτε μεταβλητές y_i ή νέα συναρτησιακά σύμβολα που ερμηνεύονται ως ανάγωγα θετικά πολυώνυμα εκτός του 1 ή προβολών. Έτσι ορίζουμε τα εξής σύνολα:

$V_0 = \{i \in \mathbb{N}^* | \overline{\overline{p_i}} \text{ είναι σταθερά } \}$
$V_1 = \{i \in \mathbb{N}^* | \exists j \in \mathbb{N}, j \leq n, EXP^* \vdash p_i \approx y_j\}$
$V_2 = \{i \in \mathbb{N}^* - (V_0 \cup V_1) | \text{ για κανένα } j < i \text{ δεν έχουμε } EXP^* \vdash p_i \approx p_j\}$.

Παρατηρήσεις:

1. Στην περίπτωση που $i \in V_0$ έχουμε ότι $\overline{\overline{p_i}}$ είναι θετικός πρώτος.
2. Για κάθε $j \in \mathbb{N} - (V_0 \cup V_1)$ έχουμε ότι υπάρχει $j_2 \in V_2$ έτσι που $j_2 \leq j$ και $EXP^* \vdash p_j \approx p_{j_2}$.

Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι τα $Y_1, \ldots, Y_n, \overline{\tau_1}, \ldots, \overline{\tau_n}$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα.

Θεώρημα 3.3.
$(\mathbf{I})_i(a)$ *Οι συναρτήσεις* $\{\overline{\tau_j} | j \in \mathbb{N}^*, j \leq i\} \cup \{log\overline{u_j} | j \in V_2, j \leq i\}$ *είναι αλγεβρικά ανεξάρτητες επί του* F_0 *και*

(b) *ο δακτύλιος που γεννάνε επί του* F_0 *είναι κλειστός για παραγώγιση.*

$(\mathbf{II})_i$ *Έστω* F_i *το διαφορικό σώμα* $F_0(\overline{\tau_1}, \ldots, \overline{\tau_i}, log\overline{u_j} | j \in V_2, j \leq i)$ *που γεννάται από τις συναρτήσεις του* $(\mathbf{I})_i$. *Εαν* $X, Y \in F_i$ *και* $X' = Y' \cdot X$, *τότε:*

$$X = c\prod_{j=1}^{n} Y_j^{m_j} \prod_{j=1}^{i} \overline{\tau_j}^{l_j} \prod_{\substack{j \leq i \\ j \in V_2}} \overline{u_j}^{k_j}$$

για κατάλληλους ακεραίους $m_1, \ldots, m_n, l_1, \ldots, l_i, k_j (j \leq n, j \in V_2)$ *και* $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη:
Με επαγωγή στο i.

- Για $i = 0$ το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα.
- Έστω ότι ισχύει για $i \geq 0$. Δείχνουμε ότι ισχύει για $i+1$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:
  Περίπτωση 1η. $i+1 \in V_2$.
  Δείχνουμε πρώτα ότι ο $log\overline{u}_{i+1}$ είναι υπερβατικός επί του F_i. Από τις 3.6,3.7 έχουμε ότι $\overline{u}_{i+1} = \overline{\overline{p}}_{i+1}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_i)$, επομένως $\overline{u}_{i+1} \in F_i$. Επειδή $(log\overline{u}_{i+1})' = \frac{\overline{u}'_{i+1}}{\overline{u}_{i+1}}$, εαν $log\overline{u}_{i+1}$ ήταν αλγεβρικός επί του F_i, θα είχαμε από την **Πρόταση 3.2**(ii) ότι $log\overline{u}_{i+1} \in F_i$. Όμως $\overline{u}'_{i+1} = (log\overline{u}_{i+1})' \cdot \overline{u}_{i+1}$, επομένως από την Επαγωγική Υπόθεση $(II)_i$, έχουμε:
  $$\overline{u}_{i+1} = \overline{\overline{p}}_{i+1}(Y_1, \ldots, Y_n, \overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_i) = c \prod_{j=1}^{n} Y_j^{m_j} \prod_{j=1}^{i} \overline{\tau}_j^{l_j} \prod_{\substack{j \leq i \\ j \in V_2}} \overline{u_j}^{k_j}.$$
  για κατάλληλα $m_j, l_j, k_j \in \mathbb{Z}$ και $c \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας ξανά τις 3.6,3.7, έχουμε:
  $$\overline{\overline{p}}_{i+1}(Y_1, \ldots, Y_n, \overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_i) = c \prod_{j=1}^{n} Y_j^{m_j} \prod_{j=1}^{i} \overline{\tau}_j^{l_j} \prod_{\substack{j \leq i \\ j \in V_2}} (\overline{\overline{p}}_j(Y_1, \ldots, Y_n, \overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_{j-1}))^{k_j}.$$
  Από το $(I)_i(a)$, μπορούμε να δούμε αυτή την εξίσωση ως πολυωνυμική ταυτότητα στις " μεταβλητές " $Y_1, \ldots, Y, \tau_1, \ldots, \tau_i$, και επειδή $\overline{\overline{p}}_{i+1}$ είναι ανάγωγο, μπορεί να ισχύει μία από τις εξής περιπτώσεις:
  $(a) EXP^* \vdash p_{i+1} \approx y_j,\ j \leq n, j \in \mathbb{N}$.
  $(b) EXP^* \vdash p_{i+1} \approx x_j,\ j \leq n, j \in \mathbb{N}$.
  $(c) EXP^* \vdash p_{i+1} \approx p_j,\ j \leq n, j \in \mathbb{N}$.
  (d) η $\overline{\overline{p}}_{i+1}$ είναι σταθερή.

  Προφανώς, οι περιπτώσεις $(a), (c), (d)$ δεν ισχύουν επειδή το $i+1 \in V_2$. Ακόμα το (b) είναι αδύνατο επειδή ο p_{i+1} δεν μπορεί να είναι κάποια προβολή. Επομένως, ο $log\overline{u}_{i+1}$ είναι υπερβατικός επί του F_i.

  Χρησιμοποιώντας την **Πρόταση 3.1**(ii), την Επαγωγική Υπόθεση $(II)_i$ και το γεγονός ότι ο δακτύλιος $F[log\overline{u}_{i+1}]$ είναι κλειστός για παραγώγιση παίρνουμε το εξής:
  Αν $X, Y \in F_i(log\overline{u}_{i+1})$ και $X' = Y' \cdot X$, τότε
  $$(II)_{i+\frac{1}{2}} \qquad X = c \prod_{j=1}^{n} Y_j^{m_j} \prod_{j=1}^{i} \overline{\tau}_j^{l_j} \prod_{\substack{j \leq i+1 \\ j \in V_2}} \overline{u_j}^{k_j}.$$
  για κατάλληλα $m_j, l_j, k_j \in \mathbb{Z}$ και $c \in \mathbb{R}$.

  Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο $\overline{\tau}_{i+1}$ είναι υπερβατικός επί του $F_i(log\overline{u}_{i+1})$. Έχουμε ότι
  $$(\overline{\tau}_{i+1})' = (\overline{u}_{i+1}^{\overline{s}_{i+1}})' \overline{\tau}_{i+1}.$$

και

$$\overline{s}_{i+1}log\overline{u}_{i+1} = \overline{\overline{q}}_{i+1}(Y_1,\ldots,Y_n,\overline{\tau}_1,\ldots,\overline{\tau}_i)\cdot log\overline{u}_{i+1} \in F_i(log\overline{u}_{i+1}).$$

Επομένως, αν προς άτοπο, ο $\overline{\tau}_{i+1}$ ήταν αλγεβρικός επί του $F_i(log\overline{u}_{i+1})$, θα είχαμε (χρησιμοποιώντας την **Πρόταση 3.2**(i), και το $(II)_{i+\frac{1}{2}}$) ότι

$$\overline{\tau}_{i+1}^m = c\prod_{j=1}^{n} Y_j^{m_j}\prod_{j=1}^{i}\overline{\tau}_j^{l_j}\prod_{\substack{j\leq i+1\\ j\in V_2}}\overline{u_j}^{k_j}.$$

Για κάποιο $m\in\mathbb{Z}-\{0\}$, κατάλληλα $m_j,l_j,k_j\in\mathbb{Z}$ και $c\in\mathbb{R}$.

Λογαριθμίζοντας, χρησιμοποιώντας τις 3.6,3.7 και εξισώνοντας τους συντελεστές του $log\overline{u}_{i+1}$, έχουμε:

$$m\cdot\overline{\overline{q}}_{i+1}(Y_1,\ldots,Y_n,\overline{\tau}_1,\ldots,\overline{\tau}_i) = k_{i+1}$$

Αυτό όμως συνεπάγεται ότι ο $\overline{\overline{q}}_{i+1}$ είναι σταθερό πολυώνυμο, και επειδή είναι μονώνυμο έχουμε ότι $EXP^*\vdash q_{i+1}\approx 1$. Το τελευταίο έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι το σύνολο M_r δεν περιέχει το μονώνυμο 1, για κάθε $r\in\mathbb{N}^*$.

Άρα στην περίπτωση που $i+1\in V_2$ έχουμε αποδείξει τα $(I)_i(a),(II)_i(b)$ και εύκολα βλέπουμε από τα $(II)_{i+\frac{1}{2}}$ και την **Πρόταση 3.1**(i) ότι ισχύει το $(II)_{i+1}$.

Περίπτωση 2η. $i+1\notin V_2$.
Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε είτε (a) $\overline{\overline{p}}_{i+1}$, επομένως η $\overline{u}_{i+1}$ είναι σταθερή, είτε (b) $i+1\in V_1$, επομένως $\overline{u}_{i+1}=Y_{j_0}$, για κάποιο $j_0\in\mathbb{N}^*, j_0\leq n$, ή (c) $i+1\notin V_0\cup V_1$, αλλά $EXP^*\vdash p_{i+1}\approx p_{j_0}$, για κάποιο $j_0\leq i$, $j_0\in\mathbb{N}^*$ και φυσικά μπορούμε να πάρουμε το $j_0\in V_2$, επομένως $\overline{u}_{i+1}=\overline{u}_{j_0}$.

Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση ο $log\overline{u}_{i+1}\in F_i$. Επομένως, $\overline{s}_{i+1}log\overline{u}_{i+1}$ $=\overline{\overline{q}}_{i+1}(Y_1,\ldots,Y_n,\overline{\tau_1},\ldots,\overline{\tau_i})\cdot log\overline{u}_{i+1}\in F_i$, και επειδή $(\overline{\tau}_{i+1})'=$ $(\overline{s}_{i+1}log\overline{u}_{i+1})'\;\overline{\tau}_{i+1}$, αρκεί να δείξουμε ότι ο $\overline{\tau}_{i+1}$ είναι υπερβατικός επί του F_i.

Έστω προς άτοπο, ότι ο $\overline{\tau}_{i+1}$ είναι αλγεβρικός επί του F_i. Τότε από την **Πρόταση 3.2**(i) και την Εαπγωγική Υπόθεση $(II)_i$, έχουμε ότι:

$$\overline{\tau}_{i+1}^m = c\prod_{j=1}^{n} Y_j^{m_j}\prod_{j=1}^{i}\overline{\tau}_j^{l_j}\prod_{\substack{j\leq i\\ j\in V_2}}\overline{u_j}^{k_j}.$$

Για κάποιο $m\in\mathbb{Z}-\{0\}$, κατάλληλα $m_j,l_j,k_j\in\mathbb{Z}$ και $c\in\mathbb{R}$.

Λογαριθμίζοντας και λαμβάνοντας υπόψη τις 3.6,3.7, έχουμε ότι:

$$m\overline{s}_{i+1}log\overline{u}_{i+1} = logc+\sum_{j=1}^{n}m_jlogY_j+\sum_{j=1}^{i}l_j\overline{s}_jlog\overline{u}_j+\sum_{\substack{j\leq i\\ j\in V_2}}k_j\overline{u}_j. \qquad (3.9)$$

Έστω

$$V_1^j=\{v\in V_1|v\leq i\ \text{ και }\ EXP^*\vdash p_v\approx y_j\},\ \text{ για }\ j=1,\ldots,n$$

$$V_2^j = \{v \in \mathbb{N}^* | v \leq i \ \text{ και } \ EXP^* \vdash p_v \approx p_j\}, \quad \text{για } \ j \in V_2, j \leq i.$$

Τότε μπορούμε να αναδιατάξουμε το άθροισμα στην 3.9 ως εξής:

$$\begin{aligned} m\overline{s}_{i+1} log\overline{u}_{i+1} &= (logc + \textstyle\sum_{\substack{j \leq i \\ j \in V_0}} l_j \overline{s}_j log\overline{u}_j) + \sum_{i=1}^n [(logY_j) \cdot \\ &\cdot (m_j + \textstyle\sum_{v \in V_1^j} l_v \overline{s}_v)] + \sum_{\substack{j \leq i \\ j \in V_2}} [(log\overline{u}_j) \cdot (k_j + \sum_{v \in V_2^j} l_v \overline{s}_v)]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Λόγω των 3.6,3.7 κάθε $\overline{s}_j$ μπορεί να γραφτεί ως πολυώνυμο στις $Y_1, \ldots, Y_n$, $\overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_{j-1}$ και επειδή το σύνολο $\mathcal{A} = \{Y_1, \ldots, Y_n, logY_1, \ldots, logY_n, \overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_i, \overline{u}_j, log\overline{u}_j | j \leq i, j \in V_2\}$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο επί του $\mathbb{R}$, μπορούμε να εξισώσουμε τους συντελεστές στην 3.10.

Τώρα θυμόμαστε τις περιπτώσεις που διακρίναμε στην αρχή.

(a) $\overline{u}_{i+1}$ είναι σταθερά. Τότε η 3.10 μας δίνει:

$$m\overline{s}_{i+1} log\overline{u}_{i+1} = logc + \sum_{\substack{j \leq i \\ j \in V_0}} l_j \overline{s}_j log\overline{u}_j$$

Επειδή όμως κάθε $\overline{s}_j$ που εμφανίζεται στο παραπάνω άθροισμα είναι μη-σταθερό μονώνυμο στις $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_i$. Κάθε $\overline{u}_j$ είναι πρώτος αριθμός, και οι λογάριθμοι των πρώτων είναι γραμμικά ανεξάρτητοι επί του $\mathbb{Z}$. Η παραπάνω ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο εαν $\overline{s}_{i+1} = \overline{s}_j$ και $\overline{u}_{i+1} = \overline{u}_j$, για κάποιο $j \leq i$ ($j \in V_0$). Όμως τότε θα είχαμε (από την αλγεβρική ανεξαρτησία του $\mathcal{A}$) ότι $EXP^* \vdash q_{i+1} \approx q_j \wedge p_{i+1} \approx p_j$, που είναι αδύνατο λόγω της 3.5.

(b) $\overline{u}_{i+1} = Y_{j_0}$, για κάποιο $j_0 \in \mathbb{N}^*$,$j_0 \leq i$. Τότε η 3.10 μας δίνει:

$$m\overline{s}_{i+1} = m_{j_0} + \sum_{v \in V_1^{j_0}} l_v \overline{s}_v.$$

Όπως στην προηγούμενη περίπτωση, αυτό συνεπάγεται ότι $\overline{s}_{i+1} = \overline{s}_v$, για κάποιο $v \leq i$ ($v \in V_1^{j_0}$), που είναι αδύνατο αφού $\overline{u}_{i+1} = \overline{u}_v$ ($= Y_{j_0}$ από τον ορισμό του $V_1^{j_0}$).

(c) $\overline{u}_{i+1} = \overline{u}_{j_0}$, για κάποιο $j_0 \in V_2$,$j_0 \leq i$. Τότε η 3.10 μας δίνει:

$$m\overline{s}_{i+1} = k_{j_0} + \sum_{v \in V_2^{j_0}} l_v \overline{s}_v.$$

Ξανά, με παρόμοια επιχειρήματα όπως στην προηγούμενη περίπτωση το παραπάνω είναι αδύνατο επειδή έρχεται σε αντίφαση με την 3.5.

Τελικά ο $\overline{\tau}_{i+1}$ είναι υπερβατικός επί του F_i, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. □

Επανερχόμαστε τώρα στην απόδειξη του **Θεωρήματος 3.2**.

Θεώρημα 3.2.
Έστω f, g όροι της $\mathfrak{L}$ έτσι που $\mathbb{N} \models f \approx g$. Τότε $EXP^* \vdash f \approx g$.

Απόδειξη:
Έστω f, g όροι της $\mathfrak{L}$, οι οποίοι περιέχουν τις $y_1, \ldots, y_n$ και για τους οποίους ισχύει $\mathbb{N} \models f \approx g$. Τότε, επειδή οι νόμοι στους φυσικούς και τους πραγματικούς είναι οι ίδιοι έχουμε ότι $\mathbb{R}^+ \models f \approx g$. Έστω ρ_f, ρ_g αυστηρά θετικά πολυώνυμα τέτοια που $EXP^* \vdash f \approx t_{\rho_f}(y_1, \ldots, y_n, \tau_1, \ldots, \tau_m)$ και $EXP^* \vdash g \approx t_{\rho_g}(y_1, \ldots, y_n, \tau_1 \ldots, \tau_{m'})$ (όπως στο **Θεώρημα 3.1**).

Επειδή $\mathbb{R}^+ \models EXP$, έχουμε ότι $\mathbb{R}^+ \models t_{\rho_f}(y_1, \ldots, y_n, \tau_1, \ldots, \tau_m) \approx t_{\rho_g}(y_1, \ldots, y_n, \tau_1 \ldots, \tau_{m'})$. Επομένως $\overline{\overline{\tau_{\rho_f}}}(Y_1, \ldots, Y_n, \overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_m) = \overline{\overline{\tau_{\rho_g}}}(Y_1, \ldots, Y_n, \overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_{m'})$. Από το **Θεώρημα 3.3**, έχουμε ότι $Y_1, \ldots, Y_n, \overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_{m''}$ (όπου $m'' = max\{m, m'\}$), συνεπώς $\mathbb{R}^+ \models t_{\rho_f} \approx t_{\rho_g}$. Επειδή η παραπάνω, είναι εξίσωση όρων που δεν περιέχουν το σύμβολο exp και είναι ταυτότητα στους θετικούς πραγματικούς (άρα και στους φυσικούς) έχουμε ότι, $EXP^* \vdash t_{\rho_f} \approx t_{\rho_g}$, άρα $EXP \vdash t_{\rho_f}(y_1, \ldots, y_n, \tau_1, \ldots, \tau_m) \approx t_{\rho_g}(y_1, \ldots, y_n, \tau_1 \ldots, \tau_{m'})$. Και $EXP \vdash f \approx g$. $\square$

Κεφάλαιο 4

Εξωτικοί Κανόνες

Στο παρόν κεφάλαιο ακολουθούμε την απόδειξη του A.J. Wilkie αποδεικνύοντας ότι υπάρχουν εξωτικοί κανόνες ως προς τις ισότητες στους φυσικούς.

4.1 Υπολογισμός αναπαράστασης

Υπολογίζουμε μία αναπαράσταση του όρου f_0 σύμφωνα με το **Θεώρημα 3.1**. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η απαρίθμηση που κατασκευάσαμε ξεκινάει ως εξής:

$p_1 = t_\rho(x)$ (όπου ρ είναι το θετικό πολυώνυμο $x \mapsto x^2 - x + 1$),$q_1 = y$
$p_2 = (x+1), q_2 = x$
$p_3 = (x^2+x+1), q_3 = x$
$p_4 = (x_2 + x_3), q_4 = y$
$p_5 = (x+1), q_5 = y$
$p_6 = (x^2+x+1), q_6 = y$
$p_7 = (x_5 + x_6), q_7 = x$
$p_8 = x_1, q_8 = x.$

Σύμφωνα με την παραπάνω απαρίθμηση, υπολογίζουμε τις ακολουθίες όρων u, s, τ, κι έχουμε:

$u_1 = t_\rho(x), s_1 = y, \tau_1 = t_\rho(x)^y$
$u_2 = (x+1), s_2 = x, \tau_2 = (x+1)^x$
$u_3 = (x^2+x+1), s_3 = x, \tau_3 = (x^2+x+1)^x$
$u_4 = (\tau_2 + \tau_3), s_4 = y, \tau_4 = ((x+1)^x + (x^2+x+1)^x)^y$
$u_5 = (x+1), s_5 = y, \tau_5 = (x+1)^y$
$u_6 = (x^2+x+1), s_6 = y, \tau_6 = (x^2+x+1)^y$
$u_7 = (\tau_5 + \tau_6), s_7 = x, \tau_7 = ((x+1)^y + (x^2+x+1)^y)^x$
$u_8 = \tau_1, s_8 = x, \tau_8 = (t_\rho(x)^y)^x.$

Τώρα μπορούμε να αναπαραστήσουμε τον όρο f_0 με ένα θετικό πολυώνυμο. Έχουμε:

$f_0 = ((x+1)^x + (x^2+x+1)^x)^y((x^3+1)^y + (x^4+x^2+1)^y)^x = ((x+1)^x + (x^2 +$

$x+1)^x)^y((x+1)^y+(x^2+x+1)^y)^x(t_\rho(x)^y)^x = \tau_4\tau_7\tau_8$

Παρατήρησεις:

1. Αν η απαρίθμηση ήταν διαφορετική τότε και το πολυώνυμο που θα αναπαριστούσε τον όρο f_0 θα ήταν διαφορετικό, ωστόσο η μορφή του θα παρέμενε η ίδια, δηλαδή θα ήταν μονώνυμο με τρεις παράγοντες.

2. Για την συγκεκριμένη απαρίθμηση η αναπαράσταση είναι μοναδική σύμφωνα με το **Θεώρημα 3.3**.

4.2 Αφαιρώντας ένα αξίωμα

Το επομένο λογικό βήμα είναι να ψάξουμε για ένα μοντέλο της EXP που δεν ικανοποιεί την ισότητα $f_0 \approx g_0$. Γνωρίζοντας ότι υπάρχει ένα μοντέλο μιάς λιγότερο ισχυρής θεωρίας, της EXP χωρίς το αξίωμα 1.8, που δεν ικανοποιεί την εν λόγω ισότητα, αρκεί να δείξουμε ότι εαν $EXP \vdash f_0 \approx g_0$ τότε $EXP^- \vdash f_0 \approx g_0$, όπου με EXP^- συμβολίζουμε την πιο " αδύναμη " θεωρία.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε μία πλειάδα νέων λημμάτων. Στο τέλος θα είμαστε σε θέση να δείξουμε ότι σε μία απόδειξη της ισότητας $f_0 \approx g_0$ δεν χρειαζόμαστε ουσιαστικά το αξίωμα 1.8 και αυτό μας εξασφαλίζει το ζητούμενο.

Λήμμα 4.1.
(i)Εαν $m, r, k \in \mathbb{N}$ και $m = r^k$ τότε $EXP^- \vdash \underline{m} \approx \underline{r}^{\underline{k}}$.
(ii) Εαν f είναι όρος της $\mathcal{L}$ και $k \in \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \models f \approx \underline{k}$ τότε $EXP^- \vdash f \approx \underline{k}$.
(iii)Για f, g, h όρους της $\mathcal{L}$ και $k \in \mathbb{N}$ εαν είτε $\mathbb{N} \models f \approx \underline{k}$ ή $\mathbb{N} \models g \approx \underline{k}$ ή $\mathbb{N} \models h = 1$ τότε $EXP^- \vdash (h^g)^f \approx h^{(gf)}$.

Απόδειξη:
(i)Με επαγωγή στο k.

- Για $k = 1$ έχουμε ότι $m = r$ και $EXP^- \vdash \underline{r} = \underline{r}^1$ (αξίωμα 1.5(i))

- Έστω ότι ισχύει για k, δηλαδή εαν $p = r^k$ τότε $EXP^- \vdash \underline{p} \approx \underline{r}^{\underline{k}}$. Δείχνουμε ότι ισχύει για $k+1$. Έστω $m = r^{k+1}$ τότε $m = p \cdot r$ και έχουμε στην EXP^-:
  1.$\underline{r}^{\underline{k+1}} \approx \underline{r}^{\underline{k}} \cdot \underline{r}^1$ 1.7
  2.$\underline{r}^{\underline{k+1}} \approx \underline{r}^{\underline{k}} \cdot \underline{r}$ 1.5(i)
  3.$\underline{r}^{\underline{k+1}} \approx \underline{p} \cdot \underline{r}$ Ε.Υ
  4.$\underline{r}^{\underline{k+1}} \approx \underline{m}$ $1.1 - 1.4$.

(ii)Με επαγωγή στον όρο f.

- Εαν f είναι η σταθερά 1 τότε $1 \in \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \models 1 \approx 1$ και $EXP^- \vdash 1 \approx 1$ ως λογικό αξίωμα.

- Εαν f είναι μεταβλητή τότε το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα αφού για κανένα φυσικό k δεν ισχύει $\mathbb{N} \models f \approx \underline{k}$.

Για την επόμενη περίπτωση θα χρειαστούμε τα εξής υπολήμματα:

Υπολήμμα 4.1.1.
Αν $\mathbb{N} \not\models f \approx \underline{m}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει αποτίμηση u τέτοια που $\overline{u}(f) > k$.

Απόδειξη:
Με επαγωγή στον όρο f.

- Έστω f η σταθερά 1 τότε $\mathbb{N} \models f \approx 1$ και το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα.

- Έστω f είναι η μεταβλητή x τότε για τυχαίο $k \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε την αποτίμηση που δίνει τιμή $k+1$ στην μεταβλητή x και έχουμε το ζητούμενο.

- Έστω f της μορφής $h+g$ όπου για τους h, g ισχύει το ζητούμενο και ακόμα $\mathbb{N} \not\models h+g \approx \underline{m}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε ισχυριζόμαστε ότι για τουλάχιστον έναν από τους δύο όρους h, g ισχύει ότι $\mathbb{N} \not\models h \approx \underline{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Πράγματι, αν όχι, τότε ισχύει $\mathbb{N} \models h \approx \underline{k}$ και $\mathbb{N} \models g \approx \underline{l}$ για κάποια $k, l \in \mathbb{N}$. Επομένως $\mathbb{N} \models h+g \approx \underline{k}+\underline{l}$ και εύκολα $\mathbb{N} \models f \approx \underline{m}$ για $m = k+l$, άτοπο.

  Επομένως χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι αυτό που δείξαμε ισχύει για τον h. Συνεπώς από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει αποτίμηση έτσι που για τυχαίο $k \in \mathbb{N}$ $\overline{u}(h) > k$ και εύκολα $\overline{u}(h+g) > k$.

- Όμοια εαν f είναι της μορφής $h \cdot g$.

- Έστω f είναι της μορφής h^g όπου για τους h, g ισχύει το ζητούμενο και ακόμα $\mathbb{N} \not\models h^g \approx \underline{m}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ τότε εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $\mathbb{N} \not\models h \approx 1$ και $\mathbb{N} \not\models h \approx \underline{k}$ ή $\mathbb{N} \not\models g \approx \underline{l}$. Επομένως χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathbb{N} \not\models g \approx \underline{l}$ επομένως από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει αποτίμηση u έτσι που για τυχαίο k, $\overline{u}(g) > k$ και χρησιμοποιώντας ότι $\mathbb{N} \not\models h \approx 1$ έχουμε ότι $\overline{u}(h^g) > k$. □

Υπολήμμα 4.1.2.
Αν $\mathbb{N} \models h+g \approx \underline{k}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχουν $m, r \in \mathbb{N}$ έτσι που $m+r = k$ και $\mathbb{N} \models h \approx \underline{m}$ και $\mathbb{N} \models g \approx \underline{r}$.

Απόδειξη:
Αρχικά είναι εύκολο να δούμε ότι για κάποια m, r ισχύει $\mathbb{N} \models h \approx \underline{m}$ και $\mathbb{N} \models g \approx \underline{r}$. Αν όχι, τότε $\mathbb{N} \not\models h \approx \underline{m}$ και από το **Υπολήμμα 4.1.1** έχουμε ότι υπάρχει αποτίμηση έτσι που $\overline{u}(h) > k$ επομένως και $\overline{u}(h+g) > k$ που είναι άτοπο.

Στη συνέχεια υποθέτουμε προς άτοπο ότι $m+r = n \neq k$. Τότε έχουμε $\mathbb{N} \models h+g \approx \underline{m}+\underline{r}$ επομένως εύκολα $\mathbb{N} \models h+g \approx \underline{n}$ και από την υπόθεση έχουμε $\mathbb{N} \models h+g \approx \underline{k}$, άτοπο. □

Τώρα είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε την επαγωγή μας.

- Έστω f της μορφής $h+g$ όπου για τους h, g ισχύει το ζητούμενο και $\mathbb{N} \models h+g \approx \underline{k}$. Τότε από **Υπολήμμα 4.1.2** $\mathbb{N} \models h \approx \underline{m}$ και $\mathbb{N} \models g \approx \underline{r}$ όπου $m+r = k$. Επομένως από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε $EXP^- \vdash h \approx \underline{m}$ και $EXP^- \vdash g \approx \underline{r}$ άρα $EXP^- \vdash h+g \approx \underline{m}+\underline{r}$. Από τα αξιώματα $1.1-1.4$ έχουμε ότι $EXP^- \vdash h+g \approx \underline{k}$.

- Όμοια εαν f της μορφής $h \cdot g$.

- Έστω f της μορφής h^g και $\mathbb{N} \models h^g \approx \underline{k}$. Τότε διακρίνουμε περιπτώσεις:

1. $k>1$. Τότε $\mathbb{N}\models h\approx \underline{m}$ και $\mathbb{N}\models g\approx \underline{r}$ όπου $m^r=k$. Επομένως $EXP^-\vdash h\approx \underline{m}$ και $EXP^-\vdash g\approx \underline{r}$ άρα $EXP^-\vdash h^g\approx \underline{m}^{\underline{r}}$ και από το (i) $EXP^-\vdash \underline{m}^{\underline{r}}\approx \underline{k}$. Συνεπώς $EXP^-\vdash h^g\approx \underline{k}$.
2. $k=1$ και $\mathbb{N}\models h^g\approx 1$. Τότε $\mathbb{N}\models h\approx 1$, (Αν όχι, τότε $\mathbb{N}\models h\not\approx 1$ επομένως υπάρχει αποτίμηση u έτσι που $\overline{u}(h)\neq 1$. Ακόμα έχουμε $\overline{u}(g)=\mu$, όπου $m\in\mathbb{N}$ και $\overline{u}(h)=\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{N}-\{0\}$. Τέλος, για κανένα τέτοιο λ,μ δεν έχουμε $\lambda^\mu=1$ και το ζητούμενο έπεται.) άρα από Επαγωγική Υπόθεση έχουμε $EXP^-\vdash h\approx 1$ και $EXP^-\vdash h^g\approx 1^g$ και επειδή $EXP^-\vdash 1^g\approx 1$ έχουμε $EXP^-\vdash h^g\approx 1$. □

(iii)Δείχνουμε την περίπτωση που $\mathbb{N}\models g\approx \underline{k}$. Με επαγωγή στο k.

- Για $k=1$ έχουμε $\mathbb{N}\models g\approx 1$ επομένως από το (ii) $EXP^-\vdash g\approx 1$ και $EXP^-\vdash h^g\approx h^1$. Άρα $EXP^-\vdash h^g\approx h$ συνεπώς $EXP^-\vdash (h^g)^f\approx h^f$. Ακόμα $EXP^-\vdash g\cdot f\approx 1\cdot f$ επομένως $EXP^-\vdash g\cdot f\approx f$. Άρα $EXP^-\vdash h^{(g\cdot f)}\approx h^f$ και τελικά $EXP^-\vdash (h^g)^f\approx h^{(g\cdot f)}$.

- Έστω ότι ισχύει για k. Δείχνουμε ότι ισχύει για $k+1$. Έστω $\mathbb{N}\models g\approx k+1$. Τότε από το (ii) έχουμε ότι $EXP^-\vdash g\approx k+1$ επομένως $EXP^-\vdash h^g\approx h^{k+1}$ και $EXP^-\vdash h^{k+1}\approx h^k\cdot h^1$. Άρα $EXP^-\vdash h^g\approx h^k\cdot h$, συνεπώς $EXP^-\vdash (h^g)^f\approx (h^{k+1})^f$ και $EXP^-\vdash (h^{k+1})^f\approx (h^k\cdot h)^f$. Ακόμα $EXP^-\vdash (h^k\cdot h)^f\approx (h^k)^f\cdot h^f$ και από Επαγωγική Υπόθεση έχουμε $EXP^-\vdash h^{(k\cdot f)}\cdot h^f\approx (h^k)^f\cdot h^f$ και $EXP^-\vdash h^{(k\cdot f)}\cdot h^f\approx h^{(k\cdot f)+f}$ και $EXP^-\vdash h^{(k\cdot f)+f}\approx h^{f(k+1)}$. Συνεπώς $EXP^-\vdash (h^{k+1})^f\approx h^{(k+1)\cdot f}$. □

Στη συνέχεια θα εργαστούμε στα πλαίσια της θεωρίας αποδείξεων δεδομένου ότι η κεντρική ιδέα μας είναι ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τυχαία απόδειξη της εξίσωσης $f_0\approx g_0$ από το EXP με μία από το EXP^-. Γι' αυτό το λόγο γίνομαστε πιο συγκεκριμένοι σχετικά με τις τυπικές αποδείξεις. Θα βλέπουμε μία τυπική απόδειξη, $\mathcal{I}$, ως ένα πεπερασμένο δέντρο του οποίου κάθε κορυφή είναι μία εξίσωση της $\mathcal{L}$. Οι μεγιστικές κορυφές είναι αξιώματα ή εξισώσεις της μορφής $f\approx f$ και έχουμε τους εξής κανόνες:

$$(=C)\ \frac{f\approx g}{g\approx f}\qquad (=M)\ \frac{f\approx g\qquad g\approx h}{f\approx h}$$
$$(+I)\ \frac{f_1\approx f_2\qquad g_1\approx g_2}{(f_1+g_1)\approx(f_2+g_2)}\qquad (\cdot I)\ \frac{f_1\approx f_2\qquad g_1\approx g_2}{(f_1\cdot g_1)\approx(f_2\cdot g_2)}$$
$$(EI)\ \frac{f_1\approx f_2\qquad g_1\approx g_2}{(f_1^{g_1})\approx(f_2^{g_2})}$$

Οι επόμενοι ορισμοί είναι τεχνικοί αλλά μεγάλης σημασίας αφού διαχωρίζουν τις ουσιαστικές εφαρμογές του κανόνα (EI) καθώς και τις ουσιαστικές εμφανίσεις όρων σε άλλους όρους. Αυτό θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στην συνέχεια όπου θα μπορέσουμε να αντικαταστήσουμε όλο το " κλαδί " της απόδειξης που καταλήγει σε έναν μη ουσιαστικό κανόνα (EI) με μία απόδειξη από το EXP^-.

Ορισμός 4.1. *Μία εφαρμογή του κανόνα (EI) καλείται* **ανούσια** *εαν $\mathbb{N}\models f_1\approx 1$.*

Ορισμός 4.2. *Μία μεγιστική κορυφή μιάς απόδειξης, $\mathcal{I}$, καλείται* **ουσιαστική** *αν καμία ανούσια εφαρμογή του κανόνα (EI) δεν γίνεται πιο κάτω από αυτή στην $\mathcal{I}$*

Ορισμός 4.3. *Εαν u, f είναι όροι της $\mathcal{L}$ τότε οριζουμε την έννοια ο u* **εμφανίζεται ουσιαστικά** *στον f ως εξής (αναδρομικά):*
u εμφανίζεται ουσιαστικά στην σταθερα 1 αν-ν ο u είναι η σταθερα 1.
u εμφανίζεται ουσιαστικά στην μεταβλητή x αν-ν ο u είναι η μεταβλητή x.
u εμφανίζεται ουσιαστικά στον όρο $h+g$ αν-ν ο u είναι ο $h+g$ ή ο u εμφανίζεται ουσιαστικά στον h ή στον g.
u εμφανίζεται ουσιαστικά στον όρο $h \cdot g$ αν-ν u είναι ο $h \cdot g$ ή ο u εμφανίζεται ουσιαστικά στον h ή στον g.
u εμφανίζεται ουσιαστικά στον h^g αν-ν $\mathbb{N} \not\models h \approx 1$ και ο u είναι ο h^g ή ο u εμφανίζεται ουσιαστικά στον h ή στον g.

Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε πιό απλά να πούμε ότι ο u είναι υποόρος του f. Αυτό δεν το κάνουμε διότι θέλουμε να κρατήσουμε ένα ουσιαστικό χαρακτηριστικό των γνήσιων υποόρων " πολυωνύμων " με θετικούς συντελεστές, δηλαδή ότι οι τιμές τους είναι μικρότερες από αυτές των όρων στους οποίους ανήκουν, κάτι που γίνεται ακόμα πιο έντονο αν επιτρέψουμε εκθετικοποίηση.

Λήμμα 4.2.
Έστω $\mathcal{I}$ απόδειξη του $f \approx g$ (της $\mathcal{L}$) και $e \approx h$ ουσιαστική μεγιστική κορυφή της $\mathcal{I}$. Τότε υπάρχει όρος f^* της $\mathcal{L}$ έτσι που $\mathbb{N} \models f \approx f^*$ και είτε $\mathbb{N} \models e \approx 1$ ή e εμφανίζεται ουσιαστικά στον f^*.

Απόδειξη:
Με επαγωγή στο ύψος της απόδειξης.

- Βάση. Έστω ότι $f \approx g$ είναι αξίωμα ή της μορφής $f \approx f$. Τότε είναι και η μόνη ουσιαστική μεγιστική κορυφή και αν f δεν είναι της μορφής 1^h (όπου σε αυτή την περίπτωση $\mathbb{N} \models f \approx 1$) επιλέγω ως f^* τον ίδιο τον f και έχουμε $\mathbb{N} \models f \approx f$ και f εμφανίζεται ουσιαστικά στον f.

- Έστω ότι ισχύει για κάθε απόδειξη ύψους $\leq n$. Δείχνουμε ότι ισχύει για κάθε απόδειξη ύψους $n+1$. Διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με τον τελευταίο κανόνα.

  - $$(=C)\ \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ f \approx g\end{array}}{g \approx f}\ .$$
    Σ' αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι οι ουσιαστικές μεγιστικές κορυφές παραμένουν οι ίδιες. Ακόμα για τον όρο e κάποιας ουσιαστικής μεγιστικής κορυφής της μορφής $e \approx h$ ισχύει είτε $\mathbb{N} \models e \approx 1$ ή εμφανίζεται ουσιαστικά σε κάποιον όρο f^* τέτοιον που $\mathbb{N} \models f^* \approx f$. Όμως επειδη $\mathbb{N} \models f \approx g$ έχουμε ότι $\mathbb{N} \models f^* \approx g$ και σε κάθε περίπτωση μπορούμε να πάρουμε ως g^* τον f^*.

  - $$(=M)\ \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ f \approx g\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ g \approx h\end{array}}{f \approx h}\ .$$
    Σ' αυτή την περίπτωση οι ουσιαστικές μεγιστικές κορυφές είναι αυτές της $\mathcal{D}_1$ και αυτές της $\mathcal{D}_2$. Εαν e είναι όρος μεγιστικής κορυφής της $\mathcal{D}_1$ τότε είτε $\mathbb{N} \models e \approx 1$ ή e εμφανίζεται ουσιαστικά στον f^* όπου $\mathbb{N} \models f^* \approx f$ επομένως το ζητούμενο έπεται από την Επαγωγική Υπόθεση.

Εαν e είναι όρος μεγιστικής κορυφής της $\mathcal{D}_2$ τότε είτε $\mathbb{N} \models e \approx 1$ ή e εμφανίζεται ουσιαστικά στον h^* όπου $\mathbb{N} \models h^* \approx h$. Όμως $\mathbb{N} \models f \approx h$ επομένως $\mathbb{N} \models h^* \approx f$ και το ζητούμενο έπεται για f^* τον όρο h^*.

► $$(+I)\ \frac{\overset{\mathcal{D}_1}{f_1 \approx f_2} \qquad \overset{\mathcal{D}_2}{g_1 \approx g_2}}{(f_1+g_1) \approx (f_2+g_2)}\ .$$
Σ' αυτή την περίπτωση οι ουσιαστικές μεγιστικές κορυφές είναι αυτές της $\mathcal{D}_1$ και αυτές της $\mathcal{D}_2$. Εαν e είναι όρος μεγιστικής κορυφής από την $\mathcal{D}_1$ τότε ο e εμφανίζεται ουσιαστικά στον f_1^*. Αν e είναι όρος μεγιστικής κορυφής από την $\mathcal{D}_2$ τότε e εμφανίζεται ουσιαστικά στον g_1^*. Επομένως επιλέγοντας ως $(f_1+g_1)^*$ τον όρο $(f_1^*+g_1^*)$ έχουμε ότι e εμφανίζεται ουσιαστικά στον $(f_1^*+g_1^*)$.

► $$(\cdot I)\ \frac{\overset{\mathcal{D}_1}{f_1 \approx f_2} \qquad \overset{\mathcal{D}_2}{g_1 \approx g_2}}{(f_1 \cdot g_1) \approx (f_2 \cdot g_2)}\ .$$
Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση.

► $$(EI)\ \frac{\overset{\mathcal{D}_1}{f_1 \approx f_2} \qquad \overset{\mathcal{D}_2}{g_1 \approx g_2}}{(f_1^{g_1}) \approx (f_2^{g_2})}\ .$$
Εδώ διακρίνουμε περιπτώσεις:

1. Αν $\mathbb{N} \models f_1 \approx 1$ τότε δεν έχουμε καμία ουσιαστική μεγιστική κορυφή αφού η απόδειξή μας καταλήγει με ανούσια εφαρμογή του (EI).
2. Αν $\mathbb{N} \not\models f_1 \approx 1$ τότε οι ουσιαστικές μεγιστικές κορυφές είναι αυτές των $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ και ισχύουν τα ίδια με την περίπτωση $(+I)$. □

Το επόμενο αντιπαράδειγμα κάνει σαφές ότι η μεγιστική κορυφή πρέπει να είναι ουσιαστική διαφορετικά το προηγούμενο Λήμμα αποτυγχάνει. Έστω η εξής απόδειξη:

$$(EI)\ \frac{\overset{\text{Αξίωμα}}{1 \approx 1} \qquad \overset{\text{Αξίωμα}}{x^2+x \approx x+x^2}}{1^{x^2+x} \approx 1^{x+x^2}}$$

Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει όρος f^* τέτοιος που $\mathbb{N} \models f^* \approx 1^{x^2+x}$ και x^2+x εμφανίζεται ουσιαστικά στον f^*. Πράγματι, με επαγωγή στον όρο f^*

- Αν f^* είναι η σταθερά 1 τότε ο x^2+x δεν εμφανίζεται ουσιαστικά σ' αυτή.
- Αν f^* είναι μεταβλητή τότε $\mathbb{N} \not\models f^* \approx 1$ και το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα.
- Αν f^* της μορφής $h+g$ τότε $\mathbb{N} \not\models f^* \approx 1$.
- Αν f^* είναι της μορφής $h \cdot g$ τότε $\mathbb{N} \models h \approx 1$ και $\mathbb{N} \models g \approx 1$ και από την Επαγωγική Υπόθεση ο x^2+x δεν εμφανίζεται ουσιαστικά στους h, g επίσης δεν είναι της μορφής $h \cdot g$ επομένως δεν εμφανίζεται ουσιαστικά στον f^*.
- Αν f^* της μορφής h^g τότε $\mathbb{N} \models h \approx 1$ και x^2+x δεν εμφανίζεται ουσιαστικά στον f^*.

Το επόμενο Λήμμα βρίσκεται στην " καρδιά " της απόδειξής μας και μας δίνει μία προσέγγιση των τιμών ενός μη σταθερού υποόρου σε σχέση με αυτές του όρου στον οποίο εμφανίζεται ουσιαστικά.

Λήμμα 4.3.
Έστω $u(x,y), f(x,y)$ όροι της $\mathcal{L}$. Τότε:
$(i)\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}-\{1\}$ αν $\mathbb{N} \not\models f \approx 1$ τότε $\overline{\overline{f}}(m_1,m_2) \geq 2$.
$(ii)\exists i \in \{1,2\}$ τέτοιο που για κάθε $m_1, m_2 \in \mathbb{N}-\{1\}$ αν $\overline{\overline{f}}$ δεν είναι σταθερά τότε $\overline{\overline{f}}(m_1,m_2) \geq m_i$.
(iii)Έστω ότι u εμφανίζεται ουσιαστικά στον f και $\overline{\overline{u}}$ δεν είναι σταθερα. Τότε είτε
$(a)\exists i \in \{1,2\}$ έτσι που για αρκετα μεγάλα $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$,
$\overline{\overline{f}}(m_1,m_2) \geq \overline{\overline{u}}(m_1,m_2)^{\sqrt{m_i}}$ ή
(β) υπάρχουν όροι v, h τέτοιοι που είτε $\mathbb{N} \models f \approx (v \cdot u) + h$ ή $\mathbb{N} \models f \approx v \cdot u$.

Απόδειξη:
(i)Με επαγωγή στον όρο f.

- Έστω ότι ο f είναι η σταθερά 1. Τότε $\mathbb{N} \models f \approx 1$ επομένως το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα.
- Έστω ότι ο f είναι μεταβλητή. Τότε είναι είτε η x ή η y, χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε να είναι η x. Τότε $\mathbb{N} \not\models x \approx 1$ και $\overline{\overline{f}}(m_1,m_2) = m_1$ όμως $m_1 \geq 2$, άρα ισχύει το ζητούμενο.
- Έστω ότι ο f είναι της μορφής $h+g$, όπου για τους όρους h, g ισχύει το ζητούμενο. Τότε διακρίνουμε περιπτώσεις:
  1. Έστω $\mathbb{N} \models h \approx 1$ και $\mathbb{N} \models g \approx 1$. Τότε $\overline{\overline{f}} = \overline{\overline{h+g}} = \overline{\overline{f}} + \overline{\overline{g}} = 1+1 = 2 \geq 2$.
  2. Τουλάχιστον για έναν από τους δύο όρους, έστω για τον g, ισχύει $\mathbb{N} \not\models g \approx 1$. Τότε από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε $\overline{\overline{g}}(m_1,m_2) \geq 2$ άρα και $\overline{\overline{h+g}}(m_1,m_2) \geq 2$.
- Έστω ότι f είναι της μορφής $h \cdot g$, όπου για τους όρους h, g ισχύει το ζητούμενο. Πάλι διακρίνουμε περιπτώσεις:
  1. Έστω $\mathbb{N} \models h \approx 1$ και $\mathbb{N} \models g \approx 1$. Τότε $\mathbb{N} \models f \approx 1$ και το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα.
  2. Τουλάχιστον για έναν από τους δύο όρους, έστω για τον g, ισχύει $\mathbb{N} \not\models g \approx 1$. Τότε από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε $\overline{\overline{g}}(m_1,m_2) \geq 2$, άρα και $\overline{\overline{h \cdot g}}(m_1,m_2) \geq 2$.
- Έστω ότι f είναι της μορφής h^g, όπου για τους h, g ισχύει το ζητούμενο. Διακρίνουμε περιπτώσεις:
  1. Έστω $\mathbb{N} \models h \approx 1$. Τότε $\mathbb{N} \models h^g \approx 1$, επομένως το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα.
  2. Έστω $\mathbb{N} \not\models h \approx 1$. Τότε από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε $\overline{\overline{h}}(m_1,m_2)$ ≥ 2, επομένως και $\overline{\overline{h^g}}(m_1,m_2) \geq 2$.

(ii)Με επαγωγή στον όρο f.

- Έστω ότι ο f είναι η σταθερά 1. Τότε $\overline{\overline{f}}$ είναι σταθερή και το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα.

- Έστω ότι ο f είναι μεταβλητή, χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε να είναι η x. Τότε $\overline{\overline{f}}(m_1, m_2) = m_1 \geq m_1$.

- Έστω ότι ο f είναι της μορφής $h + g$, όπου για τους h, g ισχύει το ζητούμενο.Τότε διακρίνουμε περιπτώσεις:

  1. Αν $\overline{\overline{h}}, \overline{\overline{g}}$ είναι σταθερές, τότε $\overline{\overline{f}}$ είναι σταθερά και το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα.
  2. Τουλάχιστον μία από τις δύο, έστω η $\overline{\overline{h}}$ δεν είναι σταθερή. Τότε από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει $i \in \{1, 2\}$ έτσι που $\overline{\overline{h}}(m_1, m_2) \geq m_i$ επομένως και $\overline{\overline{h + g}}(m_1, m_2) \geq m_i$.

- Όμοια εαν f είναι της μορφής $h \cdot g$.

- Επίσης όμοια εαν f είναι της μορφής h^g.

(iii)Με επαγωγή στον όρο f.

- Έστω ότι ο f είναι η σταθερά 1. Τότε u είναι επίσης η σταθερά 1 και $\overline{\overline{u}}$ είναι σταθερή.

- Έστω ότι ο f είναι μεταβλητή, χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε να είναι η x. Τότε επίσης ο όρος u είναι η μεταβλητή x και επομένως $\overline{\overline{u}}$ δεν είναι σταθερή. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει το (b) επιλέγοντας ως όρο v τη σταθερά 1 και έχουμε $\mathbb{N} \models x \approx x \cdot 1$.

- Έστω ότι ο f είναι της μορφής $h + g$, όπου για τους όρους h, g ισχύει το ζητούμενο. Τότε διακρίνουμε περιπτώσεις:

  1. Αν u είναι ο $h + g$, τότε εύκολα ισχύει το (b) επιλέγοντας πάλι ως v τη σταθερά 1.
  2. Αν u εμφανίζεται ουσιαστικά σε κάποιον από τους δύο όρους, έστω στον h, τότε αν από την Επαγωγική Υπόθεση ισχύει το (a) έχουμε ότι υπάρχει $i \in \{1, 2\}$ έτσι που για αρκετά μεγάλα m_1, m_2 $\overline{\overline{h}}(m_1, m_2) \geq \overline{\overline{u}}(m_1, m_2)^{\sqrt{m_i}}$. Επομένως και $\overline{\overline{h + g}}(m_1, m_2) \geq \overline{\overline{u}}(m_1, m_2)^{\sqrt{m_i}}$.

     Αν ισχύει το (b) τότε υπάρχουν όροι v, h_1 έτσι που είτε $\mathbb{N} \models h \approx v \cdot u$ ή $\mathbb{N} \models h \approx v \cdot u + h_1$, οπότε επιλέγοντας ως v, h_1 τους όρους v, g και $v, h_1 + g$ αντίστοιχα έχουμε το ζητούμενο.

- Έστω ότι ο f είναι της μορφής $h \cdot g$, όπου για τους όρους h, g ισχύει το ζητούμενο. Τότε διακρίνουμε περιπτώσεις:

  1. Αν u είναι ο $h \cdot g$, τότε εύκολα ισχύει το (b) επιλέγοντας ως v τη σταθερά 1.

2. Αν u εμφανίζεται ουσιαστικά σε κάποιον από τους δύο όρους, έστω στον h, τότε αν από την Επαγωγική Υπόθεση ισχύει το (a), έχουμε ότι υπάρχει $i \in \{1,2\}$ έτσι που για αρκετά μεγάλα m_1, m_2 $\overline{\overline{h}}(m_1,m_2) \geq \overline{\overline{u}}(m_1,m_2)^{\sqrt{m_i}}$. Επομένως και $\overline{\overline{h \cdot g}}(m_1,m_2) \geq \overline{\overline{u}}(m_1,m_2)^{\sqrt{m_i}}$.

   Αν ισχύει το (b). Τότε υπάρχουν όροι v, h_1 έτσι που είτε $\mathbb{N} \models h \approx v \cdot u$ ή $\mathbb{N} \models h \approx v \cdot u + h_1$. Επομένως, επιλέγοντας ως v, h_1 τους όρους $v \cdot g$ και $v \cdot g, h_1 \cdot g$ αντίστοιχα έχουμε το ζητούμενο.

- Έστω ότι ο f είναι της μορφής h^g και u εμφανίζεται ουσιαστικά στον f (οπότε θα έχουμε $\mathbb{N} \not\models h \approx 1$). Εαν u είναι ο h^g τότε όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις ισχύει το (b) επιλέγοντας ως v τη σταθερά 1. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

  1. Εαν u εμφανίζεται ουσιαστικά στον h τότε αν ισχύει το (a) έχουμε ότι $\exists i \in \{1,2\}$ τέτοιο που για αρκετά μεγάλα m_1, m_2 $\overline{\overline{h}}(m_1,m_2) \geq \overline{\overline{u}}(m_1,m_2)^{\sqrt{m_i}}$ και $\overline{\overline{h^g}}(m_1,m_2) \geq \overline{\overline{u}}(m_1,m_2)^{\sqrt{m_i}}$.

     Εαν ισχύει το (b) τότε υπάρχουν όροι v, h_1 έτσι που είτε $\mathbb{N} \models h \approx v \cdot u$ ή $\mathbb{N} \models h \approx v \cdot u + h_1$. Διακρίνουμε επιπλέον περιπτώσεις ανάλογα με το αν η $\overline{\overline{g}}$ είναι σταθερή ή όχι. Στην περίπτωση που η $\overline{\overline{g}}$ είναι σταθερή, έστω η k, έχουμε ότι ισχύει το (b) με v, h_1 τους όρους $u^{k-1} \cdot v^k$ και $(v \cdot u + h_1)^{k-1} \cdot v, h_1 \cdot (v \cdot u + h_1)^{k-1}$ αντίστοιχα.

     Στην περίπτωση που η $\overline{\overline{g}}$ δεν είναι σταθερή. Τότε από το (ii) $\exists i \in \{1,2\}$ έτσι που $\overline{\overline{g}}(m_1,m_2) \geq m_i$, επομένως είτε $\overline{\overline{h^g}}(m_1,m_2) =$
     $\overline{\overline{v \cdot u}}(m_1,m_2)^{\overline{\overline{g}}(m_1,m_2)} \geq \overline{\overline{u}}(m_1,m_2)^{\overline{\overline{g}}(m_1,m_2)} \geq \overline{\overline{u}}(m_1,m_2)^{m_i} \geq$
     $\overline{\overline{u}}(m_1,m_2)^{\sqrt{m_i}}$ ή $\overline{\overline{h^g}}(m_1,m_2) =$
     $\overline{\overline{(v \cdot u + h_1)}}(m_1,m_2)^{\overline{\overline{g}}(m_1,m_2)} \geq \overline{\overline{u}}(m_1,m_2)^{\overline{\overline{g}}(m_1,m_2)} \geq \overline{\overline{u}}(m_1,m_2)^{m_i} \geq$
     $\overline{\overline{u}}(m_1,m_2)^{\sqrt{m_i}}$. Συνεπώς ισχύει το (a).

  2. Εαν u εμφανίζεται ουσιαστικά στον g και επειδή $\mathbb{N} \not\models h \approx 1$ από το (i) έχουμε ότι $\overline{\overline{h}}(m_1,m_2)^{\overline{\overline{g}}(m_1,m_2)} \geq 2^{\overline{\overline{g}}(m_1,m_2)}$. Επομένως αν ισχύει το (a) έχουμε $\overline{\overline{h^g}}(m_1,m_2) \geq 2^{\overline{\overline{u}}(m_1,m_2)^{\sqrt{m_i}}} \geq \overline{\overline{u}}(m_1,m_2)^{\sqrt{m_i}}$, άρα ισχύει και πάλι το (a).

     Στην περίπτωση που ισχύει το (b), έχουμε ότι $\overline{\overline{g}}(m_1,m_2) \geq \overline{\overline{u}}(m_1,m_2)$. Επομένως, επειδή $2^{\sqrt{\overline{\overline{u}}}} \geq \overline{\overline{u}}$ έχουμε $\overline{\overline{h}}^{\overline{\overline{g}}} \geq 2^{\overline{\overline{u}}} \geq \overline{\overline{u}}^{\sqrt{\overline{\overline{u}}}}$ και επειδή $\overline{\overline{u}}^{\sqrt{\overline{\overline{u}}}} \geq \overline{\overline{u}}^{\sqrt{m_i}}$ έχουμε το ζητούμενο. □

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κανένας όρος της $\mathcal{L}$ δεν είναι ίσος με τον $(x^2 - x + 1)^{x \cdot y}$, αφού πρώτα αποδείξουμε ένα Λήμμα που σιωπηρά χρησιμοποιούμε σε όλο το κεφάλαιο.

Λήμμα 4.4.
Έστω $u(x,y)$ όρος της $\mathcal{L}$. Τότε $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $\overline{\overline{u}}(m_1,m_2) \geq 1$.

Απόδειξη:
Με επαγωγή στον όρο u.

- Έστω ότι ο u είναι η σταθερά 1. Τότε $\overline{\overline{u}}(m_1,m_2) = 1$.

- Έστω ότι ο u είναι μεταβλητή, χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε να είναι η x. Τότε $\overline{\overline{u}}(m_1, m_2) = m_1$ και $m_1 \geq 1$.

- Έστω ότι ο u είναι της μορφής $f+g$, όπου για τους f, g ισχύει το ζητούμενο. Τότε $\overline{\overline{u}}(m_1, m_2) = \overline{\overline{f+g}}(m_1, m_2) = \overline{\overline{f}}(m_1, m_2) + \overline{\overline{g}}(m_1, m_2) \geq^{\text{E.Υ}} 1+1 \geq 1$.

- Έστω ότι ο u είναι της μορφής $f \cdot g$, όπου για τους f, g ισχύει το ζητούμενο. Τότε $\overline{\overline{u}}(m_1, m_2) = \overline{\overline{f \cdot g}}(m_1, m_2) = \overline{\overline{f}}(m_1, m_2) \cdot \overline{\overline{g}}(m_1, m_2) \geq^{\text{E.Υ}} 1 \cdot 1 \geq 1$.

- Εστω ότι ο u είναι της μορφής f^g, όπου για τους f, g ισχύει το ζητούμενο. Τότε $\overline{\overline{u}}(m_1, m_2) = \overline{\overline{f^g}}(m_1, m_2) = \overline{\overline{f}}(m_1, m_2)^{\overline{\overline{g}}(m_1, m_2)} \geq^{\text{E.Υ}} 1^1 \geq 1$. □

Λήμμα 4.5.
Έστω $f(x, y)$ όρος της $\mathcal{L}$ και $\overline{\overline{f}}(1, 2) = 1$. Τότε για κάποιο όρο g της $\mathcal{L}$,

$$\mathbb{N} \models f \approx x^g \ \text{ ή } \ \mathbb{N} \models f \approx 1.$$

Απόδειξη:
Με επαγωγή στον όρο f.

- Έστω ότι ο f είναι η σταθερά 1. Τότε $\overline{\overline{f}}(1, 2) = 1$ και $\mathbb{N} \models f \approx 1$

- Έστω ότι ο f είναι μεταβλητή. Τότε εαν είναι η μεταβλητη x έχουμε $\overline{\overline{f}}(1, 2) = 1$ και επιλέγοντας ως g την σταθερά 1 έχουμε $\mathbb{N} \models f \approx x^1$. Εαν f είναι η μεταβλητή y τότε $\overline{\overline{f}}(1, 2) = 2$ και το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα.

- Έστω ότι ο f είναι της μορφής $h+v$ όπου για τους h, v ισχύει το ζητούμενο. Τότε από το **Λήμμα 4.4** έχουμε $\overline{\overline{h+v}}(1, 2) \geq 2$ επομένως το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα.

- Έστω ότι ο f είναι της μορφής $h \cdot v$ όπου για τους h, v ισχύει το ζητούμενο. Τότε αν $\overline{\overline{h \cdot v}}(1, 2) = 1$ έχουμε $\overline{\overline{h}}(1, 2) = 1$ και $\overline{\overline{v}}(1, 2) = 1$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

  1. Αν $\mathbb{N} \models h \approx 1$ και $\mathbb{N} \models v \approx 1$ τότε $\mathbb{N} \models h \cdot v \approx 1$.
  2. Αν $\mathbb{N} \models h \approx x^{g_1}$ για κάποιο όρο g_1 και $\mathbb{N} \models v \approx 1$ τότε $\mathbb{N} \models h \cdot v \approx x^{g_1} \cdot 1$ επομένως για τον ίδιο όρο g_1 έχουμε $\mathbb{N} \models h \cdot v \approx x^{g_1}$.
  3. Αν $\mathbb{N} \models h \approx 1$ και $\mathbb{N} \models v \approx x^{g_1}$ για κάποιον όρο g_1 όμοια με πριν.
  4. Αν $\mathbb{N} \models h \approx x^{g_1}$ για κάποιο όρο g_1 και $\mathbb{N} \models v \approx x^{g_2}$ για κάποιον όρο g_2, τότε επιλέγοντας ως όρο g τον $g_1 + g_2$ έχουμε $\mathbb{N} \models h \cdot v \approx x^{g_1+g_2}$.

- Έστω ότι ο f είναι της μορφής h^v, όπου για τους h, v ισχύει το ζητούμενο. Τότε αν $\overline{\overline{h^g}}(1, 2) = 1$ έχουμε $\overline{\overline{h}}(1, 2) = 1$ και αν $\mathbb{N} \models h \approx 1$ τότε $\mathbb{N} \models h^v \approx 1$. Εαν $\mathbb{N} \models h \approx x^{g_1}$ για κάποιο όρο g_1, τότε επιλέγοντας ως όρο g τον $g_1 \cdot v$ έχουμε $\mathbb{N} \models h^v \approx x^{g_1 \cdot v}$. □

Πόρισμα 4.1.
Για κανένα όρο $f(x, y)$ της $\mathcal{L}$ δεν ισχύει $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}, \overline{\overline{f}} = (m_1^2 - m_1 + 1)^{m_1 \cdot m_2}$.

Απόδειξη:
Έστω, προς άτοπο, ότι f είναι ένας τέτοιος όρος. Τότε επειδή $\overline{\overline{f}}(1,2) = 1$ υπάρχει όρος g (**Λήμμα 4.5**) έτσι που $\mathbb{N} \models f \approx x^g$. Όμως τότε $\overline{\overline{f}}(2,1) = 2^{g(2,1)}$ και $\overline{\overline{f}}(2,1) = (2^2 - 2 + 1)^2 = 3^2$ κάτι που είναι αδύνατο. □

Το προηγούμενο Πόρισμα είναι πολύ σημαντικό. Στην ουσία είναι αυτό που χρειαζόμαστε για να δώσουμε απάντηση στο πρόβλημά μας. Έχουμε βρεί μία ισότητα στους φυσικούς που για να αποδειχθεί στο EXP έχει " ανάγκη " τον συγκεκριμένο όρο δυστυχώς όμως αυτός ο όρος δεν είναι όρος της γλώσσας μας. Η απάντηση θα έλεγε κανείς βασίζεται σε ένα αρκετά τεχνικό ζήτημα και δεν μας αποκαλύπτει κάτι για τους νόμους στους φυσικούς, ωστόσο αυτή η μικρή τεχνική λεπτομέρεια είναι αρκετή για να πούμε ότι το EXP δεν εξαντλεί όλους τους νόμους που χρειαζόμαστε για να δώσουμε απάντηση στο ζήτημα ισότητας δύο όρων στους φυσικούς.

Αφού έχουμε εξοπλιστεί με όλα τα κατάλληλα εφόδια είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε το Λήμμα που μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε το EXP με το πιο ασθενές EXP^-, τουλάχιστον στην απόδειξη της $f_0 \approx g_0$.

Λήμμα 4.6.
Αν $EXP \vdash f_0 \approx g_0$ *τότε* $EXP^- \vdash f_0 \approx g_0$.

Απόδειξη:
Έστω $\mathcal{I}$ απόδειξη του $f_0 \approx g_0$ από το EXP. Θα δείξουμε πώς θα την αντικαταστήσουμε με μία απόδειξη από το EXP^-.
(a) Για κάθε εμφάνιση εξίσωσης της μορφής $f_1^{g_1} \approx f_2^{g_2}$ με $\mathbb{N} \models f_1 \approx 1$ αντικαθιστούμε τα πάντα πάνω από αυτήν με την εξής απόδειξη.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Λήμμα 4.1 }(ii)}{f_1 \approx 1} \qquad g_1 \approx g_1}{f_1^{g_1} \approx 1^{g_1}}\,(EI) \qquad \dfrac{\text{Αξίωμα}}{1^{g_1} \approx 1}}{f_1^{g_1} \approx 1}\,(=T) \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{Λήμμα 4.1 }(ii)}{f_2 \approx 1} \qquad g_2 \approx g_2}{f_2^{g_2} \approx 1^{g_2}}\,(EI) \qquad \dfrac{\text{Αξίωμα}}{1^{g_2} \approx 1}}{f_2^{g_2} \approx 1}\,(=T)}{f_1^{g_1} \approx f_2^{g_2}}$$

Αυτή είναι μία απόδειξη από το EXP^-.

(b)Για κάθε εμφάνιση εξίσωσης της μορφής $(f^g)^h \approx f^{(g \cdot h)}$ σε μεγιστική κορυφή που είτε $\overline{\overline{g}}$ είναι σταθερή, είτε $\overline{\overline{h}}$ είναι σταθερή είτε $\overline{\overline{f}}$ είναι 1 επισυνάπτουμε μία απόδειξή της από το EXP^- (Αυτό μπορεί να γίνει λόγω του **Λήμματος 4.1**(iii)).

Ισχυριζόμαστε ότι καμμία εφαρμογή του αξιώματος 1.8 δεν εμφανίζεται σε μεγιστική κορυφή της $\mathcal{I}$. Έστω προς άτοπο ότι $(f^g)^h \approx f^{(g \cdot h)}$ είναι μία τέτοια εμφάνιση, τότε από το (a) η εμφάνιση αυτή είναι ουσιαστική (διαφορετικά θα είχαμε αντικαταστήσει όλο το " κλαδί " της απόδειξης με μία απόδειξη από το EXP^- που δεν περιέχει το αξίωμα 1.8). Ακόμα από το (b) $\mathbb{N} \not\models f \approx 1$ επομένως $\mathbb{N} \not\models (f^g)^h \approx 1$

συνεπώς από το **Λήμμα 4.2** υπάρχει όρος f^* έτσι που $\mathbb{N} \models f^* \approx f_0$ και $(f^g)^h$ εμφανίζεται ουσιαστικά στον όρο f^*. Όμως πάλι από το (b) έχουμε ότι $\overline{\overline{g}}$ και $\overline{\overline{h}}$ δεν είναι σταθερές και $\mathbb{N} \not\models f \approx 1$, επομένως από το **Λήμμα 4.1**$(i),(ii)$ υπάρχουν $i,j \in \{1,2\}, \forall m_1, m_2 \in \mathbb{N} - \{1\}$ $\overline{\overline{(f^g)^h}}(m_1,m_2) \geq 2^{m_i \cdot m_j}$. Επίσης, $\overline{\overline{f^*}}(m_1,m_2) = \overline{\overline{f_0}}(m_1,m_2) = ((m_1+1)^{m_1} + (m_1^2+m_1+1)^{m_1})^{m_2}((m_1^3+1)^{m_2} + (m_1^4+m_1^2+1)^{m_2})^{m_1} \leq (25m_1^4)^{m_1 \cdot m_2}$ $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}$.
Για κανένα $k \in \{1,2\}$ δεν έχουμε $(25m_1^4)^{m_1 \cdot m_2} \geq 2^{m_i \cdot m_j \cdot \sqrt{m_k}}$ για αρκετά μεγάλα $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Επομένως λόγω του **Λήμματος 4.3(ιιι)** υπάρχουν όροι v, h_1 έτσι που είτε $\mathbb{N} \models f^* \approx (v \cdot u) + h_1$ ή $\mathbb{N} \models f* \approx v \cdot u$ όπου u είναι ο όρος $(f^g)^h$.

Επειδή v, h_1 είναι όροι της $\mathcal{L}$ θα έχουν μία αναπαράσταση στα τ_i (**Θεώρημα 3.1**), ακόμα $\mathbb{N} \models f^* \approx \tau_4 \cdot \tau_7 \cdot \tau_8$ όμως το πολυώνυμο που αναπαριστά τον $vu + h_1$ δεν μπορεί να είναι μονώνυμο με συντελεστή 1 επομένως έχουμε $\mathbb{N} \models f^* \approx v \cdot u$. Τότε λόγω του **Πορισματος 4.1** έχουμε τις εξής περιπτώσεις $\mathbb{N} \models u \approx \tau_4$ ή $\mathbb{N} \models u \approx \tau_7$ ή $\mathbb{N} \models u \approx \tau_4 \cdot \tau_8$ ή $\mathbb{N} \models u \approx \tau_7 \cdot \tau_8$ ή $\mathbb{N} \models u \approx \tau_4 \cdot \tau_7 \cdot \tau_8$.

Από το **Λήμμα 4.1** έχουμε $\overline{\overline{(f^g)^h}}(2,2) = k^4$ για κάποιο $k \in \mathbb{N} - \{1\}$. Ακόμα βρίσκουμε $\overline{\overline{\tau_4}}(2,2) = 58^2, \overline{\overline{\tau_7}}(2,2) = 58^2, \overline{\overline{\tau_4 \cdot \tau_8}}(2,2) = 58^2 \cdot 3^4$ και $\overline{\overline{\tau_7 \cdot \tau_8}}(2,2) = 58^2 \cdot 3^4$ όπου κανένα δεν είναι τέταρτη δύναμη. Η μόνη περίπτωση που μένει είναι $\mathbb{N} \models (f^g)^h \approx f_0$ πάλι όμως $\overline{\overline{(f^g)^h}}(2,3)$ είναι τέταρτη δύναμη αλλά $\overline{\overline{f_0}}(2,3) = 58^3 \cdot 370^2 \cdot 3^6$ που δεν είναι. Και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □
Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το κύριο αποτέλεσμα της παραγράφου.

Θεώρημα 4.1. $EXP \not\vdash f_0 \approx g_0$

Απόδειξη:
Από το **Λήμμα 4.6**, αρκεί να βρούμε ένα μοντέλο $\mathfrak{A}$ της EXP^- έτσι που $\mathfrak{A} \models \exists x \exists y f_0(x,y) \approx g_0(x,y)$. Ορίζουμε το μοντέλο ώς εξής:

- $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}[z]$, τα πολυώνυμα με συντελεστές από το $\mathbb{N}$, στην μεταβλητή z (στην ουσία εδώ η z δεν είναι μεταβλητή αλλά " αόριστη ").

- $1, +, \cdot$ έχουν την φυσική ερμηνεία τους στο $\mathbb{N}[z]$.

- Η exp ορίζεται ως εξής:

  – Για $p(z) \in \mathbb{N}[z], p(z)^m = \underbrace{p(z) \cdot p(z) \ldots p(z)}_{m-\text{φορές}}$ για $m \in \mathbb{N}$

  – $p(z)^z = \begin{cases} z^k, \text{εαν } k \in \mathbb{N} \text{ και } (z^2-z+1)^k | p(z), (z^2-z+1)^{k+1} \not| p(z), \\ 1, \text{εαν δεν υπάρχει τέτοιο } k \end{cases}$

  – $p(z)^{z^2} = \begin{cases} (z+1)^k, \text{εαν } k \in \mathbb{N} \text{ και } z^k | p(z), z^{k+1} \not| p(z), \\ 1, \text{εαν δεν υπάρχει τέτοιο } k \end{cases}$

  – $p(z)^{z^m} = 1$ για $m > 2$ $m \in \mathbb{N}$.

  – $p(z)^{\sum_{i=0}^m a_i \cdot z^i} = \prod_{i=0}^m (p(z)^{z^i})^{a_i}$, για $a_i \in \omega$ κάνοντας την παραδοχή ότι $t^0 = 1$.

Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η $\mathfrak{A}$ είναι μοντέλο της EXP^- αλλά $f_0^{\mathfrak{A}}[z,z^2] = 1$ και $g_0^{\mathfrak{A}}[z,z^2] = z+1$. □

4.3 Εν Κατακλείδι

Τέλος αναφέρουμε κάποια παραπλήσια αποτελέσματα και κάποια ανοιχτά προβλήματα γύρω από τον συγκεκριμένο τομέα.

Ο R.Gurevič βρήκε ένα μοντέλο της EXP με 59 στοιχεία, στο οποίο η εξίσωση του Wilkie δεν είναι ταυτότητα. Αργότερα, οι S.Burris και K.Yeats κατέβασαν αρκετά το ρεκόρ βρίσκοντας ένα μοντέλο της EXP με 12 στοιχεία στο οποίο η εξίσωση του Wilkie δεν είναι ταυτότητα.Ακόμα ο G.Asatryan έδειξε ότι κανένα μοντέλο της EXP με δύο στοιχεία δεν προσφέρεται ως αντιπαράδειγμα όσον αφορά την εξίσωση του Wilkie. Λαμβάνοντας αυτά υπόψη, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει πρόσφορο έδαφος στην μελέτη μοντέλων της EXP με αριθμό στοιχείων από 3 έως 11. Η ανακάλυψη του μοντέλου με τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων,το οποίο προσφέρει αντιπαράδειγμα, αν και χωρίς κάποια πρακτική αξία δεν θα περάσει απαρατήρητη από την μαθηματική κοινότητα.

Ένα επίσης αρκετά ενδιαφέρον ανοικτό πρόβλημα είναι, αν το **Θεώρημα 3.2** μπορεί να επεκταθεί σε όρους της $\mathfrak{L}^*$. Αν και το πρόβλημα φαίνεται διαισθητικά εύκολο, η απόδειξή του θα μας έδινε αμέσως το ασθενέστερο **Θεώρημα 3.2**. Επομένως, η δυσκολία του πρέπει να " περικλείει " την δυσκολία του **Θεωρήματος 3.2**, κάτι που αυτόματα το κάνει ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα.

Βιβλιογραφία

[1] A. Wilkie, *On Exponentiation - A Solution to Tarski's High School Algebra Problem*, Connections between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry, vol. 6, pp. 107-129, 2000.

[2] A. Macintyre, *The Laws of Exponentiation*, Model Theory and Arithmetic, vol. 890, pp. 185-197, 1981.

[3] G.H.Hardy, *Orders of Infinity*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, no. 12, 1910.

[4] L.Henkin, *The Logic of Equality*, American Mathematical Monthly, vol.84, pp. 597-612, 1977.

[5] L.Henkin, *On Mathematical Induction*, American Mathematical Monthly, vol.67, pp. 323-338, 1960.

[6] M.Rosenlicht, *Differential Extension Fields of Exponential Type*, Pacific Journal of Mathematics, vol.57, pp. 289-300, 1975.

[7] A.Tarski, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, Bulletin of the American Mathematical Society, 1951.

[8] R. Gurevič, *Equational Theory of Positive Numbers with Exponentiation*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol.94, pp. 135-141, 1985.

[9] Σ.Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής*, Συμμετρία, 1993.

[10] H.J.Keisler, C.C.Chang, *Model Theory*, Elsevier, 1990.

[11] D.Marker, *Model Theory:An Introduction*, Springer, 2002.

[12] S.Burris, K.Yeats, *The Saga of the High School Identities*, Algebra Universalis, vol.52, pp.325-342, 2004.

[13] D.Richardson, *Solution of the Identity Problem for Integral Exponential Functions*, Zeitschr. fur Math. Logik und Grundlagen d. Math., vol.15, pp.333-340, 1969.