Θεωρία συνόλων NF (New Foundations). Τὸ πρόβλημα τῆς συνέπειας

Νῖκος Θεοδώρου (μΠλ∀ – 200301)

15 Ἰουνίου 2007

Διπλωματικὴ ἐργασία στὰ πλαίσια τοῦ διαπανεπιστημιακοῦ Π.Μ.Σ. «Λογική και θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού».

Συνεπιβλέποντες:

- Κ. Δημητρακόπουλος, καθηγητής, τμῆμα Μ.Ι.Θ.Ε., Ε.Κ.Π.Α·
- Αθ. Τζουβάρας, καθηγητής, τμῆμα Μαθηματικῶν, Α.Π.Θ.

Στὴ Βίλλυ, στὴ Λιάνα, στὴ Φιλαρέτη.

β'

Περιεχόμενα

Εἰσαγωγὴ

Ἡ Θεωρία Συνόλων ἐμφανίστηκε στὰ τέλη τοῦ 19ου αἰῶνα, ἀπὸ τὴ δουλειὰ ἑνὸς ἀναλύστα, τοῦ Georg Cantor, πάνω στὸ θέμα τῆς πληθικότητας τῆς πραγματικῆς εὐθείας. Ἐνῶ ὅμως ὁ ἱδρυτὴς τῆς Θεωρίας Συνόλων ἐνδιαφερόταν κυρίως γιὰ τὴ μελέτη τῶν πληθαρίθμων, πάνω στὴν ὁποία ἔκανε πολὺ σημαντικὴ δουλειά, ἕνα μέρος τῆς μαθηματικῆς κοινότητας (οἱ σχολὲς τοῦ λογικισμοῦ καὶ τοῦ φορμαλισμοῦ), βρῆκε πιὸ ἐνδιαφέρουσα μιὰ ἄλλη κατεύθυνση: τὴ θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν στὴ βάση τῶν συνόλων. Ὣς τότε, κορωνίδα τῶν Μαθηματικῶν θεωρεῖτο ἡ Θεωρία Ἀριθμῶν. Ἡ νέα θεωρία μποροῦσε νὰ λειτουργήσει ὡς ἐπέκταση τῆς προηγούμενης, ἀφοῦ τὴν κατασκεύαζε ὅλη στὰ πλαίσιά της καὶ ταυτόχρονα μποροῦσε νὰ κατασκευάσει ἕνα πλῆθος τῶν συνήθων μαθηματικῶν ἀντικειμένων. Ἔτσι, ἱκανοποιοῦνταν οἱ στόχοι τόσο τοῦ φορμαλισμοῦ ὅσο καὶ τοῦ λογικισμοῦ. Ἰδιαίτερα, οἱ Bertrand Russell καὶ David Hilbert ἔδειξαν μεγάλη ὑποστήριξη στὴ νέα θεωρία.

Δυστυχῶς, ἡ καντοριανὴ Θεωρία Συνόλων ἔχασε στὸν τομέα τῆς αὐτοθεμελίωσής της. Τρία σημαντικὰ παράδοξα, κατὰ τὴν ἀλλαγὴ τοῦ αἰῶνα ἀπέδειξαν τὴν ἀσυνέπειά της καὶ τὴν κατέστησαν ἀκατάλληλη γιὰ νὰ ἀποτελέσει βάση τῶν Μαθηματικῶν. Ἐξαιτίας τῶν παραδόξων, δόθηκε στὴν καντοριανὴ Θεωρία Συνόλων ὁ υποτιμητικὸς (καὶ μᾶλλον ἄδικος) χαρακτηρισμὸς τῆς *ἀφελοῦς* Θεωρίας Συνόλων.

Ὅμως, τὰ ἐπιτεύγματα τοῦ Cantor, καὶ τῶν ἄλλων ἀνθρώπων ποὺ ἀσχολήθηκαν ἦταν σημαντικὰ γιὰ νὰ χαθοῦν. Ἔτσι, ἡ μαθηματικὴ κοινότητα ἐπαναδραστηριοποιήθηκε γιὰ νὰ ἐπαναθεμελιώσει ἐξαρχῆς τὴ Θ. Συνόλων. Ἦταν φανερὸ ὅτι τὸ πρόβλημα ὀφείλετο στὸ ἀξίωμα-σχῆμα *πλήρους συλλεκτικότητας*, ποὺ κατασκευάζει σύνολων ἀπὸ ἰδιότητες (ἢ *συλλεκτικὴ ἀρχὴ*) τοῦ Cantor: Γιὰ κάθε τύπο $\phi(x)$ τῆς πρωτοβάθμιας γλώσσας τῶν συνόλων, ὁρίζεται τὸ σύνολο $\{x \mid \phi(x)\}$ ὅλων τῶν ἀντικειμένων ποὺ τὴν ἱκανοποιοῦν. Μὲ ἄλλα λόγια, *ἡ ἔκταση (extention) κάθε τύπου εἶναι σύνολο.* Ἡ βασικὴ ἰδέα γιὰ τὴν ἐπαναθεμελίωση, λοιπόν, συνίστατο στὴν ἀντικατάσταση τῆς συλλεκτικῆς ἀρχῆς ἀπὸ ἄλλες, ἀσθενέστερες, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἀρκετὰ ἀσθενεῖς ὥστε νὰ μὴν ὁδηγοῦν σὲ ἀντιφάσεις, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἀρκετὰ ἰσχυρὲς ὥστε νὰ ἐπιτρέπουν τὴ διατήρηση ἑνὸς μεγάλου μέρους τῆς ὑπάρχουσας θεωρίας.

Οἱ κατευθύνσεις γιὰ τὴν ὑλοποίηση αὐτῆς τῆς ἰδέας ἦταν δύο:

1. Ὁ περιορισμὸς τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συλλεκτικῆς ἀρχῆς σὲ συγκεκριμένους πρωτοβάθμιους τύπους, κατάλληλα ἐπιλεγμένους ὥστε νὰ μὴν δημιουργοῦν πρόβλημα. Ἡ ἰδέα ξεκίνησε ἀπὸ τὸν ἴδιο τὸν Russell, ὁ ὁποῖος πρότεινε ἕνα σύστημα ἐπιλογῆς τῶν τύπων (formulae) μέσω τῆς ἀπονομῆς βαθμίδων (ἢ τύπων (types)) στὰ σύνολα.

2. Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς συλλεκτικῆς ἀρχῆς γιὰ ὅλους τοὺς τύπους, πρὸς κατασκευὴ ὅμως ὑποσυνόλων ἤδη γνωστῶν συνόλων. Ἄλλα σύνολα, ποὺ χρειάζονται στὴ θεωρία ἀλλὰ δὲν μποροῦν νὰ κατασκευασθοῦν μὲ τὸν παραπάνω τρόπο, ὅπως λ.χ. τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἰσάγονται μὲ εἰδικὰ ἀξιώματα.

Ἡ δεύτερη κατεύθυνση ὑλοποιήθηκε ἐξαιρετικὰ κυρίως ἀπὸ τὸν Zermelo καὶ τὸν Von Neummann καὶ ὁδήγησε στὴ θεωρία ZF, τὴ δημοφιλέστερη αὐτὴ τὴ στιγμὴ Θεωρία Συνόλων. Ἄλλες ὑλοποιήσεις εἶναι οἱ KM, NGB κ.ἄ.

Στὴν πρώτη κατεύθυνση, ἡ θεωρία ἁπλῶν τύπων τοῦ Russell ἀποδείχθηκε ἕνα πολὺ δύσκαμπτο σύστημα, ποὺ δὲν εἵλκυσε τὴ μαθηματικὴ κοινότητα. Τὸ 1937, ὁ Quine ([11]) πρότεινε ἕνα νέο σύστημα, τὴν NF (New Foundations), βασισμένο σὲ αὐτὸ τοῦ Russell, ποὺ ὑλοποιεῖ τὴν πρώτη κατεύθυνση μὲ ἀρκετὰ ἁπλὸ τρόπο. Ἡ NF ἔχει ἁπλῆ ἀξιωματικὴ διατύπωση, καθὼς περιέχει ἕνα ἀξίωμα καὶ ἕνα ἀξίωμα-σχῆμα, ποὺ ὅμως μπορεῖ νὰ ἀναχθεῖ σὲ πεπερασμένου πλήθους ἀξιώματα. Μέσα σ' αὐτὴ τὴ θεωρία κατασκευάζονται μὲ μεγάλη ἄνεση ὅλα σχεδὸν τὰ συνήθη μαθηματικὰ ἀντικείμενα.

Στὰ ἀρνητικά της συγκαταλέγονται ἡ ἀνταπόδειξη τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς ἀπὸ τὸν Specker [8], τὸ 1953. Τὸ πρόβλημα τῆς συνέπειας εἶναι ἀνοικτό, καθὼς η συνέπεια τῆς NF δὲν εἶναι τόσο προφανὴς διαισθητικὰ ὅσο τῆς ZFC. Εἶναι ὅμως δυνατὴ ἡ ἀναγωγὴ τῆς συνέπειας τῆς NF στὴ συνέπεια ἄλλων θεωριῶν, ἐνδεχομένως ἁπλούστερων ὡς πρὸς τὴ μελέτη τῆς συνέπειας. Ἐπίσης, ἐνῶ περιέχει τὰ λεγόμενα μεγάλα σύνολα ποὺ δὲν περιέχει ἡ ZFC, αδυνατεῖ νὰ περιλάβει ἁπλᾶ μικρὰ σύνολα, ὅπως τὴ συνάρτηση $\iota : x \mapsto \{x\}$.

Σ' αὐτὴ τὴν ἐργασία θὰ ἀσχοληθοῦμε μὲ τὴν NF. Στὸ πρῶτο κεφάλαιο θὰ κάνουμε μιὰ σχετικὰ σύντομη περιήγηση στὸν κόσμο τῆς θεωρίας. Θὰ ξεκινήσουμε μὲ μιὰ μικρὴ ἀναφορὰ στὴ θεωρία ἁπλῶν τύπων (TST), γιὰ να δοῦμε τὶς δυνατότητες καὶ τοὺς περιορισμούς της. Στὴ συνέχεια, θὰ εἰσάγουμε τὰ ἀξιώματα τῆς NF, τόσο σὲ σχέση ὅσο καὶ ἀνεξάρτητα μὲ τὴν TST. Θὰ κατασκευάσουμε τὶς ἀπαραίτητες συνολοθεωρητικὲς πράξεις (ἕνωση, τομή, δυναμοσύνολο κλπ)· θὰ κατασκευάσουμε διατεταγμένα ζεύγη καὶ n-άδες, σχέσεις, συναρτήσεις, φυσικοὺς ἀριθμούς, πληθαρίθμους καὶ διατακτικούς. Θὰ κλείσουμε τὸ κεφάλαιο παρουσιάζοντας τὴν ἀπόδειξη τῆς ἄρνησης τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς καὶ τῆς ὕπαρξης ἀπείρων συνόλων (τόσο σὲ σχέση μὲ την ἄρνηση τοῦ ἀξῴματος ἐπιλογῆς ὅσο καὶ ἀνεξάρτητα).

Στὸ δεύτερο κεφάλαιο, θὰ ἀσχοληθοῦμε μὲ τὸ πρόβλημα τῆς συνέπειας, καὶ συγκεκριμένα μὲ δύο πλευρές του: Πρῶτα θὰ δοῦμε τὴν ἀναγωγὴ τῆς συνέπειας τῆς NF στὴ συνέπεια τῆς TST+(Amb) καὶ στὴ συνέχεια θὰ μελετήσουμε τὴ συνέπεια ἑνὸς τμήματος τῆς NF, τῆς θεωρίας NF_3. Θὰ κλείσουμε τὴν ἐργασία δείχνοντας ὅτι οἱ θεωρίες NF καὶ NF_4 εἶναι ἰσοδύναμες.

Σὲ ὅτι ἀφορᾶ στὴν ὁρολογία, θεωρῶντας ὅτι ὅλοι ἀνεξαιρέτως οἱ ἀγγλόφωνοι ὅροι πρέπει νὰ ἀποδίδονται στὴν ἑλληνικὴ γλῶσσα, σὲ κάποια σημεῖα χρειάστηκε νὰ βροῦμε δικές μας ἀποδόσεις, χάνοντας ἀναγκαστικὰ σὲ κομψότητα, ἀλλὰ ἐπιτυγχάνοντας τὸ σκοπὸ τοῦ ἐξ ὁλοκλήρου ἑλληνικοῦ κειμένου.

Εὐχαριστίες Κλείνοντας τὴν εἰσαγωγή, θὰ ἤθελα νὰ εὐχαριστήσω ὅσους καὶ ὅσες μὲ βοήθησαν νὰ πατήσω στὸ δρόμο τῶν Μαθηματικῶν καὶ νὰ μείνω ἐκεῖ. Τοὺς σχολικοὺς καὶ φροντιστηριακούς μου καθηγητές, Μ. Κωνσταντινίδη, Γ(†) καὶ Δ. Παπάνα.

Τοὺς/τὶς διδάσκοντές/ουσές μου στὸ Τμῆμα Μαθηματικῶν Α.Π.Θ. καὶ εἰδικότερα στὴν ἐπικ.καθ. Κ. Κάλφα γιὰ ὅσα μοῦ δίδαξε, στὴ Θ. Συνόλων καὶ ὄχι μόνο· στὴ λεκτ. Μ. Παντέκη, γιὰ τὴν ἀμφισβήτηση καὶ τὴν κριτικὴ σκέψη· στὸν καθ. Αθ. Τζουβάρα ποὺ, ἐνῶ μαζί του παρακολούθησα μόνο μισὸ μάθημα, μοῦ ἔδωσε τὴν εὐκαιρία νὰ κάνω αὐτὴ τὴν ἐργασία σὲ ἕνα θέμα πραγματικὰ ἐνδιαφέρον.

Τοὺς/τὶς διδάσκοντές/ουσές μου στὸ Μ.Π.Λ.Α., γιὰ τὴν ἀρτιότητα τῆς διδασκαλίας τους, γιὰ τὴν κατανόηση καὶ τὸ προσωπικὸ ἐνδιαφέρον ποὺ ἔδειξαν στὴν ἀντιμετώπιση ἑνὸς πολὺ σοβαροῦ προσωπικοῦ ζητήματος καὶ εἰδικότερα στὸν Γ. Σταυρινό, ἄνθρωπο μὲ ἐμφανῆ ἀγάπη στὰ Μαθηματικά, καὶ στὸν ἕτερο συνεπιβλέποντά μου καὶ πρόεδρο τοῦ προγράμματος, καθ. Κ. Δημητρακόπουλο.

Τέλος, θὰ ἤθελα νὰ εὐχαριστήσω τὸ Ἵδρυμα Κρατικῶν Ὑποτροφιῶν γιὰ τὴν οἰκονομικὴ ἐνίσχυση ποὺ μοῦ παρεῖχε κατὰ τὸ πρῶτο ἔτος τῶν σπουδῶν μου.

Νῖκος Θεοδώρου
Θεσσαλονίκη, Ἰούνιος 2007

Κεφάλαιο 1

Ὁ κόσμος τῆς NF

Στὸ κεφάλαιο αὐτὸ ἀσχολούμαστε μὲ τὶς θεωρίες NF (New Foundations) καὶ TST (Theory of Simple Types). Ὡς μεταθεωρία (δηλαδὴ ὡς «πραγματικὸ κόσμο») θὰ χρησιμοποιήσουμε τὴ συνήθη θεωρία συνόλων ZFC, μὲ σχέση τοῦ ἀνήκειν τὴν $\in$. Κάθε φορὰ ἡ λέξη σύνολο θὰ γίνεται σαφές, εἴτε ἀπὸ τὰ συμφραζόμενα εἴτε ρητά, ἂν ἀναφέρεται στὴν NF, στὴν TST ἢ στὴν ZFC.

1.1 Θεωρία ἁπλῶν τύπων (TST)

Ἡ γλῶσσα $\mathcal{L}_{TST}$ τῆς TST ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ἑξῆς μὴ λογικὰ σύμβολα:

- Βαθμωτὲς (typed) μεταβλητές: $x_0^0, x_1^0, \ldots, x_0^1, x_1^1, \ldots$ · καὶ
- τὸ διμελὲς κατηγορηματικὸ σύμβολο ε.

Γιὰ τὶς βαθμωτὲς μεταβλητὲς θὰ λέμε ὅτι ἡ μεταβλητὴ x_i^n εἶναι ἡ i-οστὴ μεταβλητὴ *βαθμίδας* n.

Ὅσον ἀφορᾶ στὰ λογικὰ σύμβολα τῆς γλώσσας, αὐτὰ εἶναι τὰ συνήθη, ὅπως ἀναφέρονται π.χ. στὰ [9], [1]. Κάνουμε διάκριση μεταξὺ τῶν λογικῶν συμβόλων τῆς γλώσσας (TST, NF) καὶ τῆς μεταγλώσσας (ZFC), ὅπως φαίνεται στὸν πίνακα:

Περιγραφὴ	Γλῶσσα	Μεταγλῶσσα
Καὶ	$\wedge$	καὶ
Ἢ	$\vee$	ἢ
Συνεπαγωγὴ	$\rightarrow$	$\Rightarrow$
Ἰσοδυναμία	$\leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
Ἀνήκειν	ε	$\in$
Γιὰ κάθε x ἰσχύει $\phi(x)$	$(\forall x)\phi(x)$	γιὰ κάθε x, $\phi(x)$
Ὑπάρχει x ὥστε $\phi(x)$	$(\exists x)\phi(x)$	ὑπάρχει x τ.ω. $\phi(x)$

Γιὰ τὴν ἰσότητα θὰ χρησιμοποιοῦμε τὸ ἴδιο σύμβολο στὴ γλῶσσα καὶ στὴ μεταγλῶσσα (=).

Ορισμος 1.1.1. Τὸ σύνολο $F(\mathcal{L}_{TST})$ τῶν τύπων τῆς TST ὁρίζεται ἀναδρομικὰ ὡς ἑξῆς: Ἀτομικοὶ τύποι:

- $x_i^n \varepsilon x_j^{n+1}$, γιὰ μεταβλητὲς x_i^n, x_j^{n+1}.
- $x_i^n = x_j^n$, γιὰ μεταβλητὲς x_i^n, x_j^n.

Μὴ ἀτομικοὶ τύποι: Ἂν ϕ, χ εἶναι τύποι, τότε τύποι εἶναι καὶ οἱ $\neg\phi$, $\phi \wedge \chi$, $\phi \vee \chi$, $\phi \to \chi$, $\phi \leftrightarrow \chi$, $\forall x \phi(x)$, $\exists x \phi(x)$.

Γιὰ παράδειγμα, ἡ ἔκφραση

$$\phi(x^{n+1}, y^{n+1}, z^n): \; x^{n+1} = y^{n+1} \leftrightarrow (z^n \varepsilon x^{n+1} \to z^n \varepsilon y^{n+1})$$

εἶναι τύπος, ἐνῶ ἡ

$$\psi(x^n): \; x^n \varepsilon x^n$$

δὲν εἶναι.

Ὁρίζουμε τώρα τὰ ἀξιώματα τῆς TST.

Ορισμος 1.1.2 (Ἀξιώματα τῆς TST)**.** Ἀξίωμα τῆς ἔκτασης, (Extensionality):

$$\forall z^n [z^n \varepsilon x^{n+1} \leftrightarrow z^n \varepsilon y^{n+1}] \to x^{n+1} = y^{n+1} \tag{Ext}$$

Ἀξίωμα-σχῆμα συλλεκτικότητας (Comprehension):

$$\exists y^{n+1} \forall x^n [x^n \varepsilon y^{n+1} \leftrightarrow \phi(x^n)], \tag{Co}$$

γιὰ ὅλα $n \in \mathbb{N}$, $\phi(x^n) \in F(\mathcal{L}_{TST})$.

Παράδειγμα: Θεωροῦμε τὸν τύπο $\phi(x^n): \; x^n \neq x^n$, γιὰ κάθε n. Ἀπὸ τὸ (Co) ὑπάρχει τὸ σύνολο $\{x^n \mid x^n \neq x^n\}$ καὶ ἀπὸ τὸ (Ext) εἶναι μοναδικό. Τὸ σύνολο αὐτὸ ὀνομάζουμε *κενὸ σύνολο*[1] «τάξης» n:

$$\emptyset_n = \{x^n \mid x^n \neq x^n\}.$$

[1] Πολλὲς φορὲς στὴ βιβλιογραφία γιὰ τὸ κενὸ σύνολο χρησιμοποιεῖται τὸ σύμβολο Λ, ὡς «παραδοσιακὸς» συμβολισμὸς τῆς NF καὶ τῶν συναφῶν θεωριῶν. Σ' αὐτὴ τὴν ἐργασία προτιμήσαμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τοὺς συμβολισμοὺς ποὺ εἶναι πὶο οἰκεῖοι στοὺς/στὶς ἀναγνῶστες/τριές μας.

Παράδειγμα: Θεωροῦμε τὸν τύπο $\phi(x^n) : x^n = x^n$, γιὰ κάθε n. Ἀπὸ τὸ (Co) ὑπάρχει τὸ σύνολο $\{x^n \mid x^n = x^n\}$ καὶ ἀπὸ τὸ (Ext) εἶναι μοναδικό. Τὸ σύνολο αὐτὸ εἶναι τὸ σύνολο ὅλων τῶν συνόλων «τάξης» n καὶ τὸ ὀνομάζουμε *σύμπαν*:

$$V_n = \{x^n \mid x^n = x^n\}.$$

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι κατασκευάζεται ἕνα κενὸ σύνολο καὶ ἕνα σύμπαν γιὰ κάθε φυσικὸ ἀριθμό. Γενικότερα, στὴν TST κατασκευάζονται ὅμοια «στρώματα» συνόλων, γιὰ κάθε φυσικὸ ἀριθμό, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν «ἐπικοινωνία» μεταξύ τους.

Αὐτὸ καὶ μόνο τὸ γεγονὸς κάνει τὴ θεωρία ἁπλῶν τύπων δύσχρηστη.

1.2 Ἀξιώματα τῆς NF καὶ βασικὰ σύνολα

Ἡ γλῶσσα $\mathcal{L}_{NF}$ τῆς θεωρίας NF (New Foundations) ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ συνήθη λογικὰ σύμβολα (βλ. προηγούμενη ἑνότητα) καὶ τὰ ἑξῆς μὴ λογικά:

- Μεταβλητές: $x_0, x_1, \ldots$ ἢ $x, y, z, \ldots$ ·
- διμελὲς κατηγορηματικὸ σύμβολο ε.

Τὸ ZFC-σύνολο τῶν τύπων ὁρίζεται ὅμοια:

Ορισμος 1.2.1. Τὸ σύνολο $F(\mathcal{L}_{NF})$ τῶν τύπων τῆς NF ὁρίζεται ἀναδρομικὰ ὡς ἑξῆς: Ἀτομικοὶ τύποι:

- $x \varepsilon y$, γιὰ μεταβλητὲς x, y.
- $x = y$, γιὰ μεταβλητὲς x, y.

Μὴ ἀτομικοὶ τύποι: Ἂν ϕ, χ εἶναι τύποι, τότε τύποι εἶναι καὶ οἱ $\neg\phi$, $\phi \wedge \chi$, $\phi \vee \chi$, $\phi \rightarrow \chi$, $\phi \leftrightarrow \chi$, $\forall x \phi(x)$, $\exists x \phi(x)$.

Λημμα 1.2.2. *Γιὰ τυχαῖο τύπο $\phi \in F(\mathcal{L}_{NF})$, τὰ ἑξῆς εἶναι ἰσοδύναμα:*

α) Ὑπάρχει τύπος $\psi \in F(\mathcal{L}_{TST})$ τ.ω. ὁ ϕ νὰ προκύπτει ἀπὸ τὸν ψ, διαγράφοντας τοὺς ἐκθέτες.

β) Ὑπάρχει ἀπεικόνιση f τῶν μεταβλητῶν τῆς TST ποὺ ἐμφανίζονται στὸν ϕ στοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, τ.ω.

- *γιὰ κάθε ὑπότυπο $x \varepsilon y$ τοῦ ϕ νὰ ἰσχύει $f(y) = f(x) + 1$ καὶ*
- *γιὰ κάθε ὑπότυπο $x = y$ τοῦ ϕ νὰ ἰσχύει $f(y) = f(x)$.*

Ορισμος 1.2.3. Ἕνας τύπος ϕ τῆς NF γιὰ τὸν ὁποῖον ἰσχύει μία ἀπὸ τὶς ἰσοδύναμες σχέσεις τοῦ λήμματος 1.2.2 ὀνομάζεται *διαστρωματωμένος* ἢ *στρωματοποιημένος (stratified)* καὶ ἡ ἀπεικόνιση f *διαστρωμάτωση (stratification)*.

Εἴμαστε τώρα σὲ θέση νὰ παρουσιάσουμε τὰ ἀξιώματα:

Ορισμος 1.2.4 (Ἀξιώματα τῆς NF)**.** Ἀξίωμα τῆς ἔκτασης,(Extensionality):

$$\forall z[z\varepsilon x \leftrightarrow z\varepsilon y] \rightarrow x = y \tag{Ext}$$

Ἀξίωμα-σχῆμα διαστρωματωμένης συλλεκτικότητας ((Stratified Comprehension):

$$\exists y \forall x[x\varepsilon y \leftrightarrow \phi(x)], \tag{StrCo}$$

γιὰ κάθε διαστρωματωμένο τύπο $\phi(x)$.

Παράδειγμα: Θεωροῦμε τὸν τύπο $\phi(x) :\ x \neq x$. Εἶναι προφανῶς διαστρωματωμένος, ἄρα ἀπὸ τὸ (StrCo) ὑπάρχει τὸ σύνολο $\{x \mid x \neq x\}$ καὶ ἀπὸ τὸ (Ext) εἶναι μοναδικό. Τὸ σύνολο αὐτὸ ὀνομάζουμε *κενὸ σύνολο*:

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}.$$

Παράδειγμα: Θεωροῦμε τὸν τύπο $\phi(x) :\ x = x$. Εἶναι προφανῶς διαστρωματωμένος, ἄρα ἀπὸ τὸ (StrCo) ὑπάρχει τὸ σύνολο $\{x \mid x = x\}$ καὶ ἀπὸ τὸ (Ext) εἶναι μοναδικό. Τὸ σύνολο αὐτὸ εἶναι τὸ σύνολο ὅλων τῶν συνόλων καὶ τὸ ὀνομάζουμε *σύμπαν* τῆς NF:

$$V = \{x \mid x = x\}.$$

Προφανῶς τὸ V εἶναι διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ σύμπαν τῆς ZFC.

Ἡ πρώτη παρατήρηση εἶναι ὅτι κατασκευάσαμε στὴν NF δύο σύνολα, τὰ ἀντίστοιχα τῶν ὁποίων στὴν TST ὑπῆρχαν, ἀλλὰ ἦταν διαφορετικὰ γιὰ κάθε φυσικὸ ἀριθμό. Ἄρα, μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε στὸ μυαλό μας τὴ διαισθητικὴ σκέψη ὅτι στὴν NF μποροῦμε νὰ ἔχουμε «ἑνώσεις» σύνολα τῆς TST, διαφορετικῆς τάξεως.

Παρατηροῦμε ὅμως καὶ κάτι πιὸ σημαντικό: Ὅτι στὴν NF ὑπάρχει τὸ σύμπαν, δηλαδὴ τὸ σύνολο ὅλων τῶν συνόλων. Ὅπως θὰ δοῦμε ἀργότερα, ἡ NF περιέχει ὅλα τὰ λεγόμενα «μεγάλα σύνολα», δηλαδὴ τὸ σύνολο τῶν διατακτικῶν ἀριθμῶν, τῶν πληθαρίθμων κλπ καὶ ὑπ' αὐτὴ τὴν ἔννοια φαίνεται πιὸ ἀποδεκτὴ διαισθητικὰ σὲ σχέση μὲ τὴ συνήθη ZF, ποὺ ἀπορρίπτει ὅλα τὰ μεγάλα σύνολα.

Βεβαίως, ἀνακύπτει ἀμέσως τὸ ἐρώτημα ἂν ἐμφανίζεται τὸ παράδοξο τοῦ Russell, ποὺ στὴν ZF ἄρθηκε ἀκριβῶς λόγω τῆς μὴ ἀποδοχῆς τοῦ σύμπαντος ὡς συνόλου. Ἡ ἀπάντηση εἶναι ἀρνητική, καὶ ἀξίζει νὰ ἀφιερώσουμε λίγες γραμμὲς γιὰ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι ὁ τύπος $\rho(x) = x \not\varepsilon x$ ποὺ δημιουργεῖ τὴν κλάση $R = \{x \mid x \not\varepsilon x\}$ δὲν εἶναι διαστρωματωμένος, ἑπομένως δὲν μπορεῖ νὰ ἐφαρμοστεῖ τὸ ἀξίωμα-σχῆμα διαστρωματωμένης συλλεκτικότητας γιὰ νὰ καταστήσει τὴν κλάση R σύνολο τῆς NF. [2].

Ἡ ἑπόμενη πρόταση μᾶς προσφέρει μιὰ πληθώρα συνόλων ποὺ κατασκευάζονται ἀπὸ ἄλλα.

Προταση 1.2.5. *Ἂν τὸ z εἶναι σύνολο, τότε καὶ οἱ ἑξῆς κλάσεις εἶναι σύνολα:*

- $\cup z = \{x \mid (\exists y \varepsilon z)[x \varepsilon y]\}$
- $\cap z = \{x \mid (\forall y \varepsilon z)[x \varepsilon y]\}$
- $\mathcal{P}(z) = \{x \mid x \subseteq z\}$
- $\mathcal{P}_1(z) = \{\{x\} \mid x \varepsilon z\}$
- $\mathcal{F}(z) = \{x \mid x \supseteq z\}$
- $\iota(z) = \{z\}$
- $-z = \{x \mid x \not\varepsilon z\}$
- $z - w = z \cap (-w)$

ὅπου ἡ σχέση τοῦ ὑποσυνόλου ὁρίζεται ὅπως συνήθως,

$$x \subseteq z \leftrightarrow \forall y[y \varepsilon x \rightarrow y \varepsilon z].$$

Ἀπόδειξη. Γιὰ τὴν ἕνωση καὶ τὴν τομὴ ἀρκεῖ νὰ θεωρήσουμε τὴ διαστρωμάτωση $x \mapsto 1, y \mapsto 2, z \mapsto 3$. Γιὰ τὰ σύνολα ὑποσυνόλων (δυναμοσύνολο) καὶ ὑπερσυνόλων θεωρῶ τὴν $x, z \mapsto 2$, $y \mapsto 1$. Γιὰ τὸ σύνολο τῶν μονομελῶν ὑποσυνόλων θεωροῦμε τὴν $x \mapsto 1, z \mapsto 2$. Γιὰ τὸ μονοσύνολο ὁποιαδήποτε συνάρτηση $a \mapsto n$ εἶναι διαστρωμάτωση. Τέλος, γιὰ τὸ συμπλήρωμα θεωροῦμε $x \mapsto 1$, $z \mapsto 2$. □

[2] Ἀξίζει ἀκόμη νὰ κάνουμε μιὰ παρατήρηση γιὰ τὴ λειτουργία τοῦ ἀξιώματος-σχήματος διαστρωματωμένης συλλεκτικότητας. Λέει ὅτι ἂν ἕνας τύπος εἶναι διαστρωματωμένος, τότε ἡ ἔκτασή του εἶναι σύνολο. Γιὰ τὸ ἀντίστροφο, τὸ ἀξίωμα δὲν λέει τίποτε. Ἔτσι, ἂν ὁ τύπος δὲν εἶναι διαστρωματωμένος δὲν ἔχουμε ἀπολύτως καμιὰ πληροφορορία γιὰ τὸ ἂν ἡ ἔκτασή του εἶναι σύνολο ἢ ὄχι· μπορεῖ νὰ εἶναι, μπορεῖ νὰ μὴν εἶναι. Αὐτὸ θὰ γίνει ἰδιαίτερα κατανοητὸ ὅταν μιλήσουμε γιὰ τοὺς γνήσιους τελεστὲς ι καὶ T καὶ γιὰ τὰ καντοριανὰ σύνολα. Στὴν περίπτωση τῆς κλάσεως R πάντως, ἐπειδὴ ὁ τύπος ποὺ τὴν δημιουργεῖ δὲν εἶναι διαστρωματωμένος, δὲν ἔχουμε κανένα λόγο νὰ ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι σύνολο.

1.3 Οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ

Στὶς ἑπόμενες ἑνότητες ϑὰ ἀσχοληϑοῦμε μὲ τὴν κατασκευὴ τῶν βασικῶν συνολοϑεωρητικῶν μαϑηματικῶν ἀντικειμένων, μέσα στὴν NF. Ἐργαλεῖα μας ϑὰ εἶναι τὰ [2] καὶ [4].

Ξεκινᾶμε μὲ τοὺς φυσικοὺς ἀριϑμούς:

Ορισμος 1.3.1. Γιὰ κάϑε σύνολο x, ὁρίζουμε τὰ σύνολα

$$S(x) = \{y \cup \{w\} \mid y \varepsilon x \ \wedge \ w \not\varepsilon y\}$$

καὶ

$$S''y = \{S(x) \mid x \varepsilon y\}.$$

Οἱ τύποι ποὺ ὁρίζουν τὰ παραπάνω σύνολα εἶναι προφανῶς διαστρωματωμένοι.

Τὸ $S(x)$ λέγεται *ἑπόμενος* τοῦ x. Θὰ χρησιμοποιήσουμε αὐτὸ τὸ σύνολο γιὰ νὰ ὁρίσουμε τοὺς φυσικοὺς ἀριϑμούς.

Ορισμος 1.3.2 (Ἀριϑμοὶ Russell-Whitehead)**.** Ὁρίζουμε $0 = \{\emptyset\}$, $1 = S(0)$, $2 = S(1)$ κ.ο.κ.

Πρὶν προχωρήσουμε παρακάτω, ἂς δοῦμε λίγο πῶς λειτουργοῦν αὐτοὶ οἱ ἀριϑμοί:

$$\begin{aligned}
0 &= \{\emptyset\}. \\
1 = S(0) &= \{a \cup \{w\} \mid a \varepsilon 0 \ \wedge \ w \not\varepsilon a\} = \\
&= \{\emptyset \cup \{w\} \mid w \not\varepsilon \emptyset\} = \\
&= \{\{w\} \mid w \varepsilon V\} = \\
&= \mathcal{P}_1(V). \\
2 = S(1) &= \{a \cup \{w\} \mid a \varepsilon 1 \ \wedge \ w \not\varepsilon a\} = \\
&= \{\{x\} \cup \{w\} \mid w \neq x\} = \\
&= \{\{x, w\} \mid x \neq w\}.
\end{aligned}$$

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι, διαισϑητικά, ὁ n-οστὸς φυσικὸς ἀριϑμὸς εἶναι ἀκριβῶς τὸ σύνολο ὅλων τῶν συνόλων μὲ n διακεκριμένα στοιχεῖα.

Πρόκειται γιὰ ἕναν πολὺ οἰκεῖο καὶ διαισϑητικὰ προφανῆ ὁρισμό, καὶ ἐπιπλέον ἱστορικὰ πολὺ παλαιότερο τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ Von Neummann ποὺ συνηϑίζεται στὴν ZF. Ὁ τελευταῖος ἄλλωστε δὲν ϑὰ μποροῦσε νὰ χρησιμοποιηϑεῖ ἐδῶ, γιατὶ κάνει χρήση τῆς συνάρτησης ι ποὺ στὸ σύστημά μας δὲν ὁρίζεται. Περισσότερα γι' αὐτὸ ϑὰ δοῦμε ἀργότερα.

Εὔκολα δικαιώνεται ὁ παρακάτω ὁρισμός.

Ορισμος 1.3.3. Ἕνα σύνολο x λέγεται *ἐπαγωγικὸ (inductive)*, ἂνν $0 \varepsilon x$ καὶ $S''x \subseteq x$. Ἡ κλάση

$$\mathrm{Ind} = \{x \mid 0 \varepsilon x \ \wedge \ S''x \subseteq x\}$$

τῶν ἐπαγωγικῶν συνόλων εἶναι σύνολο.

Τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ὡς ἡ τομὴ τοῦ συνόλου τῶν ἐπαγωγικῶν συνόλων. Δηλαδὴ

$$\mathrm{N} = \bigcap \{x \mid 0 \varepsilon x \ \wedge \ S''x \subseteq x\}.$$

Ορισμος 1.3.4. Τὸ σύνολο x θὰ λέγεται ὅτι ἔχει n στοιχεῖα, ἂνν $x \varepsilon n$.

Τὸ σύνολο x λέγεται *πεπερασμένο*, ἂνν ὑπάρχει $n \varepsilon \mathrm{N}$ τ.ω. $x \varepsilon n$. Ἑπομένως, τὸ σύνολο τῶν πεπερασμένων συνόλων ὁρίζεται ὡς τὸ

$$\mathrm{Fin} = \cup \mathrm{N}.$$

Θεωρημα 1.3.5 (Ἀρχὴ ἐπαγωγῆς)**.** *Ἔστω $X \subseteq \mathrm{N}$ τ.ω.*

$$0 \varepsilon X \ \wedge \ \forall x [x \varepsilon X \to S(x) \varepsilon X].$$

Τότε $X = \mathrm{N}$.

Ἀπόδειξη. Προφανῶς,

$$[x \varepsilon X \to S(x) \varepsilon X] \leftrightarrow S''x \subseteq x.$$

Ἑπομένως, ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ ἐπαγωγικοῦ συνόλου, ἕπεται ὅτι ἂν X εἶναι ἕνα σύνολο μὲ τὴν ἰδιότητα τῆς ἐκφώνησης, αὐτὸ εἶναι ἐπαγωγικό. Ὅμως, τὸ N εἶναι τὸ ἐλάχιστο ἐπαγωγικὸ σύνολο, ἄρα $\mathrm{N} \subseteq X$. □

Λημμα 1.3.6. *Γιὰ κάθε x, $S(x) \neq 0$.*

Ἀπόδειξη. Ἔστω, πρὸς ἄτοπο, ὅτι ὑπάρχει x τ.ω. $\emptyset \varepsilon S(x)$. Τότε ὑπάρχουν $a \varepsilon x$ καὶ $z \not\varepsilon a$ τ.ω. $\emptyset = a \cup \{z\}$. □

Λημμα 1.3.7. *Γιὰ ὅλα $m, n \varepsilon \mathrm{N}$, $S(m) = S(n) \to m = n$.*

Ἀπόδειξη. Θὰ δείξουμε μὲ ἐπαγωγὴ στὸ $m \varepsilon \mathrm{N}$ ὅτι

$$(\forall n \varepsilon \mathrm{N})[S(m) = S(m) \to m = n].$$

Βάση: Ἔστω $S(n) = S(0)$. Τότε $S(n) = 1$. Εὔκολα ἀποδεικνύουμε ὅτι $n = \{\emptyset\}$. Πράγματι, ἂν $t \varepsilon n$, τότε ὑπάρχει $s \not\varepsilon t$ τ.ω. $t \cup \{s\} \varepsilon 1$, ἄρα $t \cup \{s\}$ μονοσύνολο. Ἄρα, $t = \emptyset$.

Ἐπαγ. βῆμα: Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ ζητούμενη σχέση ἰσχύει γιὰ m καὶ θὰ τὴ δείξουμε γιὰ $S(m)$. Ἔστω λοιπὸν $SS(m) = S(n)$, γιὰ τυχαῖο n. Ἂν $n = 0$ τότε $S(n) = 1 \neq SS(m)$. Ἄρα, $n \neq 0$ ὁπότε (εὔκολα) $n = S(k)$ γιὰ κάποιο

$k\varepsilon \mathrm{N}$. Ἑπομένως, $SS(m) = SS(k)$. Γιὰ νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν Ε.Υ., ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι $S(m) = S(k)$.

Ἀπὸ τὴν ὑπόθεση ἔχουμε ὅτι

$$a \cup \{x\} \cup \{x'\} = b \cup \{y\} \cup \{y'\} \qquad (\star)$$

γιὰ ὅλα $a\varepsilon m, x, x' \notin a, x \neq x'$ καὶ γιὰ ὅλα $b\varepsilon n, y, y' \notin b, y \neq y'$.

Στὴν περίπτωση ποὺ $a = b$ ἕπεται εὔκολα ὅτι $a \cup \{x''\} = b \cup \{y''\}$ γιὰ κατάλληλα x'', y'' ὁπότε ἕπεται ἡ ζητούμενη.

Ὑποθέτουμε ὅτι $a \neq b$. Ἀφοῦ τὰ a, b εἶναι πεπερασμένα, προφανῶς ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σύνολο z ποὺ δὲν ἀνήκει σὲ κανένα ἀπὸ τὰ a, b. Ἂν ἰσχύει μία ἀπὸ τὶς ἰσότητες $x = y, x' = y, x = y', x' = y'$ τότε θέτω z τὰ ἴσα σύνολα, ξαναγράφω τὴν $(\star)$ καὶ ἀπαλοίφω τὸν κοινὸ ὅρο $\{z\}$. Ἕπεται ὅτι $a \cup \{x''\} = b \cup \{y''\}$ γιὰ κατάλληλα x'', y'' καὶ ἀπὸ αὐτὴν ἡ ζητούμενη.

Ἀλλιῶς, ἔχουμε ὅτι $z \notin a \cup \{x'\}$ ἄρα $a \cup \{x'\} \cup \{z\} \varepsilon SS(m)$ καὶ ἀντίστοιχα $z \notin b \cup \{y'\}$ ἄρα $b \cup \{y'\} \cup \{z\} \varepsilon SS(k)$. Ἔτσι, ἡ $(\star)$ δίνει

$$a \cup \{x'\} \cup \{z\} = b \cup \{y'\} \cup \{z\}$$

καὶ μὲ τὸν ἴδιο τρόπο προκύπτει ἡ ζητούμενη. □

Ἂς σημειωθεῖ ὅτι ἡ σχέση $S(x) = S(y) \to x = y$ δὲν ἰσχύει γιὰ τυχαῖα σύνολα. Π.χ. εὔκολα ἐπαληθεύεται ὅτι $S(\{V - \{x\}\}) = \{V\} = S(\{V - \{y\}\})$ ἐνῶ $\{V - \{x\}\} \neq \{V - \{y\}\}$, γιὰ $x \neq y$.

Λημμα 1.3.8. *Γιὰ κάθε* $n\varepsilon \mathrm{N}$, $S(n) \neq n$.

Ἀπόδειξη. Θὰ δείξουμε τὴ ζητούμενη μὲ ἐπαγωγὴ στὸ n. Στὴ βάση εὔκολα παρατηροῦμε ὅτι $S(0) = 1 \neq 0$. Γιὰ τὸ ἐπαγωγικὸ βῆμα, ὑποθέτουμε ὅτι $S(n) \neq n$ καὶ θὰ δείξουμε ὅτι $SS(n) \neq S(n)$. Ἡ ζητούμενη γράφεται

$$(\star) \qquad a \cup \{x\} \cup \{y\} \neq b \cup \{z\}$$

γιὰ κάποια $a\varepsilon n, x, y \notin a, x \neq y$ καὶ κάποια $b\varepsilon n, z \notin b$.

Ἂν $z = y$ τότε ἡ $(\star)$ δίνει $a \cup \{x\} \cup \{z\} \neq b \cup \{z\}$, ἄρα $a \cup \{x\} \neq b$, ἄρα $S(n) \neq n$, ποὺ ἰσχύει ἀπὸ τὴν Ε.Υ. Ὁμοίως ἂν $z = x$.

Ἂν $z \neq x, y$, τότε ἐπειδὴ τὰ $a \cup \{x\}$ καὶ b εἶναι πεπερασμένα, ὑπάρχει w τ.ω. $w \notin a \cup \{x\}$ καὶ $w \notin b$. Τότε $a \cup \{x\}\{w\} \varepsilon SS(n)$ καὶ $b \cup \{w\} \varepsilon S(n)$. Ἡ $(\star)$ γράφεται $a \cup \{x\} \cup \{w\} \neq b \cup \{w\}$ καὶ συνεχίζουμε ὅπως πρίν. □

1.4 Διατεταγμένα ζεύγη

Ορισμος 1.4.1. Ἔστω x, y σύνολα. *Διατεταγμένο ζεῦγος* τῶν x, y λέγεται ἕνα σύνολο $\langle x, y \rangle$ τ.ω.

- $\langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle \leftrightarrow x = z \ \wedge \ y = w$·
- ἡ κλάση $a \times b = \{\langle x, y\rangle \mid x\varepsilon a \ \wedge \ y\varepsilon b\}$ εἶναι σύνολο.

Προταση 1.4.2 (Ζεῦγος Kuratowski)**.** *Γιὰ ὅλα τὰ x, y, τὸ σύνολο*

$$\langle x, y\rangle_K = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

εἶναι διατεταγμένο ζεῦγος τῶν x, y.

Ἀπόδειξη. Κατ' ἀρχάς, τὸ $\langle x, y\rangle_K$ εἶναι σύνολο, αφοῦ ὁ τύπος

$$\begin{aligned} t\varepsilon\langle x, y\rangle_K &\leftrightarrow t = \{x\} \ \vee \ t\varepsilon\{x, y\} \\ &\leftrightarrow \forall z[z\varepsilon t \leftrightarrow z = x] \ \vee \ \forall z[z\varepsilon t \leftrightarrow z = x \vee z = y] \end{aligned}$$

ποὺ τὸ ὁρίζει εἶναι προφανῶς διαστρωματωμένος.

Ἡ πρώτη ἰδιότητα προκύπτει εὔκολα καὶ γιὰ τὴ δεύτερη ἔχουμε:

$$t\varepsilon(a \times_K b) \leftrightarrow (\exists x\varepsilon a)(\exists x\varepsilon b)[t = \langle x, y\rangle_K]$$

καὶ ὁ τύπος $\psi(x, y, t) : \ (\exists x\varepsilon a)(\exists x\varepsilon b)[t = \langle x, y\rangle_K]$ διαστρωματώνεται ἀπὸ τὴν $x, y \mapsto 2$, $a, b, t \mapsto 3$. □

Προταση 1.4.3 (Ζεῦγος Wiener)**.** *Γιὰ ὅλα τὰ x, y, τὸ σύνολο*

$$\langle x, y\rangle_W = \{\{\emptyset, \{x\}\}, \{\{y\}\}\}$$

εἶναι διατεταγμένο ζεῦγος τῶν x, y.

Ἀπόδειξη. Κατ' ἀρχάς, τὸ $\langle x, y\rangle_W$ εἶναι σύνολο, αφοῦ

$$t\varepsilon\langle x, y\rangle_W \leftrightarrow t = \{\emptyset, \{x\}\} \ \vee \ t = \{\{y\}\}$$

καὶ ὁ τύπος $\phi(x, y, t) : \ t = \{\emptyset, \{x\}\} \ \vee \ t = \{\{y\}\}$ εἶναι διαστρωματωμένος ἀπὸ τὴ συνάρτηση $x, y \mapsto 1$, $t \mapsto 3$.

Ἡ ἐπαλήθευση τῶν ἰδιοτήτων εἶναι εὔκολη. □

Καὶ τὰ δύο εἴδη διατεταγμένου ζεύγους ποὺ εἴδαμε ἔχουν τὸ μειονέκτημα ὅτι οἱ βαθμίδες ποὺ λαμβάνει τὸ $\langle x, y\rangle$ δὲν εἶναι ἴσες μὲ τὶς βαθμίδες ποὺ λαμβάνουν τὰ x καὶ y, σὲ μιὰ τυχαία διαστρωμάτωση ποὺ περιλαμβάνει τὰ x καὶ y. Τὸ ζεῦγος τοῦ Quine ποὺ θὰ ὁρίσουμε σὲ λίγο δὲν ἔχει αὐτὸ τὸ πρόβλημα.

Ορισμος 1.4.4 (Ζεῦγος Quine)**.** Γιὰ κάθε σύνολο x, θεωροῦμε τὶς κλάσεις

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= (x - \mathrm{N}) \cup S''(x \cap \mathrm{N}) \\ \theta_2(x) &= (x - \mathrm{N}) \cup S''(x \cap \mathrm{N}) \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Στὴ συνέχεια ὁρίζουμε

$$\langle x, y\rangle_Q = \theta_1''x \cup \theta_2''y,$$

ὅπου τὸ $\theta_i''x$ χρησιμοποιεῖται ὡς συντομογραφία γιὰ τὸ σύνολο $\{\theta_i(y) \mid y\varepsilon x\}$.

Λημμα 1.4.5. *Οἱ κλάσεις $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ εἶναι σύνολα, γιὰ κάθε x.*

Ἀπόδειξη. Εἶναι:

$$\begin{aligned} t\varepsilon\theta_1(x) &\leftrightarrow t\varepsilon(x-\mathrm{N}) \ \vee \ t\varepsilon S''(x\cap\mathrm{N}) \\ &\leftrightarrow t\varepsilon(x-\mathrm{N}) \ \vee \ (\exists n\varepsilon x\cap\mathrm{N})[t=S(n)] \end{aligned}$$

Ὁ τύπος εἶναι διαστρωματωμένος. Ὁμοίως ἐργαζόμαστε γιὰ τὸν $\theta_2(x)$. □

Λημμα 1.4.6. *Γιὰ ὅλα τὰ x, y, ἰσχύουν*

$$\theta_i(x)=\theta_i(y)\to x=y$$

γιὰ $i=1,2$.

Ἀπόδειξη. Χωρὶς βλάβη τῆς γενικότητας, θὰ ἀσχοληθοῦμε μὲ τὴν περίπτωση $i=1$· ἡ ἄλλη γίνεται ὁμοίως. Ἔστω $\theta_1(x)=\theta_1(y)$. Τότε

$$(x-\mathrm{N})\cup S''(x\cap\mathrm{N})=(y-\mathrm{N})\cup S''(y\cap\mathrm{N}).$$

Ἄμεσα προκύπτει ὅτι

$$x-\mathrm{N}=y-\mathrm{N} \tag{1}$$

καὶ $S''(x\cap\mathrm{N})=S''(y\cap\mathrm{N})$. Ἀπὸ τὴν 1.3.7 ἕπεται ὅτι

$$x\cap\mathrm{N}=y\cap\mathrm{N}. \tag{2}$$

Συνδυάζοντας τὶς (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι $x=y$. □

Εὔκολα παρατηροῦμε ὅτι:

Λημμα 1.4.7. *Γιὰ κάθε x, τὰ σύνολα $x-\mathrm{N}$, $S''(x\cap\mathrm{N})$ καὶ $\{0\}$ εἶναι ξένα μεταξύ τους.*

Ἕπεται ὅτι $\theta_1(x)\neq\theta_2(y)$, γιὰ ὅλα τὰ x, y.

Θεωρημα 1.4.8. *Τὸ $\langle x,y\rangle_Q$ εἶναι διατεταγμένο ζεῦγος, γιὰ ὅλα τὰ x, y.*

Ἀπόδειξη. Κατ' ἀρχάς, ἡ κλάση $\langle x,y\rangle_Q$ ὁρίζεται ἀπὸ τὸν τύπο

$$\begin{aligned} t\varepsilon\langle x,y\rangle_Q &\leftrightarrow t\varepsilon\theta_1''(x) \ \vee \ t\varepsilon\theta_2''(y) \\ &\leftrightarrow (\exists z\varepsilon x)[t=\theta_1(z)] \ \vee \ (\exists w\varepsilon y)[t=\theta_2(w)] \end{aligned}$$

ποὺ εἶναι φανερὰ διαστρωματωμένος. Ἑπομένως, ἡ $\langle x,y\rangle_Q$ εἶναι σύνολο.

Ἐπίσης, τὸ $a\times_Q b$ εἶναι σύνολο ἐπειδὴ ὁ τύπος

$$t\varepsilon(a\times_Q b)\leftrightarrow(\exists x\varepsilon a)(\exists x\varepsilon b)[t=\langle x,y\rangle_Q]$$

εἶναι ἐπίσης διαστρωματωμένος.

Τέλος, ἔχουμε:

$$\begin{aligned} \langle x,y\rangle_Q=\langle z,w\rangle_Q &\to \theta_1''x\cup\theta_2''y=\theta_1''z\cup\theta_2''w \\ &\to \theta_1''x=\theta_1''z \ \wedge \ \theta_2''y=\theta_2''w \\ &\to x=z \ \wedge \ y=w, \ [\text{ἀπὸ 1.4.7 καὶ 1.4.6}] \end{aligned}$$

□

Στὰ ἑπόμενα, ὅπου ἀναφέρεται ἡ ἔννοια τοῦ διατεταγμένου ζεύγους θὰ χρησιμοποιεῖται τὸ ζεῦγος Quine, ἐκτὸς ἂν ἀναφέρεται διαφορετικά.

1.5 Σχέσεις

Ορισμος 1.5.1. Ὀνομάζουμε *n-μελῆ σχέση* κάθε ὑποσύνολο

$$r \subseteq a_1 \times \cdots \times a_n.$$

Εἰδικότερα, διμελῆ σχέση ὀνομάζουμε κάθε ὑποσύνολο $r \subseteq a \times b$. Γιὰ κάθε τέτοια r ὁρίζουμε τὰ σύνολα

$$D(r) = \{x \mid (\exists y \varepsilon b)[\langle x, y\rangle \varepsilon r\}$$

$$R(r) = \{y \mid (\exists x \varepsilon a)[\langle x, y\rangle \varepsilon r\},$$

τὰ ὁποῖα ὀνομάζουμε *σύνολο ὁρισμοῦ* καὶ *σύνολο τιμῶν* τῆς r, ἀντίστοιχα.

Θεωροῦμε τὴ δικαίωση τοῦ παραπάνω ὁρισμοῦ γνωστή, ὅπως καὶ ὅλα τὰ ἀποτελέσματα γιὰ τὶς σχέσεις ποὺ ἰσχύουν στὴν ZF (βλ. [5] ἢ [6]). Θὰ κάνουμε ὅμως μιὰ μικρὴ ἀναφορὰ στὶς σχέσεις ἰσοδυναμίας καὶ στὶς σχέσεις διατάξεως.

Ορισμος 1.5.2. Ἔστω σύνολο a καὶ διμελὴς σχέση R σ' αὐτό. Ἡ R καλεῖται *σχέση ἰσοδυναμίας (σ.ι.)* στὸ a, ἂνν εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.

Γιὰ κάθε σ.ι. R στὸ a, ὁρίζουμε τὴν κλάση ἰσοδυναμίας τοῦ τυχαίου $x \varepsilon a$

$$[\![x]\!] = \{y \varepsilon a \mid xRy\}$$

καὶ τὴν κλάση-πηλίκο τοῦ a

$$a/R = \{[\![x]\!] \mid x \varepsilon a\}.$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι

Προταση 1.5.3. *Γιὰ κάθε σ.ι. R στὸ a, οἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας καὶ ἡ κλάση-πηλίκο εἶναι σύνολα, καὶ στὸ ἑξῆς θὰ ἀποκαλοῦνται* σύνολα ἰσοδυναμίας *καὶ* σύνολο-πηλίκο *ἀντίστοιχα.*

Ορισμος 1.5.4. Τὸ σύνολο b λέγεται διαμέριση τοῦ a, ἄνν:

- $(\forall x, y \varepsilon b)[x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset]$
- $a = \cup b$.

Δεχόμαστε γνωστὸ ἀπὸ τὸ [6] τὸ

Προταση 1.5.5. *Τὸ σύνολο-πηλίκο a/R κάθε σχέσεως ἰσοδυναμίας R στὸ σύνολο a εἶναι διαμέριση τοῦ a.*

Ορισμος 1.5.6. Ἔστω σύνολο a καὶ διμελὴς σχέση $\leqslant$ σ' αὐτό. Ἡ $\leqslant$ λέγεται *διάταξη* στὸ a καὶ τὸ $\langle a, \leqslant\rangle$ *διατεταγμένο σύνολο (δ.σ.)*, ἂνν εἶναι ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρικὴ καὶ μεταβατικὴ σ' αὐτό.

Ἡ ἔκφραση «$x \leqslant y$» διαβάζεται «τὸ x εἶναι προηγούμενο ἢ ἴσο τοῦ y στὸ a».

Ὁρίζουμε ἀκόμη τὴ σχέση $<$ ὡς ἑξῆς

$$x < y \leftrightarrow (x \leqslant y \ \wedge \ x \neq y)$$

γιὰ ὅλα $x, y\varepsilon a$, καὶ διαβάζουμε «τὸ x εἶναι προηγούμενο τοῦ y».

Ὅποτε ὑπάρχει κίνδυνος σύγχυσης θὰ τοποθετεῖται ὁ δείκτης a πάνω ἀπὸ τὰ $\leqslant$ καὶ $<$.

Ορισμος 1.5.7. Ἔστω $\langle a, \leqslant\rangle$ δ.σ., $x\varepsilon a$ καὶ $\emptyset \neq b \subseteq a$. Τὸ x καλεῖται *ἄνω φράγμα* τοῦ b ἂνν $(\forall y\varepsilon b)[y \leqslant x]$.

Τὸ x λέγεται *ἐλάχιστο ἄνω φράγμα (ε.α.φ.)* τοῦ b, ἂν εἶναι ἄνω φράγμα του καὶ ἐπιπλέον τὸ ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ συνόλου τῶν ἄνω φραγμάτων τοῦ b (ἂν ὑπάρχει τέτοιο σύνολο).

Δηλαδή, τὸ x εἶναι ε.α.φ. τοῦ b, ἄνν:

α) $(\forall y\varepsilon b)[y \leqslant x]$

β) $(\forall z\varepsilon a)[z\varepsilon \mathrm{UB}(b) \rightarrow a \leqslant z]$,

ὅπου $\mathrm{UB}(b)$ τὸ σύνόλο τῶν ἄνω φραγμάτων τοῦ b.

Ὅμοια ὁρίζονται τὰ κάτω φράγματα καὶ τὸ μέγιστο κάτω φράγμα (μ.κ.φ.).

Γιὰ τὴ δικαιολόγηση τοῦ ὁρισμοῦ πρέπει νὰ ὑπάρχει τὸ σύνολο $\mathrm{UB}(b)$. Πράγματι, ἔχουμε

$$x\varepsilon \mathrm{UB}(b) \leftrightarrow (\forall y\varepsilon b)[y \leqslant x],$$

καὶ ὁ τύπος εἶναι προφανῶς διαστρωματωμένος.

Εὔκολα παρατηροῦμε ὅτι

Προταση 1.5.8. *Ὑπάρχει τὸ σύνολο ὅλων τῶν δ.σ.*

$$\mathrm{Ord} = \{\langle a, \leqslant\rangle \mid a\varepsilon V \ \wedge \ \leqslant^a \ \textit{σχέση διάταξης στὸ } a\}.$$

Ορισμος 1.5.9. Ἔστω $\langle a, \leqslant\rangle$ δ.σ. καὶ $x\varepsilon a$. Ὀνομάζουμε *ἀρχικὸ τμῆμα* τὸ σύνολο

$$\mathrm{seg}_{\leqslant}(x) = \{y\varepsilon a \mid y \leqslant x\}$$

καὶ *γνήσιο ἀρχικὸ τμῆμα* τὸ

$$\mathrm{seg}^{+}_{\leqslant}(x) = \{y\varepsilon a \mid y < x\}.$$

Ορισμος 1.5.10. Ἔστω $\langle a, \leqslant^a \rangle$ δ.σ. καὶ $x \varepsilon a$.

Τὸ x λέγεται *ἐλάχιστο*[3] *(least)*, ἂν γιὰ κάθε $y \varepsilon a$ ἰσχύει $x \leqslant y$.

Τὸ x λέγεται *ἐλαχιστικὸ (minimal)*, ὅταν δὲν ὑπάρχει $y \varepsilon a$ τ.ω. $y < x$.

Ἀνάλογα ὁρίζονται τὰ μέγιστα καὶ τὰ μεγιστικὰ στοιχεῖα.

Ορισμος 1.5.11. Ἡ $\leqslant$ λέγεται *γραμμικὴ* ἢ *ὁλικὴ διάταξη* ἢ *ἁλυσίδα* καὶ τὸ $\langle a, \leqslant \rangle$ *ὁλικῶς διατεταγμένο σύνολο (ο.δ.σ.)*, ἂνν

$$(\forall x, y \varepsilon a)[x \neq y \to [x < y \ \vee \ y < x]].$$

Ἡ $\leqslant$ λέγεται *καλὴ διάταξη* καὶ τὸ $\langle a, \leqslant \rangle$ *καλῶς διατεταγμένο σύνολο (κ.δ.σ.)*, ἂνν εἶναι ὁλικὴ καὶ ἐπιπλέον γιὰ κάθε μὴ κενὸ σύνολο $X \subseteq a$ ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο.

Ὅπως καὶ στὸ 1.5.8, ἀποδεικνύεται τὸ σημαντικὸ

Προταση 1.5.12. *Ὑπάρχει τὸ σύνολο* WOrd *τῶν καλῶς διατεταγμένων συνόλων.*

1.6 Συναρτήσεις

Ορισμος 1.6.1. Ἔστω a, b σύνολα καὶ $f \subseteq a \times b$ διμελὴς σχέση. Ἡ f καλεῖται *συνάρτηση* ἂνν γιὰ κάθε $x \varepsilon a$ ὑπάρχει μοναδικὸ $y \varepsilon a$ τ.ω. $\langle x, y \rangle \varepsilon f$.

Ἀντὶ τοῦ $\langle x, y \rangle \varepsilon f$ θὰ χρησιμοποιοῦμε τοὺς συμβολισμοὺς $y = f(x)$ καὶ $f : x \mapsto y$. Ἀπὸ τὰ συμφραζόμενα γίνεται σαφὲς κάθε φορὰ ἂν ὁ συμβολισμὸς ἀναφέρεται σὲ συνάρτηση τῆς NF ἢ τῆς ZFC. Σαφὲς ἐπίσης θὰ γίνεται πότε τὸ $\to$ χρησιμοποιεῖται ὡς λογικὸς σύνδεσμος καὶ πότε ὡς σύμβολο συνάρτησης.

Ἐπίσης, θὰ γράφουμε $f : a \to b$ καὶ θὰ λέμε ὅτι ἡ f εἶναι συνάρτηση ἀπὸ τὸ a στὸ (ἐντὸς τοῦ) b. Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση ἰσχύουν $\mathrm{dom}(f) = a$ καὶ $\mathrm{rng}(f) \subseteq b$.

Προταση 1.6.2. *Ὑπάρχει τὸ σύνολο b^a ὅλων τῶν συναρτήσεων ἀπὸ τὸ a στὸ b, γιὰ ὅλα τὰ σύνολα a, b.*

Ἑπομένως ὑπάρχει τὸ σύνολο V^V ὅλων τῶν συναρτήσεων.

Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ ὅλες τὶς $f : a \to b$ καὶ γιὰ κάθε $x \varepsilon a$, προκειμένου νὰ ὁρίζεται ἡ συνάρτηση πρέπει οἱ βαθμίδες τῶν $f(x)$ καὶ x νὰ εἶναι ἴσες, σὲ κάθε διαστρωμάτωση ποὺ περιέχει τὸ x. Σὲ περίπτωση ποὺ δὲν ἰσχύει ἡ παραπάνω σχέση, ἡ f δὲν εἶναι συνάρτηση, πρᾶγμα ποὺ μᾶς ὁδηγεῖ στὸν ἑπόμενο ὁρισμό:

Ορισμος 1.6.3. Θὰ καλοῦμε *γνήσιο τελεστὴ* κάθε σύνολο F γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύουν τὰ ἑξῆς:

---

[3] Ἐπιλέξαμε νὰ ἀποδώσουμε τοὺς ὅρους «least» καὶ «minimal» ὡς «ἐλάχιστο» καὶ «ἐλαχιστικό», ἀντίστοιχα, ἀκολουθῶντας τὸ [6]. Στὸ [5] αὐτοὶ ἀποδίδονται ὡς «πρῶτο» καὶ «ἐλάχιστο», ἀντίστοιχα.

- Τὸ F ἀποτελεῖται ἀπὸ διατεταγμένα ζεύγη $\langle x, y\rangle$, ὅπου τὰ x, y ἔχουν διαφορετικὲς βαθμίδες.
- $(\forall x \varepsilon a)(\exists! y \varepsilon b)[\langle x, y\rangle \varepsilon F]$.

Παραδείγματα γνήσιων τελεστῶν μὲ ἰδιαίτερη σημασία σὲ κάποια ἀποτελέσματα θὰ δοῦμε ἀργότερα.

Θεωροῦμε γνωστὸ πότε μιὰ συνάρτηση $f : a \to b$ εἶναι *ἕνα προς ἕνα* (1-1,(injection)), *ἐπὶ* (surjection) καὶ θὰ χρησιμοποιοῦμε τὰ σύμβολα $f : a \rightarrowtail b$ καὶ $f : a \twoheadrightarrow b$. Ὅταν εἶναι ταυτόχρονα ἕνα πρὸς ἕνα καὶ ἐπὶ (bijection) θὰ χρησιμοποιοῦμε τὸ σύμβολο $f : a \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow b$.

Ἂν μιὰ συνάρτηση f εἶναι 1-1 καὶ ἐπί, τότε καὶ ἡ ἀντίστροφή της σχέση

$$f' = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \varepsilon f\}$$

εἶναι συνάρτηση καὶ μάλιστα 1-1 καὶ ἐπί.

Θεωροῦμε ἐπίσης γνωστὴ τὴν ἔννοια τοῦ *περιορισμοῦ* $f \restriction a'$ μιᾶς συνάρτησης $f : a \to b$ στὸ $a' \subseteq a$.

Προταση 1.6.4. *Τὸ σύνολο $S = \{\langle x, S(x)\rangle\} \mid x \varepsilon V\}$ ἀποτελεῖ συνάρτηση. Ἑπομένως, καὶ ὁ περιορισμὸς $\mathrm{S} = S \restriction \mathrm{N}$ εἶναι συνάρτηση καὶ μάλιστα ἕνα πρὸς ἕνα, ἀλλὰ ὄχι ἐπί.*

Ἀπόδειξη. Κατ' ἀρχάς, κάθε διαστρωμάτωση ποὺ καθιστᾶ τὸ $S(x)$ σύνολο γιὰ κάθε σύνολο x, ἀποδίδει στὰ x καὶ $S(x)$ τὴν ἴδια βαθμίδα, ἄρα τὰ ζεύγη $\langle x, S(x)\rangle$ ὁρίζονται καὶ τὸ σύνολό τους S ἀποτελεῖ σχέση.

Ἐπίσης, γιὰ κάθε x ὁρίζεται μοναδικὰ τὸ $S(x)$, ἄρα ἡ S ἀποτελεῖ συνάρτηση. Ἄρα καὶ ἡ S ἀποτελεῖ συνάρτηση, ἀπὸ τὴν παραπάνω παρατήρηση. Ἐπίσης, ἡ S εἶναι ἕνα πρὸς ἕνα καὶ ὄχι ἐπί, ὡς συνέπεια τῶν λημμάτων 1.3.7 καὶ 1.3.6. ☐

Θεωρημα 1.6.5 (Ἀναδρομῆς)**.** *Ἔστω σύνολα a, $x_0 \varepsilon a$ καὶ συνάρτηση $f : a \to a$. Ὑπάρχει μοναδικὴ συνάρτηση $g : \mathrm{N} \to a$ τ.ω.*

α) $g(0) = x_0$

β) $g(\mathrm{S}(n)) = f(g(n))$, *γιὰ κάθε* $n \varepsilon \mathrm{N}$.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τὴν κλάση

$$A = \{t \mid \langle 0, x_0\rangle \varepsilon t \ \wedge \ (\forall n, y)[\langle n, y\rangle \varepsilon t \to \langle \mathrm{S}(n), f(y)\rangle \varepsilon t]\}.$$

καὶ ἀποδεικνύουμε ὅτι εἶναι σύνολο. Ἔχουμε:

$$t \varepsilon A \leftrightarrow [\langle 0, x_0\rangle \varepsilon t \ \wedge \ (\forall n, y)[\langle n, y\rangle \varepsilon t \to \langle \mathrm{S}(n), f(y)\rangle \varepsilon t]]$$

καὶ ὁ τύπος εἶναι διαστρωματωμένος.

Ὁρίζουμε τώρα $g = \cap A$. Τὸ g προφανῶς εἶναι σύνολο. Εὔκολα ἀποδεικνύεται μὲ ἐπαγωγὴ στὸ n ὅτι ἡ g εἶναι ἡ ζητούμενη. ☐

Χρησιμοποιῶντας τὸ 1.6.5, κατασκευάζουμε τὶς πράξεις μεταξὺ φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ορισμος 1.6.6. Ὁρίζουμε τὴν *πρόσθεση* καὶ τὸν *πολλαπλασιασμὸ* φυσικῶν ἀριθμῶν ἀναδρομικά:

$$\left\{\begin{array}{l} m+0=m \\ m+\mathrm{S}(n)=\mathrm{S}(m+n) \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{l} m\cdot 0=0 \\ m\cdot \mathrm{S}(n)=m\cdot n+n \end{array}\right.$$

Οἱ βασικὲς ἰδιότητές τους συνοψίζονται στὴν παρακάτω πρόταση καὶ θεωροῦνται γνωστές.

Προταση 1.6.7. *Γιὰ ὅλους τοὺς $m, n, k \varepsilon \mathrm{N}$ ἰσχύουν:*

1. $m+(n+k)=(m+n)+k$.
2. $m+n=n+m$
3. $m\cdot(n+k)=m\cdot n+m\cdot k$
4. $m\cdot(n\cdot k)=(m\cdot n)\cdot k$.
5. $m\cdot n=n\cdot m$

Ορισμος 1.6.8 (Φυσικὴ διάταξη φυσικῶν ἀριθμῶν)**.** Ὁρίζουμε τὴ σχέση $\leqslant \subseteq \mathrm{N}\times\mathrm{N}$ ὡς ἑξῆς:

$$m\leqslant n \leftrightarrow (\exists k\varepsilon\mathrm{N})[m+k=n]$$

γιὰ ὅλους τοὺς $m, n\varepsilon\mathrm{N}$.

Στὸ σημεῖο αὐτό, καὶ σὲ ὅτι ἀφορᾶ στοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, ἔχουμε κατασκευάσει ἕνα σύστημα φυσικῶν ἀριθμῶν, πράξεις καὶ διάταξη σ' αὐτό. Ἔχουμε λοιπὸν ὅλες τὶς προϋποθέσεις γιὰ νὰ ἀναπτύξουμε τὴ θεωρία τῶν ἀριθμῶν, ὅπως γίνεται στὰ περισσότερα βιβλία Θεωρίας Ἀριθμῶν[4], κάτι ὅμως τέτοιο δὲν εἶναι στοὺς στόχους τῆς ἐργασίας. Στὸ ἑξῆς θὰ θεωροῦμε ὡς γνωστὴ ὅλη τὴ Θεωρία Ἀριθμῶν στὸ σύστημα ποὺ κατασκευάσαμε.

Εἰδικότερα, ἀναφέρουμε σαφῶς τὸ ἑξῆς θεώρημα τῆς Θεωρίας Ἀριθμῶν, ἐπειδὴ θὰ χρησιμοποιηθεῖ ἀργότερα.

Θεωρημα 1.6.9. *Τὸ σύνολο $\langle \mathrm{N}, \leqslant^{\mathrm{N}}\rangle$ εἶναι κ.δ.σ.*

Ορισμος 1.6.10. Ἔστω σύνολο a καὶ μὴ κενὸ ὑποσύνολό του $\emptyset \neq b\subseteq a$. Ὀνομάζουμε *χαρακτηριστικὴ συνάρτηση τοῦ b* τὴ συνάρτηση $\chi_b : a\to\{0,1\}$ μὲ τύπο

$$\chi_b(x)=\left\{\begin{array}{ll} 0, & x \not\varepsilon b \\ 1, & x\varepsilon b \end{array}\right.$$

[4]Βλέπε γιὰ παράδειγμα Κ. Λάκκη, *Θεωρία Αριθμών*, Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1991.

Γιὰ τὴ δικαίωση τοῦ ὁρισμοῦ, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἡ χ_b, ὡς σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν, γράφεται στὴ μορφὴ

$$\chi_b = \{\langle x, 0\rangle \mid x \not\varepsilon b\} \cup \{\langle y, 1\rangle \mid y \varepsilon b\}$$

καὶ ὅτι ἱκανοποιεῖ τὴν ἰδιότητα τοῦ ὁρισμοῦ 1.6.1, ποὺ εἶναι εὔκολο.

Πρόταση 1.6.11. *Ὑπάρχει 1-1 καὶ ἐπὶ συνάρτηση μεταξὺ τῶν συνόλων* $\mathcal{P}(a)$ *καὶ* $\{0,1\}^a$, *γιὰ κάθε σύνολο* a.

Ἀπόδειξη. Ὁρίζουμε τὴ συνάρτηση

$$h : \mathcal{P}(a) \to \{0,1\}^a$$

μὲ τύπο

$$h(X) = \chi_X$$

καὶ εὔκολα ἀποδεικνύουμε ὅτι εἶναι ἡ ζητούμενη. □

Ορισμός 1.6.12. Ἔστω $f : a \to b$ καὶ ὑποσύνολα $a' \subseteq a$, $b' \subseteq b$. Ὁρίζουμε τὴν *εἰκόνα τοῦ* a' *μέσω τῆς* f

$$f[a'] = \{f(x) \mid x \varepsilon a'\}$$

καὶ τὴν *ἀντίστροφη εἰκόνα τοῦ* a' *μέσω τῆς* f

$$f^{-1}[b'] = \{x \varepsilon a \mid f(x) \varepsilon b'\}.$$

Ἐπίσης, ὁρίζουμε τὴ συνάρτηση

$$f'' : \mathcal{P}(a) \to \mathcal{P}(b)$$

μὲ τύπο $f''(a') = f[a']$.

Λήμμα 1.6.13. *Ἂν* $f : a \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow b$ *τότε* $f'' : \mathcal{P}(a) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow P(b)$.

Λήμμα 1.6.14. *Ὑπάρχει ἀμφίεση μεταξὺ τῶν συνόλων* $\mathcal{P}_1\mathcal{P}(a)$ *καὶ* $\mathcal{P}\mathcal{P}_1(a)$, *γιὰ κάθε σύνολο* a.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τὴ συνάρτηση

$$f : \mathcal{P}_1\mathcal{P}(a) \to \mathcal{P}\mathcal{P}_1(a)$$

μὲ τύπο

$$f(\{x\}) = \{\{t\} \mid t \varepsilon x\}$$

γιὰ ὅλα τὰ $x \subseteq a$ καὶ δείχνουμε εὔκολα ὅτι εἶναι ἡ ζητούμενη. □

1.7 Πληθάριθμοι

Ορισμος 1.7.1. Ὁρίζουμε τὴ σχέση *ἰσοπληθικότητας* ὡς ἑξῆς: Δύο σύνολα λέγονται ἰσοπληθῆ ὅταν ὑπάρχει μιὰ 1-1 καὶ ἐπὶ συνάρτηση μεταξύ τους. Συμβολικὰ

$$a \sim b \leftrightarrow \exists f[f : a \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow b].$$

Ὀνομάζουμε *πληθάριθμο* τοῦ συνόλου a τὸ σύνολο ἰσοδυναμίας του ὡς πρὸς τὴ σχέση ἰσοπληθικότητας

$$|a| = \{b \mid b \sim a\}.$$

Ἔτσι, το σύνολο ὅλων τῶν πληθαρίθμων ὁρίζεται ὡς τὸ σύνολο-πηλίκο τῆς σχέσης ἰσοπληθικότητας:

$$\text{Card} = \{|a| \mid a\varepsilon V\}.$$

Ὁ ὁρισμὸς δικαιώνεται εὔκολα ἀπὸ τὴν ἁπλῆ παρατήρηση ὅτι ἡ $\sim$ εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε σύνολο εἶναι ἰσοπληθὲς μὲ τὸν ἑαυτό του, ἄρα ἀνήκει στὸν πληθάριθμό του, δηλαδὴ $a\varepsilon|a|$, γιὰ κάθε a. Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι τὸ κενὸ σύνολο δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι πληθάριθμος κανενὸς συνόλου.

Πορισμα 1.7.2. *Γιὰ ὅλα τὰ a, b, ἔχουμε:*

1. $a \sim b \to \mathcal{P}(a) \sim \mathcal{P}(b)$
2. $\mathcal{P}\mathcal{P}_1(a) \sim \mathcal{P}_1\mathcal{P}(a)$
3. $\mathcal{P}(a) \sim \{0, 1\}^a$.

Ἀπόδειξη. Ἄμεσα, ἀπὸ τὰ 1.6.13, 1.6.14 καὶ 1.6.11. □

Ορισμος 1.7.3. Τὸ σύνολο a ἔχει *λιγότερα στοιχεῖα* ἀπὸ τὸ b, ἂνν ὑπάρχει 1-1 (καὶ ὄχι ἐπὶ) συνάρτηση ἀπὸ τὸ a στὸ b. Συμβολικά,

$$|a| < |b| \leftrightarrow \exists f[f : a \rightarrowtail b].$$

Παρατηροῦμε ὅτι $|a| \leqslant |b| \leftrightarrow |a| < |b| \ \vee \ a \sim b$.

Εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ $\leqslant$ εἶναι σχέση διατάξεως.

Μὲ τρόπο παρόμοιο ὅπως καὶ στὴν ZFC (βλ. π.χ. [6]) ἀποδεικνύεται τὸ

Θεωρημα 1.7.4 (Schröder-Bernstein)**.** *Γιὰ ὅλα τὰ a, b ἰσχύει*

$$|a| \leqslant |b| \ \wedge \ |b| \leqslant |a| \to a \sim b.$$

Θεωρημα 1.7.5. *Γιὰ κάθε σύνολο a ἰσχύει*

$$|\mathcal{P}_1(a)| < |\mathcal{P}(a)|.$$

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὴν ταυτοτικὴ συνάρτηση $\{x\} \mapsto \{x\}$ ἔχουμε $|\mathcal{P}_1(a)| < |\mathcal{P}(a)|$.

Θὰ δείξουμε τώρα ὅτι $\mathcal{P}_1(a) \not\sim \mathcal{P}(a)$. Ἔστω πρὸς ἄτοπο ὅτι $\mathcal{P}_1(a) \sim \mathcal{P}(a)$. Τότε ὑπάρχει $f : \mathcal{P}_1(a) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(a)$. Θεωροῦμε τὴν κλάση

$$b = \{y \mid y\varepsilon a \;\wedge\; y \not\varepsilon f(\{y\})\}.$$

Ὁ τύπος $y\varepsilon b \leftrightarrow y\varepsilon a \;\wedge\; y \not\varepsilon f(\{y\})$ εἶναι διαστρωματωμένος. Ἄρα, ἡ κλάση b εἶναι σύνολο καὶ μάλιστα ὑποσύνολο τοῦ a. Ἐπειδὴ ἡ f εἶναι ἐπί, ὑπάρχει $s\varepsilon a$ τ.ω. $f(\{s\}) = b$. Τότε, γιὰ κάθε $y\varepsilon a$ ἰσχύει

$$y\varepsilon f(\{s\}) \leftrightarrow y\varepsilon b \leftrightarrow y \not\varepsilon f(\{y\}).$$

Θέτοντας $y = s\varepsilon a$, ἡ προηγούμενη γίνεται

$$s\varepsilon f(\{s\}) \leftrightarrow s \not\varepsilon f(\{s\}),$$

πρᾶγμα ἄτοπο. □

Στὸ σημεῖο αὐτὸ πρέπει νὰ κάνουμια μιὰ παρατήρηση. Στὴ συνήθη συνολοθεωρία ἰσχύει τὸ *Θεώρημα τοῦ Cantor*

$$|a| < |\mathcal{P}(a)|.$$

Στὴν NF, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι αὐτὸ δὲν ἰσχύει· στερεῖται νοήματος, γιατὶ σὲ κάθε διαστρωμάτωση ποὺ περιέχει τὸ a, ἡ βαθμίδα τοῦ $\mathcal{P}(a)$ εἶναι μεγαλύτερη τῆς βαθμίδας τοῦ a κατὰ 1, ἄρα οἱ πληθάριθμοί τους δὲν μποροῦν νὰ συγκριθοῦν μεταξύ τους.

Περισσότερα γι' αὐτὸ θὰ ποῦμε σὲ ἑπόμενη ἑνότητα. Ἐδῶ θὰ σταθοῦμε μόνο στὴν ἀντιμετώπιση τοῦ παραδόξου τοῦ Cantor. Στὴν καντοριανὴ θεωρία συνόλων τὸ θεώρημα Cantor συνεπάγεται τὴν ἀνισότητα $|V| < |\mathcal{P}(V)|$. Αὐτὴ ὅμως δὲν ἰσχύει στὴν NF, ἀφοῦ προφανῶς $V = \mathcal{P}(V)$. Μὲ τὴν ἀπόρριψη τοῦ θεωρήματος, ὡς στερούμενου νοήματος, ἀπορρίπτεται καὶ ἡ προηγούμενη ἀνισότητα, ὁπότε ἀντιμετωπίζεται τὸ παράδοξο.

Λημμα 1.7.6. *Γιὰ ὅλα τὰ a, b,*

$$a \sim b \leftrightarrow \mathcal{P}_1(a) \sim \mathcal{P}_1(b).$$

Ἀπόδειξη. Γιὰ τὸ εὐθύ, δοθείσης μιᾶς $f : a \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow b$, κατασκευάζω τὴ συνάρτηση $g : \mathcal{P}_1(a) \to \mathcal{P}_1(b)$ μὲ τύπο $g(\{x\}) = \{f(x)\}$ καὶ δείχνουμε ὅτι εἶναι 1-1 καὶ ἐπί.

Γιὰ τὸ ἀντίστροφο, θεωροῦμε μιὰ $g : \mathcal{P}_1(a) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}_1(b)$ καὶ ἀποδεικνύουμε ὅτι ἡ $f : a \to b$ μὲ τύπο

$$f(x) = \text{ τὸ μοναδικὸ } y\varepsilon b \text{ τ.ω. } g(\{x\}) = \{y\}$$

εἶναι 1-1 καὶ ἐπί.

Τὸ μόνο στὸ ὁποῖο ἀξίζει νὰ σταθοῦμε εἶναι ὅτι οἱ κατασκευαζόμενες συναρτήσεις κληρονομοῦν τὴ στρωματοποίησή τους ἀπὸ τὶς δοθεῖσες. Πράγματι, σὲ κάθε διαστρωμάτωση ποὺ περιέχει τὸ x, ἂν τὰ $f(x)$ καὶ x ἔχουν τὴν ἴδια βαθμίδα, τότε τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὰ $\{f(x)\}$ καὶ $\{x\}$. γιὰ □

Μὲ χρήση τῶν ἴδιων συναρτήσεων προκύπτει καὶ τὸ

Λημμα 1.7.7. *Γιὰ ὅλα τὰ a, b ἰσχύει*

$$|a| < |b| \leftrightarrow |\mathcal{P}_1(a)| < |\mathcal{P}_1(b)|.$$

Λημμα 1.7.8. *Γιὰ ὅλα τὰ a, b ἰσχύει $\mathcal{P}_1(a \times b) \sim \mathcal{P}_1(a) \times \mathcal{P}_1(b)$.*

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τὴ συνάρτηση $\mathcal{P}_1(a \times b) \to \mathcal{P}_1(a) \times \mathcal{P}_1(b)$ μὲ τύπο $f(\{\langle x, y\rangle\}) = \langle\{x\}, \{y\}\rangle$ καὶ παρατηροῦμε εὔκολα ὅτι εἶναι ἀμφίεση. □

Προφανῶς, ἐπίσης ἰσχύει τὸ ἑπόμενο λῆμμα:

Λημμα 1.7.9. *Γιὰ ὅλα τὰ a, b, ἂν $a \cap b = \emptyset$, τότε $\mathcal{P}_1(a) \cap \mathcal{P}_1(b) = \emptyset$ καὶ $\mathcal{P}_1(a \cup b) = \mathcal{P}_1(a) \cup \mathcal{P}_1(b)$.*

Πάμε τώρα νὰ ὁρίσουμε πράξεις στοὺς πληθαρίθμους.

Ορισμος 1.7.10. Ὁρίζουμε *πρόσθεση* καὶ *πολλαπλασιασμὸ* πληθαρίθμων, ὡς ἑξῆς: Γιὰ ὅλους τοὺς $\kappa = |a|, \lambda = |b| \varepsilon \mathrm{Card}$, ὁρίζουμε:

- $\kappa + \lambda = |a \cup b|$ γιὰ $a \cap b = \emptyset$
- $\kappa \cdot \lambda = |a \times b|$

Ἡ δικαιολόγηση τῶν ὁρισμῶν προκύπτει ἄμεσα ἀπὸ τὰ 1.7.8 καὶ 1.7.9.

Ορισμος 1.7.11. Ἕνας πληθάριθμος λέγεται *πεπερασμένος*, ὅταν κάθε στοιχεῖο του εἶναι πεπερασμένο. Ἑπομένως τὸ σύνολο τῶν πεπερασμένων πληθαρίθμων εἶναι

$$\mathrm{FCard} = \mathcal{P}(\mathrm{Fin}) \cap \mathrm{Card}.$$

Θεωρημα 1.7.12. *Οἱ πεπερασμένοι πληθάριθμοι εἶναι ἀκριβῶς οἱ φυσικοὶ ἀριθμοί. Δηλαδὴ*

$$\mathrm{N} = \mathrm{FCard}.$$

Ἀπόδειξη. «$\subseteq$» Θὰ δείξουμε ὅτι $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{FCard}$. Ἔστω $n \varepsilon \mathrm{N}$ καὶ $a \varepsilon n$. Τότε $a \varepsilon \cup \mathrm{N}$. Ἄρα $a \varepsilon \mathrm{Fin}$. Ἄρα $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{Fin}$ ἄρα $\mathrm{N} \varepsilon \mathcal{P}(\mathrm{Fin})$.

Μένει νὰ δείξουμε ὅτι $n \varepsilon \mathrm{Card}$ γιὰ κάθε $n \varepsilon \mathrm{N}$. Μὲ ἐπαγωγή:

Βάση: $0 = \{\emptyset\} = \{a \mid a \sim \emptyset\} = |\emptyset| \varepsilon \mathrm{Card}$.

Ἐπαγ. βῆμα: Ἔστω $n = |a|\varepsilon\mathrm{Card}$. Θὰ δείξουμε ὅτι $\mathrm{S}(n)\varepsilon\mathrm{Card}$. Εἶναι:

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(n) &= \{a \cup \{x\} \mid a\varepsilon n \ \wedge \ x \not\varepsilon a\} \\ &= \{a \cup \{x\} \mid a\varepsilon n \ \wedge \ \{x\} \cap a = \emptyset\} \end{aligned}$$

Ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ $\mathrm{S}(n)$ εἶναι ἰσοπληθῆ. Πράγματι, ἔστω $a\cup\{x\}, b\cup\{y\}\varepsilon\mathrm{S}(n)$. Τότε $a, b\varepsilon n$. Ὅμως, ἀπὸ Ε.Υ., τὸ n εἶναι πληθάριθμος ἄρα $a \sim b$ ἄρα ὑπάρχει $f : a \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow b$ καὶ $\{x\} \cap a = \{y\} \cap b = \emptyset$. Ἔτσι, ὁρίζεται ἀμφίεση

$$\{x\} \cup a \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \{y\} \cap b$$

μὲ τύπο

$$t \mapsto \begin{cases} f(t) & , t\varepsilon a \\ y & , t = x \end{cases}$$

Ἄρα, $\mathrm{S}(n)\varepsilon\mathrm{Card}$.

«$\supseteq$» Ἔστω $\kappa\varepsilon\mathrm{Card}$ καὶ $\kappa \subseteq \mathrm{Fin}$. Τότε γιὰ κάθε $a\varepsilon\kappa$, $a\varepsilon\mathrm{Fin}$. Ἄρα ὑπάρχει $n\varepsilon\mathrm{N}$ τ.ω. $a\varepsilon n$. Ἀπὸ τὸ «$\subseteq$» ἔπεται ὅτι $n\varepsilon\mathrm{Card}$. Ἄρα τὸ σύνολο a ἀνήκει σὲ δύο πληθαρίθμους κ, n, ἑπομένως $\kappa = n$. Ἄρα, $\kappa\varepsilon\mathrm{N}$. □

Εἶναι προφανὲς ὅτι:

Προταση 1.7.13. *Ἕνα σύνολο εἶναι πεπερασμένο, ἄνν ὁ πληθάριθμός του εἶναι πεπερασμένος, δηλαδὴ*

$$a\varepsilon\mathrm{Fin} \leftrightarrow |a|\varepsilon\mathrm{FCard}.$$

Συνδυάζοντας τώρα τὰ 1.7.10 καὶ 1.7.12, ἔχουμε ὅτι οἱ πράξεις πρόσθεσης καὶ πολλαπλασιασμοῦ στοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς ὁρίζονται ἐκ νέου ὡς ἑξῆς:

$$m + n = \{a \cup b \mid a\varepsilon m \ \wedge \ b\varepsilon n \ \wedge \ a \cap b = \emptyset\},$$

$$m \cdot n = \{a \times b \mid a\varepsilon m \ \wedge \ b\varepsilon n\},$$

γιὰ ὅλους τοὺς $m, n\varepsilon\mathrm{N}$.

Θεωρημα 1.7.14. *Οἱ δύο ὁρισμοὶ τῆς πρόσθεσης φυσικῶν ἀριθμῶν ταυτίζονται.*

Ἀπόδειξη. Γιὰ τὴν εὐκολία τῆς ἀπόδειξης, εἰσάγουμε τὸ προσωρινὸ σύμβολο $\oplus$ γιὰ τὴν πρόσθεση πληθαρίθμων. Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι

$$(\forall m\varepsilon n)[m \oplus n = m + n],$$

μὲ ἐπαγωγὴ στὸν φυσικὸ n.

Βάση: Γιὰ ὅλα τὰ m ἔχουμε:

$$\begin{aligned} m \oplus 0 &= \{a \cup b \mid a \varepsilon m \ \wedge \ b \varepsilon 0 \ \wedge \ a \cap b = \emptyset\} \\ &= \{a \cup b \mid a \varepsilon m \ \wedge \ b = \emptyset\} \\ &= \{a \cup \emptyset \mid a \varepsilon m\} \\ &= \{a \mid a \varepsilon m\} \\ &= m \end{aligned}$$

καὶ $m + 0 = m$, ἀπὸ 1.6.6. Ἄρα $m \oplus 0 = m + 0$.

Ἐπαγωγικὸ βῆμα: Ὑποθέτουμε ὅτι $m \oplus n = m + n$ καὶ θὰ δείξουμε ὅτι $m \oplus \mathrm{S}(n) = m + \mathrm{S}(n)$, γιὰ ὅλα τὰ $m \varepsilon \mathrm{N}$).

Εἶναι:

$$\begin{aligned} m \oplus \mathrm{S}(n) &= \{a \cup b \mid a \varepsilon m \ \wedge \ b \varepsilon \mathrm{S}(n) \ \wedge \ a \cap b = \emptyset\} \\ &= \{a \cup b \mid a \varepsilon m \ \wedge \ b = x \cup \{x\} \ \wedge \ c \varepsilon n \ \wedge \ x \not\varepsilon c \ \wedge \ x \not\varepsilon a\} \\ &= \{a \cup (c \cup \{x\}) \mid a \varepsilon m \ \wedge \ c \varepsilon n \ \wedge \ x \not\varepsilon a \cup c, a \cap c = \emptyset\} \\ &= \{(a \cup c) \cup \{x\} \mid a \cup c \varepsilon m \oplus n \ \wedge \ (a \cup c) \cap \{x\} = \emptyset\} \\ &= \mathrm{S}(m \oplus n) \\ &= \mathrm{S}(m + n), \text{ ἀπὸ Ε.Υ.} \\ &= m + \mathrm{S}(n), \text{ ἀπὸ 1.6.6.} \end{aligned}$$

□

Ἐντελῶς ὅμοια ἀποδεικνύεται ὅτι

Θεωρημα 1.7.15. *Οἱ δύο ὁρισμοὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς ταυτίζονται .*

Ορισμος 1.7.16. Ὁρίζουμε τὴ *φυσικὴ διάταξη τῶν πληθαρίθμων*, ὡς ἑξῆς:

$$\kappa \leqslant \lambda \leftrightarrow (\forall a \varepsilon \kappa)(\forall b \varepsilon \lambda)[|a| < |b|],$$

γιὰ ὅλους τοὺς πληθαρίθμους κ, λ.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ 1.7.3 φαίνεται εὔκολα ὅτι

Λημμα 1.7.17. *Ἡ δομὴ $\langle \mathrm{Card}, \leqslant^{\mathrm{Card}} \rangle$ εἶναι δ.σ.*

Θεωρημα 1.7.18. *Οἱ $\leqslant^{\mathrm{Card}}$ καὶ $\leqslant^{\mathrm{N}}$ ταυτίζονται γιὰ φυσικοὺς ἀριθμούς.*

Ἀπόδειξη. Χρησιμοποιῶντας τὰ 1.6.6 καὶ 1.7.14, ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξουμε ὅτι

$$m \leqslant^{\mathrm{Card}} n \leftrightarrow (\exists k)[m \oplus k = n],$$

ὅπου $\oplus$ τὸ προσωρινὸ σύμβολο ποὺ ἀναφέρθηκε νωρίτερα.

($\rightarrow$) Ἔστω $m \leqslant^{\text{Card}} n$ καὶ τυχαῖα $a\varepsilon m, b\varepsilon n$. Ἀπὸ τὸν ὁρισμό, $a \preceq b$, ἄρα ὑπάρχει $f : a \rightarrowtail b$. Ὁρίζουμε $d = b - f[a]$ καὶ $c = f^{-1}[d] = f^{-1}[b - f[a]]$.

Παρατηροῦμε ὅτι $a \cap c = \emptyset$. Ἐπίσης,

$$a \cup c = a \cup f^{-1}[d] = f^{-1}[f[a]] \cup f^{-1}[d] = f^{-1}[f[a] \cup d] = f^{-1}[b] \sim b.$$

Ἑπομένως, $m \oplus k = n$, γιὰ $k = |c|$.

($\leftarrow$) Ἔστω $m \oplus k = n$. Τότε $a \cup c = b$, γιὰ $a\varepsilon m, b\varepsilon n, c\varepsilon k$ καὶ $a \cap c = \emptyset$. Τότε, $a \preceq a \cup c = b$, ἄρα $a \preceq b$. Ἄρα, $m \leqslant^{\text{Card}} n$.

□

1.8 Ὁ τελεστὴς T καὶ τὸ ἀξίωμα ἀρίθμησης

Εἴδαμε στὴν προηγούμενη ἑνότητα ὅτι ἡ μὴ ἰσχὺς τοῦ θεωρήματος τοῦ Cantor $|a| < |\mathcal{P}(a)|$ στὴν NF ὀφείλεται ὄχι σὲ λόγο οὐσίας (τὸ δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(a)$ ὁρίζεται μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ὅπως καὶ στὴν ZFC), ἀλλὰ σὲ λόγους τύπου: σὲ κάθε διαστρωμάτωση ποὺ περιέχει τὸ a, τὰ $\mathcal{P}(a)$ καὶ a ἔχουν διαφορετικὲς βαθμίδες.

Ἂν ὅμως στὴ θέση τοῦ a πάρουμε τὸ $\mathcal{P}_1(a)$, τότε τὸ θεώρημα ἰσχύει! Ἔχει ἐνδιαφέρον νὰ δοῦμε τί ἀλλάζει. Ὡς πρὸς τὸ τυπικὸ θέμα, εἶναι σαφὲς ὅτι $x\varepsilon a \leftrightarrow \{x\}\varepsilon\mathcal{P}_1(a)$, πρᾶγμα ποὺ ἀνεβάζει τὴ βαθμίδα τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τῆς ἀνισότητας κατὰ ἕνα. Ὡς πρὸς τὴν οὐσία, τὰ στοιχεῖα $x\varepsilon a$ καὶ $\{x\}\varepsilon\mathcal{P}_1(a)$ συμπεριφέρονται μὲ τὸν ἴδιο τρόπο, παρ' ὅτι εἶναι διαφορετικά.

Ὑπάρχει δηλαδὴ μιὰ ἔννοια «ἰσομορφισμοῦ», κατὰ τὴν ἀλγεβρικὴ ὁρολογία, ποὺ ἀξίζει νὰ μελετηθεῖ ἰδιαίτερα. Προκειμένου νὰ τὸ κάνουμε, ὁρίζουμε τὸν παρακάτω τελεστή:

Ορισμος 1.8.1. Ὁρίζουμε τὸν γνήσιο τελεστὴ $T : \text{Card} \rightarrow \text{Card}$ μὲ τύπο

$$T(|a|) = |\mathcal{P}_1(a)|.$$

Εἶναι σαφὲς ὅτι ὁ T δὲν ἀποτελεῖ συνάρτηση, καθὼς τὰ $T(\kappa)$ καὶ κ, ἔχουν διαφορετικ` βαθμίδα σὲ κάθε διαστρωμάτωση ποὺ τὰ περιέχει. Ὅμως ἱκανοποιεῖται προφανῶς ἡ σχέση

$$(\forall\kappa\varepsilon\text{Card})(\exists!\lambda\varepsilon\text{Card})[T(\kappa) = \lambda],$$

πρᾶγμα ποὺ δικαιολογεῖ τὸν ὁρισμό.

Λημμα 1.8.2. *Ὁ T εἶναι 1-1, ἀλλὰ ὄχι ἐπί.*

Ἀπόδειξη. Ἔστω πληθάριθμοι $\kappa = |a|, \lambda = |b|$ τ.ω. $T(\kappa) = T(\lambda)$. Τότε $|\mathcal{P}_1(a)| = |\mathcal{P}_1(b)|$ ἄρα εὔκολα $|a| = |b|$, ὁπότε $\kappa = \lambda$.

Ὑποθέτουμε πρὸς ἄτοπο ὅτι ὁ T εἶναι ἐπί. Τότε $T(|V|) = |V|$, δηλαδὴ $|\mathcal{P}_1(V)| = |V|$, ἄρα ὑπάρχει $g : V \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}_1(V)$. Θεωροῦμε τὸ σύνολο

$$a = \{x \varepsilon V \mid g(x) = \{x\}\}.$$

Γιὰ κάθε x ἰσχύει $x \varepsilon a \leftrightarrow g(x) = \iota(x)$, δηλαδὴ $g \restriction a = \iota$. Ὅμως ἡ g εἶναι συνάρτηση καὶ τὸ a σύνολο, ἄρα καὶ ἡ ι εἶναι σύνολο· ἄτοπο. $\square$

Λημμα 1.8.3. *Γιὰ κάθε φυσικὸ n, ὁ $T(n)$ εἶναι φυσικὸς καὶ μάλιστα ἰσχύει $T(\mathrm{S}(n)) = \mathrm{S}(T(n))$. Ἕπεται ὅτι $T \restriction \mathrm{N} : \mathrm{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathrm{N}$.*

Ἀπόδειξη. Θὰ τὰ δείξουμε μὲ ἐπαγωγὴ στὸ n. Στὴ βάση εἶναι φανερὸ ὅτι $T(0) = T(|\emptyset|) = |\mathcal{P}_1(\emptyset)| = |\emptyset| = 0 \varepsilon \mathrm{N}$. Γιὰ τὸ ἐπαγωγικὸ βῆμα, ἔχουμε $T(\mathrm{S}(n)) = T(|a \cup \{x\}|) = |\mathcal{P}_1(a \cup \{x\})| = \cdots = |\mathcal{P}_1(a)| + |\mathcal{P}_1(\{x\})| = T(n) + 1 \varepsilon \mathrm{N}$.

Θὰ δείξουμε τώρα ὅτι γιὰ κάθε φυσικὸ m ὑπάρχει φυσικὸς n τ.ω. $T(n) = m$, μὲ ἐπαγωγὴ στὸ m. Ἂν $m = 0$ τότε $T(0) = 0$. Ἂν $m = 1$ εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι $T(1) = 1$. Ἔστω $m > 1$. Τότε $m = \mathrm{S}(n) = \mathrm{SS}(k)$ γιὰ κάποια $n, k \varepsilon \mathrm{N}$. Ἀπὸ τὴν Ε.Υ. ἕπεται ὅτι $n = T(k)$. Ἄρα, $m = \mathrm{S}(n) = \mathrm{S}(T(k)) = T(\mathrm{S}(k)) = T(n)$. $\square$

Προταση 1.8.4. *Ὁ T διατηρεῖ τὴν πρόσθεση καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸ πληθαρίθμων, δηλαδὴ γιὰ ὅλους τοὺς $\kappa, \lambda \varepsilon \mathrm{Card}$,*

α) $T(\kappa + \lambda) = T(\kappa) + T(\lambda)$

β) $T(\kappa\lambda) = T(\kappa) \cdot T(\lambda)$.

Ἕπεται ὅτι ὁ T εἶναι ἐνδομορφισμὸς τοῦ Card *καὶ ἰσομορφισμὸς τοῦ* N*, κατὰ τὴν ἀλγεβρικὴ ἔννοια.*

Ἀπόδειξη. **α)** Ἔστω $\kappa = |a|$ καὶ $\lambda = |b|$, γιὰ $a \cap b = \emptyset$. Τότε $\kappa \oplus \lambda = |a \cup b|$.

Παρατηροῦμε εὔκολα ὅτι $\mathcal{P}_1(a) \cap \mathcal{P}_1(b) = \emptyset$ καὶ ὑπενθυμίζουμε, ἀπὸ τὸ 1.7.9, ὅτι

$$\mathcal{P}_1(a \cup b) = \mathcal{P}_1(a) \cup \mathcal{P}_1(b).$$

Τώρα ἡ ἐπαλήθευση τῆς ἰδιότητας εἶναι εὔκολη.

β) Ἔστω $\kappa = |a|$ καὶ $\lambda = |b|$. Τότε $\kappa \odot \lambda = |a \times b|$. Μὲ χρήση τοῦ 1.7.8 ἕπεται εὔκολα ἡ ζητούμενη. $\square$

Λημμα 1.8.5. *Γιὰ ὅλους τοὺς πληθάριθμους κ, λ ἰσχύει*

$$\kappa \leqslant \lambda \leftrightarrow T(\kappa) \leqslant T(\lambda).$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\kappa = |a|$ καὶ $\lambda = |b|$, ὅπου a, b τυχαῖα σύνολα. Τότε, ἡ σχέση πρὸς ἀπόδειξη εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν

$$|a| \leqslant |b| \leftrightarrow |\mathcal{P}_1(a)| \leqslant |\mathcal{P}_1(b)|,$$

ποὺ εἶναι γνωστὴ ἀπὸ τὸ 1.7.8. □

Τώρα θὰ ὁρίσουμε τὴν πράξη τῆς ἐκθετοποίησης φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ πληθαρίθμων, μιὰ διαδικασία στὴν ὁποία ἐμπλέκεται ὁ τελεστὴς T.

Ορισμος 1.8.6. Γιὰ ὅλους τοὺς φυσικοὺς m, n ὁρίζουμε

$$\begin{cases} m^0 = 1 \\ m^{\mathrm{S}(n)} = m^n \cdot m \end{cases}$$

καὶ γιὰ ὅλους τοὺς πληθαρίθμους $\kappa = |a|, \lambda = |b|$

$$\kappa^\lambda = |a^b|.$$

Πρῶτα πρέπει νὰ δείξουμε τὴ συμφωνία τῶν δύο ὁρισμῶν γιὰ φυσικοὺς ἀριθμούς.

Προταση 1.8.7. *Οἱ δύο ὁρισμοὶ τῆς ἐκθετοποίησης συμφωνοῦν γιὰ φυσικοὺς ἀριθμούς.*

Ἀπόδειξη. Θὰ δείξουμε ὅτι ἀπὸ τὸν γενικὸ ὁρισμὸ γιὰ ὅλους τους πληθαρίθμους ἕπεται ὁ συγκεκριμένος γιὰ τοὺς πεπερασμένους πληθαρίθμους, δηλαδὴ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς. Θὰ τὸ κάνουμε μὲ ἐπαγωγὴ στὸ n. Τὸ ἀντίστροφο γίνεται μὲ τὸν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο.

Ὑποθέτουμε ὅτι $m = |a|, n = |b|$. Στὴ βάση ἔχουμε $n = 0$, ὁπότε $b = \emptyset$ καὶ ἡ μόνη συνάρτηση $\emptyset \to a$ εἶναι ἡ κενὴ συνάρτηση. Ἄρα, $|a^\emptyset| = 1$. Ἄρα, $m^0 = 1$.

Ἔστω τώρα $b \varepsilon \mathrm{S}(n)$ καὶ ἡ πρόταση ἰσχύει γιὰ n. Τότε $b = c \cup \{x\}$ γιὰ $c \varepsilon n$, $x \not\varepsilon c$. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε συνάρτηση $f : b \to a$ ἐπάγει μιὰ συνάρτηση $f_1 : c \to a$ καὶ μιὰ $f_2 : \{x\} \to a$, δηλαδὴ ἕνα ζεῦγος $\langle f_1, f_2 \rangle \varepsilon (a^c \times a^{\{x\}})$. Ἄρα,

$$m^{\mathrm{S}(n)} = |a^c \times a^{\{x\}}| = |a^c| \cdot |a^{\{x\}}| = m^n \cdot m.$$

□

Εὔκολα ἀποδεικνύονται γιὰ ὅλους τοὺς φυσικοὺς m, n, k οἱ ἰδιότητες

1. $m^{n+k} = m^n \cdot m^k$
2. $(m \cdot n)^k = m^k \cdot n^k$

3. $(m^n)^k = m^{n \cdot k}$.

Θὰ δώσουμε τώρα ἕναν εἰδικὸ ὁρισμὸ τῆς ἐκθετοποίησης πληθαρίθμων, γιὰ τὴν περίπτωση ὅπου ἡ βάση ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸ 2. Ὁ λόγος ποὺ τὸ κάνουμε θὰ φανεῖ σὲ λίγο.

Ορισμος 1.8.8. Γιὰ κάθε πληθάριθμο λ, ὁρίζουμε τὸν 2^λ ὡς ἑξῆς:

$$2^\lambda = \begin{cases} |\mathcal{P}(a)|, & \exists a[\lambda = |\mathcal{P}_1(a)|] \\ \emptyset, & \text{ἀλλιῶς} \end{cases}$$

Ἰσοδύναμα, ὁρίζουμε

$$2^\lambda = T(\lambda)$$

Πρὶν δείξουμε ὅτι οἱ δύο ὁρισμοὶ ταυτίζονται γιὰ $\lambda = 2$, ἂς κάνουμε μιὰ ἐνδιαφέρουσα παρατήρηση.

Στὴ συνήθη συνολοθεωρία, ἰσχύει ὅτι

$$|x| = n \to |\mathcal{P}(x)| = 2^n.$$

Αὐτὴ ἡ σχέση ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $\mathcal{P}(x) \sim 2^x$, ποὺ στὴν NF δὲν ἰσχύει, ἀφοῦ οἱ βαθμίδες τῶν $\mathcal{P}(x)$ καὶ $x2^x$ εἶναι διαφορετικές, σὲ τυχοῦσα διαστρωμάτωση ποὺ περιέχει τὸ x.

Ἀντ' αὐτῆς, ἰσχύει κάτι ἄλλο (ποὺ ὅπως περιμένουμε, περιέχει τὸν τελεστὴ T):

Θεωρημα 1.8.9. *Γιὰ κάθε x, ἰσχύει $\mathcal{P}(x) \sim 2^{\mathcal{P}_1(x)}$. Ἔπεται ὅτι*

$$|x| = n \to |\mathcal{P}(x)| = 2^{T(n)}.$$

Ἀπόδειξη. Κατ' ἀρχάς, παρατηροῦμε ὅτι οἱ βαθμίδες τῶν $\mathcal{P}(x)$ καὶ $2^{\mathcal{P}_1(x)}$ εἶναι ἴσες, σὲ τυχοῦσα διαστρωμάτωση ποὺ περιέχει τὸ x. Τώρα, ἡ 1-1 καὶ ἐπὶ συνάρτηση ποὺ ζητᾶμε εἶναι αὐτὴ ποὺ ἀπεικονίζει τὸ τυχαῖο $x \subseteq a$ στὴ χαρακτηριστικὴ συνάρτηση $\chi_{\mathcal{P}_1(x)} : \mathcal{P}_1(x) \to 2$. □

Προταση 1.8.10. *Οἱ δύο ὁρισμοὶ τῆς ἐκθετοποίησης πληθαρίθμων ταυτίζονται, ὅταν βάση τῆς δύναμης εἶναι τὸ 2.*

Ἀπόδειξη. Ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι ὁ γενικὸς ὁρισμὸς 1.8.6 συνεπάγεται τὸν 1.8.8. Ἔστω $b = \mathcal{P}_1(c)$, γιὰ κάποιο σύνολο c καὶ $|a| = 2$, ἄρα $a = \{x, y\}$ γιὰ κάποια $x \neq y$. Τότε, ἀπὸ τὸ προηγούμενο θεώρημα ἔχουμε

$$2^\lambda = |\{x, y\}^{\mathcal{P}_1(c)}| = |\mathcal{P}(c)|.$$

□

Πᾶμε τώρα σὲ ἕνα ἄλλο θέμα. Στὴ συνήθη συνολοθεωρία ἰσχύει ὅτι τὸ σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ τῶν μικρότερων τοῦ n φυσικῶν ἀριθμῶν ἔχει πληθικότητα n. Πρόκειται γιὰ μιὰ σχέση διαισθητικὰ προφανῆ ποὺ χρησιμοποιεῖται συνεχῶς στὰ Μαθηματικά. Δυστυχῶς στὴν NF δὲν ἰσχύει πάντα. Μάλιστα ἀποδεικνύεται ἰσοδύναμη μὲ τὸ *ἀξίωμα ἀρίθμησης* ποὺ θὰ δοῦμε σὲ λίγο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8.11. *Ὀνομάζοντας* $\mathrm{N}_n = \{m \varepsilon \mathrm{N} \mid m < n\}$ *τὸ ἀπόκομμα τοῦ* N *μέχρι* n*, ἔχουμε*

$$(\forall n \varepsilon \mathrm{N})[T^2(n) = n] \leftrightarrow (\forall n \varepsilon \mathrm{N})[\mathrm{N}_n \varepsilon n].$$

Ἀπόδειξη. ($\rightarrow$) Κατ' ἀρχὴν παρατηροῦμε ὅτι ὁ τύπος $\mathrm{N}_n \varepsilon n$ δὲν εἶναι διαστρωματωμένος, γιατὶ ἡ βαθμίδα τοῦ N_n) εἶναι κατὰ ἕνα μεγαλύτερη (καὶ ὄχι μικρότερη) τῆς βαθμίδας τοῦ n, σὲ κάθε διαστρωμάτωση ποὺ περιέχει τὸ n. Θέτοντας ὅμως $n = T^2(n)$, ὁ τύπος γράφεται

$$\mathrm{N}_n \varepsilon T^2(n)$$

καὶ γίνεται διαστρωματωμένος. Ἡ ἰσχύς του ἀποδεικνύεται εὔκολα, μὲ ἐπαγωγὴ στο n.

($\leftarrow$) Ἔστω τώρα $|\mathrm{N}_n| = n$. Θεωροῦμε τὴ σχέση

$$(\forall n \varepsilon \mathrm{N})(\forall x \varepsilon n)[\mathcal{P}_1^2(x) \sim \mathrm{N}_n]. \tag{$\star$}$$

Ἡ ($\star$) εἶναι διαστρωματωμένη καὶ ἀποδεικνύεται μὲ ἐπαγωγὴ στὸ n. Στὴ βάση ($n = 0$) ἔχουμε ὅτι $x = \emptyset$ ἄρα $\mathcal{P}_1^2(\emptyset) = \emptyset = \mathrm{N}_n$.

Ἔστω ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει γιὰ n καὶ ἔστω $y \varepsilon \mathrm{S}(n)$. Τότε $y = x \cup \{z\}$, γιὰ $x \varepsilon n$ καὶ $z \not\varepsilon x$. Ἀπὸ τὴν Ε.Υ. ὑπάρχει $f : \mathcal{P}_1^2(x) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{N}_n$. Δεδομένου ὅτι $\mathcal{P}_1^2(y) = \{\{z\}\} \cup \mathcal{P}_1^2(x)$, μποροῦμε νὰ ἐπεκτείνουμε τὴν f διὰ τῆς ἀντιστοίχισης $\{\{z\}\} \mapsto n$.

Ἀπὸ τὴν ($\star$) ἔπεται ὅτι $T^2(|x|) = n$ γιὰ $|x| = n$, ἄρα $T^2(n) = n$ γιὰ κάθε φυσικὸ n. □

ΛΗΜΜΑ 1.8.12. *Γιὰ κάθε* $n \varepsilon \mathrm{N}$, $T(n) = n \leftrightarrow T^2(n) = n$.

Ἀπόδειξη. Τὸ εὐθὺ εἶναι προφανές. Γιὰ τὸ ἀντίστροφο, ὑποθέτουμε πρὸς ἄτοπο ὅτι $T(n) \neq n$. Ἀπὸ τὴ γραμμικότητα τῆς φυσικῆς διάταξης τοῦ N ἔπεται ὅτι $T(n) < n$ ἢ $T(n) > n$. Ἐπειδὴ ὁ T διατηρεῖ τὴ διάταξη, ἡ πρώτη δίνει $T^2(n) < T(n)$, ἄρα $T(n) < n$, ἄτοπο. Ὁμοίως ἡ δεύτερη δίνει $T(n) > n$, ποὺ εἶναι ἄτοπο. □

Εἰσάγουμε τώρα τὸ *ἀξίωμα ἀρίθμησης (axiom of counting, CA)*:

$$(\forall n \varepsilon N)[T(n) = n] \tag{CA}$$

Τὸ ἀξίωμα ἀρίθμησης μᾶς λέει ὅτι ὁ T ἀφήνει ἀναλλοίωτους ὅλους τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς. Αὐτὸ τὸ ξέρουμε ἤδη γιὰ *συγκεκριμένους* φυσικοὺς ἀριθμούς, ἀλλὰ δὲν μποροῦμε νὰ τὸ ἀποδείξουμε γενικά.

Τώρα, συνδυάζοντας τὰ 1.8.11 καὶ 1.8.12 ἔχουμε ὅτι

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8.13. *Τὸ ἀξίωμα ἀρίθμησης εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὴν πρόταση* $(\forall n \varepsilon \mathrm{N})[T(n) = n]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.14. Ἕνα σύνολο a λέγεται *καντοριανὸ (cantorian)*, ἂνν $a \sim \mathcal{P}_1(a)$. Συμβολίζουμε $\mathrm{Can}(a)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8.15. *Γιὰ ὅλα τὰ σύνολα* a, b *ἰσχύει:*

1. $[\mathrm{Can}(a) \ \wedge \ a \sim b] \to \mathrm{Can}(b)$
2. $\mathrm{Can}(a) \to \mathrm{Can}(\mathcal{P}(a))$
3. $[\mathrm{Can}(a) \ \wedge \ \mathrm{Can}(b)] \to \mathrm{Can}(a \times b)$.
4. $[\mathrm{Can}(a) \ \wedge \ \mathrm{Can}(b) \ \wedge \ a \cap b = \emptyset] \to \mathrm{Can}(a \cup b)$.

Ἀπόδειξη. **(1)** Ἀπὸ τὸ 1.7.6.
(2) Ἀπὸ τὰ 1.7.2 καὶ 1.6.14.
(3) Ἔστω $a \sim \mathcal{P}_1(a)$ καὶ $b \sim \mathcal{P}_1(b)$. Ἀπὸ τὸ 1.7.8 ἔχουμε

$$a \times b \sim \mathcal{P}_1(a) \times \mathcal{P}_1(b) \sim \mathcal{P}_1(a \times b).$$

(4) Ἔστω $a \sim \mathcal{P}_1(a)$ καὶ $b \sim \mathcal{P}_1(b)$. Ἀπὸ τὸ 1.7.9 ἔχουμε

$$a \cup b \sim \mathcal{P}_1(a) \cup \mathcal{P}_1(b) \sim \mathcal{P}_1(a \cup b).$$

□

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.16. Τὸ σύνολο a λέγεται *ἰσχυρῶς καντοριανὸ (strongly cantorian)*, ἂνν ὑπάρχει ἡ συνάρτηση

$$\iota \upharpoonright a = \{\langle x, \{x\} \mid x \varepsilon a\}.$$

Συμβολισμός: $\mathrm{stcan}(a)$.

Προφανῶς,

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8.17. *Κάθε ἰσχυρῶς καντοριανὸ σύνολο εἶναι καντοριανό.*

1.9 Διατακτικοὶ ἀριθμοὶ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.9.1 (Ἀρχὴ ὑπερπεπερασμένης ἐπαγωγῆς)**.** *Ἔστω* $\langle a, \leqslant \rangle$ *κ.δ.σ. καὶ* b *τυχαῖο σύνολο. Ἂν*

$$(\forall x \varepsilon b)[\mathrm{seg}_a(x) \subseteq b \to x \varepsilon b],$$

τότε $a \subseteq b$.

Ἀπόδειξη. Πρὸς ἄτοπο, ἔστω ὅτι $a - b \neq \emptyset$. Τότε τὸ $a - b$ ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο x καὶ ἰσχύει ὅτι $\mathrm{seg}(x) \subseteq b$. Πράγματι, ἂν $t\varepsilon\mathrm{seg}(x)$ τότε $t < x$, ὁπότε $t\varepsilon b$, γιατὶ ἀλλιῶς θὰ ἦταν ἑπόμενο τοῦ x, ἐξ ὁρισμοῦ.

Ἀπὸ τὴν ὑπόθεση ἕπεται ὅτι $x\varepsilon b$, ἄτοπο. □

Θεωρημα 1.9.2 (Ἀρχὴ ὑπεπερασμένης ἀναδρομῆς)**.** *Ἔστω $\langle a, \leqslant\rangle$ καὶ συνάρτηση*

$$F : \big(\{\mathrm{seg}(x) | x\varepsilon a\} \to V\big) \to \mathcal{P}_1((V).$$

Ὑπάρχει μοναδικὴ συνάρτηση $f : a \to V$ τ.ω. γιὰ κάθε $x\varepsilon a$,

$$\{f(x)\} = F(f \restriction \mathrm{seg}(x)).$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω $x\varepsilon a$, τυχαῖο ἀλλὰ σταθερό. Ὑποθέτουμε ὅτι γιὰ κάθε $y < x$ ὑπάρχει μοναδικὴ $g_y : \mathrm{seg}(y) \to V$ τ.ω.

$$\{g_y(z)\} = F(g_y \restriction \mathrm{seg}(z))$$

γιὰ κάθε $z\varepsilon\mathrm{seg}(x)$.

Θέτουμε

$$h = \Big(\bigcup\{g_y | y < x\}\Big) \cup \Big(\bigcup\{\{x\} \times F(g_y) | y < x\}\Big).$$

Ἔστω $z \leqslant x$. Τότε $z \leqslant y$ γιὰ κάποιο $y < x$ ἢ $z = x$. Ἔχουμε λοιπὸν δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Ἂν $z\varepsilon\mathrm{seg}(y)$ γιὰ κάποιο $y < x$. Τότε $h(z) = g_y(z)$, ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς h, ἄρα εἶναι μοναδικὴ γιὰ τὸ y καὶ ἱκανοποιεῖ τὴν ἰδιότητα.

Περίπτωση 2: Ἂν $z = x$, τότε

$$h(z) = \text{ τὸ μοναδικὸ } u \text{ τ.ω. } \{u\} = F(g_y) \text{ γιὰ κάποιο } y < x.$$

Τότε $\{h(z)\} = \{u\} = F(g_y) = F(h \restriction \mathrm{seg}(x))$, γιὰ κάποιο $y < x$.

Ἄρα, ἡ h ἔχει τύπο

$$h(z) = \begin{cases} g_y(z), & \text{ἂν ὑπάρχει } y \text{ τ.ω.} z \leqslant y < x \\ u, & \text{ἂν } z = x \text{ καὶ } \{u\} = F(g_y) \text{ γιὰ κάποιο } y < x. \end{cases}$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω, χρησιμοποιῶντας τὸ 1.9.1 συνάγουμε ὅτι γιὰ κάθε $x\varepsilon a$ ὑπάρχει μοναδικὴ $g_x : \mathrm{seg}(x) \to V$ τ.ω. $\{g_x(z)\} = F(g_x \restriction \mathrm{seg}(x))$, γιὰ κάθε $z \leqslant x$.

Ὁρίζουμε τέλος $f = \bigcup\{g_x \mid x\varepsilon a\}$. Ἀπὸ τὴ μέχρι τώρα συζήτηση γίνεται προφανὲς ὅτι αὐτὴ εἶναι ἡ ζητούμενη. □

Ἂς νὰ δοῦμε λοιπὸν πῶς χρησιμοποιοῦνται στὴν πράξη οἱ ἀρχὲς ὑπερπεπερασμένης ἐπαγωγῆς καὶ ἀναδρομῆς. Θεωροῦμε ἕνα κ.δ.σ. $\langle a, \leqslant\rangle$.

Στὴν ἀρχὴ ὑπερπεπερασμένης ἐπαγωγῆς, γιὰ νὰ δείξουμε ὅτι ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ a ἱκανοποιοῦν μιὰ ἰδιότητα (ἰσοδύναμα, ὅτι ἀνήκουν σὲ ἕνα σύνολο A), ὑποθέτουμε ὅλα τὰ στοιχεῖα $y < x$ ἀνήκουν στὸ A καὶ ἀποδεικνύουμε ὅτι ἀνήκει καὶ τὸ x, γιὰ x τυχαῖο ἀλλὰ σταθερό στοιχεῖο τοῦ a.

Παρομοίως, γιὰ νὰ κατασκευάσουμε μιὰ συνάρτηση f πάνω σὲ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ a (δηλαδὴ πάνω στὸ a), κατασκευάζουμε συναρτήσεις πάνω σὲ ὅλα τὰ στοιχεῖα $y < x$ καὶ κατασκευάζουμε μιὰ τέτοια συνάρτηση στὸ ἴδιο τὸ x, γιὰ x τυχαῖο ἀλλὰ σταθερὸ στοιχεῖο τοῦ a.

Ορισμος 1.9.3. Στὸ σύνολο WOrd τῶν καλὰ διατεταγμένων συνόλων, ὁρίζουμε τὴ *σχέση ὁμοιότητας* $\cong$ ὡς ἑξῆς:

$$\langle a, \leqslant^a \rangle \cong \langle b, \leqslant^b \rangle \leftrightarrow \exists f[f : a \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow b \ \wedge \ (\forall x, y \varepsilon a)[x \leqslant^a y \leftrightarrow f(x) \leqslant^b f(y)]].$$

Ἡ συνάρτηση f καλεῖται *ὁμοιότητα*.

Λημμα 1.9.4. *Ἔστω $\langle a, \leqslant^a \rangle$, $\langle b, \leqslant^b \rangle$ κ.δ.σ. Τότε ἰσχύει ἀκριβῶς ἕνα ἀπὸ τὰ ἑξῆς:*

1. *Τὰ $\langle a, \leqslant^a \rangle$, $\langle b, \leqslant^b \rangle$ εἶναι ὅμοια, καὶ ἡ μεταξύ τους ὁμοιότητα εἶναι μοναδικὴ (κατὰ προσέγγιση ἀντιστροφῆς).*

2. *Τὰ $\langle a, \leqslant^a \rangle$, $\langle b, \leqslant^b \rangle$ δὲν εἶναι ὅμοια, καὶ ἡ $\leqslant^b$ εἶναι ἐπέκταση μιᾶς διάταξης ὅμοιας τῆς $\leqslant^a$.*

3. *Τὰ $\langle a, \leqslant^a \rangle$, $\langle b, \leqslant^b \rangle$ δὲν εἶναι ὅμοια, καὶ ἡ $\leqslant^a$ εἶναι ἐπέκταση μιᾶς διάταξης ὅμοιας τῆς $\leqslant^b$.*

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τὴ συνάρτηση

$$F(\mathrm{seg}(x)) = \{\min(a - \mathrm{seg}(x))\}.$$

Ἀπὸ τὸ 1.9.2 ὁρίζεται ἡ συνάρτηση $h : a \to b$ μὲ τύπο

$$h(x) = \min(a - \mathrm{seg}(x)).$$

Γιὰ τυχαῖα $x, y \varepsilon a$ προφανῶς ἔχουμε $x \leqslant^a y \leftrightarrow h(x) \leqslant^b h(y)$. Ἑπομένως, ἡ h διατηρεῖ τὴ διάταξη. Ἄρα εἶναι 1-1.

(1) Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι $\langle a, \leqslant^a \rangle \cong \langle b, \leqslant^b \rangle$. Θὰ κατασκευάσουμε μιὰ ὁμοιότητα καὶ θὰ δείξουμε ὅτι εἶναι ἡ μοναδική, κατὰ προσέγγιση ἀντιστροφῆς.

Ἔστω $k : a \to b$ τυχαία ὁμοιότητα. Ὑποθέτουμε ὅτι $h(x) = h(y)$ γιὰ κάθε $x <^a x_0$ καὶ μποροῦμε εὔκολα νὰ δείξουμε ὅτι $h(x_0) = k(x_0)$, ὁπότε ἀπὸ τὸ 1.9.1 θὰ προκύψει ὅτι $h = k$. Τὸ ἀποτέλεσμα θὰ εἶναι ὅτι ὑπάρχει μοναδικὴ ὁμοιότητα, καὶ αὐτὴ εἶναι ἡ h.

(2) Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι $\langle a, \leqslant^a\rangle \not\cong \langle b, \leqslant^b\rangle$. Ἄρα, ἡ h δὲν εἶναι ἐπί,γιατὶ ἂν ἀλλιῶς θὰ ἦταν καὶ ὁμοιότητα, ἄτοπο. Ἄρα, $h[a] \subsetneq b$. Ἐπίσης, $\langle a, \leqslant^a\rangle \cong \langle h[a], \leqslant^b\rangle$. Ἕπεται ὅτι ἡ $\leqslant^b$ εἶναι ἔπεκταση τῆς καλῆς διάταξης $\leqslant^b\restriction h[a]$, ποὺ εἶναι ὅμοια μὲ τὴν $\leqslant^a$.

(3) Ὑποθέτουμε καὶ πάλι ὅτι $\langle a, \leqslant^a\rangle \not\cong \langle b, \leqslant^b\rangle$. Ἐντελῶς ἀντίστοιχα μὲ ὅ,τι κάναμε θὰ μπορούσαμε νὰ εἴχαμε κατασκευάσει τὴν h ὥστε νὰ εἶναι $h : b \to a$. Στὴν περίπτωση αὐτὴ θὰ καταλήγαμε ὅτι ἡ $\leqslant^a$ εἶναι ἔπεκταση τῆς καλῆς διάταξης $\leqslant^a\restriction h[b]$, ποὺ εἶναι ὅμοια μὲ τὴν $\leqslant^b$. $\square$

Προφανῶς, ἡ ὁμοιότητα εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας. Ὁρίζουμε λοιόν:

Ορισμος 1.9.5. Τὸ σύνολο ἰσοδυναμίας κάθε κ.δ.σ. $\langle a, \leqslant^a\rangle$ μέσω τῆς ὁμοιότητας ὀνομάζεται *διατακτικὸς τύπος τοῦ* $\langle a, \leqslant^a\rangle$ ἢ *διατακτικὸς ἀριθμὸς* καὶ συμβολίζεται

$$\alpha = \mathrm{ord}(\langle a, \leqslant^a\rangle) = [\![\langle a, \leqslant^a\rangle]\!].$$

Τὸ σύνολο ὅλων τῶν διατακτικῶν ἀριθμῶν (σύνολο-πηλίκο τῆς $\cong$) συμβολίζεται On.

Συμβολίζουμε τὸν διατακτικὸ τύπο τοῦ $\langle \mathrm{N}, \leqslant^{\mathrm{N}}\rangle$ μὲ ω:

$$\omega = \langle \mathrm{N}, \leqslant^{\mathrm{N}}\rangle.$$

Ορισμος 1.9.6. Ὁρίζουμε τὴ *φυσικὴ διάταξη τῶν διατακτικῶν ἀριθμῶν* $\leqslant^{On}$, ὡς ἑξῆς, γιὰ ὅλους τοὺς δ.α. α, β:

$$\alpha \leqslant^{On} \beta \leftrightarrow [\alpha = \beta \vee (\forall\langle a, \leqslant^a\rangle\varepsilon\alpha)(\forall\langle b, \leqslant^b\rangle\varepsilon\beta)(\exists x\varepsilon b)[\langle a, \leqslant^a\rangle \cong \langle \mathrm{seg}_b, \leqslant^b\restriction \mathrm{seg}_b(x)\rangle]].$$

Θεωρημα 1.9.7. *Τὸ* $\langle On, \leqslant^{On}\rangle$ *εἶναι κ.δ.σ.*

Ἀπόδειξη. Ἡ $\leqslant^{On}$ εἶναι προφανῶς μερικὴ διάταξη καὶ ἀπὸ τὸ 1.9.4 εἶναι γραμμική. Ἔστω τώρα $A \neq \emptyset$ σύνολο δ.α. Θὰ δείξουμε ὅτι ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο.

Ἔστω $\alpha\varepsilon A$ καὶ $\langle a, \leqslant^a\rangle\varepsilon\alpha$. Θεωροῦμε τὸ σύνολο

$$S = \{x\varepsilon a \mid \langle \mathrm{seg}(x), \leqslant^a\restriction \mathrm{seg}(x)\rangle\varepsilon \cup A\}.$$

Ἔχουμε δύο περιπτώσεις.

<u>Περίπτωση 1:</u> Ἔστω $S = \emptyset$. Ἂν δὲν ὑπάρχει $\beta <^{On} \alpha$, τότε προφανῶς $\alpha = \min(A)$. Ἂν ὑπάρχουν $\beta <^{On} \alpha$, τότε θεωροῦμε ἕνα. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς φυσικῆς διάταξης, ὑπάρχουν $\langle b, \leqslant^b\rangle\varepsilon\beta$, $x\varepsilon a$ τ.ω.

$$\langle b, \leqslant^b\rangle \cong \langle \mathrm{seg}_a, \leqslant^a\restriction \mathrm{seg}_a(x)\rangle.$$

Τότε $\langle \mathrm{seg}_b, \leqslant^b\restriction \mathrm{seg}_b(x)\rangle\varepsilon\beta$. Θεωροῦμε πρὸς ἄτοπο ὅτι $\beta\varepsilon A$. Τότε $\langle \mathrm{seg}_b, \leqslant^b\restriction \mathrm{seg}_b(x)\rangle\varepsilon \cup A$, ἄρα $x\varepsilon S$, ἄτοπο.

Ἕπεται ὅτι γιὰ κάθε $\beta <^{On} \alpha$, $\beta \notin A$. Ἄρα, $\alpha = \min(A)$.

Περίπτωση 2: Ἔστω $S \neq \emptyset$. Ἐπειδὴ $S \subseteq a$, ἕπεται ὅτι τὸ S ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο x_0. Τότε $\mathrm{seg}_a(x_0) = \{x \varepsilon a \mid x <^a x_0\} = \emptyset$. Ἐπειδὴ $x_0 \varepsilon S$, ἕπεται ὅτι $\langle \mathrm{seg}(x_0), \leqslant^a \restriction \mathrm{seg}(x_0)\rangle = \langle \emptyset, \leqslant^a \restriction \emptyset\rangle \langle \emptyset, \leqslant^{\emptyset}\rangle \varepsilon \cup A$, δηλαδὴ

$$\langle \emptyset, \leqslant^a \restriction \emptyset\rangle \varepsilon \mathrm{ord}(\langle \emptyset, \leqslant^a \restriction \emptyset\rangle) \varepsilon A.$$

Ἐπίσης, δὲν ὑπάρχουν δ.α. τοῦ A μικρότεροι τοῦ $\mathrm{ord}(\langle \emptyset, \leqslant^a \restriction \emptyset\rangle)$, γιατὶ ἂν ὑπῆρχε $\mathrm{ord}(\langle b, \leqslant^b\rangle) <^{On} \mathrm{ord}(\langle \emptyset, \leqslant^{\emptyset}\rangle)$, τότε θὰ ὑπῆρχε $x \varepsilon \emptyset$ τ.ω.

$$\langle b, \leqslant^b \cong \langle \mathrm{seg}(x), \leqslant^{\emptyset}\rangle \cong \langle \emptyset, \leqslant^a \restriction \emptyset\rangle),$$

ἐνῶ $\langle b, \leqslant^b \neq_o \langle \emptyset, \leqslant^a \restriction \emptyset\rangle)$, ἄτοπο.

Ἄρα, ὁ $\mathrm{ord}(\langle \emptyset, \leqslant^a \restriction \emptyset\rangle)$ εἶναι τὸ ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ A. □

Συμβολίζουμε μὲ Ω τὸν διατακτικὸ τύπο τοῦ $\langle On, \leqslant^{On}\rangle$, δηλαδὴ

$$\Omega = \mathrm{ord}(\langle On, \leqslant^{On}\rangle).$$

Τὰ ἑπόμενα δύο λήμματα δικαιώνουν τὸν ὁρισμὸ τοῦ τελεστῆ T:

Λημμα 1.9.8. *Γιὰ κάθε κ.δ.σ. $\langle a, \leqslant^a\rangle$ ὑπάρχει το κ.δ.σ. $\langle \mathcal{P}_1(a), \leqslant_1^a\rangle$, ὅπου*

$$\{x\} \leqslant_1^a \{y\} \leftrightarrow x \leqslant^a y,$$

γιὰ ὅλα $\{x\}, \{y\} \varepsilon \mathcal{P}_1(a)$.

Λημμα 1.9.9. *Γιὰ ὅλα τὰ κ.δ.σ. $\langle a, \leqslant^a\rangle$, $\langle b, \leqslant^b\rangle$, ἰσχύει*

$$\langle a, \leqslant^a\rangle \cong \langle b, \leqslant^b\rangle \rightarrow \langle \mathcal{P}_1(a), \leqslant_1^a\rangle \cong \langle \mathcal{P}_1(b), \leqslant_1^b\rangle.$$

Ορισμος 1.9.10. Ὁρίζουμε τὸν γνήσιο τελεστὴ $T : On \rightarrow On$ μὲ τύπο

$$\mathrm{ord}(\langle a, \leqslant^a\rangle) \mapsto \mathrm{ord}(\langle \mathcal{P}_1(a), \leqslant_1^a\rangle).$$

Αὐτὸς ὁ τελεστὴς δὲν εἶναι ὁ ἴδιος μὲ τὸν ἀντίστοιχο γιὰ πληθαρίθμους καὶ δὲν πρέπει νὰ τοὺς συγχέουμε. Ὁ λόγος ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο ὄνομα εἶναι ὅτι κάνουν τὸ ἴδιο πρᾶγμα: Ἀντικαθιστοῦν τὴ χρήση τοῦ a στὴ δοθεῖσα συνολοθεωρητικὴ ἔννοια μὲ τὸ $\mathcal{P}_1(a)$, ὥστε νὰ ἀνεβάσουν τὴ βαθμίδα τῆς ἔννοιας κατὰ ἕνα.

Προταση 1.9.11. *Ὁ τελεστὴς T διατηρεῖ τὴ διάταξη, δηλαδὴ*

$$\alpha \leqslant^{On} \beta \leftrightarrow \alpha_1 \leqslant^{On} \beta_1,$$

γιὰ ὅλους τοὺς δ.α. α, β. Ἕπεται ὅτι εἶναι 1-1.

Ἀπόδειξη. ($\rightarrow$) Ἔστω $\alpha \leqslant^{On} \beta$ καὶ $\langle a, \leqslant^a \rangle \varepsilon \alpha$, $\langle b, \leqslant^b \rangle \varepsilon \beta$. Τότε ὑπάρχει $y \varepsilon b$ τ.ω.

$$\langle a, \leqslant^a \rangle \cong \langle \mathrm{seg}_b(y), \leqslant^b \restriction \mathrm{seg}_b(y) \rangle.$$

Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι

$$\langle \mathcal{P}_1(a), \leqslant_1^a \rangle \cong \langle \mathrm{seg}_{\mathcal{P}_1(b)}(\{y\}), \leqslant_1^b \restriction \mathrm{seg}_{\mathcal{P}_1(b)}(\{y\}) \rangle.$$

Ἔστω $f : a \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathrm{seg}_b(y)$ ὁμοιότητα. Ὁρίζουμε τὴ συνάρτηση $g : \mathcal{P}_1(a) \rightarrow \mathrm{seg}_{\mathcal{P}_1(b)}(\{y\})$, μὲ τύπο $g(\{x\}) = \{f(x)\}$. Ἤδη ξέρουμε ὅτι ἡ g, ἂν ὑπάρχει, διατηρεῖ τὴ διάταξη καὶ εἶναι ἔνεση.

($\leftarrow$) Ἔστω $\alpha_1 \leqslant^{On} \beta_1$ καὶ $\langle a, \leqslant^a \rangle \varepsilon \alpha$, $\langle b, \leqslant^b \rangle \varepsilon \beta$. Τότε ὑπάρχει $\{y\} \varepsilon \mathcal{P}_1(b)$ τ.ω.

$$\langle \mathcal{P}_1(a), \leqslant_1^a \rangle \cong \langle \mathrm{seg}_{\mathcal{P}_1(b)}(\{y\}), \leqslant_1^b \restriction \mathrm{seg}_{\mathcal{P}_1(b)}(\{y\}) \rangle.$$

Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι

$$\langle a, \leqslant^a \rangle \cong \langle \mathrm{seg}_b(y), \leqslant^b \restriction \mathrm{seg}_b(y) \rangle.$$

Ἔστω $g : \mathcal{P}_1(a) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathrm{seg}_{\mathcal{P}_1(b)}(\{y\})$. Πρέπει νὰ βροῦμε μιὰ ὁμοιότητα

$$f : a \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathrm{seg}_b(y).$$

Δίνουμε τὸν τύπο τῆς f,

$$f(y) = \cup g(\{y\})$$

καὶ μετὰ εἶναι εὔκολο. $\square$

Κλείνουμε τὴν ἑνότητα, ἀναφέροντας χωρὶς ἀπόδειξη κάποιες ἰδιότητες τοῦ τελεστῆ T μεταξὺ διατακτικῶν.

Προταση 1.9.12. *α)* *Ἂν* $\alpha = \mathrm{ord}(\langle a, \leqslant^a \rangle)$ *τότε* $T(\alpha) = \mathrm{ord}(\langle \{\mathrm{seg}_a(x) | x \varepsilon a\}, \subseteq \rangle)$.

β) *Γιὰ κάθε* $\alpha \varepsilon On$ *ἰσχύει* $T^2(\alpha) = \mathrm{ord}(\langle \mathrm{seg}_{On}(\alpha), \leqslant^{On})$.

γ) $T^2(\Omega) = \mathrm{ord}(\langle \mathrm{seg}_{On}(\Omega), \leqslant^{On} \rangle)$

δ) $T^2(\Omega) <^{On} \Omega$.

1.10 Ἀσυμβατότητα τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς μὲ τὴν NF

Ὀνομάζουμε *ἀξίωμα ἐπιλογῆς* (Α.Ε.) μιὰ ἀπὸ τὶς ἑξῆς δύο ἰσοδύναμες προτάσεις:

- Κάθε σύνολο ἔχει συνάρτηση ἐπιλογῆς (ὅπου ἡ ἔννοια τῆς συνάρτησης ἐπιλογῆς ὁρίζεται μὲ διάφορους τρόπους) καὶ
- Γιὰ κάθε σύνολο ὑπάρχει μιὰ καλὴ διάταξη· ἕπεται ὅτι τὸ σύνολο $\langle \mathrm{Card}, \leqslant^{\mathrm{Card}} \rangle$ εἶναι καλὰ διατεταγμένο (ἀρχὴ τῆς καλῆς διάταξης).

Βεβαίως, γνωρίζουμε ὅτι στὴ συνήθη συνολοθεωρία ὑπάρχουν πάνω ἀπὸ ἑκατὸ ἰσοδύναμες διατυπώσεις της. Σὲ αὐτὴ τὴν ἑνότητα μᾶς ἀρκοῦν αὐτὲς οἱ δύο διατυπώσεις.

Σκοπός μας εἶναι νὰ ἀποδείξουμε ὅτι στὴν NF ἰσχύει ἡ *ἄρνηση* τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς. Θὰ δείξουμε δηλαδὴ ὅτι

$$\vdash_{\mathrm{NF}} \neg(AE).$$

Αὐτὸ εἶναι ἴσως τὸ πιὸ ἀναπάντεχο ἀποτέλεσμα αὐτῆς τῆς θεωρίας, μὲ ἐνδεχόμενες ἀρνητικὲς συνέπειες στὴ θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν καὶ κυρίως τῆς Ἀνάλυσης, καὶ ὀφείλεται στὸν Specker. Ἀκολουθῶντας τὸ [8], θὰ δείξουμε ὅτι τὸ σύνολο NF+(AE) εἶναι ἀντιφατικό.

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι $2^\kappa = T(\kappa)$, γιὰ κάθε πληθάριθμο κ. Ἀπὸ αὐτὸν ἕπονται οἱ σχέσεις $2^{|\mathcal{P}_1(a)|} = |\mathcal{P}(a)|$, $2^{|\mathcal{P}_1(V)|} = |V|$ καὶ $2^{|\mathcal{P}_1^2(V)|} = |V|$.

Λημμα 1.10.1. *Ἂν (AE), τότε*

$$2^\kappa = \emptyset \leftrightarrow |\mathcal{P}_1(V)| <^{\mathrm{Card}} \kappa,$$

γιὰ κάθε πληθάριθμο κ.

Ἀπόδειξη. Χρησιμοποιῶντας τὸ AE, ἡ πρὸς ἀπόδειξη σχέση γίνεται

$$2^\kappa \neq \emptyset \leftrightarrow |\mathcal{P}_1(V)| \geqslant \kappa.$$

($\rightarrow$) Ἔστω $2^\kappa \neq \emptyset$. Τότε ὑπάρχει a τ.ω. $\kappa = |\mathcal{P}_1(a)|$ καὶ $2^{|\mathcal{P}_1(a)|} = |\mathcal{P}(a)|$. Ἐπίσης, $|\mathcal{P}_1(a)| \leqslant |\mathcal{P}_1(V)|$, ἄρα $|\mathcal{P}_1(V)| \geqslant |\mathcal{P}_1(a)| = \kappa$.

($\leftarrow$) Ἔστω $\kappa \leqslant |\mathcal{P}_1(V)|$. Τότε ὑπάρχει $f : a \rightarrowtail \mathcal{P}_1(V)$. Ἄρα, $a \sim f[a]$ καὶ $|f[a]| \leqslant |\mathcal{P}_1(V)|$. Ὁρίζουμε

$$b = \{x \mid \{x\} \varepsilon f[a]\}$$

ὁπότε

$$t \varepsilon \mathcal{P}_1(b) \leftrightarrow \exists x[t = \{x\}] \leftrightarrow t \varepsilon f[a].$$

Ἄρα, γιὰ τὸ b ποὺ βρήκαμε $a \sim f[a] = \mathcal{P}_1(b)$. Ἄρα, $\kappa = |\mathcal{P}_1(b)|$, ἑπομένως $2^\kappa \neq \emptyset$. $\square$

Λημμα 1.10.2. *Ἂν $\kappa = 2^\mu \neq \emptyset$ τότε $\mu < \kappa$.*

Ἀπόδειξη. Ἔστω a τ.ω. $\mu = |\mathcal{P}_1(a)|$ καὶ $\kappa = |\mathcal{P}(a)|$. Τότε $|\mathcal{P}_1(a)| \leqslant |\mathcal{P}(a)|$ ἄρα $\mathcal{P}_1(a)| < |\mathcal{P}(a)|$, ἄρα $\mu < \kappa$. □

Λημμα 1.10.3. *Ἂν $\kappa \leqslant \lambda$ καὶ $2^\kappa \neq \emptyset$, $2^\lambda \neq \emptyset$ τότε $2^\kappa \leqslant 2^\lambda$.*

Ἀπόδειξη. Ὑπάρχουν a, b τ.ω. $\kappa = |\mathcal{P}_1(a)|$ καὶ $\lambda = |\mathcal{P}_1(b)|$. Ἰσχύει ὅτι $|\mathcal{P}_1(a)| \leqslant |\mathcal{P}_1(b)|$. Ἀπὸ θεώρημα ποὺ ἔχει ἀποδειχθεῖ νωρίτερα ἰσχύει $|a| \leqslant |b|$, ἄρα ὑπάρχει συνάρτηση $f : a \rightarrowtail b$. Κατασκευάζουμε τώρα συνάρτηση $g : \mathcal{P}(a) \to \mathcal{P}(b)$ μὲ τύπο $g(x) = f[x]$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι εἶναι 1-1. □

Λημμα 1.10.4. *Γιὰ ὅλα $m, n \varepsilon \mathrm{N}$, ἰσχύει $T(m \cdot n) = m \cdot T(n)$.*

Ἀπόδειξη. $T(m \cdot n) = T(n + \cdots + n) = T(n) + \cdots + T(n) = m \cdot T(n)$. □

Λημμα 1.10.5. *Γιὰ κάθε $m \varepsilon \mathrm{N}$, ἰσχύει $m \neq T(m) + 1$ καὶ $m \neq T(m) + 2$.*

Ἀπόδειξη. Ἐφαρμόζουμε τὸ θεώρημα διαιρέσεως στοὺς ἀριθμοὺς m καὶ 3. Ὑπάρχουν n, r τ.ω.

$$m = 3 \cdot n + r$$

καὶ τὸ r παίρνει ἀκριβῶς μία ἀπὸ τὶς τιμὲς $0, 1, 2$. Ἀπὸ τὸ 1.8.4 ἕπεται ὅτι $T(m) = T(3) \cdot T(n) + T(r)$, ἄρα $T(m) = 3 \cdot T(n) + r$.

Ὑποθέτουμε πρὸς ἄτοπο ὅτι $m = T(m) + \ell$, γιὰ $\ell = 1, 2$. Τότε ἔχουμε

$$\begin{aligned} m = T(m) + \ell \quad &\text{ἄρα} \quad 3 \cdot n + r = 3 \cdot T(n) + r + \ell \\ &\text{ἄρα} \quad 3 \cdot (n - T(n)) = \ell \\ &\text{ἄρα} \quad 3 | \ell, \end{aligned}$$

ποὺ εἶναι ἄτοπο. □

Προταση 1.10.6. *Γιὰ ὅλους τοὺς πληθάριθμους κ, λ ἰσχύει*

$$\kappa \leqslant T(\lambda) \leftrightarrow (\exists \mu \varepsilon \mathrm{Card})[\kappa = T(\mu)].$$

Ἀπόδειξη. Γιὰ τὸ εὐθύ, ἔστω $\kappa = |a|$, $\lambda = |b|$ καὶ $|a| \leqslant |\mathcal{P}_1(b)|$. Ὑπάρχει $f : a \rightarrowtail \mathcal{P}_1(b)$. Τότε, $a \sim f[a] \subseteq \mathcal{P}_1(b)$. Ὁρίζουμε

$$c = \{x \mid \{x\} \varepsilon f[a]\}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} t \varepsilon \mathcal{P}_1(c) \quad &\leftrightarrow \quad (\exists s)[t = \{s\} \ \wedge \ s \varepsilon c] \\ &\leftrightarrow \quad (\exists s)[t = \{s\} \ \wedge \ \{s\} \varepsilon f[a]] \\ &\leftrightarrow \quad (\exists s)[t \varepsilon f[a]]. \end{aligned}$$

Ἄρα, $\mathcal{P}_1(a) = f[a] \sim a$. Ὁπότε θέτοντας $\mu = |c|$, ἔχουμε ὅτι $T(\mu) = \kappa$. Τὸ ἀντίστροφο εἶναι προφανές. □

Λημμα 1.10.7. *Ἂν (Α.Ε.), τότε $2^{T(\kappa)} \neq \emptyset$ γιὰ κάθε πληθάριθμο κ.*

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ 1.10.1 ξέρουμε ὅτι γιὰ κάθε μ,

$$2^{\mu} = \emptyset \leftrightarrow |\mathcal{P}_1(V)| < \mu.$$

Ἀπὸ τὸ Α.Ε., ἡ προηγούμενη δίνει

$$2^{\mu} \neq \emptyset \leftrightarrow |\mathcal{P}_1(V)| \geqslant \mu.$$

Ἑπομένως, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι $|\mathcal{P}_1(V)| \geqslant T(\kappa)$. Ἔστω $\kappa = |a|$. Τότε $T(\kappa) = |\mathcal{P}_1(a)|$. Ἔχουμε $\mathcal{P}_1(a) \subseteq \mathcal{P}_1(V)$ ἄρα $|\mathcal{P}_1(a)| \leqslant |\mathcal{P}_1(V)|$. □

Λημμα 1.10.8. *Ἂν $2^{T(\kappa)} \neq \emptyset$ τότε $T(2^{\kappa}) = 2^{T(\kappa)}$, γιὰ κάθε πληθάριθμο κ.*

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $2^{\kappa} \neq \emptyset$, ὑπάρχει a τ.ω. $\kappa = |\mathcal{P}_1(a)|$. Τότε, $T(\kappa) = |\mathcal{P}_1^2(a)|$, $2^{\kappa} = |\mathcal{P}(a)|$. Ἐπίσης, $T(2^{\kappa}) = |\mathcal{P}_1\mathcal{P}(a)|$ καὶ $2^{T(\kappa)} = |\mathcal{P}\mathcal{P}_1(a)|$. Τὸ ζητούμενο ἕπεται ἀπὸ τὸ 1.7.2. □

Ορισμος 1.10.9. Γιὰ κάθε πληθάριθμο κ ὁρίζουμε τὸ σύνολο

$$\phi(\kappa) = \{\kappa, 2^{\kappa}, 2^{2^{\kappa}}, \dots\}.$$

Λημμα 1.10.10. *Ὁ ὁρισμὸς 1.10.9 εἶναι καλός.*

Ἀπόδειξη. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ σύνολο γράφεται στὴ μορφὴ $\phi(\kappa) = \bigcap A_{\kappa}$, ὅπου

$$A_{\kappa} = \{x \mid \kappa \varepsilon x \ \wedge\ (\forall \lambda \varepsilon x)[\exists a[\lambda = |\mathcal{P}_1(a)|] \rightarrow 2^{\lambda} \varepsilon x]\}.$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ A_{κ} ἀποτελεῖ σύνολο, καθὼς ὁ τύπος ποὺ τὸ ὁρίζει εἶναι προφανῶς διαστρωματωμένος. Ἑπομένως, ἀπὸ τὸ 1.2.5, τὸ $\phi(\kappa)$ θὰ εἶναι ἐπίσης σύνολο. □

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ παρατηροῦμε εὔκολα ὅτι $2^{\kappa} = \emptyset \rightarrow \phi(\kappa) = \{\kappa\}$ καὶ ὅτι $\phi(|V|) = \{|V|\}$, ἀφοῦ $2^{|V|} = \{|V|\}$ εἶναι ὁ μέγιστος πληθάριθμος· ἕπεται ὅτι $|\phi(|V|)| = 1$.

Λημμα 1.10.11. *Ἂν (Α.Ε.), τότε:*

α) *Ἂν $\kappa \varepsilon \phi(\lambda)$ τότε $\lambda \leqslant \kappa$.*

β) *Ἂν $2^{\kappa} \neq \emptyset$, τότε $\kappa \not\varepsilon \phi(2^{\kappa})$.*

γ) *Ἂν $2^{\kappa} \neq \emptyset$, τότε $\phi(\kappa) = \{\kappa\} \cup \phi(2^{\kappa})$.*

δ) *Ἂν $2^{\kappa} \neq \emptyset$, τότε $|\phi(\kappa)| = |\phi(2^{\kappa})| + 1$.*

Ἀπόδειξη. **α)** Ὁρίζουμε τὴν ἀκολουθία πληθαρίθμων $(\lambda_n)_{n\varepsilon \mathrm{N}}$ μὲ τὸν ἀναδρομικὸ ὁρισμὸ

$$\begin{cases} \lambda_0 = \lambda \\ \lambda_{n+1} = 2^{\lambda_n} \end{cases}$$

Ἀπὸ τὴν 1.10.2, ἡ (λ_n) εἶναι αὔξουσα ἀκολουθία. Ἐπίσης, ἂν $2^\kappa = \emptyset$, τότε ἡ ἀκολουθία ἔχει ἕναν μόνο ὅρο, τὸν λ_0. Χωρὶς περιορισμὸ τῆς γενικότητας, ὑποθέτουμε ὅτι $2^\kappa \neq \emptyset$ καὶ μποροῦμε εὔκολα νὰ δείξουμε μὲ ἐπαγωγὴ στὸ n, χρησιμοποιῶντας καὶ τὸ 1.10.2, ὅτι

$$\lambda_n \geqslant \lambda_0.$$

Ἔχουμε τώρα:

$$\kappa \varepsilon \phi(\lambda) \to (\exists n \varepsilon \mathrm{N})[\kappa = \lambda_n] \to \kappa \geqslant \lambda_0 \to \kappa \geqslant \lambda.$$

β) Εἶναι

$$2^\kappa \neq \emptyset \stackrel{1.10.1}{\to} \kappa < 2^\kappa \stackrel{(\mathrm{A.E.})}{\to} \kappa \not\geqslant 2^\kappa \stackrel{(\alpha)}{\to} \kappa \not\varepsilon \phi(2^\kappa).$$

γ) Ἔχουμε

$$\begin{aligned} \phi(\kappa) &= \{\kappa, 2^\kappa, 2^{2^\kappa}, \dots\} \\ &= \{\kappa\} \cup \{2^\kappa, 2^{2^\kappa}, \dots\} \\ &= \{\kappa\} \cup \{\lambda, 2^\lambda, \dots\}, \text{ γιὰ } \lambda = 2^\kappa \\ &= \{\kappa\} \cup \phi(\lambda), \text{ γιὰ } \lambda = 2^\kappa \\ &= \{\kappa\} \cup \phi(2^\kappa). \end{aligned}$$

δ) Ἄμεσα, ἀπὸ (β) καὶ (γ). □

Λημμα 1.10.12. *Γιὰ κάθε κ, ἂν $2^\kappa = \emptyset$ τότε $|\phi(T(\kappa))| = 2$ ἢ 3.*

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὴν ὑπόθεση ἔχουμε:

$$\begin{aligned} & |\mathcal{P}_1(V)| < \kappa, \text{ ἀπὸ 1.10.1} \\ \text{ἄρα } \; & T(\kappa) \geqslant T(|\mathcal{P}_1(V)|) = |\mathcal{P}_1^2(V)|, \text{ ἀπὸ 1.8.5} \\ \text{ἄρα } \; & 2^{T(\kappa)} \geqslant 2^{|\mathcal{P}_1^2(V)|} = |\mathcal{P}_1(V)|, \text{ ἀπὸ 1.10.3.} \end{aligned}$$

Ἄρα ἔχουμε δύο περιπτώσεις. Ἂν $2^{T(\kappa)} > \mathcal{P}_1(V)$ τότε

$$\phi(T(\kappa)) = \{T(\kappa), 2^{T(\kappa)}\}.$$

Ἂν $2^{T(\kappa)} = |\mathcal{P}_1(V)|$ τότε $2^{|\mathcal{P}_1(V)|} = |V|$, ἄρα

$$\phi(T(\kappa)) = \{T(\kappa), |\mathcal{P}_1(V)|, |V|\}.$$

□

Προταση 1.10.13. *Ἄν (Α.Ε.), γιὰ κάθε πληθάριθμο κ ἰσχύουν:*

α) Ἄν $\phi(T(\kappa))$ πεπερασμένος, τότε $\phi(\kappa)$ πεπερασμένος.

β) Ἄν $\phi(\kappa)$ πεπερασμένος, τότε $\phi(T(\kappa))$ πεπερασμένος καὶ ἐπιπλέον $|\phi(T(\kappa))| = T(|\phi(\kappa)|) + r$, γιὰ $r = 1, 2$.

Ἀπόδειξη. **α)** Θὰ χρησιμοποιήσουμε ἐπαγωγὴ στοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς γιὰ νὰ δείξουμε ὅτι

$$(\forall n \varepsilon \mathrm{N})[n = |\phi(T(\kappa))| \rightarrow |\phi(\kappa)| \varepsilon \mathrm{N}].$$

Βάση: Ἔστω $n = 2$. Τότε $\phi(T(\kappa)) = \{T(\kappa), 2^{T(\kappa)}\}$, ἄρα $2^{2^{T(\kappa)}} \neq \emptyset$. Ἀπὸ τὸ 1.10.7 ἕπεται ὅτι δὲν ὑπάρχει λ τ.ω. $2^{T(\kappa)} = T(\lambda)$.

Ἔστω τώρα πρὸς ἄτοπο ὅτι $2^\kappa \neq \emptyset$. Ἀπὸ τὸ 1.10.8 ἕπεται ὅτι $2^{T(\kappa)} = T(2^\kappa)$, ποὺ εἶναι ἄτοπο. Ἑπομένως $2^\kappa = \emptyset$. Ὁπότε, $\phi(\kappa) = \{\kappa\}$, ἄρα $|\phi(\kappa)| = 1 \varepsilon \mathrm{N}$.

Ἐπαγ. βῆμα: Ὑποθέτουμε ὅτι τὸ ζητούμενο ἰσχύει γιὰ $n-1$ (ὅπου $n > 4$) καὶ θὰ τὸ δείξουμε γιὰ n. Ἀφοῦ $n > 4$ ἕπεται ἀπὸ τὸ 1.10.12 ὅτι $2^\kappa \neq \emptyset$.

Ξέρουμε ὅτι

$$\begin{aligned} |\phi(\kappa)| = |\phi(2^\kappa)| + 1 \quad & \text{ἄρα} \quad |\phi(T(\kappa))| = |\phi(2^{T(\kappa)})| + 1 \\ & \text{ἄρα} \quad |\phi(2^{T(\kappa)})| = n - 1 \\ & \text{ἄρα} \quad |\phi(T(2^\kappa))| = n - 1, \ \text{ἀπὸ } 1.10.8 \end{aligned}$$

Ἑπομένως, ἡ Ε.Υ. ἐφαρμόζεται στὸ σύνολο 2^κ, ἄρα ἰσχύει ὅτι $|\phi(2^\kappa)| \varepsilon \mathrm{N}$. Ἕπεται ὅτι $|\phi(\kappa)| = |\phi(2^\kappa)| + 1 \varepsilon \mathrm{N}$.

β) Ὅπως στὸ (α), θὰ ἀποδείξουμε μὲ ἐπαγωγὴ στοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς ὅτι

$$(\forall n \varepsilon \mathrm{N})[n = |\phi(\kappa)| \rightarrow |\phi(T(\kappa)) = T(|\phi(\kappa)|) + r],$$

γιὰ $r = 1, 2$.

Βάση: Γιὰ $n = 1$ ἔχουμε $|\phi(\kappa)| = 1$ ἄρα $\phi(\kappa) = \{\kappa\}$ ἄρα $2^\kappa = \emptyset$ ἄρα ἀπὸ τὸ 1.10.12

$$\phi(T(\kappa)) = 1 + r = T(1) + r = T(|\phi(\kappa)|) + r,$$

γιὰ $r = 1, 2$.

Βῆμα: Ὑποθέτουμε ὅτι τὸ ζητούμενο ἰσχύει γιὰ $n-1$ (ὅπου $n > 3$) καὶ θὰ τὸ δείξουμε γιὰ n. Ὅπως στὸ (α), ἡ Ε.Υ. ἐφαρμόζεται στὸ σύνολο 2^κ, δηλαδὴ ἰσχύει

$$|\phi(T(2^\kappa))| = T(|\phi(2^\kappa)|) + r.$$

Ἔχουμε, γιὰ $r = 1, 2$.

$$\begin{aligned} |\phi(T(\kappa))| &= |\phi(2^{T(\kappa)})| + 1, \text{ ἀπὸ } 1.10.11 \\ &= |\phi(T(2^\kappa))| + 1, \text{ ἀπὸ } 1.10.8 \\ &= T(|\phi(2^\kappa)|) + r + 1, \text{ ἀπὸ Ε.Υ.} \\ &= T(|\phi(2^\kappa)|) + r + T(1) \\ &= T(|\phi(2^\kappa)| + 1) + r, \text{ ἀπὸ } 1.8.4 \\ &= T(|\phi(\kappa)|) + r, \text{ ἀπὸ } 1.10.11. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.10.14. *Ἂν (Α.Ε.), τότε:*

α) Ὑπάρχει πληθάριθμος κ τ.ω. $\phi(\kappa)$ πεπερασμένο καὶ $T(\kappa) = \kappa$.

β) Ὑπάρχει φυσικὸς n τ.ω. $n = T(n) + r$, γιὰ $r = 1, 2$.

Ἀπόδειξη. **α)** Ἔστω $A = \{\kappa \mid \kappa \varepsilon \text{Card} \wedge \phi(\kappa)\varepsilon\text{Fin}\}$. Τὸ A εἶναι μὴ κενὸ ὑποσύνολο τοῦ Card, γιατὶ $|V|\varepsilon A$, ὁπότε, ἀπὸ (Α.Ε.) ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο κ. Ἄρα, $\phi(\kappa)\varepsilon$Fin. Ἀπὸ 1.10.13, $\phi(T(\kappa))\varepsilon$Fin καὶ $\kappa \leqslant T(\kappa)$, ἐκ κατασκευῆς τοῦ κ.

Ἀπὸ 1.10.6, ὑπάρχει $\lambda\varepsilon$Card τ.ω. $\kappa = T(\lambda)$. Ἄρα, $T(\lambda) \leqslant T^2(\lambda)$ ἄρα $\lambda \leqslant T(\lambda)$. Ἀπὸ 1.10.13, τὸ $\phi(\lambda)$ εἶναι πεπερασμένο, ἄρα $\lambda\varepsilon A$. Ἄρα, $\kappa \leqslant \lambda$ ἄρα $T(\lambda) \leqslant \lambda$. Ἄρα, $T(\lambda) = \lambda$. Ἄρα, $T(\kappa) = \kappa$.

β) Ἔστω κ πληθάριθμος τ.ω. $\phi(\kappa)$ πεπερασμένο καὶ $T(\kappa) = \kappa$. Ἔστω $n = |\phi(\kappa)|\varepsilon$N. Ἀπὸ 1.10.13(β),

$$n = |\phi(\kappa)| = |\phi(T(\kappa))| = T(|\phi(\kappa)|)| + r = T(n)| + r,$$

γιὰ $r = 1, 2$. □

Συνάγουμε τώρα τὸ βασικὸ θεώρημα τῆς ἑνότητας.

Θεώρημα 1.10.15 (Specker, 1953). *Στὴν NF ἰσχύει ἡ ἄρνηση τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς.*

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὰ 1.10.14(β) καὶ 1.10.5 παρατηροῦμε ὅτι τὸ σύνολο NF+(AE) εἶναι ἀντιφατικό, δηλαδὴ NF + $(AE) \vdash \perp$. Ἕπεται NF $\vdash (AE) \rightarrow \perp$ ἄρα NF $\vdash \neg(AE)$, ὅπου μὲ $\perp$ συμβολίζουμε τὴν τυχοῦσα ἀντίφαση. □

Μία ἀπὸ τὶς προφανεῖς συνέπειες τοῦ παραπάνω θεωρήματος εἶναι ἡ ὕπαρξη ἀπείρων συνόλων. Δίνουμε πρῶτα τὸν ἑξῆς ὁρισμό.

Ορισμος 1.10.16. Ἕνα σύνολο λέγεται *ἄπειρο*, ἂνν δὲν εἶναι πεπερασμένο.
Τὸ σύνολο τῶν ἀπείρων συνόλων ὁρίζεται ὡς

$$\mathrm{Inf} = V - \mathrm{Fin}$$

καὶ τῶν ἀπείρων πληθαρίθμων

$$\mathrm{InfCard} = \mathrm{Card} - \mathrm{FCard} = \mathrm{Card} - \mathrm{N}.$$

Πορισμα 1.10.17 (Ἀξίωμα τοῦ ἀπείρου)**.** *Ὑπάρχουν ἄπειρα σύνολα.*

Ἀπόδειξη. Ἂν ὅλα τὰ σύνολα ἦταν πεπερασμένα, τότε θὰ εἶχαν συνάρτηση ἐπιλογῆς[5], δηλαδὴ θὰ ἱκανοποιοῦσαν τὴν Α.Ε. Ἄτοπο. □

Ἀπὸ τὰ 1.7.13 καὶ 1.10.16 ἕπεται ὅτι

Προταση 1.10.18. *Ἕνα σύνολο εἶναι ἄπειρο, ἂνν ὁ πληθάριθμός του εἶναι ἄπειρος. Συμβολικά:*

$$a\varepsilon\mathrm{Inf} \leftrightarrow |a|\varepsilon\mathrm{InfCard}.$$

Ἐκτὸς ἀπὸ τὴν ἀπόδειξη τοῦ 1.10.17, ὑπάρχει καὶ μιὰ ἄλλη ἀπόδειξη τῆς ἀρχῆς τοῦ ἀπείρου, ποὺ δὲν χρησιμοποιεῖ τὴ μὴ ἰσχὺ τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς. Σύμφωνα μὲ τὸν T. Forster, ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἀδημοσίευτη καὶ ὀφείλεται στὸν T. Specker· βρίσκεται στὸ [2].

Θεωρημα 1.10.19. *Τὸ σύνολο V εἶναι ἄπειρο.*

Ἀπόδειξη. Ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξουμε ὅτι $|V|\varepsilon\mathrm{InfCard}$. Πρὸς ἄτοπο, ἔστω $|V|\varepsilon\mathrm{FCard}$, δηλαδὴ $|V|\varepsilon\mathrm{N}$. Ὅμως ἰσχύει $|V| = 2^{|\mathcal{P}_1(V)|} = 2^{T(|V|)}$, ἄρα ὑπάρχει $n = |V|\varepsilon\mathrm{N}$ τ.ω.

$$n = 2^{T(n)}.$$

Τότε, ἀπὸ τὸ 1.10.8 ἕπεται

$$T(n) = T(2^{T(n)}) = 2^{T^2(n)}.$$

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι τὰ n καὶ $T(n)$ ἔχουν τὴ μορφὴ $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$ μὲ «ὕψη» k καὶ $T(k)$, ἀντίστοιχα. Ἐπειδὴ $n = 2^{T(n)}$ ἕπεται ὅτι $k = T(k) + 1$, ποὺ εἶναι ἄτοπο ἀπὸ τὸ 1.10.5. □

Κλείνουμε τὴν ἑνότητα μὲ ἕνα τελευταῖο θεώρημα.

Θεωρημα 1.10.20. *Τὸ σύνολο* N *εἶναι ἄπειρο.*

[5] Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἴδια μὲ τὴν ἀντίστοιχη στὴν ZF καὶ μπορεῖ νὰ βρεθεῖ στὰ [5] καὶ [6].

Ἀπόδειξη. Ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξουμε ὅτι ὁ πληθάριθμος τοῦ N δὲν εἶναι πεπερασμένος. Ἔστω πρὸς ἄτοπο ὅτι $\aleph_0 \varepsilon \mathrm{N}$. Τότε ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς n τ.ω. $\aleph_0 = n$. Εὔκολα ἀποδεικνύεται[6] ὅτι $|\mathrm{N}_\alpha| = |\mathrm{N}_\pi| = \aleph_0$, ὅπου μὲ N_α καὶ N_π συμβολίζουμε τὰ σύνολα τῶν ἄρτιων καὶ περιττῶν φυσικῶν, ἀντίστοιχα, γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύουν $\mathrm{N}_\alpha \cup \mathrm{N}_\pi = \mathrm{N}$ καὶ $\mathrm{N}_\alpha \cap \mathrm{N}_\pi = \emptyset$. Ἔχουμε λοιπόν:

$$|\mathrm{N}_\alpha| + |\mathrm{N}_\pi| = \mathrm{N} \text{ ἄρα } n + n = n \text{ ἄρα } n = 0,$$

ἄρα $\mathrm{N} = \{\emptyset\}$ ποὺ εἶναι ἄτοπο. $\square$

[6] Γιὰ ἄλλη μιὰ φορὰ παραπέμπουμε στὰ [5] καὶ [6]. Ἡ ἀπόδειξη διατηρεῖται στὴν NF ἀναλλοίωτη.

Κεφάλαιο 2

Τὸ πρόβλημα τῆς συνέπειας

Ἐρχόμαστε τώρα στὸ ζήτημα τῆς ἰσοσυνέπειας. Σ' αὐτὴ τὴν ἐργασία μᾶς ἐνδιαφέρει νὰ μελετήσουμε τὸ πρόβλημα τῆς συνέπειας τῆς NF σὲ σχέση μὲ τὴ συνέπεια τῆς ZFC, νὰ μάθουμε δηλαδὴ ἂν ἰσχύει ἡ ἑξῆς συνεπαγωγή:

$$\text{ZFC συνεπὴς} \Longrightarrow \text{NF συνεπής}.$$

Σχεδὸν ὅλα τὰ ἀποτελέσματα ποὺ θὰ παρουσιάσουμε θὰ εἶναι τῆς μορφῆς NF συνεπὴς $\iff$ T συνεπής, γιὰ κάποια θεωρία T. Στὴν οὐσία, τὰ ἀποτελέσματα θὰ εἶναι

$$(\text{ZFC συνεπὴς} \Longrightarrow \text{NF συνεπής}) \iff (\text{ZFC συνεπὴς} \Longrightarrow T \text{ συνεπής}).$$

Δεδομένης ὅμως τῆς λογικῆς ἰσοδυναμίας τῶν προτάσεων $\phi \to (\chi_1 \leftrightarrow \chi_2)$ καὶ $(\phi \to \chi_1) \leftrightarrow (\phi \to \chi_2)$, ποὺ ἰσχύει σὲ κάθε πρωτοβάθμιο σύστημα (ἄρα καὶ στὴ μεταγλῶσσα μας, τὴν ZFC, ἀφοῦ κι αὐτὴ εἶναι πρωτοβάθμιο σύστημα), ἡ παραπάνω πρόταση εἶναι λογικὰ ἰσοδύναμη μὲ τὴν

$$\text{ZFC συνεπὴς} \Longrightarrow (\text{NF συνεπής} \iff T \text{ συνεπής}).$$

Ἔτσι, στὶς ἑπόμενες ἑνότητες θὰ ξεκινᾶμε μὲ τὴ (σιωπηρὴ) ὑπόθεση ὅτι ἡ ZFC εἶναι συνεπής, καὶ θὰ ἀποδεικνύουμε τὸ ἀποτέλεσμα στὴ μορφὴ

$$\text{NF συνεπής} \iff T \text{ συνεπής}.$$

Θὰ λέμε ὅτι οἱ NF καὶ T εἶναι *ἰσοσυνεπεῖς*.

2.1 Μοντέλα τῶν TST καὶ NF

Ορισμος 2.1.1. Ὀνομάζουμε *μοντέλο* ἢ *πρότυπο (model)* τῆς TST, κάθε $\mathcal{L}_{TST}$-δομή, δηλαδὴ κάθε δομὴ τῆς μορφῆς

$$\mathcal{A} = \langle A_0, A_1, \ldots, \varepsilon^{\mathcal{A}} \rangle,$$

ὅπου

- κάθε A_i εἶναι σύνολο μεταβλητῶν τῆς ZFC, ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ μεταβλητὲς τῆς TST, βαθμίδας i, γιὰ κάθε $i \in \mathbb{N}$·
- ἡ $\varepsilon^{\mathcal{A}}$ εἶναι διμελὴς σχέση στὴ ZFC ποὺ ἑρμηνεύει τὴν ε, δηλαδὴ

$$x\varepsilon^{\mathcal{A}}y \iff \big[\mathcal{A} \vDash x^i \varepsilon y^{i+1} \text{ καὶ } x \in A_i \text{ καὶ } y \in A_{i+1} \text{ καὶ οἱ } x, y \text{ ἀντιστοιχοῦν στὰ } x^i, y^{i+1}\big].$$

Πολλὲς φορὲς θὰ γράφουμε ἕνα μοντέλο στὴ μορφὴ $\mathcal{A} = \langle A, \in^A \rangle$, ὑπονοοῶντας ὅτι $A = \cup_i A_i$, δηλαδὴ τὸ $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ εἶναι διαμέριση τοῦ A.

Ἐπίσης, θὰ σημειώνουμε μὲ τὸ ἀντίστοιχο πεζὸ γράμμα τὴ μεταβλητὴ τῆς ZFC ποὺ θὰ ὑποθέτουμε ὅτι ἀντιστοιχεῖ σὲ μιὰ μεταβλητὴ τῆς TST, δηλαδὴ θὰ ἀπαλείφουμε τὸν ἐκθέτη ποὺ δηλώνει τὴ βαθμίδα.

Ἐννοεῖται ὅτι ἡ τυπικὴ ἰσότητα ἑρμηνεύεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῆς μεταγλώσσας, ἔτσι ὥστε

$$x = y \iff \mathcal{A} \vDash x^i = y^i,$$

γιὰ $x, y \in A_i$.

Ορισμος 2.1.2. Ἕνα μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST θὰ καλεῖται:

1. *σύνηθες (standard)*, ἂνν ἡ $\varepsilon^{\mathcal{A}}$ εἶναι ἡ $\in$·
2. *μεταβατικό (transitive)*, ἂνν εἶναι σύνηθες καὶ ἐπιπλέον

$$x \in A_{i+1} \Rightarrow x \subseteq A_i,$$

γιὰ κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Ὀνομάζοντας $x_A = \{y \in A_i \mid y\varepsilon^{\mathcal{A}}x\}$ γιὰ κάθε $x \in A_{i+1}$, ἔχουμε ὅτι τὸ $\mathcal{A}$ εἶναι σύνηθες ἂνν

$$x_A = x \cap A_i$$

καὶ ὅτι εἶναι μεταβατικὸ ἂνν

$$x_A = x.$$

Ορισμος 2.1.3. Γιὰ κάθε μοντέλο $\mathcal{A} = \langle A, \varepsilon^{\mathcal{A}} \rangle$ τῆς TST, ὁρίζουμε τὴ δομὴ $lc(\mathcal{A}) = \mathcal{B} = \langle B, \in \rangle$ θέτοντας $B_n = \sigma[A_n]$, γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$, ὅπου ἡ συνάρτηση[1] $\sigma : A \to V$ κατὰ ZFC ὁρίζεται ἀναδρομικὰ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= x, \text{ γιὰ κάθε } x \in A_0 \\ \sigma(x) &= \{\sigma(y) \mid y \in A_i \text{ καὶ } y\varepsilon^{\mathcal{A}}x\}, \text{ γιὰ κάθε } x \in A_{i+1}. \end{aligned}$$

[1] Τὸ σωστὸ θὰ ἦταν νὰ ποῦμε *ἀντιστοίχιση* ἢ κάτι τέτοιο (στὸ [6] χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος «ὁριστικὸς κανόνας»), ἀφοῦ στὴν ZFC τὸ V δὲν εἶναι σύνολο. Ἐν πάσῃ περιπτώσει, χρησιμοποιοῦμε τὸν ὅρο ἄτυπα.

Ἡ συνάρτηση σ εἶναι καλὰ ὁρισμένη, ἀφοῦ γιὰ ὅλα $x, y \in A_0$ ἰσχύει $x = y \Longrightarrow \sigma(x) = \sigma(y)$ καὶ γιὰ ὅλα $x, y \in A_{i+1}$, ἂν $x = y$ τότε

$$\begin{aligned} t \in \sigma(x) &\iff \text{ὑπάρχει } z \in A_i \text{ τ.ω. } z\varepsilon^{\mathcal{A}}x,\ t = \sigma(z) \\ &\iff \text{ὑπάρχει } z \in A_i \text{ τ.ω. } z\varepsilon^{\mathcal{A}}y,\ t = \sigma(z) \\ &\iff t \in \sigma(y). \end{aligned}$$

ἄρα $\sigma(x) = \sigma(y)$.

Προταση 2.1.4 ([10])**.** *Γιὰ κάθε μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST, τὸ $lc(\mathcal{A})$ εἶναι σύνηθες καὶ μεταβατικὸ (σ.μ.) μοντέλο τῆς TST.*

Ἀπόδειξη. Γιὰ τὸ ἀξίωμα ἔκτασης ἔχουμε

$$\begin{aligned} & lc(\mathcal{A}) \vDash \forall x^k[x^k\varepsilon a^{k+1} \leftrightarrow x^k\varepsilon b^{k+1}] \\ \iff & \text{γιὰ κάθε } x \in B_k,\ [x \in a \iff x \in b] \\ \iff & a = b \\ \iff & lc(\mathcal{A}) \vDash a^{k+1} = b^{k+1}. \end{aligned}$$

Γιὰ τὸ ἀξίωμα-σχῆμα συλλεκτικότητας, δοθέντος τύπου $\phi(x^k)$ κατασκευάζουμε τὸ σύνολο $a = \{x \in B_k \mid \phi(x)\}$ τῆς ZFC, ὁπότε

$$lc(\mathcal{A}) \vDash \exists a^{k+1}\forall x^k[x^k\varepsilon a^{k+1} \leftrightarrow \phi(x^k)].$$

Τώρα, τὸ $lc(\mathcal{A})$ εἶναι προφανῶς σύνηθες, καὶ γιὰ νὰ δείξουμε ὅτι εἶναι μεταβατικὸ θεωροῦμε τυχαῖο $x \in \sigma[A_{i+1}]$. Τότε $x = \sigma(y)$ γιὰ $y \in A_{i+1}$, $y\varepsilon^{\mathcal{A}}x$. Θὰ δείξουμε ὅτι $x \subseteq \sigma[A_i]$. Εὔκολα,

$$\begin{aligned} t \in x &\Longrightarrow t \in \sigma(y) \\ &\Longrightarrow t = \sigma(z),\ \text{γιὰ } z \in A_i, z\varepsilon^{\mathcal{A}}y \\ &\Longrightarrow t \in \sigma[A_i]. \end{aligned}$$

□

Λημμα 2.1.5. *Ἔστω $\mathcal{A}$ μοντέλο καὶ $\phi(x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n})$ τύπος τῆς TST. Τότε ἰσχύει*

$$\mathcal{A} \vDash \phi(x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}) \iff lc(\mathcal{A}) \vDash \phi(y_1^{k_1}, \ldots, y_n^{k_n}),$$

γιὰ $y_i = \sigma(x_i)$, μὲ $y_i \in B_{k_i}$, $x_i \in A_{k_i}$.

Ἀπόδειξη. Μὲ ἐπαγωγὴ στοὺς τύπους ϕ. Στὴ βάση ἔχουμε:

- Ἂν $\phi:\ x_1^k\varepsilon x_2^{k+1}$, γιὰ $x_1 \in A_k$, $x_2 \in A_{k+1}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash x_1^k\varepsilon x_2^{k+1} &\iff x_1\varepsilon^{\mathcal{A}}x_2 \\ &\iff \sigma(x_1) \in \sigma(x_2) \\ &\iff lc(\mathcal{A}) \vDash y_1^k\varepsilon y_2^{k+1}. \end{aligned}$$

- Ἂν $\phi:\ x_1^k = x_2^k$ γιὰ $x_1, x_2 \in A_k$ τότε ὁμοίως $\mathcal{A} \models x_1^k = x_2^k \iff lc(\mathcal{A}) \models y_1^k = y_2^k$.

Γιὰ τὸ ἐπαγωγικὸ βῆμα ἔχουμε τὶς ἑξῆς περιπτώσεις:

- Ἔστω ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει γιὰ τὸν ϕ. Τότε γιὰ τὸν $\neg\phi$ ἔχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\neg\phi)(x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}) &\iff \mathcal{A} \not\models \phi(x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}) \\ &\iff lc(\mathcal{A}) \not\models \phi(y_1^{k_1}, \ldots, y_n^{k_n}),\ \text{ἀπὸ Ε.Υ.} \\ &\iff lc(\mathcal{A}) \models (\neg\phi)(y_1^{k_1}, \ldots, y_n^{k_n}), \end{aligned}$$

  ἄρα ἡ πρόταση ὀσχύει γιὰ τὸν $\neg\phi$.

- Γιὰ τοὺς διμελεῖς συνδέσμους ἡ ἀπόδειξη εἶναι παρόμοια καὶ τὴν ἀφήνουμε.

- Ἔστω ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει γιὰ τὸν $\phi(x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n})$.
  Τότε γιὰ τὸν $\forall x_0^{k_0} \phi(x_0^{k_0}, (x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}))$ ἔχουμε:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \models \forall x_0^{k_0} \phi(x_0^{k_0}, x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}) \\ \iff & \text{γιὰ κάθε } x_0 \in A_{k_0}, \mathcal{A} \models \phi(x_0^{k_0}, x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}) \\ \iff & \text{γιὰ κάθε } y_0 \in B_{k_0}, lc(\mathcal{A}) \models \phi(y_0^{k_0}, y_1^{k_1}, \ldots, y_n^{k_n}),\ \text{ἀπὸ Ε.Υ.} \\ \iff & lc(\mathcal{A}) \models \forall y_0^{k_0} \phi(y_0^{k_0}, y_1^{k_1}, \ldots, y_n^{k_n}), \end{aligned}$$

  ἄρα ἡ πρόταση ἰσχύει.

- Γιὰ τὸ σύνδεσμο $\exists$ ἡ ἀπόδειξη εἶναι ὅμοια καὶ πάλι τὴν ἀφήνουμε.

□

Κλείνουμε τὴν ἑνότητα, δίνοντας ἕνα παράδειγμα σ.μ. μοντέλου τῆς TST. Ἔστω X ἕνα μὴ κενὸ σύνολο τῆς ZFC. Τότε, ἡ δομὴ

$$\langle\langle X \rangle\rangle = \langle X, \mathcal{P}(X), \mathcal{P}^2(X), \ldots, \in \rangle$$

ἀποτελεῖ σ.μ. μοντέλο τῆς TST. Ἡ δομὴ αὐτὴ ὀνομάζεται *πλῆρες μοντέλο (full model)*.

Ἕπεται ὅτι ἡ TST ἔχει σ.μ. μοντέλα καὶ εἶναι συνεπής.

2.2 Τυπικὴ ἀμφισημία

Σὲ αὐτὴ τὴν ἑνότητα θὰ κάνουμε τὴν πρώτη ἀναγωγὴ τῆς συνέπειας τῆς NF στὴ συνέπεια μιᾶς ἄλλης ἀξιωματικῆς θεωρίας, τῆς TST ἐφοδιασμένης μὲ ἕνα ἐπιπλέον ἀξίωμα, αὐτὸ τῆς *τυπικῆς ἀμφισημίας*. Ἀκολουθῶντας τὰ βήματα τοῦ [7], ἐπιστρέφουμε στὴν TST γιὰ νὰ δώσουμε τὸν ἑξῆς ὁρισμό:

Ορισμος 2.2.1. Γιὰ κάθε τύπο ϕ τῆς TST, ὁρίζουμε τὸν ϕ^+ αὐξάνοντας τὶς βαθμίδες ὅλων τῶν μεταβλητῶν ποὺ ἐμφανίζονται στὸν ϕ κατὰ μία. Ἀναδρομικά, ὁ ὁρισμὸς ἔχει ὡς ἑξῆς:

Βάση:

- Ἂν $\phi:\ x^i = y^i$, τότε $\phi^+:\ x^{i+1} = y^{i+1}$.
- Ἂν $\phi:\ x^i \varepsilon y^{i+1}$, τότε $\phi^+:\ x^{i+1} \varepsilon y^{i+2}$.

Ἀναδρομικὸ βῆμα: Ἂν ἔχουν ὁριστεῖ οἱ ϕ^+ καὶ ψ^+ τότε:

- $(\neg\phi)^+:\ \neg\phi^+$.
- $(\phi\Box\psi)^+:\ \phi^+\Box\psi^+$, γιὰ ὅλους τοὺς διμελεῖς συνδέσμους $\Box$.
- $(Qx\phi)^+:\ Qx\phi^+$, γιὰ ὅλους τοὺς ποσοδεῖκτες Q.

Προταση 2.2.2. *Γιὰ κάθε $\phi \in F(\mathcal{L}_{\mathrm{TST}})$, ἂν ὁ ϕ εἶναι τυπικὸ θεώρημα τῆς TST, τότε εἶναι καὶ ὁ ϕ^+. Συμβολικά, $\vdash_{\mathrm{TST}} \phi \Rightarrow \vdash_{\mathrm{TST}} \phi^+$.*

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\phi_0, \ldots, \phi_n = \phi$ μιὰ ἀπόδειξη τοῦ ϕ ἀπὸ τὰ ἀξιώματα τῆς TST. Εὔκολα μποροῦμε νὰ δείξουμε ὅτι ἡ $\phi_0^+, \ldots, \phi_n^+ = \phi^+$ εἶναι μιὰ ἀπόδειξη τοῦ ϕ^+.

$\square$

Εἰσάγουμε τώρα τὸ ἀξίωμα-σχῆμα τυπικῆς ἀμφισημίας (typical ambiguity):

$$\phi \leftrightarrow \phi^+ \qquad \text{(Amb)},$$

ἀπὸ ὅπου προκύπτει τὸ σχῆμα $\vdash_{\mathrm{TST}} \phi^+ \Rightarrow \vdash_{\mathrm{TST}} \phi$, δηλαδὴ τὸ ἀντίστροφο τῆς 2.2.2.

Γιὰ νὰ δείξουμε τὴν ἀνεξαρτησία τοῦ (Amb) ἀπὸ τὰ (ext) καὶ (co), χρειαζόμαστε τὸ ἑξῆς λῆμμα:

Λημμα 2.2.3. *Γιὰ ὅλα τὰ μοντέλα $\mathcal{A}$ καὶ τοὺς τύπους ϕ τῆς TST, ἰσχύει*

$$\mathcal{A} \models \phi^+ \Longrightarrow \mathcal{A}^+ \models \phi.$$

Ἀπόδειξη. Μὲ ἐπαγωγὴ στοὺς τύπους, ταυτόχρονα γιὰ ὅλα τὰ μοντέλα. Συμβολίζουμε $\mathcal{A} = \langle A, \varepsilon^{\mathcal{A}} \rangle$ καὶ $\mathcal{A}^+ = \langle A^+, \varepsilon^{\mathcal{A}^+} \rangle$ μὲ $A_i^+ = A_{i+1}$. Θὰ κάνουμε ἀναλυτικὰ μόνο τὴν περίπτωση τοῦ καθολικοῦ ποσοδείκτη, καθὼς οἱ ἄλλες γίνονται ὅμοια.

Ἔστω $\mathcal{A} \models \phi^+ \Longrightarrow \mathcal{A}^+ \models \phi$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \forall x^{k+1} \phi^+(x^{k+1}) &\Longrightarrow \mathcal{A} \models \phi^+(a), \text{ γιὰ κάθε } a \in A_{k+1} \\ &\Longrightarrow \mathcal{A}^+ \models \phi(a), \text{ γιὰ κάθε } a \in (A_k)^+, \\ &\Longrightarrow \mathcal{A}^+ \models \forall x^k \phi(x^k). \end{aligned}$$

$\square$

Θεωρημα 2.2.4. *Τὸ (Amb) εἶναι ἀνεξάρτητο τῆς TST.*

Ἀπόδειξη. Πρέπει νὰ ἀποδείξουμε ὅτι $\nvdash$ (Amb) καὶ ὅτι $\nvdash \neg$(Amb).

Γιὰ τὸ πρῶτο, θεωροῦμε τὸν τύπο $\phi : \ \exists x^0 \exists y^0 [x^0 \neq y^0]$ καὶ τὸ μοντέλο $\mathcal{A} = \langle A, \varepsilon^{\mathcal{A}} \rangle$ μὲ $A_0 = \{t\}$, $A_1 = \{0, 1\}$. Τότε $\phi^+ : \ \exists x^1 \exists y^1 [x^1 \neq y^1]$ καὶ τὰ x^1, y^1 ἀντιστοιχοῦν στὰ $0, 1$ ἀντιστοίχως, ὁπότε $\mathcal{A} \vDash \exists x^1 \exists y^1 [x^1 \neq y^1]$, ἐνῶ τὰ x^0, y^0 ἀντιστοιχοῦν στὸ ἴδιο t ὁπότε $\mathcal{A} \nvDash \exists x^0 \exists y^0 [x^0 \neq y^0]$.

Γιὰ τὸ δεύτερο, παρατηροῦμε ἀρχικὰ ὅτι[2]

$$\neg(\phi^+ \to \phi) \equiv \neg(\neg\phi^+ \vee \phi) \equiv \neg\neg\phi^+ \ \wedge \ \neg\phi \equiv \phi^+ \wedge \neg\phi,$$

ὁπότε ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι $\nvdash \phi^+ \wedge \neg\phi$, γιὰ ὅλους τοὺς τύπους ϕ.

Πρὸς ἄτοπο, ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχει ϕ τ.ω. γιὰ κάθε μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST νὰ ἰσχύει $\mathcal{A} \vDash \phi^+ \wedge \neg\phi$. Τότε $\mathcal{A} \vDash \phi^+$ (1) καὶ $\mathcal{A} \vDash \neg\phi$ (2). Ἀπὸ τὸ 2.2.3, ἡ (1) δίνει $\mathcal{A}^+ \vDash \phi$. Ἐπειδὴ ἡ (2) ἰσχύει γιὰ ὅλα τὰ μοντέλα τῆς TST, ἕπεται ὅτι $\mathcal{A}^+ \vDash \neg\phi$. Βρήκαμε λοιπὸν ὅτι $\mathcal{A}^+ \vDash \phi \wedge \neg\phi$, ποὺ εἶναι ἄτοπο. $\square$

Χρησιμοποιῶντας τώρα τὸ 2.2.4, μποροῦμε νὰ εἰσάγουμε τὸ (Amb) στὴν TST καὶ νὰ πάρουμε τὴ θεωρία TST+(Amb). Σκοπὸς αὐτῆς τῆς ἑνότητας εἶναι νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι

$$\text{NF συνεπὴς} \iff \text{TST} + (\text{Amb}) \text{ συνεπής.}$$

Δίνουμε πρῶτα τὸν παρακάτω ὁρισμό:

Ορισμος 2.2.5. Ἔστω $\mathcal{A} = \langle A, \varepsilon^{\mathcal{A}} \rangle$ μοντέλο τῆς TST. Ὀνομάζουμε *αὐτομορφισμὸ ἀλλαγῆς βαθμίδας (type shifting automorphism)* ἢ ἁπλῶς *αὐτομορφισμό*, κάθε ἀκολουθία ἕνα πρὸς ἕνα καὶ ἐπὶ συναρτήσεων $f = (f_0, f_1, \dots)$ τῆς μορφῆς $f_i : A_i \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A_{i+1}$ τ.ω.

$$x \varepsilon^{\mathcal{A}} y \iff f_i(x) \varepsilon^{\mathcal{A}^+} f_{i+1}(y)$$

γιὰ ὅλα τὰ $x \in A_i$, $y \in A_{i+1}$. Συμβολίζουμε τὸν αὐτομορφισμὸ μὲ $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^+$.

Ορισμος 2.2.6. Ἔστω $\mathcal{A} = \langle A, \in^A \rangle$ καὶ $\mathcal{B} = \langle B, \in^B \rangle$ μοντέλα τῆς TST. Ὀνομάζουμε *ἰσομορφισμὸ μοντέλων* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μιὰ συνάρτηση $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ τ.ω.

- $f[A_i] = B_i$, γιὰ κάθε i
- $x \varepsilon^{\mathcal{A}} y \iff f_i(x) \varepsilon^{\mathcal{A}^+} f_{i+1}(y)$, γιὰ ὅλα τὰ $x \in A_i$, $y \in A_{i+1}$.

Τὰ $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$ λέγονται ἰσόμορφα (συμβ. $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$), ἂνν ὑπάρχει ἰσομορφισμὸς μεταξύ τους.

[2] Τὸ $\equiv$ σημαίνει ταυτολογικῶς ἰσοδύναμα.

Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἑνότητας θὰ περάσει ἀπὸ τὴν ἀπόδειξη τῆς ἰσοδυναμίας τῶν ἑξῆς προτάσεων:

α) Ὑπάρχει μοντέλο $\mathcal{M}$ τῆς NF.

β) Ὑπάρχει μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST, καὶ αὐτομορφισμὸς $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^+$.

γ) Ὑπάρχει μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST, τ.ω. $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}^+$.

δ) Ὑπάρχει μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST+(Amb).

Θεωρημα 2.2.7. *Τὰ ἑξῆς εἶναι ἰσοδύναμα*

α) Ὑπάρχει μοντέλο $\mathcal{M}$ τῆς NF.

β) Ὑπάρχει μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST, καὶ αὐτομορφισμὸς $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^+$.

Ἀπόδειξη. (α$\Longrightarrow$β) Δοθέντος τοῦ $\mathcal{M}$, ὁρίζουμε τὸ $\mathcal{A}$ ἀπὸ τὶς σχέσεις:

$$A_i = M \times \{i\} = \{\langle a, i\rangle \mid a \in M\},$$

$$\langle a, i\rangle \varepsilon^{\mathcal{A}} \langle b, j\rangle \iff a\varepsilon^{\mathcal{M}} b \text{ καὶ } i + 1 = j,$$

γιὰ ὅλα $a, b \in M$ καὶ $i, j \in \mathbb{N}$. Προφανῶς, τὰ A_i εἶναι ξένα μεταξύ τους καί, κατὰ τὴ σύμβαση τοῦ ὁρισμοῦ 2.1.1 ὁρίζουμε $A = \cup_i A_i$.

Δοθέντος τώρα ὅτι τὸ $\mathcal{M}$ ἱκανοποιεῖ τὸ ἀξιώμα ἔκτασης τῆς NF

$$\mathcal{M} \vDash a = b \leftrightarrow \forall z[z\varepsilon a \leftrightarrow z\varepsilon b]$$

καὶ τὸ ἀξίωμα-σχῆμα διαστρωματωμένης κατανόησης

$$\mathcal{M} \vDash \exists a \forall x[x\varepsilon a \leftrightarrow \phi(x)],$$

γιὰ κάποιον διαστρωματωμένο τύπο $\phi(x)$ τῆς NF, μποροῦμε εὔκολα νὰ δείξουμε ὅτι τὸ $\mathcal{A}$ ἱκανοποιεῖ τὸ ἀξίωμα ἔκτασης τῆς TST

$$\mathcal{A} \vDash a^{k+1} = b^{k+1} \leftrightarrow \forall z^k[z^k\varepsilon a^{k+1} \leftrightarrow z^k\varepsilon b^{k+1}]$$

καὶ τὸ ἀξίωμα-σχῆμα κατανόησης

$$\mathcal{A} \vDash \exists a^{k+1} \forall x^k[x^k\varepsilon a^{k+1} \leftrightarrow \phi(x^k)],$$

γιὰ τὸν ἀντίστοιχο τύπο $\phi(x^k)$ τῆς TST (βλ. 1.2.2)

Ἑπομένως τὸ $\mathcal{A}$ εἶναι μοντέλο τῆς TST. Πρέπει τώρα νὰ βροῦμε ἕναν αὐτομορφισμὸ $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^+$. Θεωροῦμε τὶς συναρτήσεις $f_k : A_k \to A_{k+1}$ μὲ τύπο $f_k(\langle a, k\rangle) = \langle a, k + 1\rangle$ καὶ δείχνουμε ὅτι ἡ ἀκολουθία τους (ἔστω f) ἀποτελεῖ αὐτομορφισμό. Κατ' ἀρχάς, παρατηροῦμε ὅτι κάθε f_k εἶναι ἕνα πρὸς ἕνα καὶ ἐπί.

Τέλος, γιὰ τὴ βασικὴ σχέση

$$\langle a,k\rangle\varepsilon^{\mathcal{A}}\langle b,\ell\rangle \iff f_k(\langle a,k\rangle)\varepsilon^{\mathcal{A}}f_\ell(\langle b,\ell\rangle)$$

τοῦ αὐτομορφισμοῦ, ἔχουμε:

$$\begin{aligned}\langle a,k\rangle\varepsilon^{\mathcal{A}}\langle b,\ell\rangle &\iff a\varepsilon^{\mathcal{M}}b \text{ καὶ } \ell = k+1\\ &\iff a\varepsilon^{\mathcal{M}}b \text{ καὶ } \ell+1 = (k+1)+1\\ &\iff \langle a,k+1\rangle\varepsilon^{\mathcal{A}}\langle b,\ell+1\rangle\\ &\iff f_k(\langle a,k\rangle)\varepsilon^{\mathcal{A}}f_\ell(\langle b,\ell\rangle).\end{aligned}$$

(β$\Longrightarrow$α) Δοθέντος μοντέλου $\mathcal{A} = (A, \varepsilon^{\mathcal{A}})$ τῆς TST, κατασκευάζουμε ἕνα μοντέλο $\mathcal{M}$ τῆς NF, ὡς ἑξῆς:

$$M = \bigcup_i A_i = A,$$

$$x\varepsilon^{\mathcal{M}}y \iff x^i\varepsilon^{\mathcal{A}}y^{i+1}, \text{ γιὰ κάποιο } i,$$

γιὰ ὅλα τὰ $x, y \in M$.

Ὅπως στὸ εὐθύ, ἀποδεικνύουμε ὅτι τὸ $\mathcal{M}$ ἱκανοποιεῖ τὰ ἀξιώματα τῆς NF, χρησιμοποιῶντας τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ $\mathcal{A}$ ἱκανοποιεῖ τὰ ἀξιώματα τῆς TST. □

Προταση 2.2.8. *Τὰ ἑξῆς εἶναι ἰσοδύναμα:*

β) Ὑπάρχει μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST, καὶ αὐτομορφισμὸς $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^+$.

γ) Ὑπάρχει μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST, τ.ω. $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^+$.

Ἀπόδειξη. (β)$\Rightarrow$(γ): Θὰ δείξουμε ὅτι ὁ αὐτομορφισμὸς f ἐπάγει ἕναν ἰσομορφισμὸ $g : \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^+$. Ὁρίζουμε $g : A \to A^+$ μὲ τύπο $g(x) = f_i(x)$, γιὰ κάθε $x \in A_i$, γιὰ ὅλα τὰ i.

Ξεκινᾶμε δείχνοντας ὅτι εἶναι 1-1: Ἔστω $x, y \in A$ μὲ $g(x) = g(y) \in A_{i+1}$, γιὰ κάποιο i. Τότε $x, y \in A_i$ καὶ $f_i(x) = f_i(y)$. Ἄρα $x = y$, ἀφοῦ οἱ f_i εἶναι 1-1.

Ἔστω τώρα $y \in A^+$. Τότε $y \in A_{i+1}$ γιὰ κάποιο i. Ἄρα, $y = f_i(x)$, γιὰ κάποιο $x \in A_i$ καὶ γιὰ κάποιο i. Ἄρα, $y = g(x)$ γιὰ κάποιο $x \in A_i$. Ἄρα, ἡ g εἶναι ἐπί.

Δείξαμε ὅτι ἡ g εἶναι ἕνα πρὸς ἕνα καὶ ἐπί. Μένει νὰ δείξουμε ὅτι

$$g(a)\varepsilon^{\mathcal{A}}g(b) \iff a\varepsilon^{\mathcal{A}}b$$

γιὰ ὅλα τὰ $a, b \in A$. Ἔστω $a = \langle a', m\rangle$ καὶ $b = \langle b', n\rangle$, γιὰ κάποια $a^M, b^M \in M$ καὶ $m, n \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$\begin{aligned}a\varepsilon^{\mathcal{A}}b &\iff \langle a',m\rangle\varepsilon^{\mathcal{A}}\langle b',n\rangle\\ &\iff f_m(\langle a',m\rangle)\varepsilon^{\mathcal{A}}f_n(\langle b',n\rangle)\\ &\iff g(a)\varepsilon^{\mathcal{A}}g(b).\end{aligned}$$

(γ)⇒(β): Ἔστω $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^+$ ἰσομορφισμός. Ὁρίζουμε αὐτομορφισμὸ $f = (f_0, f_1, \dots) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^+$, ὡς ἑξῆς: Γιὰ κάθε i, ὁρίζουμε $f_i = g \restriction A_i$. Πρῶτα δείχνουμε ὅτι τὰ f_i εἶναι καλὰ ὁρισμένα: Ἔστω $x \in A_i$. Τότε $x \in A$ ἄρα $f_i(x) = g(x) \in A$, ἑπομένως $f_i(x) \in A_{i+1}$.

Τώρα, οἱ f_i εἶναι ἕνα πρὸς ἕνα, ὡς περιορισμοὶ ἕνα πρὸς ἕνα συναρτήσεων σὲ ξένα μεταξύ τους σύνολα καὶ ἐπίσης ἰσχύει ἡ σχέση

$$g(x)\varepsilon^{\mathcal{A}}g(y) \iff f_i(x)\varepsilon^{\mathcal{A}}f_{i+1}(y)$$

προφανῶς ἀπὸ τὸν ὁρισμό, ἀπὸ τὴν ὁποία ἕπεται ἡ ζητούμενη

$$g(x)\varepsilon^{\mathcal{A}}g(y) \iff x\varepsilon^{\mathcal{A}}y,$$

ἀφοῦ ἀπὸ τὴν ὑπόθεση ἰσχύει ὅτι $x\varepsilon^{\mathcal{A}}y \iff f_i(x)\varepsilon^{\mathcal{A}}f_{i+1}(y)$. □

Προταση 2.2.9. *Ἂν*

γ) Ὑπάρχει μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST, τ.ω. $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}^+$.

τότε

δ) Ὑπάρχει μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST+(Amb).

Ἀπόδειξη. Ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξουμε ὅτι $\mathcal{A} \vDash \phi^+ \to \phi$, δηλαδὴ $\mathcal{A} \vDash \phi^+ \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \phi$.

Ἔστω $\mathcal{A} \vDash \phi^+$. Τότε ἀπὸ τὸ 2.2.3 ἕπεται ὅτι $\mathcal{A}^+ \vDash \phi$. Ὅμως $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}^+$, δηλαδὴ γιὰ κάθε $\psi \in F(\mathcal{L}_{TST})$, $\mathcal{A} \vDash \psi \iff \mathcal{A}^+ \vdash \psi$. Ἄρα, $\mathcal{A} \vDash \phi$. □

Ἀπὸ τὰ 2.2.7, 2.2.8 καὶ 2.2.9 τώρα, ἕπεται τὸ ἥμισυ τοῦ στόχου μας.

Πορισμα 2.2.10. *Ἂν ἡ NF εἶναι συνεπής, τότε καὶ ἡ TST+(Amb) εἶναι συνεπής.*

Ἡ ἄλλη φορὰ τοῦ θεωρήματος περνᾶ ἀπὸ τὴν ἀπόδειξη (δ)⇒(γ), καὶ θέλει ἀρκετὴ δουλειά. Ξεκινᾶμε μὲ τὸν ἑξῆς ὁρισμό:

Ορισμος 2.2.11. Ἔστω θεωρία T, ἀποτελούμενη ἀπὸ τύπους μιᾶς (πρωτοβάθμιας) γλώσσας $\mathcal{L}$. Ὀνομάζουμε *ἐνδομορφισμὸ* τῆς T μιὰ ἀπεικόνιση $(\ )^* : T \to T$ τ.ω.

1. $FV(\phi) = FV(\phi^*)$, γιὰ κάθε $\phi \in T$.
2. Ἡ $(\ )^*$ διατηρεῖ τοὺς λογικοὺς συνδέσμους, δηλαδὴ γιὰ ὅλους τοὺς τύπους τῆς T,
   - $(\neg\phi)^* = \neg\phi^*$·
   - $(\phi\square\psi)^* = \phi^*\square\psi^*$, γιὰ κάθε διμελῆ σύνδεσμο $\square$·
   - $(\phi(x_1, \dots, x_n))^* = \phi(x_1, \dots, x_n)^*$

- $(Qx\phi(x))^* = Qx\phi^*(x)$ γιὰ κάθε ποσοδείκτη Q.

3. Ἂν ϕ εἶναι ἔγκυρη πρόταση τῆς T, τότε καὶ ἡ ϕ^* εἶναι ἔγκυρη πρόταση τῆς T.

Ορισμος 2.2.12. Ἔστω T θεωρία μὲ ἐνδομορφισμὸ $(\ )^*$ καὶ μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς T. Θὰ λέμε ὅτι ὁ $(\ )^*$ εἶναι *ἀντίστοιχος ἐνδομορφισμὸς τῆς* T, ἂνν γιὰ κάθε n-μελὲς κατηγορικὸ σύμβολο R τῆς T,

$$\mathcal{A} \vDash R^*(x_1^*, \ldots, x_n^*) \iff \mathcal{A} \vDash R(x_1, \ldots, x_n).$$

Λημμα 2.2.13. *Ἔστω T πλήρης θεωρία μὲ ἐνδομορφισμὸ $(\ )^*$. Ἔστω $\phi(x)$ καὶ $\psi_i(x_1, \ldots, x_n)$ τύποι $(i = 1, \ldots, m)$. Ἔστω $k \in \{1, \ldots, n+1\}$. Τότε, κάθε μοντέλο $\mathcal{A}$ περιέχει στοιχεῖα $e_1 \ldots, e_{n+1} \in A$ τ.ω.*

$$\mathcal{A} \vDash (\exists x)\phi(x) \to \phi(e_k)$$

καὶ

$$\mathcal{A} \vDash \psi_i(e_1, \ldots, e_n) \leftrightarrow \psi_i^*(e_2, \ldots, e_{n+1})$$

γιὰ κάθε $i = 1, \ldots, m$.

Ἀπόδειξη. Μὲ ἐπαγωγὴ στὸ n.

Βάση: Κατ' ἀρχάς, προφανῶς ὑπάρχει $e_1 \in A$, τὸ $e_1 = x$ τ.ω. $\mathcal{A} \vDash (\exists x)\phi(x) \to \phi(e_1)$.

Τὰ ψ_i καὶ ψ_i^* εἶναι προτάσεις, ἀφοῦ δὲν ἔχουν ἐλεύθερες μεταβλητές. Θὰ δείξουμε ὅτι $\mathcal{A} \vDash \psi_i \iff \mathcal{A} \vDash \psi_i^*$, γιὰ ὅλα τὰ i. Τὸ εὐθὺ εἶναι ἄμεσο, ἀπὸ τὸ (3) τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἐνδομορφισμοῦ. Γιὰ τὸ ἀντίστροφο, ἔστω $\mathcal{A} \vDash \psi_i^*$ καί, πρὸς ἄτοπο, $\mathcal{A} \nvDash \psi_i$. Ἀπὸ τὴν πληρότητα τῆς T ἔχουμε ὅτι $\mathcal{A} \vDash \neg\psi_i$. Ἀπὸ τὸ εὐθὺ ἔπεται ὅτι $\mathcal{A} \vDash (\neg\psi_i)^*$ ἄρα $\mathcal{A} \vDash \neg\psi_i^*$. Τότε ὅμως $\mathcal{A} \vDash \psi_i^* \wedge \neg\psi_i^*$, ἄτοπο.

Ἐπαγωγικὸ βῆμα: Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει γιὰ $n-1$ καὶ θὰ τὴ δείξουμε γιὰ n. Γιὰ κάθε i, καὶ γιὰ $\delta_i \in \{0, 1\}$ ὀνομάζουμε

$$\psi_i^{\delta_i} = \begin{cases} \psi_i, & \delta_i = 0 \\ \neg\psi_i, & \delta_i = 1 \end{cases}$$

Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι $1 \leqslant k \leqslant m$. Θεωροῦμε τοὺς τύπους

$$\chi_{\delta_1, \ldots, \delta_m}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (\exists x_n) \bigwedge_{i=1}^{m} \psi_i^{\delta_i}(x_1, \ldots, x_m).$$

Ἀπὸ τὸ (2) τοῦ ὁρισμοῦ ἐνδομορφισμοῦ ἔχουμε

$$\chi^*_{\delta_1, \ldots, \delta_m}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (\exists x_n) \bigwedge_{i=1}^{m} (\psi_i^*)^{\delta_i}(x_1, \ldots, x_m)$$

καὶ ἀπὸ τὴν Ε.Υ. ὑπάρχουν $e_1, \dots, e_n \in A$ τ.ω.

$$\mathcal{A} \models (\exists x)\phi(x) \to \phi(e_k)$$

καὶ

$$\mathcal{A} \models \chi_{\delta_1,\dots,\delta_m}(x_1, \dots, x_{n-1}) \leftrightarrow \chi^*_{\delta_1,\dots,\delta_m}(x_2, \dots, x_n).$$

Γιὰ κατάλληλα η_i $(i = 1, \dots, m)$ ἔχουμε:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \models \psi_i^{\eta_i}(e_1, \dots, e_n), \text{ γιὰ κάθε } i = 1, \dots, m \\ \iff & \mathcal{A} \models \chi_{\eta_1,\dots,\eta_m}(e_1, \dots, e_{n-1}) \\ \iff & \mathcal{A} \models \chi^*_{\eta_1,\dots,\eta_m}(e_2, \dots, e_n) \\ \iff & \mathcal{A} \models (\psi_i^*)^{\eta_i}(e_2, \dots, e_{n+1}), \text{ γιὰ κάθε } i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Ἄρα,

$$\mathcal{A} \models \psi_i^{\eta_i}(e_1, \dots, e_n) \iff \mathcal{A} \models (\psi_i^*)^{\eta_i}(e_2, \dots, e_{n+1}),$$

γιὰ κάθε $i = 1, \dots, m$.

Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι $k = n + 1$ καὶ θεωροῦμε τοὺς τύπους

$$\omega_{\delta_1,\dots,\delta_m}(x_1, \dots, x_{n-1}) = (\exists x_n) \bigwedge_{i=1}^{m} \psi_i^{\delta_i}(x_n, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

καὶ ἀπὸ τὴν Ε.Υ. ὑπάρχουν $e_2, \dots, e_{n+1} \in A$ τ.ω.

$$\mathcal{A} \models (\exists x)\phi(x) \to \phi(e_{n+1})$$

καὶ

$$\mathcal{A} \models \omega_{\delta_1,\dots,\delta_m}(e_1, \dots, e_n) \leftrightarrow \omega^*_{\delta_1,\dots,\delta_m}(e_2, \dots, e_{n+1}).$$

Γιὰ κατάλληλα η_i $(i = 1, \dots, m)$ ἔχουμε:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \models \psi_i^{\eta_i}(e_2, \dots, e_{n+1}), \text{ γιὰ κάθε } i = 1, \dots, m \\ \iff & \mathcal{A} \models \omega_{\eta_1,\dots,\eta_m}(e_2, \dots, e_{n+1}) \\ \iff & \mathcal{A} \models \omega^*_{\eta_1,\dots,\eta_m}(e_1, \dots, e_n) \\ \iff & \mathcal{A} \models (\psi_i^*)^{\eta_i}(e_1, \dots, e_n), \text{ γιὰ κάθε } i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Ἄρα,

$$\mathcal{A} \models \psi_i^{\eta_i}(e_1, \dots, e_n) \iff \mathcal{A} \models (\psi_i^*)^{\eta_i}(e_2, \dots, e_{n+1}),$$

γιὰ κάθε $i = 1, \dots, m$. $\square$

Πορισμα 2.2.14. *Ἔστω T πλήρης θεωρία μὲ ἐνδομορφισμὸ $(\ )^*$ καὶ $\phi(x)$ τύπος τῆς T. Τότε, ἡ T μπορεῖ νὰ ἐπεκταθεῖ σὲ νέα πλήρη θεωρία T', μὲ ἐπιπλέον σταθερὲς a_k ($k \in \mathbb{Z}$) καὶ ἐπιπλέον ἀξίωμα τὸ $(\exists x)\phi(x) \to \phi(a_0)$, ε.ω. ἡ ἀκόλουθη ἐπέκταση τοῦ $(\ )^*$ νὰ εἶναι ἐπίσης ἐνδομορφισμὸς τῆς T'.*

$$(\psi(x_1, \ldots, x_j, a_{k_1}, \ldots, a_{k_m}))^* = \psi^*(x_1, \ldots, x_j, a_{k_1+1}, \ldots, a_{k_m+1}).$$

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τὴν T καὶ τὰ $e_1, \ldots, e_{n+1} \in A$, ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὸ λῆμμα, γιὰ ὅλα τὰ n. Ἔχουμε ἔτσι ἄπειρα στοιχεῖα τοῦ σύμπαντος ἑνὸς μοντέλου, ποὺ θὰ κληθοῦν νὰ ἑρμηνεύσουν τὶς νέες σταθερὲς a_k.

Δημιουργοῦμε τὴν T' ἀπὸ τὴν T εἰσάγοντας τὶς νέες σταθερές. Ἔστω $\mathcal{A}$ ἕνα μοντέλο τῆς νέας θεωρίας. Τότε $\mathcal{A} \vDash T$, ἑπομένως

$$\mathcal{A} \vDash \exists x \phi(x) \to \phi(a_0),$$

ἀπὸ τὸ λῆμμα 2.2.13, ἀφοῦ εἴπαμε ὅτι $a_0 = e_i$, γιὰ κάποιο $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ἕπεται λοιπὸν ὅτι

$$\vdash_{T'} \exists x \phi(x) \to \phi(a_0),$$

ἀφοῦ τὸ $\mathcal{A}$ ἐπιλέχθηκε τυχαῖα. Ἑπομένως, μποροῦμε νὰ εἰσάγουμε τὴν παραπάνω πρόταση ὡς ἀξίωμα τῆς T'.

Ἐπεκτείνοντας τώρα τὸν ἐνδομορφισμὸ $(\ )^* : F(T) \to F(T)$ διὰ τῆς σχέσεως

$$(\psi(x_1, \ldots, x_j, a_{k_1}, \ldots, a_{k_m}))^* = \psi^*(x_1, \ldots, x_j, a_{k_1+1}, \ldots, a_{k_m+1}),$$

γιὰ κάθε τύπο $\psi(x_1, \ldots, x_j, a_{k_1}, \ldots, a_{k_m})$ τῆς T', βρίσκουμε ἕναν ἐνδομορφισμὸ $(\ )^* : F(T') \to F(T')$. □

Πορισμα 2.2.15. *Ἔστω T πλήρης θεωρία μὲ ἐνδομορφισμὸ $(\ )^*$. Ὑπάρχει πλήρης ἐπέκταση T'' τῆς T, μὲ μοναδικὲς νέες σταθερὲς τὶς a_k^i γιὰ $k \in \mathbb{Z}$ καὶ $i \in I$, (ὅπου I τυχαῖο σύνολο δεικτῶν) τ.ω.*

- *γιὰ κάθε τύπο $\phi(x)$ τῆς T'' ὑπάρχει $i \in I$ τ.ω. $\vdash_{T''} \phi(x) \to \phi(a_0^i)$ καὶ*
- *γιὰ κάθε τύπο $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ τῆς T''*

$$\vdash_{T''} \psi(a_{k_1}^{i_1}, \ldots, a_{k_m}^{i_m}) \leftrightarrow \psi^*(a_{k_1+1}^{i_1}, \ldots, a_{k_m+1}^{i_m}).$$

Ἀπόδειξη. Ἐφαρμόζουμε τὸ προηγούμενο πόρισμα $|I|$ φορὲς καὶ λαμβάνουμε $|I|$ πλήρεις ἐπεκτάσεις $(T_i')_{i \in I}$ τῆς T. Ὁρίζουμε ὡς T'' τὴν ἕνωσή τους:

$$T'' = \bigcup_{i \in I} T_i'.$$

Ἡ T'' εἶναι πλήρης ἐπέκταση τῆς T μὲ σύνολο σταθερῶν

$$\Sigma\tau(T'') = \Sigma\tau(T) \cup \{a_k^i | k \in \mathbb{Z}, i \in I\}.$$

Ἀπὸ τὸ προηγούμενο πόρισμα προκύπτει ὅτι γιὰ κάθε $\phi(x)$ τῆς T'' ὑπάρχει $i \in I$ τ.ω. $\vdash_{T''} \phi(x) \to \phi(a_0^i)$.

Γιὰ νὰ δείξουμε τὸ δεύτερο, θεωροῦμε τυχαῖο τύπο $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ τῆς T''. Αὐτὸς εἶναι τύπος κάποιας T_i', ὁπότε ἀπὸ τὸ προηγούμενο πόρισμα, ἄμεσα, προκύπτει τὸ ζητούμενο. □

Προταση 2.2.16. *Ἔστω T πλήρης θεωρία μὲ ἐνδομορφισμὸ $(\ )^* : F(T) \to F(T)$. Τότε, ἡ T ἔχει μοντέλο μὲ ἀντίστοιχο ἐνδομορφισμό.*

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τὴν T'' τοῦ πορίσματος 2.2.15 καὶ ἕνα μοντέλο της $\mathcal{A}$. Τότε, τὸ $\mathcal{A}$ εἶναι μοντέλο καὶ τῆς T. Ἐπίσης, ἐπεκτείνουμε τὸν $(\ )^*$ διὰ τῆς

$$(a_k^i)^* = a_{k+1}^i$$

γιὰ κάθε νέα σταθερὰ τῆς T''. Τότε, γιὰ κάθε τύπο ψ τῆς T, ὁ $\psi(a_{k_1}^{i_1}, \ldots, a_{k_m}^{i_m})$ εἶναι τύπος τῆς T''.

Ἔχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \psi^*((a_{k_1}^{i_1})^*, \ldots, (a_{k_m}^{i_m})^*) &\iff \mathcal{A} \vDash \psi^*(a_{k_1+1}^{i_1}, \ldots, a_{k_m+1}^{i_m}),\ \text{ὁρισμὸς } (\ )^* \\ &\iff \mathcal{A} \vDash \psi(a_{k_1}^{i_1}, \ldots, a_{k_m}^{i_m}),\ \text{πόρισμα 2.2.15.} \end{aligned}$$

□

Λημμα 2.2.17. *Κάθε συνεπὴς θεωρία ἐπεκτείνεται σὲ μιὰ πλήρη θεωρία.*

Ἀπόδειξη. Ἔστω T συνεπὴς θεωρία καὶ $\mathcal{A}$ ἕνα μοντέλο της. Ὁρίζουμε

$$T' = \{\phi \mid \mathcal{A} \vDash \phi\}.$$

Ἡ T' εἶναι ἐπέκταση τῆς T, ἀφοῦ γιὰ κάθε τύπο ϕ ἔχουμε

$$\phi \in T \Rightarrow T \vdash \phi \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \phi \Rightarrow \phi \in T',$$

ἄρα $T \subseteq T'$.

Ἐπίσης, εἶναι πλήρης. Πράγματι, γιὰ κάθε τύπο ϕ ἔχουμε

$$T' \nvdash \neg\phi \Rightarrow \neg\phi \notin T' \Rightarrow \mathcal{A} \nvDash \neg\phi \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \phi \Rightarrow \phi \in T' \Rightarrow T' \vdash \phi.$$

□

Τώρα εἴμαστε ἕτοιμοι νὰ ἀποδείξουμε τὸ ἀντίστροφο τοῦ 2.2.10.

Θεωρημα 2.2.18. *Ἂν*

δ) ὑπάρχει μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST+(Amb)

τότε

γ) ὑπάρχει μοντέλο $\mathcal{B}$ τῆς TST, τ.ω. $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}^+$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω T ἡ πλήρης ἐπέκταση τῆς συνεποῦς θεωρίας TST+(Amb) ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸ 2.2.17. Ἐφαρμόζουμε τὸ 2.2.16 στὴν T γιὰ τὸν ἐνδομορφισμὸ $(\ )^+$ (εἶναι προφανῶς ἐνδομορφισμός καὶ ἐπεκτείνεται στὴν T). Ὁ $(\ )^+$ θὰ εἶναι ἀντίστοιχος ἐνδομορφισμὸς τῆς TST+(Amb). Αὐτὸ σημαίνει ὅτι

$$\mathcal{A} \vDash x^i \varepsilon y^{i+1} \iff \mathcal{A} \vDash x^{i+1} \varepsilon y^{i+2}. \tag{$\star$}$$

Μὲ ἐπαγωγὴ στοὺς τύπους δείχνουμε ὅτι $\mathcal{A} \vDash \phi^+ \iff \mathcal{A} \vDash \phi$, χρησιμοποιῶντας τὴν $(\star)$. Γιὰ τὴν ἀκρίβεια, τὸ ἀντίστροφο εἶναι γνωστὸ (2.2.2) καὶ ἡ ἐπαγωγὴ χρειάζεται μόνο γιὰ τὸ εὐθύ. Ἡ $(\star)$ ἀποτελεῖ τὴ βάση τῆς ἐπαγωγῆς καὶ στὴ συνέχεια τὸ ἐπαγωγικὸ βῆμα εἶναι προφανές.

Ἑπομένως, ἀφοῦ τὸ $\mathcal{A}$ εἶναι μοντέλο τῆς T, εἶναι μοντέλο καὶ τῆς TST+(Amb), ἄρα καὶ τῆς TST καὶ ἰσχύει

$$\mathcal{A}^+ \vDash \phi \iff \mathcal{A} \vDash \phi^+ \iff \mathcal{A} \vDash \phi,$$

γιὰ κάθε τύπο ϕ τῆς T (ἄρα καὶ τῆς TST), ἀπὸ τὰ (2.2.3) καὶ $(\star)$, ἀντίστοιχα. Ἔτσι, γιὰ τὸ μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST ἰσχύει ὅτι $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^+$.

Ἄρα, τὸ ζητούμενο ἀποδείχθηκε γιὰ $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. □

Ἀποδείχθηκε λοιπὸν ὅτι

Πόρισμα 2.2.19. *Οἱ NF καὶ TST+(Amb) εἶναι ἰσοσυνεπεῖς.*

2.3 Τμήματα τῆς NF

Σ' αὐτὴ τὴν ἑνότητα θὰ ἀποδείξουμε τὴ συνέπεια ἑνὸς τμήματος τῆς NF, βασισμένοι στὴ δουλειὰ τοῦ Grishin στὸ [3]. Στὴ συνέχεια, θὰ δείξουμε ὅτι ἡ NF καὶ ἕνα τμῆμα της εἶναι ἰσοσυνεπεῖς.

Ορισμος 2.3.1. Ἔστω ϕ τύπος τῆς TST. Ὁ ϕ καλεῖται n-τύπος *(n-formula)*, ἂνν κάθε μεταβλητὴ ποὺ ἐμφανίζεται σ' αὐτὸν ἔχει βαθμίδα μικρότερη τοῦ n.

Ὀνομάζουμε TST_n τὸ τμῆμα τῆς TST ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ n-τύπους.

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε στὴν ἑνότητα 2.1, κάθε TST_n μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ ὡς ἡ θεωρία ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἀξιώματα (ext) καὶ (co), περιορισμένα γιὰ n-τύπους.

Ἕνα μοντέλο τῆς TST_n θὰ εἶναι μιὰ δομὴ τῆς μορφῆς

$$\mathcal{A} = \langle A_0, \ldots, A_{n-1}, \varepsilon^{\mathcal{A}} \rangle,$$

ὅπου A_i εἶναι τὸ ZFC-σύνολο ποὺ περιέχει ZFC-σύνολα ἀντίστοιχα πρὸς τὶς μεταβλητὲς βαθμίδας i, γιὰ κάθε $i = 0, \ldots, n-1$. Κατὰ τὴ σύμβαση τῆς 2.2, θὰ γράφουμε $\mathcal{A} = \langle A, \varepsilon^{\mathcal{A}} \rangle$, θεωρῶντας μιὰ διαμέριση $(A_i)_{i=0,\ldots,n-1}$ τοῦ A.

Ορισμος 2.3.2. Ἕνας τύπος $\phi \in F(\mathcal{L}_{NF})$ λέγεται n-διαστρωμένος, ἂν ἰσχύει μία ἀπὸ τὶς δύο ἰσοδύναμες ἰδιότητες τοῦ 1.2.2, γιὰ n-τύπους τῆς TST.

Ὀνομάζουμε NF_n τὴ θεωρία ποὺ προκύπτει περιορίζοντας τὰ ἀξιώματα (ext) καὶ (strco) σὲ n-διαστρωματωμένους τύπους.

Ὁ πρῶτος ἀπὸ τοὺς σκοποὺς τῆς ἑνότητας εἶναι νὰ ἀποδειχθεῖ ἡ συνέπεια τῆς NF_3. Θὰ βόλευε ἂν ἴσχυε ἕνα θεώρημα παρόμοιο αὐτοῦ τῆς ἑνότητας 2.3, ποὺ λέει ὅτι ἡ NF εἶναι συνεπής, ἂνν ὑπάρχει ἕνα μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST τ.ω. $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}^+$. Δυστυχῶς, αὐτὴ ἡ ἰσοδυναμία δὲν μπορεῖ νὰ ἰσχύει γιὰ τμήματα τῶν TST/NF, γιὰ τὸν ἑξῆς λόγο: Ἂν $\mathcal{A}$ εἶναι μοντέλο τῆς TST_n, τότε τὸ $\mathcal{A}^+$ εἶναι μοντέλο τῆς $\mathrm{TST}_n - \mathrm{TST}_1$ καὶ ὄχι τῆς TST_n.

Ἰσχύει ὅμως μιὰ ἰσοδυναμία παρόμοια πρὸς τὴν προηγούμενη. Ξεκινᾶμε μὲ τὸν ἑξῆς ὁρισμό:

Ορισμος 2.3.3. Ἔστω $\mathcal{A} = \langle A, \varepsilon^{\mathcal{A}} \rangle$ σ.μ. μοντέλο τῆς TST_3. Ὀνομάζουμε *$\in$-ἰσομορφισμὸ* κάθε δυάδα ἕνα πρὸς ἕνα καὶ ἐπὶ συναρτήσεων $f_0 : A_0 \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A_1$, $f_1 : A_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A_2$ τ.ω. γιὰ ὅλα $x \in A_0$, $y \in A_1$,

$$x \in y \iff f_0(x) \in f_1(y).$$

Ἐπίσης, ὀνομάζουμε *$\subseteq$-ἰσομορφισμὸ* κάθε ἀμφίεση $\phi : A_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A_2$ τ.ω. γιὰ ὅλα $x_1, x_2 \in A_1$,

$$x_1 \subseteq x_2 \iff \phi(x_1) \subseteq \phi(x_2).$$

Λημμα 2.3.4. *Ἡ NF_3 εἶναι συνεπής, ἂνν ὑπάρχει μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST_3 καὶ $\in$-ἰσομορφισμὸς (f_0, f_1) σ' αὐτό.*

Ἡ ἀπόδειξη μιμεῖται τὴν ἀπόδειξη τοῦ ἀντίστοιχου 2.3.7 και τὴν ἀφήνουμε. Συνδυάζοντας τώρα τὸ παραπάνω μὲ τὸ 2.1.5, ἔχουμε ὅτι

Πορισμα 2.3.5. *Ἡ NF_3 εἶναι συνεπής, ἂνν ὑπάρχει σ.μ. μοντέλο $\mathcal{A}$ τῆς TST_3 καὶ $\in$-ἰσομορφισμὸς (f_0, f_1) σ' αὐτό.*

Λημμα 2.3.6. *Ἔστω $\mathcal{A}$ σ.μ. μοντέλο τῆς TST_n. Τότε ὑπάρχει $\in$-ἰσομορφισμὸς (f_0, f_1) στὸ $\mathcal{A}$ ἂνν ὑπάρχει $\subseteq$-ἰσομορφισμὸς ϕ σ' αὐτό.*

Ἀπόδειξη. «$\Longrightarrow$» Θέτουμε $\phi = f_1$. Τότε $\phi : A_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A_2$. Ἔστω $x_1, x_2 \in A_0$ τ.ω. $x_1 \subseteq x_2$. Ἔστω τυχαῖο $t \in A_1$. Ὑπάρχει $s \in A_0$ τ.ω. $t = f_0(s)$. Ἔχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} t \in \phi(x_1) &\implies f_0(s) \in f_1(x_1) \\ &\implies s \in x_1, \text{ γιατὶ } (f_0, f_1) \in\text{-ἰσομορφισμὸς} \\ &\implies s \in x_2, \text{ γιατὶ } x_1 \subseteq x_2 \\ &\implies f_0(s) \in f_1(x_2) \\ &\implies t \in \phi(x_1), \end{aligned}$$

ἄρα $\phi(x_1) \subseteq \phi(x_2)$.

Γιὰ τὸ ἀντίστροφο, θεωροῦμε ὅτι $\phi(x_1) \subseteq \phi(x_2)$ καὶ ἔχουμε γιὰ ὅλα τὰ $t \in A_0$,

$$\begin{aligned} t \in x_1 &\implies f_0(t) \in f_1(x_1) \\ &\implies f_0(t) \in \phi(x_1) \\ &\implies f_0(t) \in \phi(x_2) \\ &\implies f_0(t) \in f_1(x_2) \\ &\implies t \in x_2, \end{aligned}$$

ὁπότε $x_1 \subseteq x_2$.

«$\Longleftarrow$» Θέτουμε $f_0 : A_0 \to A_1$ τ.ω. $f_0(x) = y \iff \phi(\{x\}) = \{y\}$, γιὰ κάθε $x \in A_0$ καὶ $f_1 : A_1 \to A_2$ μὲ. $f_1(x) = \phi(x)$, γιὰ κάθε $x \in A_1$.

Προφανῶς οἱ f_0, f_1 ὁρίζονται καὶ εἶναι 1-1 καὶ ἐπὶ καὶ ἰσχύει

$$x \in y \iff \{x\} \subseteq y \iff \phi(\{x\}) \subseteq \phi(y) \iff \{f_0(x)\} \subseteq f_1(y) \iff f_0(x) \in f_1(y)$$

γιὰ ὅλα $x \in A_0$, $y \in A_1$. □

Ἀπὸ τὰ δύο λήμματα ἕπεται ἡ ἰσοδυναμία ποὺ θὰ χρησιμοποιήσουμε σὲ λίγες σελίδες γιὰ νὰ δείξουμε τὴ συνέπεια τῆς NF_3.

Πορισμα 2.3.7. *Ἡ NF_3 εἶναι συνεπής, ἂνν ὑπάρχει μοντέλο τῆς TST_3 καὶ $\subseteq$-ἰσομορφισμὸς σ' αὐτό.*

Προταση 2.3.8. *Ἔστω X, Y ZFC-σύνολα καὶ A, B οἰκογένειες ὑποσυνόλων τῶν X, Y, δηλαδὴ $A \subseteq \mathcal{P}(X)$, $B \subseteq \mathcal{P}(Y)$, τ.ω.*

1. $|A| = |B| = \aleph_0$·
2. *τὰ A, B εἶναι κλειστὰ ὡς πρὸς τὶς πράξεις τῆς τομῆς καὶ τῆς διαφορᾶς, δηλαδὴ*
    - *γιὰ ὅλα $x, y \in A$ ἰσχύει $x \cap y \in A$·*
    - *γιὰ ὅλα $x, y \in B$ ἰσχύει $x \cap y \in B$·*
    - *γιὰ κάθε $x \in A$ ἰσχύει $X - x \in A$·*
    - *γιὰ κάθε $x \in B$ ἰσχύει $Y - x \in B$·*
3. $\mathcal{P}_1(X) \subseteq A$, $\mathcal{P}_1(Y) \subseteq B$·
4. - *γιὰ κάθε $x \in A$ ὑπάρχει $y \in A$ τ.ω. $y \subseteq x$ καὶ $|y| = |x - y|$·*
    - *γιὰ κάθε $x \in B$ ὑπάρχει $y \in B$ τ.ω. $y \subseteq x$ καὶ $|y| = |x - y|$.*

Τότε, ὑπάρχουν ἀπαριθμήσεις $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ καὶ $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τῶν A, B ἀντιστοίχως τ.ω. γιὰ ὅλα τὰ $n \in \mathbb{N}$ καὶ ὅλα τὰ $\sigma_0, \ldots, \sigma_n \in \{0,1\}$ νὰ ἰσχύει

$$|A_0^{\sigma_0} \cap \cdots \cap A_n^{\sigma_n}| = |B_0^{\sigma_0} \cap \cdots \cap B_n^{\sigma_n}|. \qquad (\star)$$

Ἀπόδειξη. Θὰ κατασκευάσουμε πρῶτα, μὲ ἐπαγωγὴ στὸ n, κατάλληλα A_n,B_n ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν $(\star)$ καὶ στὸ τέλος θὰ ἀποδείξουμε ὅτι ἀποτελοῦν ἀπαριθμήσεις.

Βάση: Κατ' ἀρχάς, ἀπὸ τὸ (3) ἔχουμε ὅτι $\mathcal{P}_1(X) \subseteq A$. Τότε γιὰ ὅλα τὰ $x, y \in X$, $x \neq y$ ἰσχύει $\{x\}, \{y\} \in A$. Ἀπὸ τὴ (2) ἕπεται ὅτι $\{x\} \cap \{y\} \in A$ ἄρα $\emptyset \in A$. Ἀπὸ τὸ (2) ἐπίσης ἕπεται $X - \emptyset \in A \therefore X \in A$. Ὁμοίως $Y \in B$. Θέτουμε $A_0 = X$ καὶ $B_0 = Y$.

Ἔστω $g : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ ἡ 1-1 καὶ ἐπὶ συνάρτηση ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸ (1). Ὁρίζουμε τὴν f μὲ $g(\{x\}) = \{f(x)\}$ καὶ ἔχουμε

$$\begin{aligned}
x \in X &\implies \{x\} \in \mathcal{P}_1(X)\\
&\implies \{x\} \in A\\
&\implies g(\{x\}) \in B\\
&\implies \{f(x)\} \in B\\
&\implies \{f(x)\} \in \mathcal{P}(Y)\\
&\implies \{f(x)\} \in \mathcal{P}_1(Y), \text{ ἀφοῦ εἶναι μονοσύνολο}\\
&\implies f(x) \in Y.
\end{aligned}$$

Ἄρα, ἡ f εἶναι συνάρτηση $X \to Y$ καὶ εὔκολα 1-1 καὶ ἐπί, ὅπως εἴδαμε ἤδη. Ἄρα, $|X| = |Y|$ ἄρα $|-X| = |-Y|$. Ἕπεται ὅτι $|A_0^{\sigma_0}| = |B_0^{\sigma_0}|$, ποὺ ὁλοκληρώνει τὴ βάση.

Πρὶν περάσουμε στὸ βῆμα, θεωροῦμε μιὰ ἀπαρίθμηση $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τοῦ A.

Ἐπαγωγικὸ βῆμα: Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ $(\star)$ ἰσχύει γιὰ n καὶ γιὰ δοθέντα σύνολα $A_0, \ldots, A_n, B_0 \ldots, B_n$. Θὰ δείξουμε ὅτι ἡ $(\star)$ ἰσχύει γιὰ $n+1$, κατασκευάζοντας κατάλληλα A_{n+1}, B_{n+1}.

Ἔστω A_{n+1} τὸ πρῶτο στοιχεῖο τῆς (N_n) ποὺ διαφέρει ἀπὸ τὰ $A_0, \ldots, A_n$. Θεωροῦμε τὰ σύνολα

$$D_n = \{A_0^{\sigma_0} \cap \cdots \cap A_n^{\sigma_n} \mid \sigma_0, \ldots, \sigma_n \in \{0,1\}\}$$

καὶ

$$D_n' = \{B_0^{\sigma_0} \cap \cdots \cap B_n^{\sigma_n} \mid \sigma_0, \ldots, \sigma_n \in \{0,1\}\}.$$

Γιὰ κάθε $\Delta \in D_n$ συμβολίζουμε μὲ Δ' τὸ ἀντίστοιχό του στὸ D_n', δηλαδὴ μὲ τὰ ἴδια $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$. Ἐπίσης, γιὰ τυχαῖα $\delta \in D_n$ (ἀντ. $\delta \in D_n'$) καὶ $C \subseteq X$ (αντ. $C \subseteq Y$) συμβολίζουμε $\tau_\delta^C = |C \cap \delta|$ καὶ $\kappa_\delta^C = |-C \cap \delta|$.

Ἔστω τώρα $f : A_0^{\sigma_0} \cap \cdots \cap A_n^{\sigma_n} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B_0^{\sigma_0} \cap \cdots \cap B_n^{\sigma_n}$ ἡ 1-1 καὶ ἐπὶ συνάρτηση ποὺ ἐξασφαλίζεται ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση. Ὀνομάζουμε $B_{n+1} = f[A_{n+1}]$ καὶ ἔχουμε, γιὰ ὅλα τὰ $\Delta \in D_n$,

$$\begin{aligned} x \in \Delta \cap A_{n+1} &\iff x \in \Delta \text{ καὶ } x \in A_{n+1} \\ &\iff f(x) \in \Delta' \text{ καὶ } f(x) \in B_{n+1} \\ &\iff f(x) \in \Delta' \cap B_{n+1} \end{aligned}$$

καὶ

$$\begin{aligned} x \in -\Delta \cap A_{n+1} &\iff x \notin \Delta \text{ καὶ } x \in A_{n+1} \\ &\iff f(x) \notin \Delta' \text{ καὶ } f(x) \in B_{n+1} \\ &\iff f(x) \in -\Delta' \cap B_{n+1}. \end{aligned}$$

Ἄρα, $\tau_{\Delta}^{A_{n+1}} = \tau_{\Delta'}^{B_{n+1}}$ καὶ $\kappa_{\Delta}^{A_{n+1}} = \kappa_{\Delta'}^{B_{n+1}}$.

Ἕπεται ὅτι ἡ f ἐπεκτείνεται στὴν 1-1 καὶ ἐπὶ συνάρτηση

$$f : A_0^{\sigma_0} \cap \cdots \cap A_n^{\sigma_n} \cap A_{n+1}^{\sigma_{n+1}} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B_0^{\sigma_0} \cap \cdots \cap B_n^{\sigma_n} \cap B_{n+1}^{\sigma_{n+1}}$$

ποὺ ἀποδεικνύει τὸ ζητούμενο τῆς ἐπαγωγῆς. Σημειωτέον ὅτι ἡ ἰσχὺς τῆς $(\star)$ ἐξασφαλίζεται ἀπὸ τὴν ἴδια f γιὰ ὅλα τὰ n.

Μένει τώρα νὰ ἀποδείξουμε ὅτι τὰ (B_n) ἀπαριθμοῦν τὸ B. Ξέρουμε ἤδη ὅτι τὰ (A_n) ἀπαριθμοῦν τὸ A, ἄρα ὑπάρχει ἀπαρίθμηση $\pi : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A$ τ.ω. $\pi(n) = A_n$, γιὰ κάθε n. Συνθέτοντας μὲ τὴν $g : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B$ παίρνουμε τὴν $\rho = g \circ \pi : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B$ γιὰ τὴν ὁποία $\rho(n) = g(\pi(n)) = g(A_n)$, γιὰ κάθε n.

Μένει νὰ ἀποδείξουμε ὅτι $\rho(n) = B_n$, δηλαδὴ $f[A_n] = g(A_n)$, γιὰ κάθε n. Ἀπὸ τὴ βάση τῆς ἐπαγωγῆς, ξέρουμε ὅτι γιὰ κάθε $x \in X$, $g(\{x\}) = \{f(x)\}$. Γιὰ τυχαῖο y, ἔχουμε:

$$\begin{aligned} t \in f[A_n] &\iff t = f(s), \text{ γιὰ } s \in A_n \\ &\iff t = f(s), \text{ γιὰ } s \in X \text{ (ρυτίδα 1, βλ. παρακάτω)} \\ &\iff \{t\} = \{f(s)\}, \text{ γιὰ } s \in X \\ &\iff \{t\} = g(\{s\}), \text{ γιὰ } s \in X \\ &\iff t \in g(\{s\}), \text{ γιὰ } s \in X \\ &\iff t \in g(A_n), \text{ (ρυτίδα 2, βλ. παρακάτω).} \end{aligned}$$

Ἄρα, $f[A_n] = g(A_n)$ καὶ ἡ πρόταση ἀποδείχθηκε.

Γιὰ τὴ ρυτίδα 1 ἔχουμε:

$$\begin{aligned} s \in A_n &\implies s \in A_n \in A \subseteq \mathcal{P}(X) \\ &\implies s \in A_n \in \mathcal{P}(X) \\ &\implies s \in A_n \subseteq X \\ &\implies s \in X. \end{aligned}$$

Γιὰ τὴ ρυτίδα 2:

$$\left.\begin{array}{r} s \in X \Rightarrow \{s\} \in \mathcal{P}_1(X) \Rightarrow \{s\} \in A \Rightarrow \{s\} = A_m, \text{ γιὰ κάποιο } m \in \mathbb{N} \\ s \in A_n \Rightarrow \{s\} \subseteq A_n \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow A_m \subseteq A_n \Rightarrow m = n \Rightarrow \{s\} = A_m = A_n.$$

□

Προταση 2.3.9. *Ἂν τὰ A, B ἱκανοποιοῦν τὶς ὑποθέσεις τοῦ 2.3.8, τότε εἶναι $\subseteq$-ἰσόμορφα.*

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τὴ συνάρτηση

$$\phi : A \ni A_n \mapsto B_n \in B$$

καὶ δείχνουμε ὅτι εἶναι $\subseteq$-ἰσομορφισμός, δηλαδὴ ὅτι γιὰ ὅλα τὰ $n, m \in \mathbb{N}$,

$$A_n \subseteq A_m \iff B_n \subseteq B_m.$$

Στὴν ἀπόδειξη τοῦ προηγούμενου θεωρήματος κατασκευάσαμε τὰ B_n ὡς $f[A_n]$, ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι

$$A_n \subseteq A_m \iff f[A_n] \subseteq f[A_m].$$

Γιὰ τὸ εὐθὺ ἔχουμε:

$$\begin{aligned} t \in f[A_n] &\implies t = f(x), \text{ γιὰ } x \in A_n \\ &\implies t = f(x), \text{ γιὰ } x \in A_m \\ &\implies t \in f[A_m] \end{aligned}$$

καὶ γιὰ τὸ ἀντίστροφο:

$$x \in A_n \Rightarrow f(x) \in f[A_n] \Rightarrow f(x) \in f[A_m] \Rightarrow x \in A_m.$$

□

Πρὶν περάσουμε στὸ ἑπόμενο θεώρημα, θὰ κάνουμε μιὰ παρένθεση γιὰ νὰ μιλήσουμε γιὰ τὴν *ἐσωτερικὴ (internal)* καὶ τὴν *ἐξωτερικὴ (external)* πεπερασμενότητα (finiteness) μιᾶς θεωρίας.

Εἴδαμε (1.3.4) ὅτι στὰ πλαίσια τῆς NF, ἕνα σύνολο x λέγεται πεπερασμένο, ἂνν $x\varepsilon \bigcap\{a \mid \emptyset\varepsilon a \wedge \forall y[y\varepsilon a \to S(y)\varepsilon a]\}$. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο, μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε τὴν ἔννοια γιὰ ἕνα σύνολο x^{i+1} τῆς TST, ἂν ἰσχύει ἡ ἀντίστοιχη σχέση μὲ τοὺς κατάλληλους ἐκθέτες:

$$\mathrm{Fin}(x^{i+1}) \leftrightarrow x^{i+1}\varepsilon \bigcap\{a^{i+1} \mid \emptyset^i\varepsilon a^{i+1} \to S(y)^i\varepsilon a^{i+1}]\}.$$

Τὸ x^{i+1} θὰ λέγεται *ἐσωτερικὰ πεπερασμένο.*

Ἔστω τώρα $\mathcal{A}$ ἕνα μοντέλο τῆς TST. Ἀπὸ τὸν ὁρισμό του, τόσο τὰ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ὅσο και τὸ σύνολο $x \in A_{i+1}$ ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ τυχὸν τυπικὸ σύνολο x^{i+1} εἶναι σύνολα τῆς ZF. Ἑπομένως, γι' αὐτὰ ἰσχύει ἡ ἔννοια τῆς πεπερασμενότητας, ὅπως αὐτὴ περιγράφεται λ.χ. στὰ [5], [6]: ἕνα ZFC-σύνολο εἶναι πεπερασμένο, ὅταν εἶναι ἰσοπληθὲς πρὸς κάποιον ZFC-φυσικὸ ἀριθμό. Ὀνομάζουμε τώρα *ἐξωτερικὰ πεπερασμένο* ἕνα TST-σύνολο x^i, ὅταν ἡ ἑρμηνεία του μέσα σὲ ἕνα μοντέλο τῆς TST εἶναι πεπερασμένο ZFC-σύνολο. Ἔχουμε λοιπὸν ὅτι

$$\mathrm{EFin}_{\mathcal{A}}(x^i) \iff x \text{ πεπερασμένο κατὰ ZFC.}$$

Μεταξὺ τῶν δύο ἐννοιῶν ἰσχύει ἡ ἑξῆς σχέση:

Πρόταση 2.3.10. *Ἔστω $\mathcal{A}$ μοντέλο τῆς TST καὶ $x \in A_{i+1}$ σύνολο. Τότε ἰσχύει*

$$\mathrm{EFin}_{\mathcal{A}}(x^{i+1}) \Longrightarrow \mathcal{A} \vDash \mathrm{Fin}(x^{i+1}).$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω x τὸ ZFC-σύνολο ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ x^{i+1} μέσω τοῦ μοντέλου καὶ $\mathrm{EFin}_{\mathcal{A}}(x^{i+1})$. Τότε ὁ πληθάριθμος $|x|$ εἶναι πεπερασμένος, δηλαδὴ εἶναι φυσικὸς ἀριθμός. Θὰ δείξουμε τὸ ζητούμενο μὲ ἐπαγωγὴ στὸ $|x|$.

Βάση: Ἂν $|x| = 0$, τότε $x = \emptyset$. Τότε $\mathcal{A} \vDash x^{i+1} = \emptyset^{i+1}$, γιατὶ διαφορετικὰ θὰ είχαμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash x^{i+1} \neq \emptyset^{i+1} \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{A} \vDash (\exists y^i)[y^i \varepsilon x^{i+1}] \\
&\Rightarrow \quad \text{ὑπάρχει } y \in A_i,\ y \in x \\
&\Rightarrow \quad x \neq \emptyset,
\end{aligned}$$

που εἶναι ἄτοπο.

Βῆμα: Ὑποθέτουμε ὅτι γιὰ ὅλα τὰ $y \in A_{i+1}$ τ.ω. $|y| + 1 = |x|$ ἰσχύει $\mathrm{EFin}_{\mathcal{A}}(y^{i+1}) \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \mathrm{Fin}(y^{i+1})$. Εὔκολα συνάγεται ὅτι $\mathrm{EFin}_{\mathcal{A}}(x^{i+1}) \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \mathrm{Fin}(x^{i+1})$. □

Πρόταση 2.3.11. *Γιὰ τὰ πλήρη μοντέλα τῆς TST, ἰσχύει τὸ ἀντίστροφο τῆς 2.3.10, δηλαδὴ*

$$\langle\langle X \rangle\rangle \vDash \mathrm{Fin}(x^i) \Longrightarrow \mathrm{EFin}_{\langle\langle X \rangle\rangle}(x^i),$$

γιὰ κάθε TST-σύνολο x^i καὶ ZFC-σύνολο X.

Ἀπόδειξη.

$$
\begin{aligned}
& \langle\langle X\rangle\rangle \vDash \mathrm{Fin}(x^i) \\
\Rightarrow\ & \langle\langle X\rangle\rangle \vDash x^i\varepsilon \bigcap\{a^{i+1} \mid \emptyset^i\varepsilon a^{i+1}\ \wedge\ \forall y^i[y^i\varepsilon a^{i+1} \to S(y^i)\varepsilon a^{i+1}]\} \\
\Rightarrow\ & x \in \bigcap\{a \mid \emptyset \in a \text{ καὶ γ.χ. } y[y \in a \Rightarrow S(y) \in a]\},\ \text{ὅπου } a \in \mathcal{P}^{i+1}(X), x, y \in \mathcal{P}^i(X) \\
\Rightarrow\ & \text{γιὰ κάθε } a,\ \text{ἂν } \emptyset \in a \text{ καὶ γ.χ. } y[y \in a \Rightarrow S(y) \in a],\ \text{τότε } x \in a \\
\Rightarrow\ & \text{γιὰ κάθε } a,\ \text{ἂν } a \text{ ἐπαγωγικὸ τότε } x \in a \\
\Rightarrow\ & x \in \cap E,\ \text{ὅπου } E \text{ τὸ σύνολο τῶν ἐπαγωγικῶν συνόλων, στὴ ZF (βλ.[5])} \\
\Rightarrow\ & x \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow\ & \mathrm{EFin}_{\langle\langle X\rangle\rangle}(x^i).
\end{aligned}
$$

□

Πάντως, τὸ ἀντίστροφο τῆς 2.3.10 δὲν ἰσχύει σὲ κάθε μοντέλο. Χαρακτηριστικὸ ἀντιπαράδειγμα εἶναι τὸ μοντέλο $\mathcal{G} = \langle G, \varepsilon^{\mathcal{G}}\rangle$ ποὺ κατασκευάζει ὁ Grishin στὸ [3], στὸ ὁποῖο $\mathcal{G} \vDash \mathrm{Fin}(x^{i+1})$, ἐνῶ τὰ G_i εἶναι ἄπειρα.

Γιὰ τὴν ἀκρίβεια, ὁ Grishin δὲν κατασκευάζει τὸ μοντέλο του στο [3], ἁπλῶς ἰσχυρίζεται την ὕπαρξή του. Τὸ ἴδιο θὰ κάνουμε καὶ ἐμεῖς, καθὼς θὰ σκιαγραφοῦμε τὴν ἀπόδειξη ἑπόμενου θεωρήματος.

Θεωρημα 2.3.12. *Ἡ θεωρία NF_3 εἶναι συνεπής.*

Σύμφωνα μὲ τὸ 2.3.4, ἀρκεῖ νὰ βροῦμε ἕνα σ.μ. μοντέλο τῆς TST_3 μὲ $\subseteq$-ἰσομορφισμό.

Ἐπεκτείνουμε τὴ θεωρία TST_5 στὴν T, προσθέτοντας ἄπειρο πλῆθος σταθερῶν $c_0^0, c_1^0, c_2^0, \ldots$ μηδενικοῦ τύπου καὶ τὰ ἀξιώματα

(I) $c_i^0 \neq c_j^0$, γιὰ $i \neq j$

(II) $\forall x^{i+1}\mathrm{Fin}(x^{i+1})$

Δεχόμαστε ὅτι τὸ μοντέλο $\mathcal{G}$ τοῦ Grishin ἱκανοποιεῖ τὴν T. Περιορίζουμε τὸ $\mathcal{G}$ ὥστε νὰ περιέχει μόνο τὰ τρία πρῶτα σύνολα G_0, G_1 καὶ G_2 καὶ τὴ σχέση $\varepsilon^{\mathcal{G}}$ μόνο μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν τριῶν πρώτων συνόλων. Παίρνουμε ἔτσι ἕνα μοντέλο $\mathcal{G}_3$ τῆς TST_3, για τὸ ὁποῖο δεχόμαστε ὅτι ἱκανοποιεῖ τὰ (I),(II). Ἐπίσης, δεχόμαστε ὅτι τὰ G_0, G_1 καὶ G_2 ἱκανοποιοῦν τὰ (1)-(3) τοῦ 2.3.9. Σημειωτέον ὅτι ὁ συνδυασμὸς (1) καὶ (I) σημαίνει ὅτι τὸ $\mathcal{G}$ εἶναι ἀντιπαράδειγμα τοῦ 2.3.10 ὅπως εἴπαμε προηγουμένως.

Μένει νὰ δείξουμε τὸ (4) τοῦ 2.3.9. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμε τὸν τύπο τῆς TST_3:

$$
\begin{aligned}
Zr(x^{i+1}) \quad : \quad & (\exists k^{i+1}, \ell^{i+1})[k^{i+1} \sim \ell^{i+1} \wedge k^{i+1} \cap \ell^{i+1} = \emptyset\ \wedge \\
\wedge \quad & [x^{i+1} = k^{i+1} \cup \ell^{i+1} \vee (\exists a^i\varepsilon x^{i+1})[x^{i+1} - \{a^i\} = k^{i+1} \cup \ell^{i+1}]]]
\end{aligned}
$$

ὁ ὁποῖος λέει ὅτι εἴτε τὸ x^{i+1} εἴτε τὸ $x^{i+1} - \{a^i\}$ μπορεῖ νὰ γραφεῖ ὡς ἕνωση δύο ξένων μεταξύ τους ἰσοπληθῶν συνόλων. Εὔκολα παρατηροῦμε ὅτι

$$\mathcal{G} \models \forall x^{i+1}[\mathrm{Fin}(x^{i+1}) \to Zr(x^{i+1})].$$

Πράγματι, ἂν $|x|$ ἄρτιος τότε μποροῦμε νὰ χωρίσουμε τὰ στοιχεῖα του σὲ δύο ἰσοπληθῆ, ξένα μεταξύ τους σύνολα k καὶ ℓ (ὅπου χωρὶς ἐκθέτη εἶναι οἱ ἑρμηνεῖες τῶν συνόλων μὲ ἐκθέτη). Ἂν $|x|$ περιττός, τότε $|x - \{a\}|$ ἄρτιος, καὶ ἰσχύει τὸ ἴδιο.

Ὅμως, $\mathcal{G} \models \forall x^{i+1}[\mathrm{Fin}(x^{i+1})]$, ἑπομένως, $\mathcal{G} \models \forall x^{i+1}[Zr(x^{i+1})]$. Ἑπομένως δείξαμε τὸ (4). Ἕπεται ὅτι ὑπάρχει $\subseteq$-ἰσομορφισμὸς γιὰ τὸ $\mathcal{G}$, ἄρα ἡ NF_3 εἶναι συνεπής.

Ὁλοκληρώνουμε τὴν ἑνότητα, δείχνοντας τὴν ἰσοσυνέπεια τῶν NF, NF_4.

Ξεκινᾶμε μὲ τὴν προφανῆ παρατήρηση ὅτι ἂν ἡ NF εἶναι συνεπὴς τότε καὶ ἡ NF_4 εἶναι συνεπής. Πράγματι, ἂν ὑπῆρχε ἕνας τύπος ϕ τ.ω. $\mathrm{NF}_4 \models \phi \wedge \neg\phi$, τότε γιὰ τὸν ἴδιο τύπο θὰ ἴσχυε $\mathrm{NF} \models \phi \wedge \neg\phi$.

Γιὰ τὸ ἀντίστροφο, χρειαζόμαστε ἕναν τρόπο νὰ μειώσουμε τὶς βαθμίδες τῶν μεταβλητῶν ποὺ ἐμφανίζονται στὸν τυχαῖο τύπο ϕ τῆς NF ὥστε νὰ λάβουμε ἕναν τύπο ψ τῆς NF_4, ταυτολογικὰ ἰσοδύναμο μὲ τὸν ἀρχικὸ ϕ. Δίνουμε τὸν ὁρισμό:

Ορισμος 2.3.13. Ἔστω τὸ σύνολο $E = \{\{\{x\}, y\} \mid x\varepsilon y\}$. Γιὰ κάθε τύπο ϕ τῆς NF_n ὁρίζουμε τὸν ϕ', ὡς ἑξῆς: Ἔστω x μεταβλητὴ τοῦ ϕ ἐλάχιστης βαθμίδας.

- Ἀλλάζουμε κάθε ὑπότυπο τῆς μορφῆς $x\varepsilon y$ μὲ τὸν ὑπότυπο $x'\varepsilon\mathcal{P}_1(V) \wedge \{x', y\}\varepsilon E$.
- Ἀλλάζουμε κάθε ὑπότυπο τῆς μορφῆς $x = w$ μὲ τὸν ὑπότυπο $x' = w'$.

Ἐπίσης ὁρίζουμε $\phi^{(n+1)} = (\phi^{(n)})'$, γιὰ $n > 1$.

Προταση 2.3.14. *Ἂν ϕ εἶναι τύπος τῆς NF_n, τότε ὁ ϕ' εἶναι τύπος τῆς $NF_{n-1} + E$ καὶ ἰσχύει $\phi \equiv \phi'$.*

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς κλάσεως NF_n, ἡ μικρότερη βαθμίδα μεταβλητῆς τοῦ ϕ εἶναι 0 καὶ ἡ μεγαλύτερη τὸ πολὺ $n-1$. Τότε, ἡ μικρότερη βαθμίδα μεταβλητῆς τοῦ ϕ' εἶναι 1 καὶ ἡ μεγαλύτερη τὸ πολὺ $n-1$. Μειώνοντας ὅλες τὶς βαθμίδες μεταβλητῶν τοῦ ϕ' κατὰ μία (οὐσιαστικὰ ἀλλάζοντας τὴ διαστρωμάτωση), ἕπεται ὅτι οἱ βαθμίδες τοῦ ϕ' εἶναι ἀπὸ 0 ὣς (τὸ πολὺ) $n-2$. Ἐπίσης, ὁ ϕ' ἔχει ὑποτύπους τῆς μορφῆς $\{x', y\}\varepsilon E$, ὁπότε τελικὰ βρίσκεται στὴν κλάση $\mathrm{NF}_{n-1} + E$ καὶ ἰσχύει $\phi \equiv \phi'$. Ἡ ταυτολογικὴ ἰσοδυναμία εἶναι προφανής. $\square$

Θεωρημα 2.3.15. *Γιὰ κάθε τύπο ϕ τῆς NF ὑπάρχει τύπος ψ τῆς NF_4 τ.ω. $\mathrm{NF} \models \phi \iff \mathrm{NF}_4 \models \psi$ καὶ $\phi \equiv \psi$, ἄρα οἱ NF καὶ NF_4 εἶναι ἰσοσυνεπεῖς.*

Ἀπόδειξη. Ἔστω NF $\vDash \phi$. Τότε $\mathrm{NF}_n \vDash \phi$, γιὰ κάποιο n. Χωρὶς περιορισμὸ τῆς γενικότητας, ὑποθέτουμε $n = 4 + k > 4$. Τότε $\mathrm{NF}_{n-1} + E \vDash \phi'$, ἄρα $\mathrm{NF}_3 + E \vDash \phi^{(k+1)}$. Τώρα, ἀντικαθιστῶντας «πρὸς τὰ πίσω» κάθε $\{x', y\}\varepsilon E$ ποὺ ἐμφανίζεται στὸν $\phi^{(k+1)}$ μὲ ἕναν ὑπότυπο τῆς μορφῆς $x\varepsilon y$, παίρνουμε ἕναν τύπο ψ μὲ βαθμίδες μεταβλητῶν ἀπὸ -1 ὣς τὸ πολὺ 2, ποὺ μὲ τὴ σειρά τους μετατρέπονται στὶς βαθμίδες ἀπὸ 1 ὣς τὸ πολὺ 3. Ἄρα, παίρνουμε ἕναν τύπο ψ τῆς NF_4, ἰσοὺναμο ταυτολογικὰ μὲ τὸν ϕ. □

Βιβλιογραφία

[1] Κ. Ι. Δημητρακόπουλος, *Σημειώσεις Μαθηματικής Λογικής*, Αθήνα 1999 (Σημειώσεις διδασκαλίας τοῦ μαθήματος «Λ1. Μαθηματική Λογική» τοῦ Μ.Π.Λ.Α.)

[2] T.E. Forster, *Set theory with a universal set*, Oxford Logic Guides Vol. 20, Oxford U.P. 1992

[3] V.N. Grishin, "Consistency of a fragment of Quine's NF system",*Soviet Mathematics Doklady*, **10**, No 6(1969), 1387-1390.

[4] M.R. Holmes, *Elementary set theory with a universal set*, 1998. Διαδικτυακὴ ἔκδοση, διαθέσιμη στὸ `http://math.boisestate.edu/~holmes/holmes/head.ps`.

[5] Κ. Κάλφα, *Αξιωματική Θεωρία Συνόλων*, Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1990.

[6] Γ. Μοσχοβάκης, *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία*, Εκδ. Νεφέλη, Αθήνα 1993.

[7] E. Specker, "Typical Ambiguity", *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Proceedings of the International Congress, Stanford 1960, Stanford University Press 1962, pp. 116-124.

[8] E. Specker, "The axiom of choice in Quine's New Foundations for Mathematical Logic", Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA **39**, 1953, pp. 972-975.

[9] Αθ. Τζουβάρας, *Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής*, Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1998

[10] Ath. Tzouvaras,"A reduction of the NF consistency problem", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 72, 1, (2007), pp. 285-304.

[11] W.V. Quine, "New Foundations for mathematical logic", *American Math Monthly*, 1937, 70-80.