Γραμμική ανάλυση των κλασικών αποδείξεων:
εμφυτεύσεις στη Γραμμική λογική και κανονικοποίηση

Γιώργος Τσοτάκος

Διπλωματική Εργασία

Συνεπιβλέποντες καθηγητές: Γ. Σταυρινός, Γ. Κολέτσος

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ
ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ
μΠλ∀

Οκτώβριος 2005

Πρόλογος

Η σχέση της Λογικής με τη Θεωρητική Πληροφορική, βρίσκεται τα τελευταία χρόνια στο επίκεντρο της έρευνας. Η Γραμμική λογική (Girard, 1987), η οποία αναπτύχθηκε ιδιαιτέρως τη δεκαετία του '90, αποτελεί ένα σύστημα λογικής που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και από την οπτική της θεωρίας αποδείξεων, αλλά και από αυτή του προγραμματισμού. Δηλαδή, από τη μία πλευρά, η θεώρηση του γραμμικού λογισμού ακολουθητών ως "ραφινάρισμα" των αντίστοιχων ιντουισιονιστικών και κλασικών λογικών συστημάτων, μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τη Γραμμική λογική ως εργαλείο για τη διερεύνηση συμπεριφορών και ιδιοτήτων των ιντουισιονιστικών και κλασικών αποδείξεων. Από την άλλη μεριά, η ερμηνεία των συνδέσμων της Γραμμικής λογικής και το γεγονός ότι το σύστημα διακρίνει την πολλαπλή χρήση των υποθέσεων, είναι στοιχεία που συνδέουν τη Γραμμική Λογική με διαδικασίες επεξεργασίας πληροφορίας και ειδικότερα με τον παράλληλο υπολογισμό. Στις μέρες μας άλλωστε υπάρχουν κάποιες γλώσσες προγραμματισμού που βασίζονται στις ιδέες της Γραμμικής λογικής (π.χ. ο λογικός προγραμματισμός Lygon).

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε κυρίως με το κομμάτι της θεωρίας αποδείξεων, όπου εκμεταλλευόμενοι τις δυνατότητες του γραμμικού συστήματος θα εξάγουμε αρκετά χρήσιμα συμπεράσματα για την κλασική λογική. Το δεύτερο, και με ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον, κομμάτι, αφήνεται ως μία ευκαιρία για έρευνα στο μέλλον.

Ειδικότερα, το πρώτο μέρος της εργασίας περιλαμβάνει μια εισαγωγή στο σύστημα της Γραμμικής λογικής, δίνοντας έμφαση στις ιδιότητες που ικανοποιεί και ιδιαιτέρως στην ισχυρή κανονικοποίηση, η οποία δεν ικανοποιείται από τη συνήθη κλασική λογική.

Το δεύτερο και τρίτο μέρος, περιλαμβάνουν κάποιες μεταφράσεις ιντουισιονιστικών και κλασικών συστημάτων στη Γραμμική λογική, τονίζοντας όμως κάποιες ισχυρότερες (διακοσμήσεις), οι οποίες θα μας δώσουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τη Γραμμική λογική ως εργαλείο για την απόδειξη σημαντικών ιδιοτήτων συστημάτων κλασικής λογικής.

Το τέταρτο μέρος αναφέρεται σε κάποιες τεχνικές δυνατότητες που έχουμε, στο να επεξεργαζόμαστε αποδείξεις σε γραμμικά σύστημα.

Στο πέμπτο και τελευταίο μέρος αναφέρονται τα κατάλληλα συστήματα κλασικής λογικής και ο τρόπος με τον οποίο αποδεικνύουμε κάποιες σημαντικές, "κατασκευαστικές", ιδιότητες αυτών, μέσω της Γραμμικής λογικής.

Ευχαριστίες: Ευχαριστώ θερμά τους συνεπιβλέποντες καθηγητές, για τη διπλωματική μου εργασία, κ.κ. Γιώργο Κολέτσο και Γιώργο Σταυρινό, για το ενδιαφέρον που δείξανε τόσο για την εργασία μου, όσο και για εμένα προσωπικά. Ιδιαιτέρως ευχαριστώ τον κύριο Σταυρινό διότι με παρότρυνε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα και επιπλέον αφιέρωσε πολύ χρόνο βοηθώντας με ουσιαστικά στη διεκπεραίωση της διπλωματικής μου εργασίας. Επίσης τον

ευχαριστώ για το γενικότερο κλίμα συνεργασίας και την ανταλλαγή απόψεων (για μαθηματικά και όχι μόνο) που υπήρχε ανάμεσα μας καθ' όλη τη διάρκεια φοίτησής μου στο Μ.Π.Λ.Α. .

Κλείνοντας θέλω να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές που είχα στο διάστημα που φοιτούσα στο Μ.Π.Λ.Α., διότι ο καθένας τους συνέβαλε ώστε να βελτιώσω τις γνώσεις μου στα μαθηματικά και τη θεωρητική πληροφορική.

Περιεχόμενα

Πρόλογος **i**

1 Εισαγωγή στη Γραμμική λογική **1**
- 1.1 Συστήματα λογικής 2
  - 1.1.1 Τα συστήματα Hilbert 2
  - 1.1.2 Η φυσική απαγωγή 3
  - 1.1.3 Τα συστήματα ακολουθητών Gentzen 4
- 1.2 Από τη συνήθη λογική στη Γραμμική λογική 7
  - 1.2.1 Ερμηνεία των συμβόλων της Γραμμικής λογικής 9
  - 1.2.2 Σημαντικές ιδιότητες της Γραμμικής λογικής 11
  - 1.2.3 Δίκτυα απόδειξης 14
  - 1.2.4 Σημασιολογία των γραμμικών συστημάτων 19

2 Εμφυτεύσεις **21**
- 2.1 Εμφύτευση του IL στο ILL 22
- 2.2 Εμφύτευση του IL στο CLL 24
- 2.3 Εμφύτευση του CL στο CLL 27

3 Διακοσμήσεις **33**
- 3.1 Επαγωγική στρατηγική διακόσμησης για το IL 34
- 3.2 Το σύστημα ILU 38
- 3.3 Επαγωγικές στρατηγικές διακόσμησης για το CL 46

4 Η μέθοδος απάλειψης **53**
- 4.1 Ταυτοτικές κλάσεις 53
- 4.2 Θεωρία διαγραφής εκθετικών 55
- 4.3 Η απάλειψη για 'μόνο'- αποδείξεις 61
- 4.4 Η δυναμική των αποδείξεων 63
- 4.5 Εφαρμογή της θεωρίας 68

5 Κατασκευασιμότητα συστημάτων κλασικής λογικής, μέσω της Γραμμικής λογικής **75**
- 5.1 Τα συστήματα LKQ και LKT 76
  - 5.1.1 Το LKQ 78

5.1.2 Το LKT 84
5.2 Το σύστημα $\mathrm{LK}^{\mathbf{tq}}$ 90
5.2.1 Το δομικό δίλημμα 90
5.2.2 Το λογικό δίλημμα 93
5.2.3 Το tq-πρωτόκολλο 95
5.2.4 Η επαγωγική στρατηγική διακόσμησης για το $\mathrm{LK}^{\mathbf{tq}}$ . . 98
5.2.5 Το θεώρημα ισχυρής κανονικοποίησης 102
5.2.6 Το θεώρημα συμβολής 105

Επίλογος **107**

A Ιντουισιονιστική λογική (σύστημα IL) **109**

B Κλασική λογική (σύστημα CL) **113**

C Ιντουισιονιστική Γραμμική λογική (σύστημα ILL) **117**

D Κλασική Γραμμική λογική (σύστημα CLL) **121**

Βιβλιογραφία **125**

Ευρετήριο **127**

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στη Γραμμική λογική

Η γραμμική λογική είναι ένα σύστημα λογικής το οποίο εισήγαγε το 1987 ο J.-Y. Girard [Gir87]. Στην περίληψη αυτού του άρθρου, δηλώνεται ότι "μια εντελώς καινούργια προσέγγιση στην περιοχή ανάμεσα σε κατασκευαστικές λογικές και την επιστήμη υπολογιστών έχει ξεκινήσει".

Η θεμελιώδης ιδέα της Γραμμικής Λογικής είναι να ελέγξει τη χρήση των αναλώσιμων πόρων, η οποία καταμαρτυράται από το γεγονός ότι οι κανόνες συστολής και εξασθένησης δεν είναι γενικά αποδεκτοί. Με άλλα λόγια, παρατηρούμε πως στην (κλασική ή ιντουισιονιστική) λογική μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει μια υπόθεση όσες φορές θέλει (αυτό το χαρακτηριστικό εκφράζεται από τους κανόνες συστολής και εξασθένησης σε ένα σύστημα με ακολουθητές Gentzen). Υπάρχουν όμως καλοί λόγοι να θεωρήσει κάποιος μια λογική χωρίς αυτούς κανόνες:

- Από την οπτική της θεωρίας αποδείξεων, εξαλείφονται κάποιες παθολογικές καταστάσεις από την κλασική λογική (π.χ. ο μη ντετερμινισμός του θεωρήματος απαλοιφής της τομής και η απουσία της ιδιότητας Church-Rosser) και εισάγεται ένα νέο είδος φυσικής απαγωγής, τα "δίκτυα απόδειξης".

- Από την οπτική της επιστήμης υπολογιστών, δίνεται μια νέα προσέγγιση στον προγραμματισμό. Δηλαδή παρέχεται η δυνατότητα χρήσης της γραμμικής λογικής για τη δημιουργία λειτουργικών συστημάτων, με τα οποία θα επιτυγχάνεται καλύτερη διαχείριση μνήμης. Επιπλέον η γραμμική λογική μπορεί να προσομοιώσει τη λειτουργία των δικτύων Petri (Petri nets), τα οποία αποτελούν μια τεχνική για την ανάλυση παράλληλων δυναμικών συστημάτων.

Στη συνέχεια είναι απαραίτητο να δοθούν κάποιοι φορμαλισμοί συστημάτων ιντουισιονιστικής και κλασικής λογικής καθώς και κάποιες σημαντικές τους ιδιότητες.

1.1 Συστήματα λογικής

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, ασχολούμαστε με δύο συνήθεις λογικές. Από τη μία την κλασική λογική, της οποίας η σημασιολογία είναι οι πίνακες αληθείας για το προτασιακό κομμάτι και η Tarski σημασιολογία για τον κατηγορηματικό λογισμό. Από την άλλη έχουμε την ιντουισιονιστική λογική, που βασίζεται στην ιδέα της "Brouwer-Heyting-Kolmogorov ερμηνείας" [SU98], η οποία δίνει τη διαισθητική ερμηνεία των ιντουισιονιστικών λογικών συνδέσμων, στα πλαίσια της διαίσθησης της"κατασκευής" και της "κατασκευαστικής απόδειξης". Δηλαδή κλασικά, η λογική βασίζεται στην αλήθεια, ενώ ιντουισιονιστικά στην απόδειξη.

Για αυτές τις λογικές, υπάρχουν τριών ειδών φορμαλισμοί που είναι ευρέως γνωστοί. Βέβαια για κάθε έναν από αυτούς, μπορεί κάποιος να συναντήσει διάφορες παραλλαγές, ανάλογα με το συγγραφέα και τα αποτελέσματα που θέλει να δείξει. Συγκεκριμένα οι φορμαλισμοί αυτοί, όπως εμφανίζονται ιστορικά, είναι τα συστήματα Hilbert, η φυσική απαγωγή και τα συστήματα ακολουθητών Gentzen.

1.1.1 Τα συστήματα Hilbert

Ιστορικά η ονομασία αυτή χρησιμοποιήθηκε, αρχικά από τον Kleene [Kle52]. Όμως και προγενέστερα ο Gentzen είχε αναφερθεί σε φορμαλισμούς Hilbert [Gen35]. Και οι δύο αναφερόντουσαν στα συστήματα που χρησιμοποίησαν τις δεκατίες του '20 και '30 οι Hilbert, Ackermann και Bernays. Ωστόσο ένας φορμαλισμός αυτού του είδους (με κάποιες διαφορές στα σύμβολα) είχε εισαχθεί από τον Frege στα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα [TS00]. Πρόκειται για συστήματα με αρκετά αξιωματικά σχήματα και λίγους κανόνες (συνήθως ένα ή δύο) τα οποία είναι αρκετά βολικά για αποδείξεις πολλών μεταμαθηματικών ιδιοτήτων, ωστόσο δυσκίνητα ως αποδεικτικά συστήματα τύπων. Ένα τέτοιο κλασικό σύστημα, το H_c , συναντάμε στο [TS00].

Χρησιμοποιώντας την πρωτοβάθμια γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής (βλ. [TS00]), το σύστημα αποτελείται από τα εξής αξιώματα:

$$A \to (B \to A), \qquad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)),$$

$$A \to A \vee B, \qquad B \to A \vee B,$$

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C)),$$

$$A \wedge B \to A, \qquad A \wedge B \to B, \qquad A \to (B \to (A \wedge B)),$$

$$\forall x A \to A[t/x], \qquad A[t/x] \to \exists x A,$$

$$\forall x(B \to A) \to (B \to \forall y A[y/x]) \quad (x \notin FV(B), y \equiv x \text{ ή } y \notin FV(A)),$$

$$\forall x(A \to B) \to (\exists y A[y/x] \to B) \quad (x \notin FV(B), y \equiv x \text{ ή } y \notin FV(A)),$$

$$\perp \to A, \qquad \neg\neg A \to A$$

και τους εξής κανόνες:

Ass	Αν A$\in \Gamma$, τότε $\Gamma \vdash A$.	
$\to E$	Αν $\Gamma \vdash A \to B$, $\Gamma \vdash A$, τότε $\Gamma \vdash B$.	(MP)
$\forall I$	Αν $\Gamma \vdash A$, τότε $\Gamma \vdash \forall y A[y/x]$, $(x \notin FV(\Gamma), y \equiv x$ ή $y \notin FV(A))$.	(G)

Παρατήρηση: Το αντίστοιχο ιντουισιονιστικό σύστημα H_i αποτελείται από τα αξιώματα του H_c εκτός του τελευταίου, δηλαδή του νόμου της διπλής άρνησης $(\neg\neg A \to A)$. Οι κανόνες των H_i και H_c είναι ακριβώς οι ίδιοι.

1.1.2 Η φυσική απαγωγή

Παρατηρώντας τα συστήματα Hilbert, διαπιστώνουμε ότι αρκετοί παραγόμενοι κανόνες βοηθούν στο να εξοικονομήσουμε χρόνο και κόπο στην κατασκευή αποδείξεων. Στην προσπάθεια για να βρεθούν καταλληλότερα αποδεικτικά συστήματα, οι Gentzen και Kleene χρησιμοποίησαν τα συστήματα φυσικής απαγωγής, τα οποία εγκαταλείπουν τα αξιωματικά σχήματα για χάρη των κανόνων. Σε αυτά οι αποδείξεις είναι δέντρα, με ρίζα το συμπέρασμα και φύλλα τις υποθέσεις. Οι υποθέσεις στην αρχή θεωρούνται ανοικτές. Για να είναι ένας τύπος, θεώρημα του συστήματος, πρέπει στο τέλος της απόδειξης να έχουν κλείσει όλες οι ανοικτές υποθέσεις (βάσει των κανόνων).

Οι κλάδοι του δέντρου αναπτύσσονται σύμφωνα με τους εξής κανόνες (εισαγωγής "I" και απαλοιφής "E"):

$$\frac{\begin{matrix} D_1 & D_2 \\ A & B \end{matrix}}{A \wedge B}\,(\wedge I) \qquad \frac{\begin{matrix} D_1 \\ A \wedge B \end{matrix}}{A}\,(\wedge E_R) \qquad \frac{\begin{matrix} D_1 \\ A \wedge B \end{matrix}}{B}\,(\wedge E_L)$$

$$\frac{\begin{matrix} [A]^u \\ D_1 \\ B \end{matrix}}{A \to B}\,(\to I, u) \qquad \frac{\begin{matrix} D_1 & D_2 \\ A \to B & A \end{matrix}}{B}\,(\to E)$$

$$\frac{\begin{matrix} D_1 \\ A \end{matrix}}{A \vee B}\,(\vee I_R) \qquad \frac{\begin{matrix} D_1 \\ B \end{matrix}}{A \vee B}\,(\vee I_L) \qquad \frac{\begin{matrix} & [A]^u & [B]^v \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ A \vee B & C & C \end{matrix}}{C}\,(\vee E, u, v)$$

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ A[y/x] \end{matrix}}{\forall x A}\ (\forall I) \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \forall x A \end{matrix}}{A[t/x]}\ (\forall E)$$

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ A[t/x] \end{matrix}}{\exists x A}\ (\exists I) \qquad \dfrac{\begin{matrix} \\ D_1 \\ \exists x A \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [A[y/x]]^u \\ D_2 \\ C \end{matrix}}{C}\ (\exists E, u)$$

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \bot \end{matrix}}{A}\ (\bot_i) \qquad \dfrac{\begin{matrix} [\neg A]^u \\ D_1 \\ \bot \end{matrix}}{A}\ (\bot_c, u)$$

Παρατηρήσεις:

- Τα D_1, D_2 και D_3 στους κανόνες συμβολίζουν δοσμένες απαγωγές.
- Η αντικαταστάση $A[t/x]$ διαβάζεται ως: κάθε ελεύθερη εμφάνιση της μεταβλητής x στο A, αντικαθίσταται από τον όρο t.
- Στον κανόνα $\forall I$: $y \equiv x$ ή $y \notin FV(A)$, και η μεταβλητή y δεν είναι ελεύθερη σε κάποια ανοικτή υπόθεση της δοσμένης απαγωγής.
- Στον κανόνα $\exists E$: $y \equiv x$ ή $y \notin FV(A)$, και η μεταβλητή y δεν είναι ελεύθερη στο C ούτε στις ανοικτές υπόθεσεις της δεξιάς δοσμένης απαγωγής, εκτός του $[A[y/x]]^u$.
- Τα t στους κανόνες $\forall E$ και $\exists I$ είναι όροι του πρωτοβάθμιου κατηγορηματικού λογισμού, ενώ τα x και y είναι μεταβλητές. Μάλιστα η y στους κανόνες που εμφανίζεται $(\forall I, \exists E)$ ονομάζεται "ιδιομεταβλητή".
- Τα u και v στους κανόνες $\to I$, $\vee E$, $\exists E$ και $\bot_c$ συμβολίζουν πακέτα υποθέσεων, δηλαδή συλλογή υποθέσεων του ιδίου τύπου.
- Το σύστημα με όλους τους κανόνες είναι το κλασικό N_c, ενώ το σύστημα χωρίς τον κανόνα $\bot_c$ είναι το ιντουισιονιστικό N_i.
- Τα συστήματα αυτά μπορεί κάποιος να τα συναντήσει στο [TS00].

1.1.3 Τα συστήματα ακολουθητών Gentzen

Το 1935 για πρώτη φορά ο Gentzen εισήγαγε ένα νέο φορμαλισμό ως μεταλογισμό για τη φυσική απαγωγή. Το έκανε μάλιστα με τέτοιο τρόπο, ώστε τα συστήματα Gentzen για την κλασική λογική, να λαμβάνονται εκ των συνθηκών αληθείας για τους τύπους (αποδείξεις μέσω διαψευσιμότητας).

Η κατασκευή έγινε ως εξής. Καταρχήν προσέθεσε στη φυσική απαγωγή τον κανόνα της τομής με αποτέλεσμα το σύστημα να γίνει συμμετρικό (κανόνες εισαγωγής $\sim$ κανόνες απαλοιφής, υπόθεση $\sim$ τομή), πράγμα το οποίο όμως δημιούργησε μη κανονικές αποδείξεις (διαδοχικές εφαρμογές εισαγωγής και απαλοιφής του ιδίου κανόνα). Στη συνέχεια, μέσω ανάλυσης της κατασκευής των δέντρων σε φυσική απαγωγή, κατασκεύασε το σύστημα ακολουθητών θεωρώντας τα ακόλουθα.

Έστω Γ πολυσύνολο απο τύπους (δηλαδή κάποιος τύπος μπορεί να έχει πολλαπλές εμφανίσεις ή όπως λέμε να έχει πολλαπλότητα) και Α τύπος της γλώσσας. Έστω ότι $\Gamma \Rightarrow A$ εκφράζει πως το Α είναι παραγόμενο στη φυσική απαγωγή από υποθέσεις που ανήκουν στο Γ. Επίσης το Γ καλείται "προηγούμενος" του ακολουθητή, ενώ το Α "επόμενος". Τότε προκύπτουν οι κανόνες του συστήματος IL του Παραρτήματος Α. (Στους δομικούς κανόνες, η εξασθένηση αντιστοιχεί στη φυσική απαγωγή σε εφαρμογή κανόνα με κενό πακέτο υποθέσεων, ενώ η συστολή σε δημιουργία πακέτων υποθέσεων.)

Αντίστοιχα αν Δ είναι πολυσύνολο, τότε ο ακολουθητής $\Gamma \Rightarrow \Delta$ εκφράζει ότι η διάζευξη των τύπων του Δ αποδεικνύεται στη φυσική απαγωγή από τις υποθέσεις που ανήκουν στο Γ. Δηλαδή ο ακολουθητής $\Gamma \Rightarrow \Delta$ είναι έγκυρος, αν και μόνον αν ο τύπος $\bigwedge A_i \rightarrow \bigvee B_j$ είναι έγκυρος, αν και μόνον αν ο τύπος $\neg A_1 \vee ... \vee \neg A_n \vee B_1 \vee ... \vee B_m$ είναι έγκυρος (όπου $\Gamma \equiv A_1, ..., A_n$, $\Delta \equiv B_1, ..., B_m$ και $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., m\}$). Τότε προκύπτουν οι κανόνες του συστήματος CL του Παραρτήματος Β.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να παρατηρήσουμε το εξής. Οι λογικοί κανόνες εμφανίζονται με δύο μορφές. Ως προσθετικοί και ως πολλαπλασιαστικοί. Παρότι και οι δύο μορφές δουλεύουν σωστά (γι' αυτό άλλωστε χρησιμοποιούνται και οι δύο στα συστήματα με ακολουθητές) θα μπορούσαμε να πούμε πως οι προσθετικές εκδοχές των λογικών κανόνων με δύο υποθέσεις (δηλαδή L$\rightarrow$, L$\vee$ και R$\wedge$) είναι διαισθητικά πιο κατάλληλες για θεώρηση του περιβάλλοντος ως απλά σύνολα. Από την άλλη μεριά οι αντίστοιχες πολλαπλασιαστικές εκδοχές μπορούν να θεωρηθούν καταλληλότερες για θεώρηση του περιβάλλοντος ως πολυσύνολα. Παρ' όλ' αυτά, αυτή η παρατήρηση δεν πρέπει να μας επηρεάσει καθώς στην δικιά μας περίπτωση, όπου έχουμε θεωρήσει τα Γ και Δ ως πολυσύνολα, οι δομικοί κανόνες μας επιτρέπουν από τους προσθετικούς κανόνες να παράγουμε τους πολλαπλασιαστικούς και αντίστροφα.

Μια καλή ανάλυση της μετάβασης από τη φυσική απαγωγή στα συστήματα με ακολουθητές Gentzen υπάρχει στο [TS00].

Τα συστήματα με ακολουθητές Gentzen πλεονεκτούν της φυσικής απαγωγής στα εξής σημεία:

- Οι κανονικές αποδείξεις στη φυσική απαγωγή χαρακτηρίζονται από ένα περιορισμό στη μορφή της απόδειξης (συγκεκριμένα από ένα περιορισμό στη σειρά με την οποία κάποιοι κανόνες πρέπει να εφαρμοστούν), ενώ τα "χωρίς τομή" συστήματα ακολουθητών Gentzen απλά χαρακτηρίζονται από την απουσία του κανόνα της τομής.

- Τα "χωρίς τομή" συστήματα ακολουθητών Gentzen είναι σαφώς καλύτερα ως εργαλεία αποδείξεων από ότι οι κανονικές αποδείξεις της φυσικής απαγωγής.
- Ο χειρισμός της κλασικής λογικής στα συστήματα ακολουθητών Gentzen είναι πιο κομψός από ότι στα συστήματα φυσικής απαγωγής.

Στα συστήματα Gentzen αναπτύχθηκε πολύ η ιδέα της απαλοιφής της τομής. Η απαλοιφή της τομής είναι μια σημαντική ιδιότητα των λογικών συστημάτων διότι σχετίζεται άμεσα με τις συνθήκες τερματισμού στις υπολογιστικές γλώσσες. Τελικά ο Gentzen απέδειξε ότι υπάρχει αλγόριθμος που απαλείφει την τομή από το σύστημα του με ακολουθητές. Επομένως διατύπωσε το εξής θεώρημα ασθενούς κανονικοποίησης.

Θεώρημα 1.1.1. (Hauptsatz) *Για κάθε αποδείξιμο ακολουθητή στο σύστημα CL (αντίστοιχα IL), υπάρχει απόδειξή του που δεν χρησιμοποιεί τον κανόνα τομής.*

Απόδειξη. Καταρχήν ορίζουμε τα εξής δύο μεγέθη. Πρώτον το βαθμό μιας απόδειξης, ο οποίος είναι ίσος με το μέγιστο από του βαθμούς των τομών που υπάρχουν στην απόδειξη (ο βαθμός μιας τομής είναι η πολυπλοκότητα του τύπου τομής). Έπειτα το επίπεδο τομής, σύμφωνα με το οποίο όσο πιο κοντά στα φύλλα της απόδειξης βρίσκεται μια τομή τόσο χαμηλότερο επίπεδο έχει. Η απόδειξη του θεωρήματος γίνεται με διπλή επαγωγή, στο βαθμό της απόδειξης και στο επίπεδο της τομής. Γενικά, ο αλγόριθμος απαλείφει τελικά τις τομές από μια δοσμένη απόδειξη, απαλείφοντας κάθε φορά την ψηλότερη (σχηματικά, δηλαδή πιο κοντά στα φύλλα) μεγιστικού βαθμού τομή. Αναλυτικά η απόδειξη βρίσκεται στο [TS00]. □

Για λόγους που θα εξηγηθούν στη συνέχεια (παράγραφος 1.2), το σύστημα CL δεν είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμο (δηλαδή αν η διαδικασία απαλοιφής της τομής γίνει με τυχαίο τρόπο, ενδέχεται να μην τερματίσει) και επιπλέον δεν ικανοποιεί την ιδιότητα συμβολής (Church-Rosser), δηλαδή υπάρχουν περισσότερες από μια κανονικές αποδείξεις κάποιου ακολουθητή.

Επίσης τα συστήματα που δέχονται την απαλοιφή της τομής, ικανοποιούν την ιδιότητα του υποτύπου. Δηλαδή όλοι οι τύποι που εμφανίζονται σε μια απόδειξη χωρίς τομή του $\Gamma \Rightarrow \Delta$, είναι υποτύποι των τύπων στα Γ και Δ.

Ανακεφαλαιώνοντας πρέπει να τονίσουμε το αναμενόμενο. Τα συστήματα H_i (αντίστοιχα H_c), N_i (αντίστοιχα N_c) και IL (αντίστοιχα CL) είναι ισοδύναμα με την εξής έννοια:

Θεώρημα 1.1.2. $\Gamma \vdash_{H_{i(c)}} A \iff \Gamma \vdash_{N_{i(c)}} A \iff \vdash_{IL(CL)} \Gamma \Rightarrow A$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται σε δύο βήματα. Καταρχήν, αποδεικνύοντας τα αξιώματα των $H_{i(c)}$ στα $N_{i(c)}$ και αντίστροφα κατασκευάζοντας από τα αξιώματα των $H_{i(c)}$ τους κανόνες των $N_{i(c)}$. Έπειτα κατασκευάζοντας από τους κανόνες των $N_{i(c)}$ τους αντίστοιχους κανόνες των IL(CL) και αντιστρόφως [TS00]. □

$$\left.\begin{array}{l}\text{πολλαπλασιαστικοί}\\ \text{προσθετικοί}\end{array}\right\} \rightarrow\left\{\begin{array}{c}\multimap\\ \rightsquigarrow\end{array}\right. \quad \wedge\left\{\begin{array}{c}\otimes\\ \&\end{array}\right. \quad \vee\left\{\begin{array}{c}\parr\\ \oplus\end{array}\right. \quad \top\left\{\begin{array}{c}\mathbf{1}\\ \top\end{array}\right. \quad \bot\left\{\begin{array}{c}\bot\\ \mathbf{0}\end{array}\right.$$

Σχήμα 1.1: Ο διαχωρισμός των συνδέσμων και σταθερών

Παρατήρηση: Οι κανονικές αποδείξεις στη φυσική απαγωγή αντιστοιχούν σε αποδείξεις χωρίς τομή στα συστήματα Gentzen και αντίστοιχα σε αποδείξεις χωρίς πλεονασμούς (παραγόμενοι κανόνες) στα συστήματα Hilbert.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε μόνο το φορμαλισμό των συστημάτων με ακολουθητές Gentzen, γιατί όπως αναφέραμε πλεονεκτεί έναντι των άλλων ως εργαλείο αποδείξεων.

1.2 Από τη συνήθη λογική στη Γραμμική λογική

Η βασική διαφοροποίηση της γραμμικής λογικής από τα συστήματα IL και CL είναι ότι απαγορεύει τη χρήση των δομικών κανόνων (για όλους τους τύπους της γλώσσας) σε αποδείξεις με ακολουθητές. Επομένως δεν είναι εφικτό στο εξής να παράγουμε τους προσθετικούς κανόνες από τους πολλαπλασιαστικούς (λόγω έλλειψης των δομικών κανόνων), καθώς ούτε και τους πολλαπλασιαστικούς από τους προσθετικούς (πάλι λόγω έλλειψης των δομικών κανόνων). Επομένως μπορούν να βρεθούν εναλλακτικά συστήματα με χρήση μόνο προσθετικών κανόνων ή μόνο πολλαπλασιαστικών. Η γραμμική λογική ωστόσο διατηρεί και τα δύο είδη κανόνων, μόνο που για να διατηρηθεί η ιδιότητα απαλοιφής της τομής πρέπει ξεκάθαρα να διαχωριστούν οι προσθετικοί από τους πολλαπλασιαστικούς κανόνες. Για παράδειγμα δεν μπορεί κάποιος να θεωρήσει ένα σύνδεσμο $\wedge'$ του οποίου ο αριστερός κανόνας να είναι προσθετικός και ο δεξιός πολλαπλασιαστικός (βλ. [TS00]), δηλαδή:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge' B \Rightarrow C}\,(L\wedge') \qquad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \qquad \Gamma_2 \Rightarrow B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \wedge' B}\,(R\wedge')$$

Επομένως η γραμμική λογική προέρχεται από το “γραμμικό” διαχωρισμό των κλασικών συνδέσμων και σταθερών όπως αυτός φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Οι σχέσεις αποδειξιμότητας ανάμεσα στις σταθερές φαίνονται στο Σχήμα 1.2. Η πολλαπλασιατική σύζευξη καλείται ‘tensor’ ή ‘times’, ενώ η αντίστοιχη προσθετική ‘and’ ή ‘with’. Η πολλαπλασιαστική διάζευξη καλείται ‘par’ ενώ η αντίστοιχη προσθετική ‘plus’. Τέλος η πολλαπλασιαστική συνεπαγωγή καλείται ‘γραμμική συνεπαγωγή’. Στην προσθετική συνεπαγωγή δεν δίνουμε όνομα γιατί πολλές φορές δεν την συμπεριλαμβάνουμε στα συστήματα, επειδή δεν πληρεί κάποιες από τις βασικές ιδιότητες που θα θέλαμε για τις “λογικές συνεπαγωγές” (για παράδειγμα παρατηρούμε ότι $A \rightsquigarrow A$ δεν αποδεικνύεται).

$$
\begin{tikzcd}
& \top & \\
\bot \arrow[ur] & & \mathbf{1} \arrow[ul] \\
& \mathbf{0} \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

Σχήμα 1.2: Οι γραμμικές σταθερές (το $\longrightarrow$ συμβολίζει το $\Rightarrow$, π.χ. $\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{1}$).

Το αξίωμα της ταυτότητας και ο κανόνας τομής μαζί με τους κανόνες για συνδέσμους και σταθερές όπως αυτοί προκύπτουν από τα παραπάνω σχηματίζουν το προτασιακό κομμάτι της γραμμικής λογικής γνωστό ως MALL (Multiplicative Additive Linear Logic).

Αυτό που συχνά καλείται απλά *γραμμική λογική* προκύπτει από έναν επαναπροσδιορισμό των δομικών κανόνων, για μαρκαρισμένους τύπους. Συγκεκριμένα επιτρέπεται δομικός χειρισμός στα αριστερά του $\Rightarrow$ ενός ακολουθητή μόνο για τους τύπους που ξεκινάνε με το σύμβολο '!', που καλείται 'storage' ή 'of course' ή 'bang' ή 'shriek'. Στα δεξιά του $\Rightarrow$ επιτρέπεται δομικός χειρισμός μόνο σε τύπους που ξεκινάνε με '?', που καλείται 'costorage' ή 'why not'. Συνεπώς η κατασκευή του συστημάτος CLL του Παραρτήματος D τερματίζει, προσθέτοντας τους κανόνες L?, R?, L! και R! που αφορούν την εισαγωγή των (εκθετικών) "!" και "?", και βέβαια τους κανόνες για τους πρωτοβάθμιους ποσοδείκτες.

Σε αυτό το σημείο αξίζει κάποιος να παρατηρήσει τη διαισθητική σημασία των συνδέσμων, των σταθερών και των εκθετικών στη γραμμική λογική. Καταρχήν ένας ακολουθητής της μορφής $\Gamma \Rightarrow \Delta$ με $\Gamma \equiv A_1, ..., A_n$ και $\Delta \equiv B_1, ..., B_m$ αντιστοιχεί στον τύπο $(A_1 \otimes ... \otimes A_n) \multimap (B_1 ⅋ ... ⅋ B_m)$. Διαμέσου της γραμμικής άρνησης που ορίζεται ως $A^{\perp} := A \multimap \perp$ (ή ισοδύναμα ως $A \rightsquigarrow \mathbf{0}$) η γραμμική λογική επιδεικνύει εξαιρετικές συμμετρίες που υποδηλώνονται από τις 'De Morgan'-δυϊκότητες και από το γεγονός ότι τα $\rightsquigarrow$ και $\mathbf{0}$ παράγουν το προσθετικό μέρος ενώ τα $\multimap$ και $\perp$ το πολλαπλασιαστικό, καθώς:

$$
\begin{array}{rcl}
A ⅋ B & := & (A \multimap \perp) \multimap B \\
A \otimes B & := & (A \multimap (B \multimap \perp)) \multimap \perp \\
\mathbf{1} & := & \perp \multimap \perp \\
A \oplus B & := & (A \rightsquigarrow \mathbf{0}) \rightsquigarrow B \\
A \& B & := & (A \rightsquigarrow (B \rightsquigarrow \mathbf{0})) \rightsquigarrow \mathbf{0} \\
\top & := & \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{0}
\end{array}
$$

Το πολλαπλασιαστικό μέρος αποτελεί τον πυρήνα του γραμμικού συστήματος με ακολουθητές (άλλωστε αυτό φαίνεται και από τη σημασιολογία του $\Rightarrow$) και το προσθετικό συνδέεται με το πολλαπλασιαστικό μέσω των εκθετικών καθώς:

$$
\begin{array}{rcl}
!A \otimes !B & \Longleftrightarrow & !(A \& B) \\
?A ⅋ ?B & \Longleftrightarrow & ?(A \oplus B) \\
!A \multimap ?B & \Longleftrightarrow & ?(A \rightsquigarrow B)
\end{array}
$$

Η ιντουισιονιστική γραμμική λογική (ILL του Παραρτήματος C) προκύπτει, επιβάλλοντας τον συνήθη ιντουισιονιστικό περιορισμό στο CLL (και μη λαμβάνοντας υπόψιν την "περίεργη" συνεπαγωγή $\rightsquigarrow$): επιτρέπουμε στα δεξιά του ακολουθητή πολυσύνολα που περιέχουν το πολύ έναν τύπο. Έτσι αναγκαστικά απαλείφονται ο σύνδεσμος $\parr$, η σταθερά $\perp$ και το εκθετικό ?. Άρα το ILL αποτελεί ένα γνήσιο τμήμα (fragment) του CLL.

Θέλοντας σε αυτό το σημείο να τονίσω την σημασία του συνδέσμου $\multimap$ και της σταθεράς **0** στην κλασική γραμμική λογική, παραθέτω το παρακάτω θεώρημα. Η απόδειξη του βρίσκεται στο [Sch94].

Θεώρημα 1.2.1. *Το CLL, περιορισμένο στη γλώσσα του ILL, είναι συντηρητική επέκταση του ILL αν και μόνον αν το CLL δεν περιέχει τη σταθερά* **0** *ή τη γραμμική συνεπαγωγή* $\multimap$.

Από εδώ και πέρα, μπορεί κάποιος να προσαρμόσει το σύστημα της γραμμικής λογικής και στους άλλους δύο φορμαλισμούς. Έτσι στο [Tro92] γίνεται μια παρουσίαση ενός συστήματος φυσικής απαγωγής για γραμμική λογική και μία παρουσίαση με σύστημα τύπου Hilbert. Φυσικά τα τρία συστήματα, όπως αντίστοιχα ισχύει στη συνήθη λογική, είναι ισοδύναμα μεταξύ τους.

1.2.1 Ερμηνεία των συμβόλων της Γραμμικής λογικής

Αν τώρα κάποιος παρατηρήσει ανεξάρτητα τη διαισθητική σημασία των συνδέσμων και σταθερών, υπό τη σκοπιά των γλωσσών προγραμματισμού, τότε οδηγείται στα ακόλουθα συμπεράσματα.

Καταρχήν θεωρούμε τους τύπους της γλώσσας της γραμμικής λογικής ως δεδομένα. Τότε

- $A^\perp$: είναι το δυϊκό του δεδομένου τύπου A. Όταν το A καταναλώνεται το $A^\perp$ παράγεται και αντίστροφα.
- $A \otimes B$: δεδομένο του τύπου ζεύγους, όπου χρησιμοποιούνται και τα δύο δεδομένα (τύπου A και B, οπότε $A \otimes B \not\Rightarrow B$).
- $A \& B$: δεδομένο που χρησιμοποιείται για να εξάγει ή το δεδομένο τύπου A ή το δεδομένο τύπου B. Η επιλογή γίνεται εξωτερικά (οπότε $A \& B \Rightarrow A$).
- $A \oplus B$: δεδομένο που περιέχει ή το δεδομένο τύπου A ή το δεδομένο τύπου B. Η επιλογή γίνεται εσωτερικά από το σύστημα (οπότε $A \oplus B \not\Rightarrow A$).
- $A \multimap B$: μέθοδος (συνάρτηση) που χρησιμοποιεί ακριβώς μία φορά (καταναλώνει) το A για να παράγει το B.
- $A \parr B$: δεδομένο που ερμηνεύεται μέσω των ισοδύναμών του δεδομένων τύπου $A^\perp \multimap B$ ή $B^\perp \multimap A$. Καλείται και "απροσδιόριστη" διάζευξη και προγραμματιστικά αντιστοιχεί σε παραλληλία διαδικασιών.

- $!A$: αποθήκευση του δεδομένου τύπου A. Επιτρέπει πεπερασμένη χρήση του δεδομένου τύπου A, δηλαδή πεπερασμένη χρήση του A στον "προηγούμενο" ενός ακολουθητή (ισχύει ότι $!A \Leftrightarrow \mathbf{1}\&A\&(!A \otimes !A))$.

- $?A$: δεδομένο προς κατανάλωση. Επιτρέπει πεπερασμένη κατανάλωση του δεδομένου τύπου A, δηλαδή πεπερασμένη χρήση του A στον "επόμενο" ενός ακολουθητή (ισχύει ότι $?A \Leftrightarrow \perp \oplus A \oplus (?A \parr ?A))$.

- $\mathbf{1}$: είναι το ουδέτερο στοιχείο για το $\otimes$. Αποτελεί μηδενικό απόθεμα, δηλαδή δεν παράγει τίποτα.

- $\perp$: είναι το ουδέτερο στοιχείο για το $\parr$. Δεν υπάρχει κανένα απόθεμα που να παράγει το $\perp$.

- $\top$: είναι το ουδέτερο στοιχείο για το $\&$. Αποτελεί αυθαίρετο δεδομένο, δηλαδή οτιδήποτε αποτελεί απόθεμα που παράγει το $\top$.

- $\mathbf{0}$: είναι το ουδέτερο στοιχείο για το $\oplus$. Αποτελεί απόθεμα που παράγει οτιδήποτε.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να διερευνήσουμε αν ένας τύπος είναι αποδείξιμος στο CLL, χωρίς να κατασκευάσουμε την απόδειξή του. Για παράδειγμα ο ακολουθητής $(A \multimap C)\&(B \multimap C) \Rightarrow A\&B \multimap C$ αποδεικνύεται στο CLL γιατί: ο "προηγούμενος" μας λέει ότι μπορούμε να επιλέξουμε είτε από το A να παράγουμε το C είτε από το B να παράγουμε το C. Αυτό όμως συνεπάγεται τον "επόμενο" του ακολουθητή που λέει ότι μπορούμε να επιλέξουμε ένα εκ των A ή B για να παράγουμε το C.

Ο ακολουθητής όμως $A\&B \multimap C \Rightarrow (A \multimap C)\&(B \multimap C)$ δεν αποδεικνύεται γιατί: ο "προηγούμενος" λέει ότι μπορούμε να επιλέξουμε ένα εκ των A ή B για να παράγουμε το C. Αυτό όμως δεν συνεπάγεται την ερμηνεία του "επόμενου", η οποία είναι ότι μπορούμε να επιλέξουμε είτε από το A να παραχθεί το C, είτε από το B να παραχθεί το C. Και αυτό γιατί βάσει του "προηγούμενου" υπάρχει μόνο μία επιλογή για να παραχθεί το C και όχι δύο όπως λέει ο "επόμενος".

Ο τρόπος αυτός για να δει κάποιος αν ένας ακολουθητής αποδεικνύεται ή όχι στο CLL είναι οπωσδήποτε αρκετά σύνθετος, ιδίως στην περίπτωση όπου κάτι δεν αποδεικνύεται. Γι' αυτό είναι προτιμότερο να γίνεται προσπάθεια απόδειξης. Άλλωστε το CLL είναι πολύ καλό ως αποδεικτικό εργαλείο και εύκολα κάποιος είτε βρίσκει αποδείξεις, είτε αντιλαμβάνεται που "κολλάει" μια παραγωγή. Για του λόγου το αληθές μια απόδειξη του πρώτου είναι:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \qquad C \Rightarrow C}{A \multimap C, A \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}\multimap)}{A \multimap C, A\&B \Rightarrow C}\,(L\&_1)}{A \multimap C \Rightarrow A\&B \multimap C}\,(\mathrm{R}\multimap)}{(A \multimap C)\&(B \multimap C) \Rightarrow A\&B \multimap C}\,(L\&_1)$$

ενώ παρατηρούμε για το δεύτερο ότι δεν αποδεικνύεται, γιατί στα φύλλα δεν προκύπτουν παντού αξιώματα:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad A \not\Rightarrow B}{A \Rightarrow A\&B}(R\&) \quad C \Rightarrow C}{(A\&B) \multimap C, A \Rightarrow C}(\mathrm{L}\multimap)}{A\&B \multimap C \Rightarrow A \multimap C}(\mathrm{R}\multimap) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \not\Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{B \Rightarrow A\&B}(R\&) \quad C \Rightarrow C}{(A\&B) \multimap C, B \Rightarrow C}(\mathrm{L}\multimap)}{A\&B \multimap C \Rightarrow B \multimap C}(\mathrm{R}\multimap)}{A\&B \multimap C \Rightarrow (A \multimap C)\&(B \multimap C)}(R\&)$$

Παρατήρηση: Η διερεύνηση για το αν κάτι αποδεικνύεται ή όχι γίνεται με κατασκευή της απόδειξης από κάτω προς τα πάνω (bottom up) λαμβάνοντας υπόψιν όλες τις δυνατές διαδοχές κανόνων. Στο παραπάνω παράδειγμα μη αποδειξιμότητας έχω γράψει μόνο έναν τρόπο διαδοχής κανόνων. Όμως αν κάποιος διερευνήσει όλους τους δυνατούς τρόπους πάντα κάπου θα "κολλάει". Πρέπει να επισημάνουμε όμως, ότι η διερεύνηση γίνεται χωρίς να χρησιμοποιούμε τον κανόνα τομής. Επιπλέον με αυτή τη μέθοδο θέλω απλά να δείξω τη δυνατότητα ελέγχου των τύπων που αποδεικνύονται στο CLL. Δεν τίθεται θέμα αποκρισιμότητας του CLL. Μπορούμε να πούμε ρητά ότι δεν είναι (βλ. [Tro92]). Αποκρίσιμο είναι μόνο το ιντουισιονιστικό προτασιακό κομμάτι της γραμμικής λογικής, κάτι άλλωστε που ισχύει και για τη συνήθη λογική.

1.2.2 Σημαντικές ιδιότητες της Γραμμικής λογικής

Θα ήταν τουλάχιστον άδικος κόπος να κατασκευαστεί ένα καινούργιο σύστημα λογικής που να μην ικανοποιεί τις σημαντικότερες ιδιότητες των προγενέστερών του. Η γραμμική λογική όμως όχι μόνο ικανοποιεί τις σημαντικές ιδιότητες της λογικής αλλά επιπλέον έχει και κάποια ισχυρά χαρακτηριστικά.

Συγκεκριμένα το ακόλουθο είναι ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.2.2. (απαλοιφής της τομής) *Ένας ακολουθητής $\Gamma \Rightarrow \Delta$ είναι αποδείξιμος στο CLL (αντίστοιχα στο ILL) αν και μόνον αν είναι αποδείξιμος χωρίς τη χρήση του κανόνα τομής.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι αντίστοιχη αυτής για το CL, μόνο που τώρα κάποιος πρέπει να κάνει μια πιο λεπτομερή δουλειά εκεί όπου εμφανίζονται τα εκθετικά. Ένα μέρος της απόδειξης του θεωρήματος βρίσκεται στο [Tro92]. □

Σε αυτό το σημείο όμως πρέπει να σταθούμε. Το να απαλείφουμε τις τομές από αποδείξεις σημαίνει ότι αποσαφηνίζουμε το περιβάλλον τους καταγράφοντας τις κανονικές τους μορφές. Με αυτή την έννοια η διαδικασία απαλοιφής της τομής αντιστοιχεί σε ένα υπολογιστικό μηχανισμό. Είναι η διαδικασία που, ενδεχομένως, εξασφαλίζει μια υπολογιστική ερμηνεία του λογισμού ακολουθητών.

Το Hauptsatz θεώρημα του Gentzen και η απόδειξή του αναφέρει ότι, στη θεωρία, μπορούμε να απαλείψουμε τις τομές στις CL-αποδείξεις. Στην πράξη όμως πολλές φορές αυτό είναι εξαιρετικά δύσκολό. Για την ακρίβεια παρουσιάζονται πολλά διλήμματα στο πως να συνεχίσουμε την διαδικασία. Μια τυπική περίπτωση αυτού είναι όταν η τομή εφαρμόζεται σε ακολουθητές που έχουν προέλθει από εφαρμογή κάποιου δομικού κανόνα. Δηλαδή έστω ότι έχουμε την εξής κλασική απόδειξη:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \Rightarrow A, A, \Delta\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\,(\mathrm{RC}) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ \Gamma', A, A \Rightarrow \Delta'\end{matrix}}{\Gamma', A \Rightarrow \Delta'}\,(\mathrm{LC})}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(\text{τομή})$$

Για να απαλείψουμε την τομή πρέπει να διπλασιάσουμε μία εκ των Π_1 ή Π_2. Για παράδειγμα αν επιλέγαμε να διπλασιάσουμε την Π_1 θα είχαμε

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \Rightarrow A, A, \Delta\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\,(\mathrm{RC}) \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \Rightarrow A, A, \Delta\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\,(\mathrm{RC}) \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ \Gamma', A, A \Rightarrow \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(\text{τομή})}{\Gamma, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta, \Delta'}\,(\text{τομή})}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta, \Delta'}\,(\mathrm{LC})}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(\mathrm{RC})$$

Παρατηρούμε ότι παρόλο που η πολυπλοκότητα του τύπου τομής δεν έχει αλλάξει, έχει μειωθεί το επίπεδο της ψηλότερης τομής (όσο πιο κοντά στα φύλλα είναι μια τομή τόσο χαμηλότερο επίπεδο τομής έχει). Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα απαλοιφής της τομής (συγκεκριμένα με την απόδειξή του) αν συνεχίσουμε να μεταφέρουμε τις τομές προς τα φύλλα του δέντρου της απόδειξης, θα καταφέρουμε να την απαλείψουμε. Συνεπώς θα χρειαστεί να κάνουμε κι άλλες επιλογές.

Ας επικεντρωθούμε όμως στο πρώτο βήμα. Η επιλογή για το ποια από τις Π_1 ή Π_2 θα διπλασιαστεί γίνεται εντελώς τυχαία. Επιπλέον το να αποφασίσουμε γενικά τη μία ή την άλλη αφενός μπορει να οδηγήσει σε άπειρες επαναλήψεις και η διαδικασία να αποτύχει, αφετέρου είναι βέβαιο ότι θα οδηγηθούμε σε διαφορετικές κανονικές μορφές. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο δεν μπορούμε να αποδείξουμε ισχυρή κανονικοποίηση για το σύστημα CL.

Σύμφωνα με το παράδειγμα, υποπτευόμαστε ότι αυτός ο μη ντετερμινισμός οφείλεται στη χρήση των δομικών κανόνων. Πραγματικά, αυτό επιβεβαιώνεται αν αναλογιστεί κανείς ότι αυτό το πρόβλημα δεν παρουσιάζεται στην ιντουισιονιστική λογική (σύστημα IL), όπου εκεί οι δομικοί κανόνες επιτρέπονται μόνο στον “προηγούμενο” ενός ακολουθητή. Επίσης στη γραμμική λογική το πρόβλημα αυτό επιλύεται μέσω του μη συμμετρικού χειρισμού των δομικών κανόνων, δηλαδή δεν μπορεί να υπάρξει τομή ανάμεσα σε μία απόδειξη με συμπέρασμα $\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta$ και σε μία απόδειξη με συμπέρασμα $\Gamma', !A \Rightarrow \Delta'$.

Αυτά όμως προς το παρόν. Θα αναφερθώ εκτενέστερα στο θέμα αυτό στο Κεφάλαιο 5.

Μία άλλη σημαντική ιδιότητα της γραμμικής λογικής ανακύπτει από το λεγόμενο θεώρημα προσέγγισης (approximation theorem). Ο Girard απέδειξε το θεώρημα αυτό στο αρχικό του άρθρο [Gir87]. Η ιδέα του θεωρήματος είναι η ακόλουθη. Έστω ένα θεώρημα A της γραμμικής λογικής (ο τύπος A είναι θεώρημα αν $CLL \vdash \Rightarrow A$). Τότε μπορούμε, αν τοποθετήσουμε τυχαία ετικέτες (ακέραιους αριθμούς) στα ! του A, να τοποθετήσουμε ετικέτες και στα ? του A με τέτοιο τρόπο ώστε ο τύπος B, που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία, να είναι θεώρημα της γραμμικής λογικής και επιπλέον για την απόδειξή του να μην απαιτείται η χρήση των εκθετικών κανόνων. Δηλαδή η γραμμική λογική μπορεί να ελέγξει τη χρήση των αποθεμάτων (το οποίο εκφράζεται από τις ετικέτες στα εκθετικά) και ειδικότερα τις διαζεύξεις στο θεώρημα του Herbrand (μέσω των μεταφράσεων στις οποίες θα αναφερθώ στη συνέχεια [Gir87]). Τα εκθετικά με ετικέτες καλούνται "προσεγγιστές" (approximants). Ειδικότερα, χρειαζόμαστε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 1.2.3. (προσεγγιστές) *Τα εκθετικά ! και ? προσεγγίζονται από τους συνδέσμους $!_n$ και $?_n$, όπου n φυσικός αριθμός και $n \neq 0$:*

$$
\begin{array}{lcll}
!_n & := & (\mathbf{1} \,\&\, A) \otimes \ldots \otimes (\mathbf{1} \,\&\, A) & (n \text{ φορές}) \\
?_n & := & (\perp \oplus A) \parr \ldots \parr (\perp \oplus A) & (n \text{ φορές})
\end{array}
$$

Το θεώρημα προσέγγισης διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 1.2.4. (προσέγγισης) *Έστω A ένα θεώρημα της γραμμικής λογικής ("μιας πλευράς" CLL), όπου κάθε εμφάνιση α ενός ! στο A, μαρκάρεται από μια ετικέτα n(α)$\in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Τότε μπορούμε να μαρκάρουμε κάθε εμφάνιση β του ? με μία ετικέτα n(β)$\in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, έτσι ώστε αν το B είναι το αποτέλεσμα αντικατάστασης κάθε εμφάνισης α του ! (αντίστοιχα β του ?) με $!_{n(a)}$ (αντίστοιχα $?_{n(\beta)}$), τότε και το B είναι θεώρημα της γραμμικής λογικής και για την απόδειξη του, δεν γίνεται χρήση των εκθετικών κανόνων.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται στο "μίας πλευράς" CLL (Παράρτημα D). Βέβαια το σύστημα αυτό είναι ισοδύναμο με το CLL, οπότε το θεώρημα ισχύει στο CLL. Ειδικότερα η απόδειξη του θεωρήματος, γίνεται με επαγωγή στο μήκος της απόδειξης του A ($\vdash \Rightarrow A$), ελέγχοντας κάθε φορά τον τελευταίο κανόνα. Λεπτομέρειες υπάρχουν στο αρχικό άρθρο του Girard [Gir87] και στο [Tro92]. □

Το θεώρημα αυτό ήρθε για να επιβεβαιώσει την πρόθεση του Girard για κατασκευή ενός ισχυρότερου συστήματος λογικής, καθώς όπως αναφέρει στο αρχικό του άρθρο "η συνήθης λογική λαμβάνεται από την γραμμική λογική μέσω ενός περάσματος στο όριο".

Μια τρίτη, και ίσως η σημαντικότερη, ιδιότητα είναι αυτή της ισχυρής κανονικοποίησης για την κλασική γραμμική λογική. Άλλωστε ήταν θεμελιώδης η ιδέα του Girard να κατασκευάσει ένα σύστημα λογικής ισχυρό όπως η κλασική λογική, αλλά με κατασκευαστικά χαρακτηριστικά, όπως αυτά της ιντουισιονιστικής λογικής.

Η ιντουισιονιστική λογική είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμη. Δηλαδή σε μία απόδειξη του συστήματος IL μπορούμε να απαλείψουμε τις τομές επιλέγοντας διαρκώς τυχαία την τομή από όπου θα ξεκινήσουμε την εφαρμογή του αλγορίθμου. Την ιδιότητα αυτή μπορεί κάποιος να την πάρει και μέσω της ισχυρής κανονικοποίησης του συστήματος του λ-λογισμού με τύπους Church, που αποτελεί το υπολογιστικό ανάλογο της ιντουισιονιστικής λογικής σύμφωνα με την αντιστοιχία Curry-Howard-De Bruijn [SU98]. Την ισχυρή κανονικοποίηση για τη γραμμική λογική, την απέδειξε ο Girard στο αρχικό άρθρο του, για τα λεγόμενα δίκτυα απόδειξης (proofnets), ένα εναλλακτικό φορμαλισμό της γραμμικής λογικής πολύ κοντά στη φυσική απαγωγή, στον οποίο θα αναφερθώ στη συνέχεια. Η απόδειξη του είναι μεγάλης πολυπλοκότητας και βέβαια χρησιμοποιεί τα λεγόμενα κατηγορήματα αναγωγιμότητας. Μια επίσης πολύπλοκη απόδειξη της ισχυρής κανονικοποίησης, αλλά αυτή τη φορά εφαρμοσμένη στο σύστημα CLL, υπάρχει στο [Tro92] και οφείλεται στη διατριβή του Roorda [Roo91] το 1991. Δηλαδή απέδειξε ότι

Θεώρημα 1.2.5. (απαλοιφή της τομής και ισχυρή κανονικοποίηση) *Το σύστημα CLL είναι ισοδύναμο με το σύστημα CLL χωρίς την τομή. Επιπλέον, κάθε ακολουθία από αναγωγές που εφαρμόζεται σε μία CLL-απόδειξη, τερματίζει.*

Τέλος, το σύστημα γραμμικής λογικής ικανοποιεί την ιδιότητα Church-Rosser (ή συμβολής), δηλαδή κάθε γραμμική απόδειξη έχει μοναδική κανονική μορφή. Η αρχική απόδειξη έγινε από τον Danos, στη διατριβή του [Dan90], για το δευτεροβάθμιο πολλαπλασιαστικό/εκθετικό τμήμα ενός συστήματος δικτύων απόδειξης (PN1). Στη συνέχεια όμως, χρησιμοποιώντας μια μετάφραση του πλήρους συστήματος δικτύων απόδειξης taLL (με ήμερα προσθετικά) στο PN1, οι Danos, Joinet και Schellinx [DJS97], απέδειξαν την ιδιότητα συμβολής για το σύστημα taLL. Επομένως ας αναφερθούμε αμέσως στα δίκτυα απόδειξης.

1.2.3 Δίκτυα απόδειξης

Ας θεωρήσουμε δύο φορμαλισμούς για το τμήμα $(\wedge, \rightarrow, \forall)$ της ιντουισιονιστικής λογικής: NJ (φυσική απαγωγή) και LJ (λογισμός ακολουθητών). Στο LJ, το μέρος της απόδειξης από το $A, C, E \vdash F$ στο $A \wedge B, C \wedge D, E \vdash F$ μπορεί να γραφτεί με δύο διαφορετικούς τρόπους.[1] Στον πρώτο, εφαρμόζεται πρώτα

[1] Λόγω του Θεώρηματος 1.1.2, μια απόδειξη του $\Gamma \Rightarrow A$ σε σύστημα ακολουθητών, ισοδυναμεί με απόδειξη του A από υποθέσεις Γ σε σύστημα φυσικής απαγωγής. Γι' αυτό μπορούμε να αναφερόμαστε σε ακολουθητές της μορφής $\Gamma \vdash A$.

$(L\wedge_1)$ για τη δημιουργία του $A\wedge B$ και έπειτα $(L\wedge_1)$ για τη δημιουργία του $C\wedge D$. Στον δεύτερο οι κανόνες εφαρμόζονται ακριβώς αντίστροφα. Δηλαδή:

$$\dfrac{\dfrac{A, C, E\vdash F}{A\wedge B, C, E\vdash F}\,(\mathrm{L}\wedge_1)}{A\wedge B, C\wedge D, E\vdash F}\,(\mathrm{L}\wedge_1) \qquad \dfrac{\dfrac{A, C, E\vdash F}{A\wedge B, C, E\vdash F}\,(\mathrm{L}\wedge_1)}{A\wedge B, C\wedge D, E\vdash F}\,(\mathrm{L}\wedge_1)$$

Αντιθέτως στο NJ ο τρόπος απόδειξης είναι μοναδικός, αφού:

$$\dfrac{\dfrac{A\wedge B}{\mathrm{A}}\,(\wedge E_R) \qquad \dfrac{C\wedge D}{\mathrm{C}}\,(\wedge E_R) \qquad \mathrm{E}}{\begin{array}{c}\vdots\\ \hline \mathrm{F}\end{array}}$$

Γι' αυτό άλλωστε οι αποδείξεις στη φυσική απαγωγή θεωρούνται ως οι "πραγματικές" αποδείξεις, ενώ οι αποδείξεις στο LJ, οι οποίες δεν είναι πρωταρχικές (primitive), ως οδηγίες για να ανακτήσουμε την "πραγματική" απόδειξη στο NJ. Αυτή η λεπτομέρεια είναι σημαντική αν αναλογιστεί κάποιος, ότι ενδιαφερόμαστε για ισότητα κανονικών μορφών. Δυστυχώς ήδη από την ιντουισιονιστική λογική, η ιδιότητα αυτή χάνεται στο NJ όταν θεωρήσουμε την πλήρη γλώσσα (του κατηγορηματικού λογισμού). Δηλαδή οι αποδείξεις στο NJ δεν μπορούν πλέον να θεωρηθούν ως πρωταρχικές, καθώς χρειάζονται επιπλέον στοιχεία αναγνώρισης ανάμεσα τους (κανόνες αντικατάστασης). Η προσπάθεια εύρεσης "πραγματικών" αποδείξεων για το πλήρες σύστημα οδήγησε στην ιδέα κατασκευής μιας "λογικής με πολλαπλά συμπεράσματα". Η γραμμική λογική, λόγω της σημασιολογίας των συνδέσμων της, επέτρεψε την κατασκευή ενός ικανοποιητικού τέτοιου συστήματος, το οποίο ονομάζεται δίκτυα απόδειξης (proofnets).

Ο πυρήνας της θεωρίας είναι το πολλαπλασιαστικό μέρος, το οποίο δουλεύει με εξαιρετικό τρόπο και από το οποίο μπορούμε να εκμαιεύσουμε την ιδέα του παραλληλισμού. Η επέκταση της θεωρίας για την πλήρη γλώσσα (αν και όχι τόσο καλή) χρησιμοποιεί τα κουτιά-απόδειξης, τα οποία αποτελούν ένα χαλαρό επινόημα: στιγμιότυπα από ακολουθητικοποίηση (sequentialization) κάποιας απόδειξης τοποθετούνται μέσα στα κουτιά-απόδειξης και τα κουτιά είναι αλληλοσυνδεόμενα με τον πολλαπλασιαστικό τρόπο. Ο τρόπος με τον οποίο μπορεί κάποιος να θεωρήσει τα κουτιά-απόδειξης ποικίλει, ανάλογα με τα αποτελέσματα που θέλει να αποδείξει (π.χ. διαχωρίζουμε τα προσθετικό μέρος των δικτύων απόδειξης του Girard [Gir87], από το αντίστοιχο με τα ήμερα (tamed) προσθετικά που συναντάμε στο [DJS97]).

Η ακόλουθη σύντομη παρουσίαση οφείλεται στον Troelstra [Tro92]. Βέβαια τα δίκτυα απόδειξης εισήχθησαν από τον Girard στο αρχικό του άρθρο. Παρ' όλ' αυτά πολλές βελτιώσεις έγιναν από τότε (π.χ. για το προσθετικό μέρος). Ο κύριος λόγος όμως που επιλέγω την παρουσίαση του Troelstra, είναι διότι το να ελέγξει κάποιος ότι μια κατασκευή είναι δίκτυο απόδειξης με το κριτήριο που αναφέρει ο Troelstra (switching) και οφείλεται στους Danos και Regnier [DR89], είναι ευκολότερο από ότι με το κριτήριο του Girard (longtrip). Δηλαδή ο αλγόριθμος των Danos και Regnier είναι χαμηλότερης πολυπλοκότητας έναντι αυτού, του Girard.

Ξεκινάμε κατασκευάζοντας δομές απόδειξης (proof structures ή PS) ως εξής: μια *PS* είναι ένας γράφος με κόμβους μαρκαρισμένους με τύπους ή το σύμβολο τομής "cut", που κατασκευάζεται από τις ακόλουθες συνιστώσες:

- μεμονωμένους κόμβους **1**, **0**
- αξιωματικούς δεσμούς: A —— $A^{\perp}$
- δεσμούς τομής: A —— cut —— $A^{\perp}$
- λογικοί κανόνες:
$\otimes$–δεσμός A —— $A \otimes B$ —— B και
$⅋$–δεσμός A —— $A⅋B$ —— B.

Έστω τώρα ότι το ν συμβολίζει δομές απόδειξης, το TN(ν) τους τερματικούς κόμβους του ν και ν,A,B,...,D μία PS ν με τερματικούς κόμβους A,B,..,D. Τότε οι PS κατασκευάζονται από τις εξής προτάσεις:

(i) οι ατομικοί κόμβοι **0**,**1** είναι PS με τερματικούς κόμβους **0** και **1** αντίστοιχα.

(ii) αν ν, μ είναι PS, τότε PS είναι και το $\nu \cup \mu$, με TN($\nu \cup \mu$)=TN(ν) $\cup$ TN(μ).

(iii) A —— $A^{\perp}$ είναι μία PS (αξίωμα), με τερματικούς κόμβους A, $A^{\perp}$.

(iv) αν ν, A, $A^{\perp}$ είναι μία PS, τότε PS είναι και ο γράφος που λαμβάνεται προσθέτοντας ακμές και το σύμβολο "*cut*" A —— cut —— $A^{\perp}$. Οι νέοι τερματικοί κόμβοι είναι οι TN(ν)$\cup\{cut\} \setminus \{A, A^{\perp}\}$.

(v) αν ν, A, B είναι μία PS, τότε PS είναι και ο γράφος που λαμβάνεται προσθέτοντας δύο ακμές και έναν από τους κόμβους A —— $A \otimes B$ —— B ή A —— $A⅋B$ —— B. Οι τερματικοί κόμβοι είναι οι TN(ν) χωρίς τους A και B, αλλά προσθέτοντας τον $A \otimes B$ ή αντίστοιχα τον $A⅋B$.

Επομένως, από τα παραπάνω, κατασκευάζονται PS που μπορεί να έχουν αρκετά συμπεράσματα, έστω A_1,...,A_n. Αυτό που θέλουμε να επιτύχουμε είναι ότι για κάποιες τέτοιες δομές απόδειξης, δηλαδή τα δίκτυα απόδειξης, να αποδεικνύεται το "par" των συμπερασμάτων ($A_1⅋...⅋A_n$). Γι' αυτό πρέπει να δώσουμε ένα κριτήριο ορθότητας που να δείχνει πότε μία PS είναι δίκτυο απόδειξης.

Καταρχήν ορίζουμε τις διαλλαγές (switchings). Μία διαλλαγή ενός $⅋$-δεσμού είναι η αντικατάσταση ενός $⅋$-δεσμού

$$A \text{ —— } A⅋B \text{ —— } B$$

ή με το σχηματισμό

$$A \text{ —— } A⅋B \qquad B$$

είτε με το σχηματισμό

$$A \qquad A⅋B \text{ —— } B$$

Επομένως, μια διαλλαγή ενός ⅋-δεσμού, αντιστοιχεί στο σβήσιμο μιας από τις ακμές του ⅋-δεσμού. Ορίζουμε πλέον μια διαλλαγή για μία PS, να είναι ο γράφος που προκύπτει από τη δομή κάνοντας μία διαλλαγή για κάθε ⅋-σύνδεσμο.

Το κριτήριο ορθότητας για τα δίκτυα απόδειξης λέει ότι, μία PS είναι δίκτυο απόδειξης, αν κάθε διαλλαγή της PS είναι ένα ακυκλικός και συνεκτικός γράφος (δηλαδή ένα δέντρο). Το κριτήριο αυτό αποδεικνύεται ισοδύναμο με το αντίστοιχο κριτήριο του Girard (με τα "longtrips", [Gir87]).

Στη συνέχεια παραθέτω τον ακόλουθο ορισμό, ο οποίος δίνει την ακριβή μορφή των δικτύων απόδειξης.

Ορισμός 1.2.6. *Οι* **επαγωγικές PS** *(inductive PS ή IPS) λαμβάνονται από τις ακόλουθες προτάσεις:*

(i) **1** *είναι μία IPS, TN(ν)=***1**.

*(ii) Αν ν είναι μία IPS, τότε IPS είναι και ο ν,***0** *(προσθέτοντας τον κόμβο 0 , χωρίς νέες ακμές), TN(ν,0)=ν* $\cup\{\mathbf{0}\}$.

(iii) A —— $A^{\perp}$ *είναι μία IPS (αξίωμα), με τερματικούς κόμβους* A, $A^{\perp}$.

(iv) Αν ν,A και ν′, $A^{\perp}$ *είναι IPS, τότε IPS είναι και ο ν,A —— cut —— * $A^{\perp}$*,ν′ (δύο καινούργιες ακμές και ένας κόμβος μαρκαρισμένος με "cut"), με τερματικούς κόμβους* $(TN(\nu) \cup TN(\nu') \cup \{cut\})\backslash\{A,\ A^{\perp}\}$.

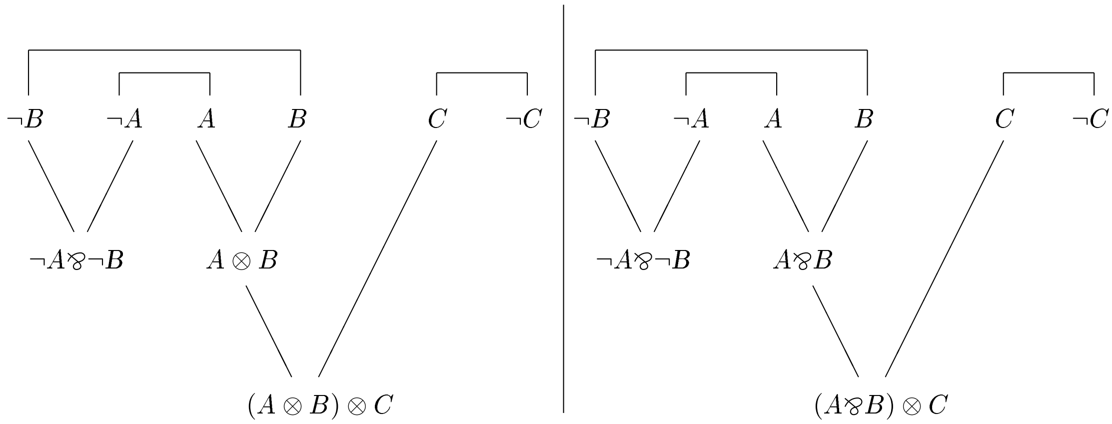
(v) Αν ν,A και ν′,B είναι IPS, τότε IPS είναι και ο ν,A —— $A\otimes B$ *—— B,ν′ (δύο καινούργιες ακμές και ένας κόμβος μαρκαρισμένος με "*$A\otimes B$*"), με τερματικούς κόμβους* $(TN(\nu) \cup TN(\nu') \cup \{A\otimes B\})\backslash\{A,B\}$.

(vi) Αν ν,A και ν′,B είναι IPS, τότε IPS είναι και ο

$$\begin{array}{c} \nu,A,B \\ \backslash/ \\ A⅋B \end{array}$$

(δύο καινούργιες ακμές και ένας κόμβος A⅋B), με τερματικούς κόμβους $(TN(\nu) \cup \{A⅋B\})\backslash\{A,B\}$.

Βάσει αυτού του ορισμού, μέσα από μια επίπονη συνδυαστική κατασκευή [Tro92], αποδεικνύεται ότι τα δίκτυα απόδειξης είναι ακριβώς οι IPS. Τέλος αξίζει να αναφέρουμε ότι ο Girard ήδη είχε δείξει ότι, για κάθε απόδειξη π στη γραμμική λογική ενός ακολουθητή $\Rightarrow A_1, ..., A_n$, μπορούμε να αποδώσουμε ένα δίκτυο απόδειξης π^- με τερματικούς κόμβους ακριβώς τους A_1,...,A_n. Επιπλέον έδειξε με μια απόδειξη εξίσου πολύπλοκη, με αυτή που αναφέραμε



Σχήμα 1.3: Δομές απόδειξης.

μόλις πριν, ότι για κάθε δίκτυο απόδειξης β, μπορεί κάποιος να βρει μια απόδειξη π στον λογισμό ακολουθητών τέτοια ώστε $\beta = \pi^{-}$.

Στο Σχήμα 1.3 βρίσκονται δύο δομές απόδειξης. Η αριστερή είναι IPS, δηλαδή δίκτυο απόδειξης, ενώ η δεξιά όχι. Η διαφοροποίηση στην δεξιά PS, γίνεται ακριβώς στο σημείο όπου εφαρμόζεται $\parr$–δεσμός για τα A και B.

Αν τώρα κάποιος θέλει να επεκτείνει την χρήση των δικτύων απόδειξης για τους προσθετικούς συνδέσμους και τους ποσοδείκτες, είναι υποχρεωμένος να χρησιμοποιήσει τα λεγόμενα κουτιά-απόδειξης (proof-boxes). Τα κουτιά-απόδειξης μπορούν να θεωρηθούν ως μαύρα κουτιά με n εισόδους/εξόδους, $n \neq 0$. Στο εσωτερικό του κουτιού υπάρχει η διαδικασία κατασκευής του, η οποία είναι απροσδιόριστη. Δηλαδή χρησιμοποιούμε τα κουτιά-απόδειξης χωρίς να ξέρουμε το περιεχόμενό τους. Τώρα αν κάποιος θέλει να ελέγξει την ορθότητα ενός δικτύου απόδειξης που περιέχει κουτιά-απόδειξης, δεν έχει παρά να ελέγξει το δίκτυο απόδειξης, αδιαφορώντας για τα κουτιά-απόδειξης και στη συνέχεια να ελέγξει αυτά ξεχωριστά. Ο έλεγχος αυτός γίνεται θεωρώντας τα κουτιά-απόδειξης σαν δίκτυα απόδειξης με συμπεράσματα A_1,...,A_n. Στο [Gir87] μπορεί κάποιος να βρει μια ολοκληρωμένη παρουσίαση για τα δίκτυα απόδειξης, με κουτιά-απόδειξης.

Ολοκληρώνοντας την αναφορά στα δίκτυα απόδειξης πρέπει να τονίσουμε ότι συστήματα με δίκτυα απόδειξης (όπως το PN2 του Girard) αποδείχθηκαν ισχυρά κανονικοποιήσιμα. Δηλαδή κάθε δίκτυο απόδειξης, με διαδοχικά βήματα κανονικοποίησης καταλήγει στην κανονική του μορφή, η οποία δεν περιέχει δεσμούς τομής. Επιπλέον τέτοιου είδους συστήματα δικτύων απόδειξης ικανοποιούν την ιδιότητα συμβολής (Church-Rosser), ή με άλλα λόγια η κανονική μορφή καθενός δικτύου απόδειξης είναι μοναδική.

1.2.4 Σημασιολογία των γραμμικών συστημάτων

Τελειώνοντας αυτή την σύντομη παρουσίαση των συστημάτων γραμμικής λογικής, είναι ενδιαφέρον να εστιάσουμε και στη μοντελοποίηση αυτών, η οποία μας δίνει ακόμα καλύτερη διαίσθηση. Από την εισαγωγή της κιόλας, η γραμμική λογική συνοδεύεται από δύο ειδών σημασιολογίες. Μία αλγεβρική (phase semantics) και μία δηλωτική (coherence spaces). Στη συνέχεια θα προσπαθήσω να παρουσιάσω σύντομα τις ιδέες που δίνουν αυτές τις σημασιολογίες.

Αλγεβρική σημασιολογία

Η αλγεβρική σημασιολογία όπως παρουσιάζεται στο [Tro92], είναι για τη γραμμική λογική, ό,τι είναι τα Boolean μοντέλα για την κλασική λογική και τα Heyting μοντέλα για την ιντουισιονιστική λογική. Ωστόσο οι ιδέες της σημασιολογίας αυτής, αναδύονται μέσα από τη σημασιολογία των φάσεων (phase semantics) του Girard. Στις συνήθεις λογικές η αλήθεια θεωρείται εντελώς ανεξάρτητη από την διαδικασία επαλήθευσης. Επομένως για παράδειγμα, θέλουμε να ισχύει ότι: '$A\&B$ αληθές ανν A αληθές και B αληθές'. Στη γραμμική λογική όμως αλλάζει ο τρόπος με τον οποίο θεωρούμε τα πράγματα.

Καταρχήν εισάγουμε έναν παρατηρητή (observer). Για να επαληθεύσουμε ένα γεγονός (fact) A, ο παρατηρητής πρέπει να κάνει κάτι. Δηλαδή, υπάρχουν αναθέσεις p,q,..., οι οποίες επαληθεύουν το A (p$\models A$, q$\models A$,...). Αυτές οι αναθέσεις μπορούν να θεωρηθούν ως φάσεις ανάμεσα σε ένα γεγονός και στην επαλήθευσή του. Οι φάσεις σχηματίζουν ένα μονοειδές P (χώρος φάσεων) και θεωρούμε ότι ένα γεγονός επαληθεύεται από τον παρατηρητή όταν δεν υπάρχει φάση ανάμεσα σε αυτόν και το γεγονός, δηλαδή όταν $1/=A$, όπου 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο στο χώρο φάσεων. Τότε για παράδειγμα η επαλήθευση της σύζευξης γίνεται ως εξής:
(i) "&": p$\models A\&B$ όταν p$\models A$ και p$\models B$.
(ii) "⊗": pq$\models A\otimes B$ όταν p$\models A$ και q$\models B$.

Οι ιδέες αυτές μπορούν να αποδοθούν μέσα σε αλγεβρικές δομές [Tro92]. Τελικά αποδεικνύονται τα θεωρήματα ορθότητας και πληρότητας.

Θεώρημα 1.2.7. (ορθότητα) *Αν ένας ακολουθητής $\Gamma \Rightarrow A$ αποδεικνύεται στην κλασική γραμμική λογική τότε είναι έγκυρος για κάθε CL-μοντέλο (phase structure).*

Θεώρημα 1.2.8. (πληρότητα) *Για ένα κατάλληλο CL-μοντέλο (phase structure), αν ένας ακολουθητής $\Gamma \Rightarrow A$ είναι έγκυρος στο μοντέλο, τότε αποδεικνύεται στην κλασική γραμμική λογική.*

Πεδία Girard

Χάρις στην αλγεβρική σημασιολογία (phases) μπορούμε να γνωρίζουμε αν ένας ακολουθητής είναι αποδείξιμος στη γραμμική λογική. Η σημασιολογία με τα πεδία Girard ή, όπως αναφέρεται και αλλιώς, τους χώρους συνάφειας (coherence spaces) μας προσφέρει κάτι επιπλέον, την ίδια την απόδειξη του τύπου. Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται αυτό, είναι "κωδικοποιώντας" τις αποδείξεις των ακολουθητών σε σημεία κάποιων συγκεκριμένων γράφων. Η θεωρία αυτή έχει αρκετές ομοιότητες με τη θεωρία για τα πεδία Scott. Τελικά, λόγω της ύπαρξης της σημασιολογίας με χώρους συνάφειας για τη γραμμική λογική, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα CLL είναι κατασκευαστικό.

Η σημασιολογία αυτή σε γενικές γραμμές έχει ως εξής. Καταρχήν ορίζουμε ποιοι γράφοι καλούνται χώροι συνάφειας. Έπειτα για κάθε πρωταρχικο τύπο της γλώσσας, θεωρούμε ένα τυχαίο χώρο συνάφειας (εκτός από τις σταθερές οι οποίες έχουν συγκεκριμένους). Στη συνέχεια για κάθε σύνθετο τύπο (προκύπτουν από πρωταρχικούς τύπους με διαδοχικές εφαρμογές γραμμικών συνδέσμων) κατασκευάζουμε τους αντίστοιχους χώρους συνάφειας. Τελικά θα ερμηνεύσουμε μια απόδειξη π του ακολουθητή $\Rightarrow A_1, ..., A_n$ με ένα σημείο π^* του χώρου συνάφειας που ερμηνεύει το "par" των $A_1, ..., A_n$, δηλαδή του χώρου συνάφειας του $A_1 \parr ... \parr A_n$. Για τον τρόπο που γίνονται όλα αυτά πρέπει κάποιος να ανατρέξει στα [Gir87] και [Tro92]. Τέλος πρέπει να αναφέρουμε ότι σε αντίθεση με την αλγεβρική σημασιολογία, οι χώροι συνάφειας έχουν και σημαντικές εφαρμογές. Μια ιδιότητα των χώρων συνάφειας για αποδείξεις με ακολουθητές, είναι ότι ερμηνεύουν και τα αντίστοιχα δίκτυα απόδειξής τους, (μέσω ακριβώς, των αρχικών αποδείξεων με ακολουθητές). Πολλοί όμως είναι αυτοί οι οποίοι προτιμούν να δουλεύουν άμεσα με τα δίκτυα απόδειξης (χωρίς να κάνουν πέρασμα από κάποιο σύστημα ακολουθητών). Ένα σημαντικό αποτέλεσμα είναι ότι οι χώροι συνάφειας ερμηνεύουν και τότε τα δίκτυα απόδειξης. Αυτό γίνεται (βλ. [Gir87]) μέσω των πειραμάτων (experiments) για τα δίκτυα απόδειξης.

Κεφάλαιο 2

Εμφυτεύσεις

Αν παρατηρήσουμε σημασιολογικά (μέσω των χώρων συνάφειας) τους συνδέσμους της γραμμικής λογικής, διαπιστώνουμε ότι προέρχονται από μία σημασιολογική αποσύνθεση των ιντουισιονιστικών συνδέσμων. Για παράδειγμα ο χώρος συνάφειας που αντιστοιχεί στον τύπο $A \vee B$ είναι της μορφής $!A^* \oplus !B^*$ (όπου A^* είναι ο χώρος συνάφειας του A). Επίσης $(A \rightarrow B)^* \equiv !A^* \multimap B^*$ (βλ. [GLT88]). Επομένως θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τη γραμμική λογική ως ένα "ραφινάρισμα" της ιντουισιονιστικής λογικής.

Ορισμός 2.0.1. *Έστω μια CLL-απόδειξη π. Αν αντικαταστήσουμε στην π όλα τα σύμβολα $\otimes, \&$ με $\wedge$, όλα τα σύμβολα $\parr, \oplus$ με $\vee$ και κάθε $\multimap, \rightsquigarrow$ με $\rightarrow$, και επιπλέον σβήσουμε τα εκθετικά και διαγράψουμε τις επαναλήψεις ακολουθητών, τότε λαμβάνουμε μια απόδειξη στην κλασική, ή ίσως και στην ιντουισιονιστική, λογική, η οποία αναφέρεται ως ο* **σκελετός** *της π, sk(π).*

Αυτή η παρατήρηση, αν και τετριμμένη, είναι ουσιαστική διότι μπορούμε να ερμηνεύουμε τις αποδείξεις στον γραμμικό λογισμό με ακολουθητές, ως σχολιασμένες (annotated) κλασικές ή ιντουισιονιστικές αποδείξεις.

Τα προηγούμενα, μαζί με την πεποίθηση ότι η γραμμική λογική είναι ένα ισχυρότερο σύστημα από τη συνήθη λογική, μας οδηγούν στο να υποθέσουμε ότι μπορούμε από την γραμμική λογική να ανακτήσουμε την συνήθη λογική. Πραγματικά υπάρχουν πολλές εμφυτεύσεις, είτε από την ιντουισιονιστική είτε από την κλασική λογική, στη γραμμική λογική. Το 1974 ο Grishin [Gri74] όρισε μια εμφύτευση της κλασικής λογικής σε ένα σύστημα κλασικής λογικής χωρίς συστολή, το οποίο βάσει της ορολογίας του πρώτου κεφαλαίου, αντιστοιχεί στο χωρίς εκθετικά τμήμα του CLL, επεκτεταμένο με εξασθένηση. Το 1990 ο Ono ([Ono90] και [Tro92]), βασιζόμενος στην ιδέα του Grishin, τροποποίησε αυτή την εμφύτευση για να προσαρμοστεί στο προαναφερθέν σύστημα, χωρίς την εξασθένηση.

Στη συγκεκριμένη εργασία ωστόσο, θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε εμφυτεύσεις οι οποίες περιλαμβάνουν και τα εκθετικά. Μάλιστα στη συνέχεια, αυτό που θα καταφέρουμε είναι να εμφυτεύσουμε στη γραμμική λογική πιστά τα θεωρήματα της λογικής, συμπεριλαμβάνοντας και τις αποδείξεις τους. Για το λόγο αυτό αναφερόμαστε στις τροπικές μεταφράσεις (modal translations).

Ορισμός 2.0.2. *Μία* **(επαγωγική) τροπική μετάφραση** *είναι μια απεικόνιση* $(\cdot)^{\checkmark}$ *από τύπους σε γραμμικούς τύπους, τέτοια ώστε για ατομικούς τύπους* X *να ισχύει ότι* $X^{\checkmark} = \mu_0 X$, *και επιπλέον*

$$\begin{array}{rcl}
\bot^{\checkmark} & = & \mu_1 C, \text{ με } C \equiv \mathbf{0} \text{ ή } C \equiv \bot \\
\top^{\checkmark} & = & \mu_2 C, \text{ με } C \equiv \top \text{ ή } C \equiv \mathbf{1} \\
(A \to B)^{\checkmark} & = & \mu_3(\mu_4 A^{\checkmark} \circ \mu_5 B^{\checkmark}), \text{ με } \circ \in \{\multimap, \rightsquigarrow\} \\
(A \wedge B)^{\checkmark} & = & \mu_6(\mu_7 A^{\checkmark} \circ \mu_8 B^{\checkmark}), \text{ με } \circ \in \{\otimes, \&\} \\
(A \vee B)^{\checkmark} & = & \mu_9(\mu_{10} A^{\checkmark} \circ \mu_{11} B^{\checkmark}), \text{ με } \circ \in \{\parr, \oplus\} \\
(\forall x A)^{\checkmark} & = & \mu_{12}(\forall x.\mu_{13} A^{\checkmark}) \\
(\exists x A)^{\checkmark} & = & \mu_{14}(\exists x.\mu_{15} A^{\checkmark}) \\
(\forall X A)^{\checkmark} & = & \mu_{16}(\forall X.\mu_{17} A^{\checkmark}) \\
(\exists X A)^{\checkmark} & = & \mu_{18}(\exists X.\mu_{19} A^{\checkmark})
\end{array}$$

για τροπικότητες μ_i $(0 \leq i \leq 19)$, *όπου οι* **τροπικότητες** *είναι ακολουθίες από εκθετικά (ενδεχομένως κενές).*

Μια τροπική μετάφραση $(\cdot)^{\checkmark}$, σε ένα δευτεροβάθμιο σύστημα γραμμικής λογικής, είναι *συμβατή με αντικατάσταση*, αν για οποιουσδήποτε τύπους A, B ισχύει ότι οι τύποι $(A[B/X])^{\checkmark}$ και $A^{\checkmark}[B^{\checkmark}/X]$ ταυτίζονται. Τελικά, εύκολα με επαγωγή αποδεικνύεται το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.0.3. *Μια τροπική μετάφραση είναι συμβατή με αντικατάσταση αν και μόνον αν είναι η ταυτότητα στους ατομικούς τύπους (δηλαδή* μ_0 *είναι μία κενή ακολουθία εκθετικών).*

2.1 Εμφύτευση του IL στο ILL

Η εμφύτευση αυτή, οφείλεται στον Girard και βασίζεται στην τροπική μετάφραση $(\cdot)^*$, η οποία προκύπτει αν θεωρήσουμε τις γραμμικές ερμηνείες των ιντουισιονιστικών τύπων, όπως για παράδειγμα αυτή όπου ο τύπος $A \to B$ αντιστοιχεί στον γραμμικό τύπο $!A \multimap B$.

Ορισμός 2.1.1. (Η μετάφραση του Girard) *Ορίζουμε την απεικόνιση* $(\cdot)^*$ *από τύπους σε γραμμικούς τύπους, ως εξής: για ατομικούς τύπους* X *θέτουμε* $X^* := X$. *Έπειτα θεωρούμε*

$$\begin{array}{rcl}
\bot^* & := & \mathbf{0} \\
(A \wedge B)^* & := & A^* \& B^* \\
(A \vee B)^* & := & !A^* \oplus !B^* \\
(A \to B)^* & := & !A^* \multimap B^* \\
(\forall x A)^* & := & \forall x A^* \\
(\exists x A)^* & := & \exists x !A^*
\end{array}$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το θεώρημα *ορθότητας-πιστότητας* για τη μετάφραση του Girard, που δίνει την εμφύτευση.

Θεώρημα 2.1.2. *$IL \vdash \Gamma \Rightarrow A$ αν και μόνον αν $ILL \vdash !\Gamma^* \Rightarrow A^*$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Η ορθότητα αποδεικνύεται με επαγωγή στο μήκος των αποδείξεων στο λογισμό ακολουθητών IL, παρατηρώντας τον τελευταίο κανόνα της απόδειξης. Δηλαδή:

- Αν $\Gamma \Rightarrow A$ είναι αξίωμα, τότε θα είναι της μορφής $A \Rightarrow A$. Το ζητούμενο έπεται από την εξής απλή απόδειξη στο ILL

$$\dfrac{A^* \Rightarrow A^*}{!A^* \Rightarrow A^*}\,(\mathrm{L!})$$

- Αν ο τελευταίος κανόνας της IL-απόδειξης είναι $L\vee$, δηλαδή

$$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow C \qquad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow C}\,(L\vee)$$

  τότε από την επαγωγική υπόθεση (Ε.Υ.) έχουμε ότι $ILL \vdash !\Gamma^*, !A^* \Rightarrow C^*$ και $ILL \vdash !\Gamma^*, !B^* \Rightarrow C^*$. Επομένως

$$\dfrac{\dfrac{!\Gamma^*, !A^* \Rightarrow C^* \qquad !\Gamma^*, !B^* \Rightarrow C^*}{!\Gamma^*, !A^* \oplus !B^* \Rightarrow C^*}\,(L\oplus)}{!\Gamma^*, !(!A^* \oplus !B^*) \Rightarrow C^*}\,(\mathrm{L!})$$

- Αν ο τελευταίος κανόνας της IL-απόδειξης είναι $R\vee$, δηλαδή

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow B \vee C}\,(R\vee)$$

  τότε

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\text{Ε.Υ.}]}{!\Gamma^* \Rightarrow B^*}}{!\Gamma^* \Rightarrow !B^*}\,(\mathrm{R!}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B^* \Rightarrow B^*}{!B^* \Rightarrow B^*}\,(\mathrm{L!})}{!B^* \Rightarrow !B^*}\,(\mathrm{R!})}{!B^* \Rightarrow !B^* \oplus !C^*}\,(R\oplus_1)}{!\Gamma^* \Rightarrow !B^* \oplus !C^*}\,(\text{τομή})}{!\Gamma^* \Rightarrow !(!B^* \oplus !C^*)}\,(\mathrm{R!})$$

- Ομοίως γίνονται και οι άλλες περιπτώσεις, όπου ο τελευταίος κανόνας στην IL-απόδειξη είναι ένας εκ των $L\wedge$, $R\wedge$, L$\to$, R$\to$, $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$ και $R\exists$.

($\Leftarrow$) Η κατεύθυνση αυτή (πιστότητα) είναι άμεση, καθώς αν θεωρήσουμε τον σκελετό της ILL-απόδειξης του $!\Gamma^* \Rightarrow A^*$, παρατηρούμε ότι είναι μια IL-απόδειξη του $\Gamma \Rightarrow A$. $\square$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η μετάφραση του Girard εξασφαλίζει μία ελαχιστική τροπική μετάφραση της ιντουισιονιστικής στην ιντουισιονιστική γραμμική λογική, με την έννοια ότι κάθε απεικόνιση $(\cdot)^<$ που λαμβάνεται από αυτή, διαγράφοντας ένα ή περισσότερα εκθετικά από αυτά που εμφανίζονται στον Ορισμό 2.1.1, παύει να είναι σωστή. Για παράδειγμα αν διαγράψουμε το ! από την συνεπαγωγή τότε η μετάφραση $\Rightarrow X^< \multimap (X^< \multimap X^<)$, του $\Rightarrow X \to (X \to X)$ (που είναι αποδείξιμο στην IL), δεν αποδεικνύεται στην ILL.

Από την άλλη μεριά, όλες οι απεικονίσεις $(\cdot)^>$ που λαμβάνονται προσθέτοντας εκθετικά, παραμένουν σωστές μεταφράσεις, δηλαδή ο ακολουθητής $\Gamma \Rightarrow A$ είναι αποδείξιμος στην IL αν και μόνον αν ο ακολουθητής $!\Gamma^> \Rightarrow A^>$ είναι αποδείξιμος στην ILL. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Καταρχήν με επαγωγή, εύκολα δείχνουμε ότι για κάθε απεικόνιση $(\cdot)^>$ και καθε τύπο A, ισχύει ότι $ILL \vdash !A^* \Leftrightarrow !A^>$. Οπότε έχουμε ότι: $IL \vdash \Gamma \Rightarrow A$ συνεπάγεται ότι $ILL \vdash !\Gamma^* \Rightarrow A^*$ (Θεώρημα 2.1.2). Τότε στο ILL ισχύει ότι

$$\dfrac{\dfrac{(\forall C \in \Gamma)\, !C^> \Rightarrow !C^* \qquad \dfrac{\dfrac{!\Gamma^* \Rightarrow A^*}{!\Gamma^* \Rightarrow !A^*}\,(\mathrm{R}!) \qquad !A^* \Rightarrow !A^>}{!\Gamma^* \Rightarrow !A^>}\,(\text{τομή})}{!\Gamma^> \Rightarrow !A^>}\,(\text{τομή}) \qquad \dfrac{A^> \Rightarrow A^>}{!A^> \Rightarrow A^>}\,(\mathrm{L}!)}{!\Gamma^> \Rightarrow A^>}\,(\text{τομή})$$

Το αντίστροφο είναι άμεσο, αν θεωρήσουμε το σκελετό της ILL-απόδειξης του $!\Gamma^> \Rightarrow A^>$ (όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2 για την αντίστροφη κατεύθυνση).

Τέλος παρατηρούμε ότι η μετάφραση του Girard απεικονίζει την ιντουισιονιστική σύζευξη, στην προσθετική γραμμική &. Επομένως θα φαινόταν σωστότερο, αν το σύστημα IL είχε ορισθεί με προσθετικούς κανόνες σύζευξης. Ωστόσο είναι εύκολο να ορίσουμε μια μετάφραση που θα αντιστοιχεί την ιντουισιονιστική σύζευξη στο πολλαπλασιαστικό γραμμικό $\otimes$. Αυτή η μετάφραση, έστω $(\cdot)^{*'}$, θα προέκυπτε άμεσα αν είχαμε θεωρήσει το IL με πολλαπλασιαστικούς κανόνες για τη σύζευξη. Τότε το $A \wedge B$ απεικονίζεται στο $!A^{*'} \otimes !B^{*'}$.

2.2 Εμφύτευση του IL στο CLL

Παρατηρώντας τη μετάφραση του Girard (Ορισμός 2.1.1), διαπιστώνουμε ότι ορίζει μια εμφύτευση του IL όχι μόνο στην ιντουισιονιστική, αλλά επίσης και στην κλασική γραμμική λογική. Οπότε μπορούμε και με αυτό τον τρόπο να διαπιστώσουμε ότι το σύστημα CLL είναι κατασκευαστικό. Πρέπει επομένως να επιβεβαιώσουμε ότι το Θεώρημα 2.1.2 ισχύει, αν αντικαταστήσουμε το ILL με το CLL. Η κατεύθυνση της ορθότητας σαφώς και ισχύει (αφού το ILL είναι τμήμα του CLL). Παρ' όλ' αυτά η αντίθετη κατεύθυνση (πιστότητα), λόγω του Θεωρήματος 1.2.1 (το CLL περιέχει τη σταθερά **0**, ενώ το ILL όχι), δεν είναι ξεκάθαρο αν ισχύει. Ωστόσο αν αναλύσουμε τις ιδιότητες των CLL-αποδείξεων, για τους μεταφρασμένους ακολουθητές της μορφής $!\Gamma^* \Rightarrow A^*$, μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει και η πιστότητα.

Καταρχήν ας επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε αποδείξεις ακολουθητών στο τμήμα $\{\mathbf{0}, \&, \oplus, \multimap, \forall, \exists, !\}$ του CLL, το οποίο ας καλούμε $\mathbb{F}$. Έπειτα ορίζουμε επαγωγικά ένα μέτρο ρ για τις αποδείξεις "χωρίς τομές" π, στο τμήμα $\mathbb{F}$, ως εξής:

1. Αν η π είναι ένα στιγμιότυπο κάποιου αξιώματος, τότε $\rho(\pi)$=0.

2. Αν η π λαμβάνεται από την π' με κάποιον κανόνα με μία υπόθεση (unary rule), εκτός των R$\multimap$ και $R\forall$, τότε $\rho(\pi)=\rho(\pi')+1$.

3. Αν η π λαμβάνεται από τις π_1, π_2 με κάποιον από τους κανόνες $L\oplus$, L$\multimap$ τότε $\rho(\pi)=\rho(\pi_1)+\rho(\pi_2)+1$.

4. Αν η π λαμβάνεται από την π' με κάποιον από τους κανόνες R$\multimap$, $R\forall$ τότε $\rho(\pi)=\rho(\pi')$.

5. Αν η π λαμβάνεται από τις π_1, π_2 με χρήση του κανόνα $R\&$ τότε $\rho(\pi)=\rho(\pi_1)$ $+\rho(\pi_2)$.

Επομένως παρατηρούμε ότι το $\rho(\pi)$ απλά μετράει τον αριθμό των εφαρμογών κανόνων στην π, που είναι διαφορετικοί από τους $R\forall$, R$\multimap$ και $R\&$.

Θεωρούμε το συμβολισμό $\vdash_n$, ο οποίος διαβάζεται ως "αποδείξιμο χωρίς τομές από ατομικά αξιώματα $X \Rightarrow X$, με $\rho(\pi) \leq n$". Στη συνέχεια θεωρούμε τη "γραμμική" εκδοχή του λήμματος αντιστροφής (βλ. [TS00]).

Λήμμα 2.2.1. (αντιστροφής) *Ισχύουν τα ακόλουθα*

$$\begin{array}{lll} \vdash_n \Gamma \Rightarrow A \multimap B, \Delta & ανν & \vdash_n \Gamma, A \Rightarrow B, \Delta \\ \vdash_n \Gamma \Rightarrow A\&B, \Delta & ανν & \vdash_n \Gamma \Rightarrow A, \Delta \;\; και \;\; \vdash_n \Gamma \Rightarrow B, \Delta \\ \vdash_n \Gamma \Rightarrow \forall x A, \Delta & ανν & \vdash_n \Gamma \Rightarrow A, \Delta \end{array}$$

(στην τελευταία περίπτωση βέβαια, ικανοποιώντας τους κατάλληλους περιορισμούς για τις μεταβλητές).

Έχουμε πλεον ό,τι χρειάζεται για να διατυπώσουμε την ακόλουθη πρόταση, η οποία προκύπτει ως άμεσο πόρισμα ενός γενικότερου θεωρήματος για το πλήρες CLL (βλ. [Tro92]).

Πρόταση 2.2.2. *Έστω ότι ο ακολουθητής $\Gamma \Rightarrow \Delta$ αποδεικνύεται στο $\mathbb{F}$ (χωρίς τη χρήση τομής) από μία απόδειξη π. Τότε θα υπάρχει μια απόδειξη π' του ακολουθητή $\Gamma \Rightarrow \Delta$, η οποία καταλήγει με μία (πιθανώς κενή) σειρά εφαρμογών των κανόνων $R\forall$, R$\multimap$ και $R\&$, πριν από την οποία προηγείται μία συλλογή από υποαποδείξεις π_i των ακολουθητών $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$, όπου κάθε τύπος στο Δ_i είναι ατομικός ή έχει μία εκ των μορφών $A \oplus B, \exists x A$ ή $!A$. Επιπλέον $\rho(\pi_i) \leq \rho(\pi)$.*

Ορισμός 2.2.3. *Ονομάζουμε ένα μεταφρασμένο ιντουισιονιστικό τύπο* C^* **πρωτογενή** *(primitive) αν είναι είτε ατομικός ή έχει μία από τις μορφές* $!A^* \oplus !B^*$ *ή* $\exists x!A^*$.

Τότε λόγω των παραπάνω το ακόλουθο ισχύει:

Λήμμα 2.2.4. *Έστω ότι υπάρχει μια απόδειξη του*
(α) $!\Gamma^*,\Pi^*\Rightarrow !\Lambda^*$ *ή*
(β) $!\Gamma^*,\Pi^*\Rightarrow !\Lambda^*,B^*$ *, με* B^* *πρωταρχικό τύπο.*
Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η απόδειξη είναι τέτοια ώστε όλοι οι ακολουθητές που έχουν περισσότερους από έναν τύπους στον "επόμενο", έχουν μία από τις μορφές (i) ή (ii):
(i) $!\Sigma^*,\Delta^*\Rightarrow !\Theta^*,A^*$ *, με* $|\Theta|\geq 1$ *και* A^* *πρωταρχικό τύπο.*
(ii) $!\Sigma^*,\Delta^*\Rightarrow !\Theta^*$ *, με* $|\Theta|\geq 2$

Απόδειξη. Με ταυτόχρονη επαγωγή στο $\rho(\pi)$, για αποδείξεις (χωρίς τομές) π της μορφής (α) ή (β).

Αν $\rho(\pi)$=0 τότε τα (α) και (β) είναι αξιώματα και το λήμμα ισχύει τετριμμένα.

Έστω ότι ο αποδείξιμος ακολουθητής είναι της μορφής (α) και ο τελευταίος κανόνας της απόδειξης είναι δεξιός, δηλαδή R! με Π=∅ και |Λ|=1:

$$\frac{!\Gamma^* \Rightarrow D^*}{!\Gamma^* \Rightarrow !D^*}\,(\mathrm{R}!)$$

Τότε, λόγω της Πρότασης 2.2.2, θεωρούμε ότι το $!\Gamma^* \Rightarrow D^*$ προέρχεται μεμονωμένα, μέσω εφαρμογών κανόνων της μορφής $R\forall$, R$\multimap$ και $R\&$, ξεκινώντας από ακολουθητές $!\Gamma_i^* \Rightarrow D_i^*$, με D_i πρωταρχικούς τύπους. Οπότε από την επαγωγική υπόθεση (για το (β)) έπεται το ζητούμενο, καθώς ο τελευταίος κανόνας R! δεν επηρεάζει τον αριθμό των τύπων στο δεξί μέρος του ακολουθητή.

Αν τώρα τελευταίος κανόνας είναι κάποιος από τους αριστερούς, τότε η απόδειξη γίνεται, εφαρμόζοντας άμεσα την επαγωγική υπόθεση, στην υπόθεση του κανόνα. Για παράδειγμα αν τελευταίος κανόνας είναι ο

$$\frac{!\Gamma^*, A^* \Rightarrow !\Delta^*}{!\Gamma^*, A^*\&C^* \Rightarrow !\Delta^*}\,(L\&_1)$$

τότε από την επαγωγική υπόθεση (για το (α)) έπεται το ζητούμενο.

Ομοίως, αν θεωρήσουμε ότι ο αποδείξιμος ακολουθητής έχει τη μορφή (β). □

Χρειαζόμαστε ένα ακόμα λήμμα για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη της εμφύτευσης.

Λήμμα 2.2.5. *Αν ο ακολουθητής* $!\Gamma^* \Rightarrow A^*$ *είναι αποδείξιμος στο CLL, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την απόδειξή του χωρίς τομές και τέτοια ώστε όλες οι εφαρμογές των κανόνων* $R\multimap$ *και* $R\forall$ *να χρησιμοποιούν ακολουθητές με ακριβώς ένα τύπο στον "επόμενο".*

Απόδειξη. Λόγω της Πρότασης 2.2.2, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο ακολουθητής $!\Gamma^* \Rightarrow A^*$ λαμβάνεται με διαδοχικές εφαρμογές των κανόνων $R\forall$, R$\multimap$ και $R\&$, ξεκινώντας από μία συλλογή από ακολουθητές $!\Gamma_i^* \Rightarrow A_i^*$, με A_i πρωταρχικούς τύπους. Από το Λήμμα 2.2.4 μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι στις αποδείξεις των ακολουθητών $!\Gamma_i^* \Rightarrow A_i^*$, όλες οι εμφανίσεις ακολουθητών με περισσότερους από έναν τύπους στον "επόμενο", έχουν είτε τη μορφή (i) είτε τη μορφή (ii). Παρατηρούμε όμως, ότι οι ακολουθητές της μορφής (i) δεν μπορούν να προκύψουν σαν συμπέρασμα των R$\multimap$ ή $R\forall$, διότι στη μορφή (i) υπάρχει πρωταρχικός τύπος, ενώ το $\multimap$ και το $\forall$ δεν είναι σύμβολα που εμφανίζονται σε πρωταρχικούς τύπους. Το ίδιο ισχύει προφανώς και για ακολουθητές της μορφής (ii), καθώς αν προηγείται δεξιός κανόνας, τότε αναγκαστικά θα είναι R!. $\square$

Πλέον μπορούμε να αποδείξουμε και την πιστότητα, για την εμφύτευση της ιντουισιονιστικής λογικής στην κλασική γραμμική λογική, που δημιουργείται από την μετάφραση του Girard.

Θεώρημα 2.2.6. *Η μετάφραση του Girard εμφυτεύει πιστά το σύστημα IL μέσα στο CLL.*

Απόδειξη. Αν ένας ακολουθητής $!\Gamma^* \Rightarrow A^*$ είναι αποδείξιμος στο CLL, τότε από το Λήμμα 2.2.5, υπάρχει μια απόδειξη π χωρίς τομές του ακολουθητή, στην οποία όλες οι εφαρμογές των κανόνων R$\multimap$ και $R\forall$ περιλαμβάνουν ακολουθητές με ακριβώς ένα τύπο στον "επόμενο". Οπότε ο σκελετός της π είναι μια απόδειξη στο σύστημα GTi (σύστημα του Takeuti), το οποίο είναι όπως το CL, αλλά με τη διαφορά ότι στους κανόνες R$\rightarrow$ και $R\forall$ επιτρέπεται το πολύ ένας τύπος στον "επόμενο" του κάθε ακολουθητή. Τότε επειδή ισχύει ότι

$$GTi \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \iff IL \vdash \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$$

(βλ. [Tro92]), έπεται ότι ο ακολουθητής $\Gamma \Rightarrow A$ είναι αποδείξιμος στο σύστημα IL. $\square$

2.3 Εμφύτευση του CL στο CLL

Σύμφωνα και με όσα αναφέραμε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου, παρατηρούμε ότι η μετάφραση του Girard, που εμφυτεύει την ιντουισιονιστική στη γραμμική λογική, βασίζεται σε μία αποσύνθεση των ιντουισιονιστικών συνδέσμων (για παράδειγμα η συνεπαγωγή $A \rightarrow B$ γίνεται $!A \multimap B$). Με τον ίδιο τρόπο σκεπτόμενοι οι Danos, Joinet και Schellinx, κατασκεύασαν τροπικές μεταφράσεις που να εμφυτεύουν την κλασική λογική στη γραμμική λογική. Σε αντίθεση με την ιντουισιονιστική λογική όμως, δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποια μοναδική βέλτιστη μετάφραση (όπως δηλαδή την μετάφραση του Girard για την ιντουισιονιστική λογική). Σημειωτέον ότι αυτές οι μεταφράσεις θα μας δώσουν την αφορμή, για την κατασκευή άλλων μεταφράσεων (κατά μία έννοια πιο ισχυρών), οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο για την εξαγωγή σημαντικών αποτελεσμάτων για την κλασική λογική.

Έστω μια υποψήφια τροπική μετάφραση $(\cdot)^{*'}$ η οποία ερμηνεύει την κλασική συνεπαγωγή $A \to B$ με $!A \multimap ?B$ και αφήνει τους ατομικούς τύπους ως έχουν ($X^{*'} := X$). Παρατηρούμε ότι η $(\cdot)^{*'}$ δεν εμφυτεύει σωστά την κλασική λογική (ούτε την ιντουισιονιστική) στην γραμμική λογική, διότι υπάρχουν ιντουισιονιστικά θεωρήματα Φ των οποίων η μετάφραση $(\Phi)^{*'}$ δεν αποδεικνύεται στη γραμμική λογική. Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου Φ είναι ο ακολουθητής $\Rightarrow ((X \to Y) \to X) \to ((X \to Y) \to Y)$. Όπως βλέπουμε στην απόδειξη

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{X \Rightarrow X \quad Y \Rightarrow Y}{X \to Y, X \Rightarrow Y}}{X \to Y \Rightarrow X \to Y} \quad Y \Rightarrow Y}{(X \to Y) \to Y, X \to Y \Rightarrow Y}}{(X \to Y) \to Y \Rightarrow (X \to Y) \to Y}}{\Rightarrow ((X \to Y) \to Y) \to (X \to Y) \to Y}$$

είναι αποδείξιμος στο IL, αλλά η μετάφρασή του $\Rightarrow !(!(!X \multimap ?Y) \multimap ?X) \to ?(!(!X \to ?Y) \to ?Y)$ δεν αποδεικνύεται στο CLL, αφού ψάχνοντας από κάτω προς τα πάνω για μια απόδειξη, πάντα δημιουργείται κάποιο πρόβλημα. Για παράδειγμα:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{!X \not\Rightarrow ?Y}{\Rightarrow !X \multimap ?Y}}{\Rightarrow !(!X \multimap ?Y)} \quad ?X \not\Rightarrow !X}{!(!X \multimap ?Y) \multimap ?X \Rightarrow !X} \quad ?Y \Rightarrow ?Y}{!(!X \multimap ?Y) \multimap ?X, !X \multimap ?Y \Rightarrow ?Y}}{!(!X \multimap ?Y) \multimap ?X, !(!X \multimap ?Y) \Rightarrow ?Y}}{!(!(!X \multimap ?Y) \multimap ?X), !(!X \multimap ?Y) \Rightarrow ?Y}}{!(!(!X \multimap ?Y) \multimap ?X) \Rightarrow !(!X \multimap ?Y) \multimap ?Y}}{!(!(!X \multimap ?Y) \multimap ?X) \Rightarrow ?(!(!X \multimap ?Y) \multimap ?Y)}}{\Rightarrow !(!(!X \multimap ?Y) \multimap ?X) \multimap ?(!(!X \multimap ?Y) \multimap ?Y)}$$

Συνεχίζοντας τη διερεύνηση οδηγούμαστε τελικά σε δύο υποψήφιες μεταφράσεις της κλασικής λογικής. Η μία μετάφραση ονομάζεται *T-μετάφραση* και βασίζεται στην γραμμική αποσύνθεση του $A \to B$ σε $!?A \multimap ?B$. Η άλλη, είναι η *Q-μετάφραση* η οποία μεταφράζει το $A \to B$ στο $!A \multimap ?!B$. Τα T και Q προέρχονται από τα αρχικά των λέξεων "téte" (κεφαλή) και "queue"(ουρά) και έχουν άμεση σχέση με τα κλασικά συστήματα LKT και LKQ με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια.

Παρατήρηση: Οι μεταφράσεις Q και T οφείλονται στους Danos, Joinet και Schellinx, οι οποίοι από το 1993 έως και το 2000 δημοσίευσαν μια σειρά από εργασίες, στις οποίες ασχολούνται με τις εμφυτεύσεις της λογικής στη

Q	πολλαπλασιαστικοί	προσθετικοί
$(A \to B)^Q$	$!A^Q \multimap ?!B^Q$	$?!A^Q \leadsto !B^Q$
$(A \wedge B)^Q$	$!A^Q \otimes !B^Q$	$?!A^Q \& ?!B^Q$
$(A \vee B)^Q$	$?!A^Q \parr ?!B^Q$	$!A^Q \oplus !B^Q$
$(\forall X A)^Q$	$\forall X ?!A^Q$	$\forall X ?!A^Q$
$(\exists X A)^Q$	$\exists X !A^Q$	$\exists X !A^Q$

T	πολλαπλασιαστικοί	προσθετικοί
$(A \to B)^T$	$!?A^T \multimap ?B^T$	$?A^T \leadsto !?B^T$
$(A \wedge B)^T$	$!?A^T \otimes !?B^T$	$?A^T \& ?B^T$
$(A \vee B)^T$	$?A^T \parr ?B^T$	$!?A^T \oplus !?B^T$
$(\forall X A)^T$	$\forall X ?A^T$	$\forall X ?A^T$
$(\exists X A)^T$	$\exists X !?A^T$	$\exists X !?A^T$

Σχήμα 2.1: Η Q- και T-μετάφραση.

γραμμική λογική και τα αποτελέσματά τους. Στο εξής σκοπεύω να παρουσιάσω ακριβώς ένα μέρος από αυτές τις εργασίες.

Στο Σχήμα 2.1 βρίσκονται και οι μεταφράσεις Q και T[1]. Μάλιστα για κάθε μετάφραση δίνονται και οι δύο εκδοχές που προκύπτουν, ανάλογα με το αν κάποιος χρησιμοποιεί τους κλασικούς πολλαπλασιαστικούς συνδέσμους ή αντίστοιχα τους κλασικούς προσθετικούς. Επιπλέον πρέπει να προσθέσουμε ότι για τους ατομικούς τύπους X, ισχύει ότι $X^Q := X$ και $X^T := X$ (συμπεριλαμβάνοντας τα $\top$, $\bot$).

Το εξής θεώρημα, δίνει τις αντίστοιχες εμφυτεύσεις της κλασικής λογικής, στην κλασική γραμμική λογική.

Θεώρημα 2.3.1. *Οι T- και Q-απεικονίσεις είναι ορθές και πιστές εμφυτεύσεις της κλασικής λογικής στην κλασική γραμμική λογική. Δηλαδή ισχύει ότι:*

$$CLL \vdash !\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q \quad \textit{ανν} \quad CL \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \textit{ανν} \quad CLL \vdash !?\Gamma^T \Rightarrow ?\Delta^T.$$

Απόδειξη. Η πιστότητα είναι τετριμμένη και για τις δύο μεταφράσεις, αφού ο σκελετός κάθε γραμμικής απόδειξης ενός μεταφρασμένου τύπου A είναι μια σωστή απόδειξη στην κλασική λογική. Για να δείξουμε την ορθότητα και για τις δύο μεταφράσεις, χρησιμοποιούμε επαγωγή στο μήκος των $\mathrm{C}_p^2\mathrm{L}$-αποδείξεων[2] (με πολλαπλασιαστικούς λογικούς κανόνες για την περίπτωση των πολλαπλασιαστικών μεταφράσεων, και αντίστοιχα προσθετικούς για την προσθετική εκδοχή) και αποδεικνύουμε ότι αν ο ακολουθητής $\Gamma \Rightarrow \Delta$ απο-

[1] Από εδώ και στο εξής επικεντρώνουμε την προσοχή μας στο *δευτεροβάθμιο* προτασιακό τμήμα των συστημάτων λογικής που χρησιμοποιούμε. Εύκολα κάποιος μπορεί να ορίσει ό,τι χρειάζεται, για την εισαγωγή και των πρωτοβάθμιων ποσοδεικτών.

[2] βλ. τις Παρατηρήσεις του Παράρτηματος Β

δεικνύεται στο $\mathrm{C}^2_p\mathrm{L}$, τότε στο $\mathrm{C}^2_p\mathrm{LL}$[3] αποδεικνύονται οι (1) $!\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q$ και (2) $!?\Gamma^T \Rightarrow ?\Delta^T$. Ας δούμε κάποιες χαρακτηριστικές περιπτώσεις για την περίπτωση (1).

- Αν $\Gamma \Rightarrow \Delta$ είναι αξίωμα τότε θα είναι της μορφής $A \Rightarrow A$ οπότε

$$\dfrac{\dfrac{A^Q \Rightarrow A^Q}{\overline{!A^Q \Rightarrow !A^Q}}\,(\mathrm{L!})(\mathrm{R!})}{!A^Q \Rightarrow ?!A^Q}\,(\mathrm{R?})$$

- Αν τελευταίος κανόνας της κλασικής απόδειξης είναι ο

$$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\,(L\wedge_1)$$

  τότε από την επαγωγική υπόθεση, στο $\mathrm{C}^2_p\mathrm{LL}$ αποδεικνύεται ο ακολουθητής $!\Gamma^Q, !A^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q$. Οπότε για τις αντίστοιχες δύο εκδοχές (πολλαπλασιαστική/προσθετική) έχουμε:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{!\Gamma^Q, !A^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q}{!\Gamma^Q, !A^Q, !B^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q}\,(\mathrm{W!})}{!\Gamma^Q, !A^Q \otimes !B^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q}\,(L\otimes)}{!\Gamma^Q, !(!A^Q \otimes !B^Q) \Rightarrow ?!\Delta^Q}\,(\mathrm{L!}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{!\Gamma^Q, !A^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q}{!\Gamma^Q, ?!A^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q}\,(\mathrm{L?})}{!\Gamma^Q, ?!A^Q \& ?!B^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q}\,(L\&)}{!\Gamma^Q, !(?!A^Q \& ?!B^Q) \Rightarrow ?!\Delta^Q}\,(\mathrm{L!})$$

- Αν τελευταίος κανόνας της κλασικής απόδειξης είναι ο

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta}\,(R\wedge)$$

  τότε από την επαγωγική υπόθεση, στο $\mathrm{C}^2_p\mathrm{LL}$ αποδεικνύονται οι ακολουθητές $!\Gamma^Q \Rightarrow ?!A^Q, ?!\Delta^Q$ και $!\Gamma^Q \Rightarrow ?!B^Q, ?!\Delta^Q$. Οπότε για την πολλαπλασιαστική εκδοχή έχουμε:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{!\Gamma^Q \Rightarrow ?!A^Q, ?!\Delta^Q}{!\Gamma^Q \Rightarrow !?!A^Q, ?!\Delta^Q}\,(\mathrm{R!}) \qquad !\Gamma^Q \Rightarrow ?!B^Q, ?!\Delta^Q}{!\Gamma^Q, !\Gamma^Q \Rightarrow !?!A^Q \otimes ?!B^Q, ?!\Delta^Q, ?!\Delta^Q}\,(R\otimes)}{\overline{!\Gamma^Q \Rightarrow !?!A^Q \otimes ?!B^Q, ?!\Delta^Q}}\,(\mathrm{C!})(\mathrm{C?})$$

  και εφαρμόζουμε τον κανόνα τομής με την απόδειξη

[3]βλ. τις Παρατηρήσεις του Παραρτήματος D

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A^Q \Rightarrow A^Q}{!A^Q \Rightarrow !A^Q}\,(\mathrm{L}!)(\mathrm{R}!) \qquad \cfrac{B^Q \Rightarrow B^Q}{!B^Q \Rightarrow !B^Q}\,(\mathrm{L}!)(\mathrm{R}!)}{!A^Q, !B^Q \Rightarrow !A^Q \otimes !B^Q}\,(R\otimes)}{!A^Q, !B^Q \Rightarrow !(!A^Q \otimes !B^Q)}\,(\mathrm{R}!)}{!A^Q, !B^Q \Rightarrow ?!(!A^Q \otimes !B^Q)}\,(\mathrm{R}?)}{?!A^Q, !B^Q \Rightarrow ?!(!A^Q \otimes !B^Q)}\,(\mathrm{L}?)}{!?!A^Q, !B^Q \Rightarrow ?!(!A^Q \otimes !B^Q)}\,(\mathrm{L}!)}{!?!A^Q, ?!B^Q \Rightarrow ?!(!A^Q \otimes !B^Q)}\,(\mathrm{L}?)}{!?!A^Q \otimes ?!B^Q \Rightarrow ?!(!A^Q \otimes !B^Q)}\,(L\otimes)
$$

οπότε λαμβάνουμε μια απόδειξη του $!\Gamma^Q \Rightarrow !?(!A^Q \otimes !B^Q), ?!\Delta^Q$, που είναι και το ζητούμενο.

Για την προσθετική εκδοχή έχουμε:

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{!\Gamma^Q \Rightarrow ?!A^Q, ?!\Delta^Q \qquad !\Gamma^Q \Rightarrow ?!B^Q, ?!\Delta^Q}{!\Gamma^Q \Rightarrow ?!A^Q \& ?!B^Q, ?!\Delta^Q}\,(R\&)}{!\Gamma^Q \Rightarrow !(?!A^Q \& ?!B^Q), ?!\Delta^Q}\,(\mathrm{R}!)}{!\Gamma^Q \Rightarrow ?!(?!A^Q \& ?!B^Q), ?!\Delta^Q}\,(\mathrm{R}?)
$$

Παρατηρούμε επομένως, ότι χρειαζόμαστε την αποδειξιμότητα κάποιων ακολουθητών στην γραμμική λογική, όπως για παράδειγμα του ακολουθητή $!?!A \otimes ?!B \Rightarrow ?!(!A \otimes !B)$ που είδαμε πριν. Επιπλέον για την απόδειξη του (1) χρησιμοποιούμε την αποδειξιμότητα των

$$
\begin{array}{rcl}
!(!A \multimap ?!B) & \Rightarrow & ?!A \multimap ?!B \\
?!A \leadsto ?!B & \Rightarrow & ?!(?!A \leadsto !B) \\
?!A_i & \Rightarrow & ?!(!A_1 \oplus !A_2) \quad (i = 1, 2) \\
\exists X ?!A & \Rightarrow & ?!\exists X\, !A
\end{array}
$$

ενώ για την απόδειξη του (2), την αποδειξιμότητα των

$$
\begin{array}{rcl}
!?(!?A \multimap ?B) & \Rightarrow & !?A \multimap !?B \\
!?A \leadsto !?B & \Rightarrow & ?(?A \leadsto !?B) \\
!?(?A \parr ?B) & \Rightarrow & !?A \parr ?!?B \\
!?(?A_1 \& ?A_2) & \Rightarrow & !?A_i \quad (i = 1, 2) \\
!?\forall X ?A & \Rightarrow & \forall X\, !?A
\end{array}
$$

□

Συμπεραίνουμε επομένως, ότι ένας τύπος A είναι κλασικό θεώρημα, αν και μόνον αν οι $?!A^Q$ και $?A^T$ είναι γραμμικά θεωρήματα.

Στο μέρος που παρατέθηκε, για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1, είδαμε πως είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε την αποδειξιμότητα, στην κλασική γραμμική λογική, του ακολουθητή $!?!A \otimes ?!B \Rightarrow ?!(!A \otimes !B)$. Ομοίως αν αναλύαμε την περίπτωση όπου τελευταίος κανόνας της κλασικής απόδειξης είναι ο $L\vee$, θα χρειαζόμασταν την αποδειξιμότητα του ακολουθητή $!?(?A \parr ?B) \Rightarrow !?A \parr ?!?B$, για την απόδειξη του (2), στην πολλαπλασιαστική εκδοχή. Παρ' όλ' αυτά, αντί να χρησιμοποιήσουμε την αποδειξιμότητα στην κλασική γραμμική λογική, αυτών των ακολουθητών, θα μπορούσαμε να έχουμε χρησιμοποιήσει την αποδειξιμότητα αντίστοιχα των $?!A \otimes !?!B \Rightarrow ?!(!A \otimes !B)$ και $!?(?A \parr ?B) \Rightarrow ?!?A \parr !?B$. Στην πρώτη περίπτωση για παράδειγμα (βλ. απόδειξη Θεωρήματος 2.3.1) θα είχαμε ότι, αν στην απόδειξη

$$\dfrac{\dfrac{!\Gamma^Q \Rightarrow ?!A^Q, ?!\Delta^Q \qquad \dfrac{!\Gamma^Q \Rightarrow ?!B^Q, ?!\Delta^Q}{!\Gamma^Q \Rightarrow !?!B^Q, ?!\Delta^Q}\,(\mathrm{R}!)}{!\Gamma^Q, !\Gamma^Q \Rightarrow ?!A^Q \otimes !?!B^Q, ?!\Delta^Q, ?!\Delta^Q}\,(R\otimes)}{!\Gamma^Q \Rightarrow ?!A^Q \otimes !?!B^Q, ?!\Delta^Q}\,(\mathrm{LC})(\mathrm{RC})$$

εφαρμόσουμε τον κανόνα τομής, με την απόδειξη του ακολουθητή $?!A^Q \otimes !?!B \Rightarrow ?!(!A^Q \otimes !B^Q)$, τότε πάλι λαμβάνουμε μια απόδειξη του ακολουθητή $!\Gamma^Q \Rightarrow !?(!A^Q \otimes !B^Q), ?!\Delta^Q$, που είναι και το ζητούμενο.

Με άλλα λόγια, υπάρχουν δύο τρόποι να παράγουμε, χωρίς τη χρήση της τομής, τους ακολουθητές $!?!A \otimes !?!B \Rightarrow ?!(!A \otimes !B)$ και $!?(?A \parr ?B) \Rightarrow ?!?A \parr ?!?B$. Επομένως για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1 παρουσιάζεται αυτό το είδος *διλήμματος*, δηλαδή σε αυτές τις δύο περιπτώσεις, πρέπει να επιλέξουμε μία από τις δύο σωστές εκδοχές που προχωρούν την επαγωγή. Αυτού του είδους η επιλογή, κάθε άλλο παρά αθώα μπορεί να χαρακτηριστεί, καθώς σχετίζεται άμεσα με τον *μη ντετερμινισμό* του θεωρήματος απαλοιφής της τομής για την κλασική λογική! Όμως σε αυτό θα επανέλθουμε αργότερα στην παράγραφο 3.3.

Κεφάλαιο 3

Διακοσμήσεις

Στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου αναφέραμε ότι οι μεταφράσεις Q και T της κλασικής λογικής θα μας δώσουν το έναυσμα για την κατασκευή "ισχυρότερων"[1] μεταφράσεων, έτσι ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γραμμική λογική ως εργαλείο, για την εξαγωγή συμπερασμάτων στην κλασική λογική.

Για να το επιτύχουμε αυτό πρέπει να σκεφτούμε ως εξής. Θα θέλαμε κάθε κλασική (ή ιντουισιονιστική) απόδειξη π, να μπορούμε να την μεταφράσουμε στην γραμμική λογική με τέτοιο τρόπο ώστε άμεσα να ανακτάμε την αρχική απόδειξη π (θεωρώντας το σκελετό της μεταφρασμένης απόδειξης). Δηλαδή θέλουμε τις γραμμικές αποδείξεις να τις θεωρούμε ως "επενδυμένες"[2] ιντουισιονιστικές ή κλασικές αποδείξεις. Οι μεταφράσεις που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο δεν ικανοποιούν αυτή την ιδιότητα (βλ. παραγράφους 3.1 και 3.2). Γι' αυτό θα αναζητήσουμε κάποιες άλλες μεταφράσεις (πληθωρικές), οι οποίες θα παίξουν ουσιαστικό ρόλο στην απόδειξη σημαντικών ιδιοτήτων της κλασικής λογικής (π.χ. ισχυρή κανονικοποίηση συστημάτων κλασικής λογικής).

Ειδικότερα, στο κεφάλαιο αυτό, θα επαληθεύσουμε το ισχυρό επιχείρημα: *δοθείσης μιας κλασικής ή ιντουισιονιστικής απόδειξης π, μπορούμε πάντα να "επενδύσουμε την π" με τέτοιο τρόπο ώστε το αποτέλεσμα να είναι μια γραμμική απόδειξη $\delta(\pi)$, της οποίας ο σκελετός να είναι η π.*

Ορισμός 3.0.1. *Μια* **διακόσμηση**, *μιας (κλασικής, ιντουισιονιστικής) απόδειξης π, είναι κάθε γραμμική απόδειξη $\delta(\pi)$ τέτοια ώστε $sk(\delta(\pi))=\pi$. Επιπλέον, καλούμε* **στρατηγική διακόσμησης** *για ένα δοσμένο λογισμό ακολουθητών, την ομοιόμορφη διαδικασία (αλγόριθμο) που εξάγει μια διακόσμηση για κάθε δοσμένη απόδειξη στο λογισμό.*

[1] Θεωρούμε μια μετάφραση "ισχυρότερη" από κάποια άλλη, με την έννοια ότι είναι πιο πληθωρική (δηλαδή τοποθετεί περισσότερα εκθετικά στους μεταφρασμένους ακολουθητές) και επιπλέον χρησιμοποιώντας τη λαμβάνουμε περισσότερα αποτελέσματα.

[2] Δηλαδή μεταφρασμένες με την κατάλληλη (πληθωρική) μετάφραση.

Με τον ίδιο τρόπο που κάνουμε για τις αποδείξεις, αναφερόμαστε επίσης και στο **σκελετό** ενός γραμμικού τύπου A, $sk(A)$. Ο τύπος $sk(A)$ προκύπτει από τον γραμμικό τύπο A, διαγράφοντας όλα τα εκθετικά και επιπλέον αντικαθιστώντας τους γραμμικούς του συνδέσμους με τους αντίστοιχους μη-γραμμικούς. Αντιστρόφως, ορίζουμε τις διακοσμήσεις τύπων ως εξής:

Ορισμός 3.0.2. *Η $\delta(A)$ είναι μια* **γραμμική διακόσμηση** *του A, αν λαμβάνεται αντικαθιστώντας τους κλασικούς (ιντουισιονιστικούς) συνδέσμους με τους αντίστοιχους γραμμικούς, και επιπλέον προτάσσοντας σε υποτύπους του A τροπικότητες (ακολουθίες από ! και ?).*

Για παράδειγμα οι $!?!!A \otimes B$ και $A\&?B$ είναι γραμμικές διακοσμήσεις του $A \wedge B$. Παρατηρούμε ακόμα ότι για κάθε τροπική μετάφραση $(\cdot)^{\checkmark}$ ισχύει ότι $sk((A)^{\checkmark}) = A$.

Τέλος για γραμμικούς τύπους A, καλούμε τον τύπο $\delta(A)$, που λαμβάνεται προτάσσοντας σε υποτύπους του A τροπικότητες, διακόσμηση του A. Προφανώς ο αριθμός των διαφορετικών διακοσμήσεων ενός δοσμένου τύπου είναι άπειρος. Ωστόσο μπορούμε να τοποθετήσουμε όλες τις δυνατές τροπικότητες (modalities) σε επτά κλάσεις ισοδυναμίας, μέσω της σχέσης ($\mu \leq \nu$ ανν CLL$\vdash \mu A \Rightarrow \nu A$ για κάθε A), όπου τα μ και ν είναι τροπικότητες. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε (μέσω αυτής της διαπίστωσης) τον αριθμό των διαφορετικών διακοσμήσεων ενός δοσμένου τύπου πεπερασμένο και επιπλέον να παρατηρήσουμε ότι η πολλαπλότητα διαφορετικών διακοσμήσεων, παίζει ρόλο στη δυναμική των αποδείξεων (βλ. [Sch94]).

3.1 Επαγωγική στρατηγική διακόσμησης για το IL

Σε αυτή την παράγραφο, θα ασχοληθούμε με τον τρόπο, με τον οποίο μπορεί κάποιος να παράγει διακοσμήσεις ιντουισιονιστικών και κλασικών αποδείξεων. Μία καλή λύση λοιπόν, είναι να μετασχηματίσουμε μια δοσμένη απόδειξη π σε μια γραμμική απόδειξη $\delta(\pi)$, εφαρμόζοντας επαγωγικά μια τροπική μετάφραση στους ακολουθητές που εμφανίζονται στην π.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω μια τροπική μετάφραση $(\cdot)^{\checkmark}$ και μ, ν δοσμένες τροπικότητες. Η τριάδα $\langle(\cdot)^{\checkmark}, \mu, \nu\rangle$ καθορίζει μια* **επαγωγική στρατηγική διακόσμησης (ε.σ.δ.)** *για ένα λογισμό ακολουθητών S αν*

1. *για όλα τα S-αξιώματα $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ισχύει ότι, ο ακολουθητής $\mu\Gamma^{\checkmark} \Rightarrow \nu\Delta^{\checkmark}$ είναι ένα CLL-αξίωμα ή λαμβάνεται από κάποιο CLL-αξίωμα εφαρμόζοντας μια σειρά από συμφραστικούς και/ή αμέλειας, εκθετικούς κανόνες (ενδεχομένως η σειρά εφαρμογών να είναι κενή).*

2. *για όλους τους S-κανόνες με συμπέρασμα $\Gamma \Rightarrow \Delta$ και υποθέσεις $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$, μπορούμε να παράγουμε τον ακολουθητή $\mu\Gamma^{\checkmark} \Rightarrow \nu\Delta^{\checkmark}$ στην γραμμική λογική, ξεκινώντας από τους ακολουθητές $\mu\Gamma_i^{\checkmark} \Rightarrow \nu\Delta_i^{\checkmark}$ και εφαρ-*

> *μόζοντας τον αντίστοιχο CLL-κανόνα, του οποίου ενδεχομένως να προηγείται και/ή να έπεται μια σειρά (ενδεχομένως κενή) από εφαρμογές εκθετικών συμφραστικών και/ή αμέλειας κανόνων.*

Επομένως, από τον ορισμό, συμπεραίνουμε ότι αν $\langle (\cdot)^{\checkmark}, \mu, \nu \rangle$ είναι μια ε.σ.δ. για ένα λογισμό ακολουθητών S, τότε για κάθε S-απόδειξη π ενός ακολουθητή $\Gamma \Rightarrow \Delta$, μπορούμε να εφαρμόσουμε επαγωγικά τη μετάφραση $(\cdot)^{\checkmark}$ στην π (δηλαδή μεταφράζουμε έναν προς έναν τους ακολουθητές ξεκινώντας από τα αξιώματα και έναν προς έναν τους τύπους ξεκινώντας από τους ατομικούς) και να παράγουμε τον ακολουθητή $\mu\Gamma^{\checkmark} \Rightarrow \nu\Delta^{\checkmark}$με μια απόδειξη $\pi^{\checkmark}$, η οποία είναι διακόσμηση της αρχικής π.

Όπως φαίνεται και μέσω των αποδείξεων των Θεωρημάτων 2.1.2 και 2.3.1, ούτε η μεταφράση του Girard για την ιντουισιονιστική λογική, ούτε οι μεταφράσεις Q και T για την κλασική, είναι μεταφράσεις που δίνουν διακοσμήσεις. Με άλλα λόγια οι τριάδες $\langle (\cdot)^*, !, \cdot \rangle$, $\langle (\cdot)^Q, !, ?! \rangle$ και $\langle (\cdot)^T, !?, ? \rangle$ δεν ορίζουν ε.σ.δ. για τα IL και CL. Αυτό συμβαίνει γιατί με την επαγωγική εφαρμογή αυτών των μεταφράσεων, γενικά δημιουργούνται τομές σε αρκετά σημεία, με αποτέλεσμα αν θεωρήσουμε το σκελετό της μεταφρασμένης απόδειξης, να μην συμπίπτει με την αρχική απόδειξη. Επιπλέον ισχύει κάτι *ισχυρότερο: ακόμα και αν απαλείψουμε τις τομές που δημιουργούνται ("τομές διόρθωσης") και έπειτα θεωρήσουμε το σκελετό, πάλι αυτός δεν συμπίπτει με την αρχική απόδειξη.* Ας δούμε όμως ένα παράδειγμα για την ιντουισιονιστική περίπτωση. Έστω η ιντουισιονιστική απόδειξη:

$$\dfrac{C \Rightarrow C \qquad \dfrac{A \Rightarrow A}{B, A \Rightarrow A}\,(\mathrm{W})}{C, C \to B, A \Rightarrow A}\,(\mathrm{L}{\to})$$

Εφαρμόζουμε επαγωγικά τη μετάφραση του Girard και εισάγουμε τις απαραίτητες "τομές διόρθωσης" για τον αριστερό κανόνα συνεπαγωγής:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{C^* \Rightarrow C^*}{!C^* \Rightarrow C^*}\,(\mathrm{L!})}{!C^* \Rightarrow !C^*}\,(\mathrm{R!}) \qquad B^* \Rightarrow B^*}{!C^*, !C^* \multimap B^* \Rightarrow B^*}\,(\mathrm{L}{\multimap})}{!C^*, !(!C^* \multimap B^*) \Rightarrow B^*}\,(\mathrm{L!})}{!C^*, !(!C^* \multimap B^*) \Rightarrow !B^*}\,(\mathrm{R!})}{!(!C^* \multimap B^*) \Rightarrow !C^* \multimap !B^*}\,(\mathrm{R}{\multimap}) \qquad \dfrac{\dfrac{C^* \Rightarrow C^*}{!C^* \Rightarrow !C^*}\,(\mathrm{L!}),(\mathrm{R!}) \qquad \dfrac{\dfrac{A^* \Rightarrow A^*}{!A^* \Rightarrow A^*}\,(\mathrm{L!})}{!B^*, !A^* \Rightarrow A^*}\,(\mathrm{W!})}{!C^*, !C^* \multimap !B^*, !A^* \Rightarrow A^*}\,(\mathrm{L}{\multimap})}{!C^*, !(!C^* \multimap B^*), !A^* \Rightarrow A^*}\,(\text{τομή})$$

η οποία απαλείφοντας την τομή της, βάσει του γραμμικού αλγόριθμου κανονικοποίησης ανάγεται στην:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A^* \Rightarrow A^*}{!A^* \Rightarrow A^*}\,(\mathrm{L!})}{!C^*, !A^* \Rightarrow A^*}\,(\mathrm{W!})}{!C^*, !(!C^* \multimap B^*), !A^* \Rightarrow A^*}\,(\mathrm{W!})$$

της οποίας ο σκελετός είναι:

$$\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A}{C, A \Rightarrow A}\,(\mathrm{LW})}{C, C \to B, A \Rightarrow A}\,(\mathrm{LW})$$

που διαφέρει από την αρχική απόδειξη. Παρ' όλ' αυτά αν στην τελευταία αυτή απόδειξη, εφαρμόσουμε την μετάφραση Girard τότε θα λάβουμε μία διακόσμηση. Το γεγονος αυτό δεν είναι τυχαίο, αλλά είναι μια γενική ιδιότητα. Δηλαδή για κάθε ιντουισιονιστική απόδειξη π, αν τη μετασχηματίσουμε με την μετάφραση Girard και απαλείψουμε τις "τομές διόρθωσης" (λαμβάνοντας έτσι την $\pi^{*-\tau o\mu\varepsilon\varsigma}$) και θεωρήσουμε το σκελετό αυτής της μεταφρασμένης απόδειξης ($sk(\pi^{*-\tau o\mu\varepsilon\varsigma})$) που είναι μια ιντουισιονιστική απόδειξη (συγκεκριμένα μια απόδειξη στο ILU, βλ. παράγραφο 3.2), τότε για την $sk(\pi^{*-\tau o\mu\varepsilon\varsigma})$ η μετάφραση Girard δίνει διακόσμηση [Sch94].

Γενικά μπορούμε να παρατηρήσουμε οτι οι εμφυτεύσεις για τις μεταφράσεις που ήδη αναφέραμε, δεν είναι ε.σ.δ. εξαιτίας του ότι χρησιμοποιούν λίγα εκθετικά. Αν προσπαθήσουμε, για παράδειγμα για την ιντουισιονιστική λογική, να μεταφράσουμε τους τύπους χρησιμοποιώντας περισσότερα ! τότε γρήγορα μπορούμε να βρούμε μια τροπική μετάφραση που να εμφυτεύει την ιντουισιονιστική στη γραμμική λογική και να ορίζει ε.σ.δ.. Γι' αυτό το λόγο καλούμε τις μεταφράσεις αυτές **πληθωρικές**. Συγκεκριμένα θα τοποθετήσουμε ! στους τύπους για τους οποίους δεν τοποθετούσε ! η μετάφραση Girard (δηλαδή στους A και B για τους συνδέσμους $\wedge$ και $\forall$, και στο B για το σύνδεσμο $\to$).

Επομένως, ας θεωρήσουμε τη δευτεροβάθμια ιντουισιονιστική προτασιακή λογική I_p^2L, με προσθετικούς κανόνες για τη σύζευξη και τη διάζευξη.

Ορισμός 3.1.2. *Ορίζουμε την απεικόνιση $(\cdot)^{\circledast}$, από τύπους σε γραμμικούς τύπους ως εξής: για ατομικούς τύπους X, θέτουμε $X^{\circledast} :=X$. Επιπλέον θεωρούμε:*

$$\begin{array}{rcl}
\perp^{\circledast} & := & \mathbf{0} \\
(A \wedge B)^{\circledast} & := & !A^{\circledast}\&!B^{\circledast} \\
(A \vee B)^{\circledast} & := & !A^{\circledast} \oplus !B^{\circledast} \\
(A \to B)^{\circledast} & := & !A^{\circledast} \multimap !B^{\circledast} \\
(\forall X A)^{\circledast} & := & \forall X !A^{\circledast} \\
(\exists X A)^{\circledast} & := & \exists X !A^{\circledast}
\end{array}$$

Παρατήρηση: Η $(\cdot)^{\circledast}$-μετάφραση, μεταφράζοντας τους λογικούς συνδέσμους, τοποθετεί επιπλέον ! στους τύπους για τους οποίους δεν τοποθετούσε

! η μετάφραση του Girard. Δηλαδή στους A^* και B^* για το $\wedge$, στον B^* για το $\rightarrow$, και στον A^* για το $\forall$.

Έπεται το θεώρημα *ορθότητας-πιστότητας*.

Θεώρημα 3.1.3. *$I_p^2L \vdash \Gamma \Rightarrow A$ αν και μόνον αν $I_p^2LL \vdash !\Gamma^{\circledast} \Rightarrow A^{\circledast}$.*

Απόδειξη. Η πιστότητα έπεται άμεσα, θεωρώντας τον σκελετό της I_p^2LL-απόδειξης. Η ορθότητα αποδεικνύεται, κατά τα γνωστά, με επαγωγή στο μήκος των I_p^2L-αποδείξεων. Ας ελέγξουμε για παράδειγμα, την περίπτωση όπου τελευταίος κανόνας της I_p^2L-απόδειξης είναι ο κανόνας:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \qquad B, \Gamma_2 \Rightarrow C}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \rightarrow B \Rightarrow C}\ (\mathrm{L}\!\rightarrow)$$

Από την Ε.Υ., στη I_p^2LL αποδεικνύονται οι ακολουθητές $!\Gamma_1^{\circledast} \Rightarrow A^{\circledast}$ και $!B^{\circledast}, !\Gamma_2^{\circledast} \Rightarrow C^{\circledast}$. Οπότε

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{!\Gamma_1^{\circledast} \Rightarrow A^{\circledast}}{!\Gamma_1^{\circledast} \Rightarrow !A^{\circledast}}\ (\mathrm{R}!) \qquad !B^{\circledast}, !\Gamma_2^{\circledast} \Rightarrow C^{\circledast}}{!\Gamma_1^{\circledast}, !\Gamma_2^{\circledast}, !A^{\circledast} \multimap !B^{\circledast} \Rightarrow C^{\circledast}}\ (\mathrm{L}\!\multimap)}{!\Gamma_1^{\circledast}, !\Gamma_2^{\circledast}, !(!A^{\circledast} \multimap !B^{\circledast}) \Rightarrow C^{\circledast}}\ (\mathrm{L}!)$$

Ας ελέγξουμε και την περίπτωση όπου τελευταίος κανόνας της I_p^2L-απόδειξης είναι ο δευτεροβάθμιος κανόνας:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A[B/X]}{\Gamma \Rightarrow \exists X A}\ (\mathrm{R}\exists_2)$$

Από την Ε.Υ., στη I_p^2LL αποδεικνύεται ο ακολουθητής $!\Gamma^{\circledast} \Rightarrow (A[B/X])^{\circledast}$. Τότε λόγω του Λήμματος 2.0.3 θα αποδεικνύεται και ο $!\Gamma^{\circledast} \Rightarrow A^{\circledast}[B^{\circledast}/X]$. Επιπλέον για όλους τους τύπους Α και Β και για κάθε ατομικό τύπο Χ, προφανώς ισχύει ότι $!(A[B/X]) \equiv (!A)[B/X]$. Οπότε:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{!\Gamma^{\circledast} \Rightarrow A^{\circledast}[B^{\circledast}/X]}{!\Gamma^{\circledast} \Rightarrow !(A^{\circledast}[B^{\circledast}/X])}\ (\mathrm{R}!)}{!\Gamma^{\circledast} \Rightarrow (!A^{\circledast})[B^{\circledast}/X]}}{!\Gamma^{\circledast} \Rightarrow \exists X !A^{\circledast}}\ (\mathrm{R}\exists_2)$$

□

Επίσης, είναι εύκολο να δείξουμε ότι η τριάδα $\langle (\cdot)^{\circledast}, !, \cdot \rangle$ είναι μία ε.σ.δ. καθώς η πρώτη προϋπόθεση του Ορισμού 3.1.1 προφανώς ισχύει και επιπλέον ισχύει και η δεύτερη καθώς για κάθε απόδειξη π αντικαθιστούμε όλους τους ακολουθητές $\Gamma \Rightarrow A$, με $!\Gamma^{\circledast} \Rightarrow A^{\circledast}$ και εφαρμόζουμε τον κανόνα R! ακριβώς πριν από κάθε κανόνα όπου ο τύπος στον "επόμενο" κάποιας υπόθεσης, είναι ενεργός (π.χ. πριν από R→ και πριν από εφαρμογές των L→ και τομής, για την αριστερή υπόθεση). Για παράδειγμα η απόδειξη

$$\dfrac{C \Rightarrow C \quad \dfrac{A \Rightarrow A}{B, A \Rightarrow A}\,(\mathrm{W})}{C, C \to B, A \Rightarrow A}\,(\mathrm{L}{\to})$$

γίνεται

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{!C^{\circledast} \Rightarrow C^{\circledast}}{!C^{\circledast} \Rightarrow !C^{\circledast}}\,(\mathrm{R}!) \quad \dfrac{!A^{\circledast} \Rightarrow A^{\circledast}}{!B^{\circledast}, !A^{\circledast} \Rightarrow A^{\circledast}}\,(\mathrm{W}!)}{!C^{\circledast}, !C^{\circledast} \multimap !B^{\circledast}, !A^{\circledast} \Rightarrow !A^{\circledast}}\,(\mathrm{L}{\multimap})}{!C^{\circledast}, !(!C^{\circledast} \multimap !B^{\circledast}), !A^{\circledast} \Rightarrow !A^{\circledast}}\,(\mathrm{L}!)$$

Παρατήρηση: Καλούμε τη γραμμική απόδειξη $\pi^{\circledast}$ που προκύπτει, π(λήρη)-διακόσμηση της π. Η απόδειξη αυτή ικανοποιεί την *προς τα κάτω ιδιότητα* (down property), η οποία λέει ότι κάθε κύριος τύπος σε κάποια εφαρμογή του κανόνα R!, είναι ενεργός στον κανόνα που ακολουθεί.

3.2 Το σύστημα ILU

Στην προηγούμενη παράγραφο παρατηρήσαμε ότι η μετάφραση του Girard δεν ορίζει ε.σ.δ. *για το σύστημα IL*. Επιπλέον μπορούμε να ισχυριστούμε ότι, δεν μπορούμε να ορίσουμε κάποια ε.σ.δ. η οποία να δίνει διακοσμήσεις ιντουισιονιστικών αποδείξεων, οι οποίες να είναι *υπο-Girard* (με την έννοια ότι η μετάφραση μιας ενδεχόμενης τέτοιας ε.σ.δ., δεν τοποθετεί ! σε (υπο)τύπους που δεν είναι μαρκαρισμένοι με ! από την $(\cdot)^*$-μετάφραση). Ας το διαπιστώσουμε αυτό με κάποια παραδείγματα.

Καταρχήν είναι απαραίτητος ο εξής ορισμός:

Ορισμός 3.2.1. *Μια γραμμική απόδειξη π_1* **περιέχεται** *σε κάποια γραμμική απόδειξη π_2, αν κάθε ακολουθητής της π_1 περιέχεται στους ακολουθητές της π_2, με την έννοια ότι ή υπάρχει ακριβώς ο ίδιος, ή προκύπτει από κάποιον από τους ακολουθητές της π_2 αν διαγράψουμε κάποια από τα εκθετικά του*[3].

Ας θεωρήσουμε πάλι την IL-απόδειξη του ακολουθητή $C, C \to B, A \Rightarrow A$ στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου:

$$\dfrac{C \Rightarrow C \quad \dfrac{A \Rightarrow A}{B, A \Rightarrow A}\,(\mathrm{W})}{C, C \to B, A \Rightarrow A}\,(\mathrm{L}{\to})$$

Στη συνέχεια δίνουμε δύο ενδεχόμενες διακοσμήσεις αυτής. Η αριστερή είναι ξεκάθαρα *"ελαχιστική" διακόσμηση*, καθώς κάθε διακόσμηση την περιέχει. Η δεξιά είναι η διακόσμηση που προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε την $(\cdot)^{\circledast}$-μετάφραση και την αντιπαραθέτουμε με την αριστερή, για να γίνει κατανοητή η έννοια του "περιέχεσθαι":

[3] Τα εκθετικά αυτά, βάσει της θεωρίας του Κεφαλαίου 4, είναι *περιττά*.

$$\frac{C \Rightarrow C \qquad \dfrac{A \Rightarrow A}{!B, A \Rightarrow A}\,(\mathrm{W!})}{C, C \multimap\, !B, A \Rightarrow A}\,(\mathrm{L}\multimap) \qquad\qquad \frac{\dfrac{\dfrac{C^{\circledast} \Rightarrow C^{\circledast}}{!C^{\circledast} \Rightarrow C^{\circledast}}\,(\mathrm{L!})}{!C^{\circledast} \Rightarrow\, !C^{\circledast}}\,(\mathrm{R!}) \qquad \dfrac{\dfrac{A^{\circledast} \Rightarrow A^{\circledast}}{!A^{\circledast} \Rightarrow A^{\circledast}}\,(\mathrm{L!})}{!B^{\circledast}, !A^{\circledast} \Rightarrow A^{\circledast}}\,(\mathrm{W!})}{!C^{\circledast}, !C^{\circledast} \multimap\, !B^{\circledast}, !A^{\circledast} \Rightarrow A^{\circledast}}\,(\mathrm{L}\multimap)$$

Στην αριστερή διακόσμηση, το ! που βρίσκεται μπροστά από το B είναι απαραίτητο λόγω της χρήσης του δομικού κανόνα της εξασθένησης. Αν δεν υπήρχε το !, η απόδειξη θα ήταν μη-γραμμική. Επομένως κάθε υπο-Girard διακόσμηση δεν θα ήταν γραμμικά σωστή. Άρα επιβεβαιώνεται το επιχείρημα ότι δεν υπάρχει κάποια μετάφραση (ή γενικά ε.σ.δ.) που να δίνει υπο-Girard διακόσμηση, διότι στη μετάφραση του $A \to B$, δεν θα μαρκάρει με ! το B.

Το πρόβλημα αυτό υπάρχει, επειδή η ιντουισιονιστική λογική επιτρέπει εφαρμογές των κανόνων L$\to$, L$\wedge$ και L$\forall_2$ στην περίπτωση που ο ενεργός τύπος της (δεξιάς) υπόθεσης έχει προέλθει από δομικό κανόνα. Δηλαδή έστω, σαν δεύτερο παράδειγμα, η απόδειξη:

$$\frac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}\,(\mathrm{LW})}{A, B \wedge C \Rightarrow A}\,(\mathrm{L}\wedge)$$

Τότε κάθε διακόσμηση θα περιέχει την:

$$\frac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, !B \Rightarrow A}\,(\mathrm{W!})}{A, !B \& C \Rightarrow A}\,(\mathrm{L}\&_1)$$

ενώ οι μεταφράσεις που δίνουν υπο-Girard διακοσμήσεις, δεν μαρκάρουν με ! το B. Ωστόσο η ορθότητα της εμφύτευσης που δίνει η $(\cdot)^*$-μετάφραση, μας δείχνει ότι μπορούμε να αποδεικνύουμε τον ακολουθητή που θέλουμε χωρίς τη χρήση των κανόνων, που αναφέρθηκαν στις περιπτώσεις παραπάνω. Αυτό προκύπτει άμεσα, από την ιδιότητα υποτύπου και το γεγονός ότι ο σκελετός μιας ILL-απόδειξης (χωρίς τομές) του ακολουθητή $!\Gamma^* \Rightarrow A^*$, είναι μία IL-απόδειξη. Στα παραδείγματα δηλαδή, οι κανόνες L$\to$ και L$\wedge$ μπορούν να αντικατασταθούν με εξασθένηση ως εξής:

$$\frac{\dfrac{A \Rightarrow A}{C, A \Rightarrow A}\,(\mathrm{LW})}{C, C \to B, A \Rightarrow A}\,(\mathrm{LW}) \qquad\qquad \frac{A \Rightarrow A}{A, B \wedge C \Rightarrow A}\,(\mathrm{LW})$$

Επομένως θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ένα ιντουισιονιστικό σύστημα ακολουθητών, στο οποίο θα απαγορεύεται η χρήση των κανόνων L$\to$, L$\wedge$ και L$\forall_2$ (με τον τρόπο που αναφέραμε πριν) σε μη-γραμμικούς τύπους, και στο οποίο αναμένουμε η μετάφραση του Girard, καθώς και άλλες μεταφράσεις που δίνουν υπο-Girard διακοσμήσεις, *να ορίζουν ε.σ.δ.* για το σύστημα αυτό.

Αξιώματα:

$$A; \Rightarrow A \quad (\mathrm{Ax})$$

Λογικοί κανόνες:

$$\frac{;\Gamma_1 \Rightarrow A \quad B;\Gamma_2 \Rightarrow C}{A \to B;\Gamma_1,\Gamma_2 \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}\to) \qquad \frac{\Pi;\Gamma,A \Rightarrow B}{\Pi;\Gamma \Rightarrow A \to B}\,(\mathrm{R}\to)$$

Κανόνες για το δευτεροβάθμιο ποσοδείκτη (Y όχι ελεύθερο στα Γ,Π):

$$\frac{A[T/X];\Gamma \Rightarrow C}{\forall_2 XA;\Gamma \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}\forall_2) \qquad \frac{\Pi;\Gamma \Rightarrow A[Y/X]}{\Pi;\Gamma \Rightarrow \forall_2 XA}\,(\mathrm{R}\forall_2)$$

Δομικοί κανόνες:

$$\frac{\Pi;\Gamma \Rightarrow C}{\Pi;\Gamma,A \Rightarrow C}\,(\mathrm{LW}) \qquad \frac{\Pi;\Gamma,A,A \Rightarrow C}{\Pi;\Gamma,A \Rightarrow C}\,(\mathrm{LC}) \qquad \frac{A;\Gamma \Rightarrow C}{;A,\Gamma \Rightarrow C}\,(\mathrm{D})$$

Κανόνες τομής:

$$\frac{\Pi;\Gamma_1 \Rightarrow A \quad A;\Gamma_2 \Rightarrow C}{\Pi;\Gamma_1,\Gamma_2 \Rightarrow C}\,(\text{τομή κεφαλής}) \qquad \frac{;\Gamma_1 \Rightarrow A \quad \Pi;A,\Gamma_2 \Rightarrow C}{\Pi;\Gamma_1,\Gamma_2 \Rightarrow C}\,(\text{τομή μέσης})$$

Σχήμα 3.1: Το σύστημα ILU.

Το σύστημα αυτό, το κατασκευάζουμε ουσιαστικά αποδομώντας τις αποδείξεις των γραμμικών ακολουθητών $!\Gamma^* \Rightarrow A^*$ (χάριν συντομίας, περιοριζόμαστε στο τμήμα που περιέχει μόνο την συνεπαγωγή και τον καθολικό δευτεροβάθμιο προτασιακό ποσοδείκτη, δηλαδή το τμήμα που αντιστοιχεί στο σύστημα F του Girard, Σχήμα 3.1).

Η ιδέα των ακολουθητών με μέρη που διαχωρίζονται σύμφωνα με την συμπεριφορά (γραμμική ή όχι) των τύπων, οφείλεται στον Girard που εισήγαγε τα συστήματα LC [Gir93] και LU [Gir91]. Στη θεωρία δεν υπάρχει όριο στον αριθμό των περιοχών που μπορεί κάποιος να διαχωρίσει. Για παράδειγμα είναι δυνατόν να τυποποιήσουμε ακριβώς τη συμπεριφορά των γραμμικών αποδείξεων, ακολουθητών της μορφής $\Gamma_1^T, ?\Gamma_2^T, !?\Gamma_3^T \Rightarrow !?\Delta_3^T, ?\Delta_2^T, \Delta_1^T$ σε έναν λογισμό που περιέχει ακολουθητές της μορφής $\Gamma_1;\Gamma_2;\Gamma_3 \Rightarrow \Delta_3;\Delta_2;\Delta_1$ όπου τα τρία μέρη σε κάθε πλευρά του ακολουθητή περιέχουν τύπους όπου εννοείται ότι είναι μαρκαρισμένοι με $\cdot, ?$ και $!?$. Συνεπώς ο ακόλουθος ορισμός είναι μια γενίκευση του Ορισμού 3.1.1.

Ορισμός 3.2.2. *Για ένα λογισμό ακολουθητών της μορφής $\Gamma_1;\Gamma_2;...;\Gamma_m \Rightarrow \Delta_1;\Delta_2;...;\Delta_n$, για μια τροπική μετάφραση $(\cdot)^{\checkmark}$ και τροπικότητες $\mu_1,...,\mu_m$, $\nu_1,...,\nu_n$, η m+n+1-άδα $\langle(\cdot)^{\checkmark},\mu_1,...,\mu_m,\nu_1,...,\nu_n\rangle$ ορίζει μια* **επαγωγική στρατηγική διακόσμησης (ε.σ.δ.)** *για το λογισμό ακολουθητών, αν οι συνθήκες του Ορισμού 3.1.1 ικανοποιούνται, όταν μεταφράζουμε όλους τους ακολουθητές της μορφής $\Gamma_1;\Gamma_2;...;\Gamma_m \Rightarrow \Delta_1;\Delta_2;...;\Delta_n$ στους ακολουθητές $\mu_1\Gamma_1^{\checkmark},\mu_2\Gamma_2^{\checkmark},...,\mu_m\Gamma_m^{\checkmark} \Rightarrow \nu_1\Delta_1^{\checkmark},\nu_2\Delta_2^{\checkmark},...,\nu_n\Delta_n^{\checkmark}$.*

Στον ακολουθητή $\Pi;\Gamma \Rightarrow A$, του συστήματος ILU, το σύμβολο Π δηλώνει ένα πολυσύνολο με πληθικότητα ≤ 1. Δηλαδή περιέχει το πολύ έναν τύπο (κεφαλής) του οποίου η εμφάνιση στον ακολουθητή διαχωρίζεται από το ";". Γραμμικά αντιστοιχεί σε ένα τύπο που δεν έχει (ακόμη) μαρκαριστεί με !. Το μέρος του ακολουθητή, αριστερά του ; καλείται και γραμμικό, διότι εκεί δεν επιτρέπεται η χρήση των δομικών κανόνων. Ο δομικός κανόνας D είναι ο αντίστοιχος του γραμμικού κανόνα L!.

Η σχέση του συστήματος ILU με το αντίστοιχο τμήμα της $I_p^2 L$ φαίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.2.3. *Αν $ILU \vdash \Pi; \Gamma \Rightarrow A$, τότε $I_p^2 L \vdash \Pi, \Gamma \Rightarrow A$. Αντίστροφα, αν $I_p^2 L \vdash \Gamma \Rightarrow A$, τότε $ILU \vdash ; \Gamma \Rightarrow A$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη και για τις δύο κατευθύνσεις γίνεται με επαγωγή στο μήκος των αποδείξεων, για τα αντίστοιχα συστήματα ακολουθητών. Ένα μη τετριμμένο βήμα για την αντίστροφη κατεύθυνση, είναι αυτό όπου τελευταίος κανόνας της IL-απόδειξης είναι ο L→. Τότε από την επαγωγική υπόθεση, οι ακολουθητές $;\Gamma_1 \Rightarrow A$ και $;B, \Gamma_2 \Rightarrow C$ αποδεικνύονται στο ILU. Όμως δεν μπορούμε άμεσα να εφαρμόσουμε τον κανόνα L→. Γι' αυτό χρησιμοποιώντας "τομές μέσης" έπεται:

$$\dfrac{\dfrac{;\Gamma_1 \Rightarrow A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A; \Rightarrow A}{;A \Rightarrow A}\,(\mathrm{D}) \qquad B; \Rightarrow B}{A \to B; A \Rightarrow B}\,(\mathrm{L}\!\to)}{;A, A \to B \Rightarrow B}\,(\mathrm{D})}{;\Gamma_1, A \to B \Rightarrow B}\,(\text{τομή}) \qquad ;\Gamma_2, B \Rightarrow C}{;\Gamma_1, \Gamma_2, A \to B \Rightarrow C}\,(\text{τομή})$$

□

Παρατηρούμε επομένως, από την απόδειξη της Πρότασης 3.2.3, ότι αν σε κάποια ιντουισιονιστική απόδειξη κάποιου ακολουθητή $\Gamma \Rightarrow A$ εφαρμόζονται οι κανόνες L→, L∧ και L$\forall_2$ με τον απαγορευμένο για το ILU τρόπο, τότε στο σύστημα ILU ο ακολουθητής $;\Gamma \Rightarrow A$ θα αποδεικνύεται, χρησιμοποιώντας κανόνες τομής.

Ας δείξουμε όμως αμέσως το ζητούμενο. Δηλαδή ότι η μετάφραση του Girard δίνει ε.σ.δ. για το σύστημα ILU.

Θεώρημα 3.2.4. *Η τετράδα $\langle (\cdot)^*, \cdot, !, \cdot \rangle$ είναι ε.σ.δ. για το ILU. Έπεται ότι η μετάφραση του Girard εμφυτεύει ορθά και πιστά το ILU στο γραμμικό τμήμα $\{!, \multimap, \forall_2^*\}$[4] με τον εξής τρόπο:*

$$ILU \vdash \Pi; \Gamma \Rightarrow A \quad \text{αν και μόνον αν} \quad \{!, \multimap, \forall_2^*\} \vdash \Pi^*, !\Gamma^* \Rightarrow A^*$$

[4] Το $\forall_2^*$ δηλώνει ότι ο δευτεροβάθμιος καθολικός ποσοδείκτης εφαρμόζεται σε τύπους της μορφής X^*, οι οποίοι όμως ταυτίζονται με τους αντιστοιχους X, λόγω της μετάφρασης. Απλά με αυτό τον τρόπο δηλώνουμε ότι οι τύποι του τμήματος αυτού είναι τύποι μεταφρασμένοι, από τη μετάφραση του Girard.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες του Ορισμού 3.1.1, όπως αυτές τροποποιούνται από τον Ορισμό 3.2.2.

- Το 1 ικανοποιείται διότι, για κάθε ILU-αξίωμα της μορφής $A; \Rightarrow A$, αρκεί να δείξουμε ότι $\{!,\multimap,\forall_2^*\}\vdash A^* \Rightarrow A^*$, το οποίο βέβαια ισχύει καθώς είναι αξίωμα.

- Για το 2, θα δείξουμε μία χαρακτηριστική περίπτωση. Οι άλλες αποδεικνύονται ομοίως. Έστω ο κανόνας

$$\dfrac{;\Gamma_1 \Rightarrow A \qquad B;\Gamma_2 \Rightarrow C}{A \to B;\Gamma_1,\Gamma_2 \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}{\to})$$

Το ζητούμενο έπεται ως εξής:

$$\dfrac{\dfrac{!\Gamma_1^* \Rightarrow A^*}{!\Gamma_1^* \Rightarrow !A^*}\,(\mathrm{R}!) \qquad B^*,!\Gamma_2^* \Rightarrow C^*}{!A^* \multimap B^*,!\Gamma_1^*,!\Gamma_2^* \Rightarrow C^*}\,(\mathrm{L}{\multimap})$$

□

Κανονικοποίηση στο ILU

Οι γραμμικές τομές, ανάμεσα σε *g-διακοσμημένες* (μεταφρασμένες με την $(\cdot)^*$-μετάφραση) ILU-αποδείξεις προκύπτουν σε δύο διαφορετικές μορφές.

1. Αν π^* είναι μια g-διακοσμημένη ILU-απόδειξη με συμπέρασμα $\Pi^*,!\Gamma^* \Rightarrow A^*$ και τ^* είναι μια g-διακοσμημένη ILU-απόδειξη με συμπέρασμα $A^*,!\Delta^* \Rightarrow B^*$, τότε η τομή θα έχει τη μορφή

$$\dfrac{\overset{\pi^*}{\Pi^*,!\Gamma^* \Rightarrow A^*} \qquad \overset{\tau^*}{A^*,!\Delta^* \Rightarrow B^*}}{\Pi^*,!\Gamma^*,!\Delta^* \Rightarrow B^*}\,(\text{τομή})$$

2. Αν π^* είναι μια g-διακοσμημένη ILU-απόδειξη με συμπέρασμα $!\Gamma^* \Rightarrow A^*$ και τ^* είναι μια g-διακοσμημένη ILU-απόδειξη με συμπέρασμα $\Pi^*,!A^*,!\Delta^* \Rightarrow B^*$, τότε η τομή θα έχει τη μορφή

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi^*}{!\Gamma^* \Rightarrow A^*}}{!\Gamma^* \Rightarrow !A^*}\,(\mathrm{R}!) \qquad \overset{\tau^*}{\Pi^*,!A^*,!\Delta^* \Rightarrow B^*}}{\Pi^*,!\Gamma^*,!\Delta^* \Rightarrow B^*}\,(\text{τομή})$$

$$\begin{tikzcd} \pi \arrow[r, "*"] & \pi^* \arrow[d] \\ & (\pi^*)' \arrow[ul, "\mathrm{sk}"] \end{tikzcd} \qquad \text{ή} \qquad \begin{tikzcd} \pi \arrow[r, "*"] \arrow[d] & \pi^* \arrow[d] \\ \pi' & (\pi^*)' \arrow[l, "\mathrm{sk}"'] \end{tikzcd}$$

Σχήμα 3.2: Ένα κενό ή ένα στοιχειώδες βήμα αναγωγής.

Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο απαλοιφής της τομής, για τη γραμμική λογική, και να λάβουμε ή μία g-διακοσμημένη ILU-απόδειξη, ή μια απόδειξη που θα περιέχει γραμμικές τομές της μορφής 1 ή 2. Βάσει όμως της ισχυρής κανονικοποίησης, η διαδικασία αυτή θα τερματίσει σε κανονική μορφή, δηλαδή σε μια g-διακοσμημένη ILU-απόδειξη. Οπότε η συλλογή των g-μεταφρασμένων ILU-αποδείξεων είναι κλειστή ως προς τις γραμμικές τομές της μορφής 1 και 2.

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις, μπορούμε να λάβουμε μια ντετερμινιστική διαδικασία απαλοιφής της τομής σ για ILU-αποδείξεις π, η οποία αντιστοιχεί στη γραμμική διαδικασία απαλοιφής της τομής σ_{LL} που εφαρμόζεται στη g-διακοσμημένη απόδειξη π^*. Για την ακρίβεια, η διαδικασία σ λαμβάνεται από τα βήματα της σ_{LL}, θεωρώντας για κάθε βήμα το σκελετό των γραμμικών αποδείξεων. Ωστόσο η αντιστοιχία των δύο διαδικασιών δεν είναι ένα-προς-ένα. Επειδή στις g-διακοσμημένες ILU-αποδείξεις παρεμβάλονται εφαρμογές των κανόνων R! (οι αντίστοιχες ILU αποδείξεις τότε έχουν λιγότερες εφαρμογές κανόνων), σε κάποιες περιπτώσεις ένα στοιχειώδες βήμα αναγωγής στη σ, θα αντιστοιχεί σε δύο διαδοχικά βήματα στη σ_{LL}. Αντίστροφα, ένα στοιχειώδες βήμα αναγωγής στην π^* θα αντιστοιχεί πάντα είτε σε ένα κενό βήμα αναγωγής (στιγμιότυπο ενός "κανόνα επανάληψης") στο ILU, ή σε ένα στοιχειώδες ILU-βήμα αναγωγής (βλ. Σχήμα 3.2).

Στη συνέχεια δίνουμε δύο παραδείγματα. Στο πρώτο θα παρατηρήσουμε ότι ένα στοιχειώδες βήμα αναγωγής της σ αντιστοιχεί σε ένα στοιχειώδες βήμα της σ_{LL}, ενώ στο δεύτερο αντιστοιχεί σε δύο.

Παράδειγμα 1: Έστω η ILU-απόδειξη ρ:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi}{\Pi;\Gamma_1,A\Rightarrow B}}{\Pi;\Gamma_1\Rightarrow A\to B} \qquad \dfrac{\overset{\tau_1}{;\Gamma_2\Rightarrow A} \qquad \overset{\tau_2}{B;\Rightarrow C}}{A\to B;\Gamma_2\Rightarrow C}}{\Pi;\Gamma_1,\Gamma_2\Rightarrow C}\ (\text{τομή κεφαλής})$$

Τότε η ρ βάσει της σ ανάγεται στην ρ':

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi}{\Pi;\Gamma_1,A\Rightarrow B} \qquad \overset{\tau_1}{;\Gamma_2\Rightarrow A}}{\Pi;\Gamma_1,\Gamma_2,A\Rightarrow B}\ (\text{τομή μέσης}) \qquad \overset{\tau_2}{B;\Rightarrow C}}{\Pi;\Gamma_1,\Gamma_2\Rightarrow C}\ (\text{τομή μέσης})$$

Η g-διακοσμημένη απόδειξη της ρ είναι η ρ^*:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi^*}{\Pi^*, !\Gamma_1^*, !A^* \Rightarrow B^*}}{\Pi^*, !\Gamma_1^* \Rightarrow !A^* \multimap B^*} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\tau_1^*}{!\Gamma_2^* \Rightarrow A^*}}{!\Gamma_2^* \Rightarrow !A^*} \quad \overset{\tau_2^*}{B^* \Rightarrow C^*}}{!A^* \multimap B^*, !\Gamma_2^* \Rightarrow C^*}}{\Pi^*, !\Gamma_1^*, !\Gamma_2^* \Rightarrow C^*}\ (\text{τομή})$$

Η τελευταία βάσει της σ_{LL} ανάγεται στην ${\rho^*}'$:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi^*}{\Pi^*, !\Gamma_1^*, !A^* \Rightarrow B^*} \quad \dfrac{\overset{\tau_1^*}{!\Gamma_2^* \Rightarrow A^*}}{!\Gamma_2^* \Rightarrow !A^*}}{\Pi^*, !\Gamma_1^*, !\Gamma_2^* \Rightarrow B^*}\ (\text{τομή}) \qquad \overset{\tau_2^*}{B^* \Rightarrow C^*}}{\Pi^*, !\Gamma_1^*, !\Gamma_2^* \Rightarrow C^*}\ (\text{τομή})$$

και παρατηρούμε ότι ο σκελετός της ${\rho^*}'$ είναι η ILU-απόδειξη ρ'.

Παράδειγμα 2: Έστω η ILU-απόδειξη φ:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi}{;\Gamma_1, A \Rightarrow B}}{;\Gamma_1 \Rightarrow A \to B} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\tau_1}{;\Gamma_2 \Rightarrow A} \quad \overset{\tau_2}{B; \Rightarrow C}}{A \to B; \Gamma_2 \Rightarrow C}}{;A \to B, \Gamma_2 \Rightarrow C}}{\Pi; \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow C}\ (\text{τομή μέσης})$$

Τότε η φ βάσει της σ ανάγεται στην φ':

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi}{;\Gamma_1, A \Rightarrow B} \quad \overset{\tau_1}{;\Gamma_2 \Rightarrow A}}{;\Gamma_1, \Gamma_2, A \Rightarrow B}\ (\text{τομή μέσης}) \qquad \overset{\tau_2}{B; \Rightarrow C}}{;\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow C}\ (\text{τομή μέσης})$$

Η g-διακοσμημένη απόδειξη της φ είναι η φ^*:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi^*}{!\Gamma_1^*, !A^* \Rightarrow B^*}}{!\Gamma_1^* \Rightarrow !A^* \multimap B^*}}{!\Gamma_1^* \Rightarrow !(!A^* \multimap B^*)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\tau_1^*}{!\Gamma_2^* \Rightarrow A^*}}{!\Gamma_2^* \Rightarrow !A^*} \quad \overset{\tau_2^*}{B^* \Rightarrow C^*}}{!A^* \multimap B^*, !\Gamma_2^* \Rightarrow C^*}}{!(!A^* \multimap B^*), !\Gamma_2^* \Rightarrow C^*}}{\Pi^*, !\Gamma_1^*, !\Gamma_2^* \Rightarrow C^*}\ (\text{τομή})$$

Η τελευταία βάσει της σ_{LL} ανάγεται στην ${\varphi^*}'$:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi^*}{!\Gamma_1^*, !A^* \Rightarrow B^*}}{!\Gamma_1^* \Rightarrow !A^* \multimap B^*} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\tau_1^*}{!\Gamma_2^* \Rightarrow A^*}}{!\Gamma_2^* \Rightarrow !A^*} \quad \overset{\tau_2^*}{B^* \Rightarrow C^*}}{!A^* \multimap B^*, !\Gamma_2^* \Rightarrow C^*}}{\Pi^*, !\Gamma_1^*, !\Gamma_2^* \Rightarrow C^*}\ (\text{τομή})$$

και αυτή με τη σειρά της στην $\varphi^{*''}$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi^*\\ !\Gamma_1^*, !A^* \Rightarrow B^*\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\tau_1^*\\ !\Gamma_2^* \Rightarrow A^*\end{array}}{!\Gamma_2^* \Rightarrow !A^*}}{!\Gamma_1^*, !\Gamma_2^* \Rightarrow B^*}\,(\text{τομή}) \quad \begin{array}{c}\tau_2^*\\ B^* \Rightarrow C^*\end{array}}{!\Gamma_1^*, !\Gamma_2^* \Rightarrow C^*}\,(\text{τομή})$$

Τέλος παρατηρούμε ότι ο σκελετός της $\varphi^{*''}$, είναι η ILU-απόδειξη φ'.

Στο εξής θα αναφέρουμε το γεγονός, ότι οι g-διακοσμημένες ILU αποδείξεις π^* προσομοιώνουν τις αναγωγές κάποιας απόδειξης π, λέγοντας ότι είναι ισχυρές διακοσμήσεις ως προς σ. Συγκεκριμένα ορίζουμε:

Ορισμός 3.2.5. *Έστω* $\mathbf{L}$ *ένας λογισμός ακολουθητών και* σ *μια διαδικασία απαλοιφής της τομής για το* $\mathbf{L}$. *Μια στρατηγική διακόσμησης* δ *για το* $\mathbf{L}$ *καλείται* **ισχυρή** *(ως προς* σ*) αν και μόνον αν κάθε στοιχειώδες βήμα αναγωγής στη* σ*, που μετασχηματίζει μια απόδειξη* π *στο* $\mathbf{L}$ *σε μια* π'*, μπορεί να προσομοιωθεί με ένα ή περισσότερα στοιχειώδη βήματα στη γνωστή διαδικασία απαλοιφής της τομής για τη γραμμική λογική, όπου το* $\delta(\pi)$ *ανάγεται τελικά στο* $\delta(\pi')$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε στρατηγική διακόσμησης δ ενός $\mathbf{L}$, υπάρχει μια διαδικασία απαλοιφής της τομής, έστω σ_l, τέτοια ώστε η δ να είναι ισχυρή ως προς σ_l: αρκεί να ορίσουμε τη σ_l ως την "ανάκλαση" της αντίστοιχης διαδικασίας της γραμμικής λογικής (θεωρώντας για κάθε βήμα στη σ_{LL}, το σκελετό, όπως αναφέραμε προηγουμένως). Βέβαια πολλές φορές μπορούμε να ορίσουμε ανεξαρτήτως της δ, μια σ_l για το $\mathbf{L}$. Στην περίπτωση όμως που η δ είναι μη ντετερμινιστική (βλ. παράγραφο 3.3) ο ορισμός της σ_l γίνεται μόνο μέσω της δ, διότι διαφορετικά η δ δεν θα είναι ισχυρή.

Επομένως αφού έχουμε διαπιστώσει ότι η τετράδα $\langle(\cdot)^*, \cdot, !, \cdot\rangle$ είναι ε.σ.δ. για το ILU, μπορούμε επιπλέον να πούμε ότι είναι ισχυρή ως προς τη διαδικασία απαλοιφής της τομής σ (που προκύπτει ως "ανάκλαση" της αντίστοιχης γραμμικής διαδικασίας). Επιπλέον λόγω του θεωρήματος ισχυρής κανονικοποίησης για την γραμμική λογική, λαμβάνουμε το εξής σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.6. *Το σύστημα ILU είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμο και ικανοποιεί την ιδιότητα Church-Rosser.*

Απόδειξη. Έστω $\mu_1, \mu_2, \ldots$ μια ακολουθία από στοιχειώδη βήματα αναγωγής της σ. Τότε εξαιτίας όσων αναφέρθηκαν προηγουμένως, υπάρχει μια ακολουθία $\mu_1', \mu_2', \ldots$ της σ_{LL} που την προσομοιώνει. Όμως λόγω της ισχυρής κανονικοποίησης η ακολουθία $\mu_1', \mu_2', \ldots$ θα πρέπει να καταλήγει σε κανονική μορφή. Επομένως και η ακολουθία $\mu_1, \mu_2, \ldots$ της σ, θα πρέπει να τερματίζει σε κανονική μορφή, που είναι ο σκελετός της αντίστοιχης γραμμικής κανονικής μορφής. Επιπλέον λόγω της μοναδικότητας της κανονικής μορφής (ως προς αντιμετάθεση δομικών κανόνων) για τη γραμμική λογική, έπεται ότι η κανονική μορφή που βρίσκουμε για την ILU-απόδειξη είναι μοναδική (ως προς αντιμετάθεση δομικών κανόνων). Άρα το ILU ικανοποιεί την ιδιότητα Church-Rosser. $\square$

3.3 Επαγωγικές στρατηγικές διακόσμησης για το CL

Στη συνέχεια θα επικεντρώσουμε την προσπάθεια μας στο να κατασκευάσουμε μια τροπική μετάφραση $(\cdot)^{\checkmark}$ της κλασικής λογικής με τέτοιο τρόπο ώστε, αντίστοιχα με την $(\cdot)^{\circledast}$-μετάφραση για την ιντουισιονιστική λογική, να ορίζει μια ε.σ.δ. *για το σύστημα CL*. Αυτό θα γίνει, με το γνωστό πλέον τρόπο, μεταφράζοντας τον ακολουθητή $\Gamma \Rightarrow \Delta$ με τον $\mu\Gamma^{\checkmark} \Rightarrow \nu\Delta^{\checkmark}$, για τροπικότητες μ και ν. Επομένως για να ικανοποιείται η δεύτερη συνθήκη του Ορισμού 3.1.1 πρέπει:

1. Για την περίπτωση των δομικών κανόνων, να ισχύει ότι $\mu \equiv\, !\mu'$ και $\nu \equiv\, ?\nu'$.

2. Στην περίπτωση εφαρμογής του κανόνα τομής, όπου ο τύπος τομής είναι ο A, θα πρέπει να μπορούμε να "ενοποιήσουμε" τις διακοσμήσεις $\mu A^{\checkmark}$ και $\nu\Delta^{\checkmark}$ εφαρμόζοντας μια ακολουθία από συμφραστικούς ή/και αμέλειας εκθετικούς κανόνες, για να μπορέσουμε στη συνέχεια να εφαρμόσουμε τον "γραμμικό" κανόνα τομής. Οπότε αυτό θα συμβαίνει αν και μόνον αν είτε το μ είναι επίθεμα του ν (δηλαδή $\nu = \mu'\mu$ για κάποια τροπικότητα μ', π.χ. μ=!?! και ν=???!?!) ή το ν είναι επίθεμα του μ.

Ορισμός 3.3.1. *Θα καλούμε ένα ζεύγος από τροπικότητες (μ,ν) που ικανοποιεί αυτές τις δύο συνθήκες* **επαρκές**.

Θεώρημα 3.3.2. (Schellinx) *Έστω (μ,ν) ένα ζεύγος από τροπικότητες. Υπάρχει μια τροπική μετάφραση* $(\cdot)^{\checkmark}$ *τέτοια ώστε η τριάδα* $\langle(\cdot)^{\checkmark}, \mu, \nu\rangle$ *είναι μια ε.σ.δ. για το CL, αν και μόνον αν το (μ,ν) είναι επαρκές.*

Απόδειξη. Το αντίστροφο, δηλαδή ότι η επάρκεια του ζεύγους τροπικοτήτων είναι αναγκαία συνθήκη, έχει ήδη δειχθεί, από όσα αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου. Το ευθύ επίσης ισχύει, καθώς δεδομένου ενός επαρκούς ζεύγους τροπικοτήτων, ορίζουμε την εξής $(\cdot)^{\circledcirc}$-μετάφραση: για ατομικούς τύπους X ορίζουμε $X^{\circledcirc} := X$. Επιπλέον $\bot^{\circledcirc} := \mathbf{0}$, $\top^{\circledcirc} := \top$ και

$\circledcirc$	πολλαπλασιαστικοί	προσθετικοί
$(A \to B)^{\circledcirc}$	$max(\mu,\nu)A^{\circledcirc} \multimap max(\mu,\nu)B^{\circledcirc}$	$max(\mu,\nu)A^{\circledcirc} \rightsquigarrow max(\mu,\nu)B^{\circledcirc}$
$(A \wedge B)^{\circledcirc}$	$\begin{cases} !\nu A^{\circledcirc} \otimes !\nu B^{\circledcirc}, & \text{αν } \nu > \mu \\ \mu A^{\circledcirc} \otimes \mu B^{\circledcirc}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$max(\mu,\nu)A^{\circledcirc} \& max(\mu,\nu)B^{\circledcirc}$
$(A \vee B)^{\circledcirc}$	$\begin{cases} ?\mu A^{\circledcirc} \parr ?\mu B^{\circledcirc}, & \text{αν } \mu > \nu \\ \nu A^{\circledcirc} \parr \nu B^{\circledcirc}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$max(\mu,\nu)A^{\circledcirc} \oplus max(\mu,\nu)B^{\circledcirc}$
$(\forall XA)^{\circledcirc}$	$\forall X.max(\mu,\nu)A^{\circledcirc}$	$\forall X.max(\mu,\nu)A^{\circledcirc}$
$(\exists XA)^{\circledcirc}$	$\exists X.max(\mu,\nu)A^{\circledcirc}$	$\exists X.max(\mu,\nu)A^{\circledcirc}$

Τότε άμεσα έπεται ότι η τριάδα $\langle (\cdot)^{\checkmark}, \mu, \nu\rangle$ είναι ε.σ.δ.. Για παράδειγμα η πρώτη συνθήκη του Ορισμού 3.1.1 ικανοποιείται καθώς τα CL-αξιώματα είναι της μορφής $A \Rightarrow A$ και στο CLL αποδεικνύεται ότι

$$\cfrac{\cfrac{A^{\circledcirc} \Rightarrow A^{\circledcirc}}{\vdots}\,\text{(L!) ή (R!) ή (R!) ή (R?)}}{\mu A^{\circledcirc} \Rightarrow \nu B^{\circledcirc}}\,\text{(L!) ή (R!) ή (R!) ή (R?)}$$

Η διαδοχή συμφραστικών και αμέλειας εκθετικών κανόνων για την περίπτωσή μας, δίνει σωστή απόδειξη στο CLL, ακριβώς επειδή το ζεύγος (μ, ν) είναι επαρκές. Ομοίως για τα αξιώματα με τα $\perp$ και $\top$. Ας ελέγξουμε και μία περίπτωση για το 2 (ειδικότερα, για το προσθετικό μέρος). Έστω ο CL-κανόνας

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta}\,(\mathrm{R}\wedge)$$

και έστω $\nu > \mu$. Οπότε $\max(\mu,\nu) = \nu$. Το ζητούμενο έπεται από την εξής απόδειξη:

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}[\text{E.Y.}] \\ \mu\Gamma^{\circledcirc} \Rightarrow \nu A^{\circledcirc}, \nu\Delta^{\circledcirc}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\text{E.Y.}] \\ \mu\Gamma^{\circledcirc} \Rightarrow \nu B^{\circledcirc}, \nu\Delta^{\circledcirc}\end{matrix}}{\mu\Gamma^{\circledcirc} \Rightarrow \nu A^{\circledcirc} \& \nu B^{\circledcirc}, \nu\Delta^{\circledcirc}}\,(\mathrm{R}\&)}{\mu\Gamma^{\circledcirc} \Rightarrow \nu(\nu A^{\circledcirc} \& \nu B^{\circledcirc}), \nu\Delta^{\circledcirc}}\,(\mathrm{R}!)(\mathrm{R}?)$$

Αν τώρα $\max(\mu,\nu) = \mu$, θα έχουμε:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}[\text{E.Y.}] \\ \mu\Gamma^{\circledcirc} \Rightarrow \nu A^{\circledcirc}, \nu\Delta^{\circledcirc}\end{matrix}}{\mu\Gamma^{\circledcirc} \Rightarrow \mu A^{\circledcirc}, \nu\Delta^{\circledcirc}}\,(\mathrm{R}!),(\mathrm{R}?) \qquad \cfrac{\begin{matrix}[\text{E.Y.}] \\ \mu\Gamma^{\circledcirc} \Rightarrow \nu B^{\circledcirc}, \nu\Delta^{\circledcirc}\end{matrix}}{\mu\Gamma^{\circledcirc} \Rightarrow \mu B^{\circledcirc}, \nu\Delta^{\circledcirc}}\,(\mathrm{R}!),(\mathrm{R}?)}{\mu\Gamma^{\circledcirc} \Rightarrow \mu A^{\circledcirc} \& \mu B^{\circledcirc}, \nu\Delta^{\circledcirc}}\,(\mathrm{R}\&)}{\mu\Gamma^{\circledcirc} \Rightarrow \nu(\mu A^{\circledcirc} \& \mu B^{\circledcirc}), \nu\Delta^{\circledcirc}}\,(\mathrm{R}!)(\mathrm{R}?)$$

Ομοίως, για τις υπόλοιπες περιπτώσεις. □

Άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 3.3.2 είναι η ακόλουθη εμφύτευση:

Πόρισμα 3.3.3. $CL \vdash \Gamma \Rightarrow A$ *αν και μόνον αν* $CLL \vdash \mu\Gamma^{\circledcirc} \Rightarrow \nu\Delta^{\circledcirc}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα τις τροπικές μεταφράσεις, που βασίζονται στο Θεώρημα 3.3.2 και αντιστοιχούν στα δύο απλούστερα επαρκή ζεύγη, δηλαδή τα (!,?!) και (!?,?). Τότε λαμβάνουμε την q- και την t-μετάφραση, αντίστοιχα. (Όπως θα δείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο, οι q και t, κατά ένα τρόπο ορίζουν τις *μοναδικές* ε.σ.δ. για το CL.)

Όμως ποια είναι η σχέση των μεταφράσεων q και t με τις μεταφράσεις Q και T του Κεφαλαίου 2; Μπορούμε σε αυτό το σημείο, να παρατηρούμε ότι, αν προσπαθήσουμε να μεταφράσουμε με μία από τις Q ή T μια κλασική απόδειξη, σε ορισμένες περιπτώσεις θα χρειαστούμε "τομές διόρθωσης" με αποτέλεσμα να μην ορίζεται ε.σ.δ. (όπως συμβαίνει και για τη μετάφραση του Girard). Αν για παράδειγμα χρησιμοποιήσουμε την ίδια απόδειξη με αυτή του παραδείγματος για τη μετάφραση του Girard (σελίδα 35, παράγραφος 3.1), θεωρώντας την τώρα ως κλασική απόδειξη, και τη μεταφράσουμε επαγωγικά με την Q τότε:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{C^Q \Rightarrow C^Q}{!C^Q \Rightarrow !C^Q} \qquad \dfrac{B^Q \Rightarrow B^Q}{?!B^Q \Rightarrow ?!B^Q}}{!C^Q, !C^Q \multimap ?!B^Q \Rightarrow ?!B^Q}\,(\mathrm{L}\multimap)
}{!C^Q, !(!C^Q \multimap ?!B^Q) \Rightarrow ?!B^Q}\,(\mathrm{L}!)
}{?!C^Q, !(!C^Q \multimap ?!B^Q) \Rightarrow ?!B^Q}\,(\mathrm{L}?)
}{!(!C^Q \multimap ?!B^Q) \Rightarrow ?!C^Q \multimap ?!B^Q}\,(\mathrm{R}\multimap)
}{}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{C^Q \Rightarrow C^Q}{!C^Q \Rightarrow ?!C^Q} \qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{A^Q \Rightarrow A^Q}{!A^Q \Rightarrow ?!A^Q}
}{!B^Q, !A^Q \Rightarrow ?!A^Q}\,(\mathrm{W}!)
}{?!B, !A^Q \Rightarrow ?!A^Q}\,(\mathrm{L}?)
}{!C^Q, ?!C^Q \multimap ?!B^Q, !A^Q \Rightarrow ?!A^Q}\,(\mathrm{L}\multimap)
}{!C^Q, !(!C^Q \multimap ?!B^Q), !A^Q \Rightarrow ?!A^Q}\,(\text{τομή})
$$

με αποτέλεσμα ο σκελετός της μεταφρασμένης απόδειξης να μην ταυτίζεται με την αρχική κλασική απόδειξη. Το πρόβλημα αυτό ξεπερνιέται αν χρησιμοποιήσουμε την μετάφραση q.

Παρατήρηση: Ομοίως με την παρατήρηση που είχαμε κάνει για το σύστημα ILU, αν μεταφράσουμε μια κλασική απόδειξη με τη μετάφραση Q, απαλείψουμε τις "τομές διόρθωσης" και θεωρήσουμε το σκελετό της, αυτός θα είναι μια κλασική απόδειξη (συγκεκριμένα στο σύστημα LKQ, παράγραφος 5.1). Αν επιπλέον μεταφράσουμε αυτή την απόδειξη με τη μετάφραση Q τότε θα πάρουμε μία διακόσμησή της. Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για τη μετάφραση T.

Συμπεραίνουμε τελικά, ότι η q-μετάφραση σχετίζεται με την Q-μετάφραση και η t-μετάφραση σχετίζεται με την T-μετάφραση, με τον ίδιο τρόπο που σχετίζεται η μετάφραση του Girard με την $(\cdot)^{\circledast}$-μετάφραση.

Οι μεταφράσεις q και t ορίζονται σύμφωνα με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.2 και φαίνονται στο Σχήμα 3.3 (για τους ατομικούς τύπους X ισχύει ότι $X^q := X$, $X^t := X$, και επίσης $\bot^q := \mathbf{0}$, $\top^q := \top$, $\bot^t := \mathbf{0}$, $\top^t := \top$).

Συνεπώς από το Θεώρημα 3.3.2 και το Πόρισμα 3.3.3, έπεται το εξής:

q	πολλαπλασιαστικοί	προσθετικοί
$(A \to B)^q$	$?!A^q \multimap ?!B^q$	$?!A^q \rightsquigarrow ?!B^q$
$(A \wedge B)^q$	$!?!A^q \otimes !?!B^q$	$?!A^q \& ?!B^q$
$(A \vee B)^q$	$?!A^q \parr ?!B^q$	$?!A^q \oplus ?!B^q$
$(\forall X A)^q$	$\forall X\, ?!A^q$	$\forall X\, ?!A^q$
$(\exists X A)^q$	$\exists X\, ?!A^q$	$\exists X\, ?!A^q$

t	πολλαπλασιαστικοί	προσθετικοί
$(A \to B)^t$	$!?A^t \multimap !?B^t$	$!?A^t \rightsquigarrow !?B^t$
$(A \wedge B)^t$	$!?A^t \otimes !?B^t$	$!?A^t \& !?B^t$
$(A \vee B)^t$	$?!?A^t \parr ?!?B^t$	$!?A^t \oplus !?B^t$
$(\forall X A)^t$	$\forall X\, !?A^t$	$\forall X\, !?A^t$
$(\exists X A)^t$	$\exists X\, !?A^t$	$\exists X\, !?A^t$

Σχήμα 3.3: Η q- και t-μετάφραση.

Πόρισμα 3.3.4. *Οι τριάδες $\langle (\cdot)^q, !, ?! \rangle$ και $\langle (\cdot)^t, !?, ? \rangle$, ορίζουν ε.σ.δ. για την κλασική λογική CL, και επιπλέον ισχύει ότι*

$$CLL \vdash !\Gamma^q \Rightarrow ?!\Delta^q \quad \textit{ανν} \quad CL \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \textit{ανν} \quad CLL \vdash !?\Gamma^t \Rightarrow ?\Delta^t.$$

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι θέλουμε να μεταφράσουμε, με κάποια από τις ε.σ.δ. που ορίζουν οι q και t μεταφράσεις, την απόδειξη ενός τυχαίου ακολουθητή. Σε όλες τις περιπτώσεις, *εκτός* από δύο, υπάρχει μόνο ένας τρόπος για να συνεχίσουμε τη διαδικασία. Για παράδειγμα υπάρχει μόνο ένας τρόπος να αποδείξουμε τον ακολουθητή $!A^q \Rightarrow ?!A^q$ από τα αξιώματα $A^q \Rightarrow A^q$, εφαρμόζοντας συμφραστικούς και αμέλειας εκθετικούς κανόνες. Αντίστοιχα αν έχουμε δοσμένες αποδείξεις για τους ακολουθητές $!?\Gamma_1^t \Rightarrow ?A^t, ?\Delta_1^t$ και $!?B^t, !?\Gamma_2^t \Rightarrow ?\Delta_2^t$, τότε υπάρχει μόνο ένας τρόπος να παράγουμε τον ακολουθητή $!?\Gamma_1^t, !?\Gamma_2^t, !?(!?A^t \multimap !?B^t) \Rightarrow ?\Delta_1^t, ?\Delta_2^t$ σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.1. Δηλαδή:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{!?\Gamma_1^t \Rightarrow ?A^t, ?\Delta_1^t}{!?\Gamma_1^t \Rightarrow !?A^t, ?\Delta_1^t}\,(\mathrm{R}!) \qquad !?B^t, !?\Gamma_2^t \Rightarrow ?\Delta_2^t}{!?\Gamma_1^t, !?\Gamma_2^t, !?A^t \multimap !?B^t \Rightarrow ?\Delta_1^t, ?\Delta_2^t}\,(\mathrm{L}\multimap)}{!?\Gamma_1^t, !?\Gamma_2^t, !?(!?A^t \multimap !?B^t) \Rightarrow ?\Delta_1^t, ?\Delta_2^t}\,(\mathrm{L}?)(\mathrm{L}!)$$

Οι εξαιρέσεις σε αυτή τη μοναδικότητα, είναι οι περιπτώσεις του (πολλαπλασιαστικού) $L\wedge$ για την q-μετάφραση, και (δυϊκά) του (πολλαπλασιαστικού) $R\vee$ για την t-μετάφραση. Ας δούμε τις λεπτομέρειες για τη δεύτερη περίπτωση. Έστω ότι έχουμε δοσμένες αποδείξεις του ακολουθητή $!?\Gamma^t \Rightarrow ?A^t, ?B^t, ?\Delta^t$

και πρέπει να αποδείξουμε τον ακολουθητή $!?\Gamma^t \Rightarrow ?(?!?A^t \invamp ?!?B^t), ?\Delta^t$ χρησιμοποιώντας μόνο εκθετικούς κανόνες αμέλειας ή/και συμφραστικούς, και τον κανόνα για το $\invamp$ (βάσει του 2 του Ορισμού 3.1.1). Αυτό μπορεί να γίνει με τους ακόλουθους δύο τρόπους:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{!?\Gamma^t \Rightarrow ?A^t, ?B^t, ?\Delta^t}{!?\Gamma^t \Rightarrow !?A^t, ?B^t, ?\Delta^t}\,(\mathrm{R}!)}{!?\Gamma^t \Rightarrow ?!?A^t, ?B^t, ?\Delta^t}\,(\mathrm{R}?)}{!?\Gamma^t \Rightarrow ?!?A^t, !?B^t, ?\Delta^t}\,(\mathrm{R}!)}{!?\Gamma^t \Rightarrow ?!?A^t, ?!?B^t, ?\Delta^t}\,(\mathrm{R}?)}{!?\Gamma^t \Rightarrow ?!?A^t \invamp ?!?B^t, ?\Delta^t}\,(\mathrm{R}\invamp)}{!?\Gamma^t \Rightarrow ?(?!?A^t \invamp ?!?B^t), ?\Delta^t}\,(\mathrm{R}?) \qquad \text{ή} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{!?\Gamma^t \Rightarrow ?A^t, ?B^t, ?\Delta^t}{!?\Gamma^t \Rightarrow ?A^t, !?B^t, ?\Delta^t}\,(\mathrm{R}!)}{!?\Gamma^t \Rightarrow ?A^t, ?!?B^t, ?\Delta^t}\,(\mathrm{R}?)}{!?\Gamma^t \Rightarrow !?A^t, ?!?B^t, ?\Delta^t}\,(\mathrm{R}!)}{!?\Gamma^t \Rightarrow ?!?A^t, ?!?B^t, ?\Delta^t}\,(\mathrm{R}?)}{!?\Gamma^t \Rightarrow ?!?A^t \invamp ?!?B^t, ?\Delta^t}\,(\mathrm{R}\invamp)}{!?\Gamma^t \Rightarrow ?(?!?A^t \invamp ?!?B^t), ?\Delta^t}\,(\mathrm{R}?)$$

Η διαφορά ανάμεσα τους, βρίσκεται στο ότι με τον αριστερό τρόπο δημιουργούμε πρώτα την τριπλή τροπικότητα ?!? για τον A και μετά για τον B, ενώ με το δεξιό τρόπο κάνουμε ακριβώς το αντίστροφο. Βέβαια και οι δύο εκδοχές είναι απολύτως σωστές και επιπλέον δεν υπάρχει λόγος να προτιμήσουμε τη μία από την άλλη. Οπότε αν μια CL-απόδειξη περιέχει n κανόνες $R\vee$, θα πρέπει να επιλέξουμε ανάμεσα σε 2^n δυνατές περιπτώσεις απόδειξης της π^t. Επομένως σε αυτό το επίπεδο (οι τροπικότητες έχουν πληθικότητα > 2), όταν απεικονίζουμε μια κλασική απόδειξη στην υποσυλλογή των γραμμικών της διακοσμήσεων, χρησιμοποιώντας μια σταθερή τροπική μετάφραση, αντιμετωπίζουμε *μη ντετερμινισμό.*

Παρατηρούμε ακόμα ότι ο μη ντετερμινισμός που παρουσιάζεται για τη δημιουργία των τριπλών τροπικοτήτων (π.χ. για την t, ?!?) αντιστοιχεί στο μη ντετερμινισμό που παρουσιάζεται κατά την αναγωγή κάποιων "λογικών" τομών (τομές όπου ο τύπος τομής προέρχεται από λογικούς κανόνες). Ειδικότερα, οι δύο διαφορετικές διακοσμήσεις που είδαμε παραπάνω (έστω π_I^t και π_{II}^t, αντίστοιχα), αντιστοιχούν στους δύο τρόπους με τους οποίους μπορούμε να απαλείψουμε σε μια κλασική απόδειξη π, τομές της μορφής

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi}{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta}\,(\mathrm{R}\vee) \qquad \dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1, A \Rightarrow \Delta_1} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_2, B \Rightarrow \Delta_2}}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \vee B \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}\,(\mathrm{L}\vee)}{\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta, \Delta_1, \Delta_2}\,(\text{τομή})$$

Τότε η π_I^t αντιστοιχεί στο βήμα αναγωγής όπου πρώτα εφαρμόζουμε τομή ανάμεσα στις π και π_1, και έπειτα στο αποτέλεσμα και την π_2 (ας το ονομάσουμε αυτό $\frac{\pi_1}{\pi_2}$). Επίσης η π_{II}^t αντιστοιχεί στο βήμα αναγωγής $\frac{\pi_2}{\pi_1}$. Σχηματικά η $\frac{\pi_1}{\pi_2}$ είναι η:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi}{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta} \qquad \overset{\pi_1}{\Gamma_1, A \Rightarrow \Delta_1}}{\Gamma, \Gamma_1 \Rightarrow B, \Delta, \Delta_1}\,(\text{τομή}) \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_2, B \Rightarrow \Delta_2}}{\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta, \Delta_1, \Delta_2}\,(\text{τομή})$$

ενώ η $\frac{\pi_1}{\pi_2}$ η:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi}{\varGamma \Rightarrow A, B, \varDelta} \quad \overset{\pi_2}{\varGamma_2, B \Rightarrow \varDelta_2}}{\varGamma, \varGamma_2 \Rightarrow A, \varDelta, \varDelta_2}\,(\text{τομή}) \qquad \overset{\pi_1}{\varGamma_1, A \Rightarrow \varDelta_1}}{\varGamma, \varGamma_1, \varGamma_2 \Rightarrow \varDelta, \varDelta_1, \varDelta_2}\,(\text{τομή})$$

Το να επιλέξουμε όμως τη μία περίπτωση από την άλλη έχει διαφορά, καθώς αν θέλουμε να απαλείψουμε την τομή από μια κλασική απόδειξη που περιέχει τομές όπως αυτή του παραδείγματος, οι δύο επιλογές ενδεχομένως να οδηγήσουν σε διαφορετικές κανονικές μορφές.

Όλα αυτά επομένως, μας δείχνουν πως γίνεται η συσχέτιση των επιλογών στις ε.σ.δ., με το μη ντετερμινισμό του θεωρήματος απαλοιφής της τομής για την κλασική περίπτωση. Οπότε για να ξεπεράσουμε αυτό το σκόπελο, θα πρέπει να προσθέσουμε πληροφορία στους CL τύπους, ή κανόνες και την οποία βέβαια θα πρέπει να ενσωματώσουμε και στις μεταφράσεις. Περισσότερα για αυτό το πρόβλημα αλλά και την αντιμετώπισή του θα αναφέρουμε στο Κεφάλαιο 5.

Συμπεράσματα

Αν θεωρήσουμε μια απόδειξη π στη CL, και τη μεταφράσουμε με τη μετάφραση q (ή t), θα λάβουμε μία CLL-απόδειξη π^q (αντίστοιχα π^t). Την απόδειξη π^q (αντίστοιχα π^t) μπορούμε να την κανονικοποιήσουμε βάσει του γραμμικού αλγορίθμου κανονικοποίησης. Ωστόσο εξαιτίας του μη ντετερμινισμού των μεταφράσεων q και t, που αναφέραμε νωρίτερα, δεν μπορούμε να μεταφέρουμε τις ιδιότητες της γραμμικής διαδικασίας απαλοιφής της τομής στο σύστημα CL, διότι δεν θα αποδεικνύεται η ιδιότητα συμβολής. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε την κλασική απόδειξη π της σελίδας 50, τότε η π^t θα κατασκευάζει την τριπλή τροπικότητα είτε πρώτα στο A, είτε πρώτα στο B. Συνεπώς προκύπτουν δύο δυνατές διαδικασίες (ή μία μη-ντετερμινιστική) για να απαλειφθεί η τομή, ως "ανακλάσεις" των διαδικασιών για τις δύο διαφορετικές π^t που μπορούμε να λάβουμε, οι οποίες ενδεχομένως να δώσουν διαφορετικές κανονικές μορφές. Αν τώρα σε κάποια κλασική απόδειξη υπήρχαν πολλές τομές όπως αυτή της π της σελίδας 50, είναι εύκολα κατανοητό πως το πρόβλημα παίρνει τεράστιες διαστάσεις. Επομένως παρατηρούμε ότι για τις ενδεχόμενες διαδικασίες απαλοιφής της τομής που θα προκύψουν, για το CL, οι τριάδες $\langle (\cdot)^q, !, ?! \rangle$ και $\langle (\cdot)^t, !?, ? \rangle$ δεν είναι ισχυρές ως προς αυτές (αν δεν κάνουμε επιλογές όταν μεταφράζουμε). Για να βρεθεί τελικά μία ισχυρά κανονικοποιήσιμη διαδικασία[5] για το CL, η οποία θα συμβάλει, θα πρέπει να προσθέσουμε κάποια πληροφορία στο σύστημα. Λεπτομέρειες θα δούμε στην παράγραφο 5.2.

Παρ' όλ' αυτά, αν θεωρήσουμε κάποια τμήματα της κλασικής λογικής, όπως για παράδειγμα το $\{\rightarrow, \forall\}$, παρατηρούμε ότι οι μεταφράσεις q και t είναι

[5] Θέλουμε οι τριάδες $\langle (\cdot)^q, !, ?! \rangle$ και $\langle (\cdot)^t, !?, ? \rangle$ να είναι ισχυρές ως προς αυτή.

εντελώς ντετερμινιστικές. Επιπλέον κάθε μία από αυτές ορίζει, μια διαδικασία απαλοιφής της τομής στην αρχική κλασική απόδειξη, ως την "ανάκλαση" της γραμμικής διαδικασίας απαλοιφής της τομής που εφαρμόζεται στις μεταφράσεις (με άλλα λόγια, οι q- και t-μεταφράσεις είναι **ισχυρές**, ως προς τις αντίστοιχες διαδικασίες απαλοιφής της τομής).

Έπεται πλέον από την ισχυρή κανονικοποίηση της γραμμικής λογικής, ότι η διαδικασία απαλοιφής της τομής σε κλασικά τμήματα, όπως το $\{\rightarrow,\forall\}$, *τερματίζει πάντα*. Επίσης η ιδιότητα συμβολής (μοναδικότητα της κανονικής μορφής) ως προς αντιμετάθεση δομικών κανόνων, λόγω της ισχύος της στο CLL, μεταφέρεται σε τέτοια κλασικά τμήματα με την εξής έννοια: *κάθε t ή q διακοσμημένη κανονική μορφή, αντιστοιχεί στο ίδιο δίκτυο απόδειξης*. Περισσότερες λεπτομέρειες για το πως ακριβώς γίνονται αυτά, υπάρχουν στο Κεφάλαιο 5, όπου εκεί θα αναφερθούμε σε πλήρη συστήματα κλασικής λογικής.

Κεφάλαιο 4

Η μέθοδος απάλειψης

Στην παράγραφο 3.3 αναφερθήκαμε στις πληθωρικές μεταφράσεις q και t, οι οποίες ορίζουν ε.σ.δ. για την κλασική λογική. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε τη θεωρία που χρειάζεται, ούτως ώστε να αποδείξουμε ότι οι μεταφράσεις q και t ορίζουν ουσιαστικά, τις μοναδικές ε.σ.δ. για την κλασική λογική.

Η γενική ιδέα είναι ότι για κάθε απόδειξη π στο δευτεροβάθμιο λογισμό ακολουθητών CLL, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον *εκθετικό γράφο* της, ο οποίος επιδεικνύει τις αλληλοεξαρτήσεις των εκθετικών στην π. Σε αυτό το γράφο ορίζουμε τα *περιττά* εκθετικά της π, των οποίων η *διαγραφή* οδηγεί σε μία σωστή γραμμική απόδειξη $\pi^{\triangleright}$, η οποία έχει την ίδια δυναμική με την π. Αναφερόμενοι σε *δυναμική* των αποδείξεων, εννοούμε τη συμπεριφορά τους κατά την κανονικοποίηση, δηλαδή το σύνολο αναγωγών που απαιτείται για να απαλειφθούν οι τομές τους. Επομένως δύο αποδείξεις έχουν την ίδια *δυναμική*, όταν, κατά την κανονικοποίησή τους, εφαρμόζονται τα ίδια στοιχειώδη βήματα αναγωγής για να απαλειφθούν οι τομές τους (δηλαδή όταν έχουν το ίδιο σύνολο αναγωγών). Συνεπώς, ορίζουμε τα *περιττά* εκθετικά ως εξής:

Ορισμός 4.0.1. *Ένα εκθετικό ! ή ? σε μια γραμμική απόδειξη, το οποίο δεν προκύπτει, άμεσα ή έμμεσα, από κάποιο στιγμιότυπο δομικού κανόνα, είναι* **περιττό**, *αν διαγράφοντάς το λαμβάνουμε μία απόδειξη που (1) είναι σωστή και (2) έχει την ίδια δυναμική με την αρχική.*

Επομένως το να διαγράφουμε εκθετικά από γραμμικές αποδείξεις, σημαίνει ότι οδηγούμαστε σε απλούστερες γραμμικές αποδείξεις στις οποίες είναι απόλυτα κατανοητό που ακριβώς βρίσκονται οι περιορισμοί της μη-γραμμικότητας. Συνεπώς ισχύει ότι "*όσο λιγότερα εκθετικά, τόσο περισσότερη πληροφορία*".

4.1 Ταυτοτικές κλάσεις

Εκτός των δύο περιορισμών που δημιουργούνται στο περιβάλλον των δομικών και των συμφραστικών εκθετικών κανόνων (τους οποίους αναφέρουμε ως το *δομικό* και το *συμφραστικό* περιορισμό), υπάρχει, όπως και για κάθε λογισμό ακολουθητών, ακόμη ένας προφανής περιορισμός. Αυτός ουσιαστικά είναι μια αυτονόητη σύμβαση για τη γραφή των συστημάτων. Συγκεκριμένα, όταν γράφουμε κανόνες ή αποδείξεις απαιτούμε την ταυτότητα κάποιων (υπο)τύπων που εμφανίζονται στους ακολουθητές. Ο περιορισμός αυτός αναφέρεται ως ο *ταυτοτικός* περιορισμός. Για παράδειγμα οι εμφανίσεις των τύπων που ανήκουν στα $!\Gamma$ και $?\Delta$, στην υπόθεση και στο συμπέρασμα κάποιου εκθετικού κανόνα αμέλειας, είναι εμφανίσεις ταυτοτικών τύπων. Η *σχέση ταυτότητας* ανάμεσα σε τύπους προκύπτει ρητά από τον εξής ορισμό.

Ορισμός 4.1.1. *Καλούμε τις εμφανίσεις ενός (υπο)τύπου σε μια απόδειξη* **ταυτοτικές***, όταν είναι οι αντίστοιχες εμφανίσεις του ίδιου*[1] *(υπο)τύπου*

- *στους δύο τύπους σε ένα αξίωμα*
- *στους τύπους τομής σε ένα κανόνα τομής*
- *στους τύπους που αφαιρούνται*[2] *(δηλαδή στους T ή Y) σε ένα δευτεροβάθμιο κανόνα*
- *σε έναν ενεργό τύπο και στον αντίστοιχο υποτύπο του κύριου τύπου σε ένα λογικό ή εκθετικό κανόνα (στην περίπτωση των κανόνων $L\forall_2$ και $R\exists_2$, κάθε κύριος υποτύπος μιας εμφάνισης τύπου που αφαιρείται, δεν έχει "αντίστοιχο" στον ακολουθητή του συμπεράσματος του κανόνα)*
- *στις πάνω και κάτω εμφανίσεις των παθητικών ή "εμμέσως ενεργών" τύπων σε ένα κανόνα (αυτό περιλαμβάνει και την εμφανή συστολή του περιβάλλοντος που συμβαίνει στους προσθετικούς, δύο υποθέσεων, κανόνες).*

Στη συνέχεια **ορίζουμε** με "$\sim$" την *ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική κλειστότητα της σχέσης ταυτότητας.* Τότε, παρατηρούμε ότι όλα τα στοιχεία μιας $\sim$-κλάσης ισοδυναμίας (ή ταυτοτικής κλάσης) είναι εμφανίσεις του ίδιου (υπο)τύπου (σύμφωνα με αντικατάσταση).[3] Στο εξής θα ασχοληθούμε μόνο με κλάσεις που περιέχουν τουλάχιστον έναν τύπο του οποίου ο κύριος σύνδεσμος είναι κάποιο εκθετικό. Θα **συμβολίζουμε** το σύνολο τέτοιων κλάσεων σε μια απόδειξη π, με $\mathcal{E}(\pi)$.

Παράδειγμα:

Έστω ένα γραμμικό θεώρημα N. Τότε έχουμε την ακόλουθη CLL-απόδειξη

[1] Ακριβώς του ίδιου ή, στην περίπτωση των κανόνων ποσοδεικτών, του ίδιου σύμφωνα με αντικατάσταση.

[2] Με την έννοια της αφαίρεσης ως δέσμευση, όπως αυτή εκφράζεται από το Λ του συστήματος F του Girard. Συγκεκριμένα ένας όρος καθολικής εφαρμογής $(\Lambda X.t)B$, θα έχει τύπο της μορφής $A[B/X]$.

[3] Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$N \Rightarrow N$}
\doubleLine
\RightLabel{(L!)(R!)}
\UnaryInfC{$!_1 N \Rightarrow !_1 N$}
\RightLabel{(R$\multimap$)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow !_1 N \multimap !_1 N$}
\RightLabel{(R!)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow !_2(!_1 N \multimap !_1 N)$}
\AxiomC{$\Rightarrow N$}
\RightLabel{(R!)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow !_1 N$}
\AxiomC{$N \Rightarrow N$}
\doubleLine
\RightLabel{(L!)(R!)}
\UnaryInfC{$!_1 N \Rightarrow !_1 N$}
\RightLabel{(L$\multimap$)}
\BinaryInfC{$!_1 N \multimap !_1 N \Rightarrow !_1 N$}
\RightLabel{(L$\multimap$)}
\BinaryInfC{$!_2(!_1 N \multimap !_1 N) \multimap (!_1 N \multimap !_1 N) \Rightarrow !_1 N$}
\RightLabel{(L$\forall_2$)}
\UnaryInfC{$\forall X !_2(X \multimap X) \multimap (X \multimap X) \Rightarrow !_1 N$}
\end{prooftree}
$$

Παρατήρηση: Χρησιμοποιούμε εκθετικά με δείκτες για να ξεχωρίσουμε τις !-ταυτοτικές κλάσεις.

Βλέπουμε επομένως ότι όλες οι εμφανίσεις του $!N$ ανήκουν στην ίδια ταυτοτική κλάση και επιπλέον $!(!N \multimap !N) \sim !(X \multimap X)$.

Αν όμως στο τελευταίο βήμα της απόδειξης θεωρούσαμε ως τύπο που αφαιρείται, αντί του $!N$ τον $!N \multimap !N$ (καταλήγοντας έτσι στον ακολουθητή $\forall X !X \multimap X \Rightarrow !N$), η αριστερή εμφάνιση του $!N$ στον τύπο $!N \multimap !N$ θα μπορούσε να μην ανήκει στην ίδια ταυτοτική κλάση με την αντίστοιχη δεξιά. Για παράδειγμα, η απόδειξη θα μπορούσε να είναι ως εξής:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$N \Rightarrow N$}
\doubleLine
\RightLabel{(L!)(R!)}
\UnaryInfC{$!_1 N \Rightarrow !_1 N$}
\RightLabel{(R$\multimap$)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow !_1 N \multimap !_1 N$}
\RightLabel{(R!)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow !_2(!_1 N \multimap !_1 N)$}
\AxiomC{$\Rightarrow N$}
\RightLabel{(R!)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow !_3 N$}
\AxiomC{$N \Rightarrow N$}
\doubleLine
\RightLabel{(L!)(R!)}
\UnaryInfC{$!_4 N \Rightarrow !_4 N$}
\RightLabel{(L$\multimap$)}
\BinaryInfC{$!_3 N \multimap !_4 N \Rightarrow !_4 N$}
\RightLabel{(L$\multimap$)}
\BinaryInfC{$!_2(!_1 N \multimap !_1 N) \multimap (!_3 N \multimap !_4 N) \Rightarrow !_4 N$}
\RightLabel{(L$\forall_2$)}
\UnaryInfC{$\forall X !_2 X \multimap X \Rightarrow !_4 N$}
\end{prooftree}
$$

4.2 Θεωρία διαγραφής εκθετικών

Στην παράγραφο αυτή θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε όλες τις απαραίτητες προτάσεις, στοχεύοντας στο να καταλάβουμε ακριβώς ποια είναι τα περιττά εκθετικά, τα οποία μπορούμε να απαλείψουμε από κάποια γραμμική απόδειξη λαμβάνοντας μια άλλη που θα είναι σωστή και θα έχει την ίδια δυναμική με την αρχική.

Καταρχήν ας δώσουμε τους ορισμούς των εννοιών που θα χρησιμοποιήσουμε.

Ορισμός 4.2.1. *Έστω μια γραμμική απόδειξη π και E ένα υποσύνολο του $\mathcal{E}(\pi)$. Ορίζουμε το* **πεδίο** *του E, ως την ένωση των κλάσεων που περιέχει.*

Ορισμός 4.2.2. *Ορίζουμε ως* **απάλειψη**, *τη συνάρτηση ταυτόχρονης διαγραφής στην απόδειξη π, όλων των εξωτερικών εκθετικών του πεδίου του E. Η ψευδο-απόδειξη που προκύπτει (γενικά μπορεί να μην είναι απόδειξη) δηλώνεται ως $\pi - E$. Το αντίστοιχο στιγμιότυπο ενός κανόνα r, γράφεται $r - E$.*

Παρατηρούμε τώρα το εξής: κάθε τύπος B στην π εμφανίζεται ξανά στην $\pi - E$, ίσως κάπως τροποποιημένος. Συγκεκριμένα τροποποιείται αν και μόνον αν κάποιος τύπος $!A$ ή $?A$ που ανήκει σε κάποια από τις κλάσεις του E είναι υποτύπος του B στην π. Θα μπορούσαμε να δηλώσουμε αυτές τις τροποποιήσεις, δηλώνοντας τον τροποποιημένο τύπο B, ως $B - E$. Ωστόσο χωρίς να προκαλείται σύγχυση θα δηλώνουμε τον, ίσως τροποποιημένο τύπο, πάλι με B.

Ορισμός 4.2.3. *Έστω κάποιος συμφραστικός κανόνας r (ή αλλιώς, σε αναλογία με το φορμαλισμό των δικτύων απόδειξης, κανόνας "κουτιού") στην π, του οποίου η εμφάνιση του κύριου τύπου ανήκει σε κάποια κλάση e και η εμφάνιση ενός "εμμέσως ενεργού" τύπου ανήκει σε κάποια κλάση e'. Τότε, το e* **δεσμεύει** *το e' (διαμέσου του r) και γράφουμε $e \curvearrowright_1 e'$.*

Η μεταβατική κλειστότητα της σχέσης $\curvearrowright_1$ καλείται *δέσμευση* και δηλώνεται ως $\curvearrowright$. (Επίσης, μερικές φορές γράφουμε $s \curvearrowright_1 s'$ και $s \curvearrowright s'$, για κύρια υποσύνολα κλάσεων.)

Από τα προηγούμενα, ορίζεται ένας κατευθυνόμενος γράφος, ο *εκθετικός γράφος* $\mathcal{G}(\pi)$ της π.

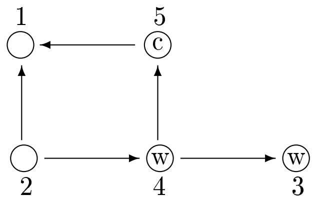
Ορισμός 4.2.4. *Ο* **εκθετικός γράφος** *$\mathcal{G}(\pi)$ της π, είναι ο γράφος που σχηματίζεται ως εξής:*

- *Οι κορυφές του είναι οι κλάσεις που ανήκουν στο $\mathcal{E}(\pi)$*
- *Οι ακμές του είναι βέλη που προκύπτουν με τον ακόλουθο τρόπο: αν οι e και e' είναι κορυφές του γράφου, τότε υπάρχει βέλος από την e στην e' αν και μόνον αν $e \curvearrowright_1 e'$.*

Τέλος, αν μια εμφάνιση ενός στοιχείου μιας κλάσης e, είναι κύριος τύπος σε κάποιο δομικό κανόνα στην π, τότε μαρκάρουμε την αντίστοιχη κορυφή του **εκθετικού γράφου** *με "w" (για εξασθένηση), "c" (για συστολή) και "w+ c" (για εξασθένηση και συστολή), σύμφωνα με το δομικό κανόνα στον οποίο κάποιο από τα στοιχεία του e εμφανίζεται σαν κύριος τύπος.*

Στο Σχήμα 4.1 δίνουμε ένα παράδειγμα μιας απόδειξης π και του εκθετικού της γράφου. Τα σημεία όπου γίνονται οι *δεσμεύσεις* σημειώνονται με $\hat{\Rightarrow}$.

Ορισμός 4.2.5. *Ένα σύνολο $E \subset \mathcal{E}(\pi)$ καλείται* **κορεσμένο** *(saturated) (ή ικανοποιεί τη* **συνθήκη κορεσμού***), στην περίπτωση που για όλα τα $e' \in E$, αν $e \curvearrowright e'$ για κάποιο $e \in \mathcal{E}(\pi)$, τότε επίσης $e \in E$. Αν καμία κλάση στο E δεν είναι μαρκαρισμένη τότε λέμε ότι το E επιβεβαιώνει τη συνθήκη* **μη δομικότητας** *(no sources). Αν το E ικανοποιεί και τη συνθήκη κορεσμού και της μη δομικότητας, τότε λέμε ότι είναι* **όχι σχετικά εκθετικοποιημένο** *(not relevantly exponentiated), ή συντομογραφικά* **σ.κ.μ.δ.** *(τα αρχικά προέρχονται από το γεγονός ότι ικανοποιεί τις* **σ**υνθήκες **κ**ορεσμού και **μ**η **δ**ομικότητας*), στην π. Ένα* **redex** *είναι ένα μη-κενό σύνολο E το οποίο είναι σ.κ.μ.δ. και ελαχιστικό. Επομένως κανένα κύριο υποσύνολο του E δεν είναι σ.κ.μ.δ..*



$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, !_4(!_3A \multimap A) \Rightarrow A}}{!_1A, !_4(!_3A \multimap A) \Rightarrow A}}{!_1A, !_4(!_3A \multimap A) \overset{\frown}{\Rightarrow} !_2A}}{!_1A \Rightarrow !_4(!_3A \multimap A) \multimap !_2A}}{!_1A \overset{\frown}{\Rightarrow} !_5(!_4(!_3A \multimap A) \multimap !_2A)}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, !_3A \Rightarrow A}}{A \Rightarrow !_3A \multimap A}}{!_3A \Rightarrow !_3A \multimap A}}{!_3A \overset{\frown}{\Rightarrow} !_4(!_3A \multimap A)} \quad \dfrac{A \Rightarrow A}{!_2A \Rightarrow A}}{!_3A, !_4(!_3A \multimap A) \multimap !_2A \Rightarrow A}}{!_4(!_3A \multimap A) \multimap !_2A \Rightarrow !_3A \multimap A}}{!_5(!_4(!_3A \multimap A) \multimap !_2A) \Rightarrow !_3A \multimap A}}{!_5(!_4(!_3A \multimap A) \multimap !_2A) \overset{\frown}{\Rightarrow} !_4(!_3A \multimap A)} \quad \dfrac{A \Rightarrow A}{!_2A \Rightarrow A}}{!_5(!_4(!_3A \multimap A) \multimap !_2A), !_4(!_3A \multimap A) \multimap !_2A \Rightarrow A}}{!_5(!_4(!_3A \multimap A) \multimap !_2A), !_5(!_4(!_3A \multimap A) \multimap !_2A) \Rightarrow A}}{!_5(!_4(!_3A \multimap A) \multimap !_2A) \Rightarrow A}
}{!_1A \Rightarrow A}
$$

Σχήμα 4.1: Μια απόδειξη και ο εκθετικός της γράφος.

Η παραπάνω ορολογία αποκτάει νόημα, καθώς τα εκθετικά που προτάσσονται στα στοιχεία των κλάσεων, σε ένα σ.κ.μ.δ. σύνολο E της π, είναι όπως λέμε, *περιττά*.

Έχοντας πλέον ορίσει ό,τι χρειαζόμαστε, θα αποδείξουμε μια σειρά από προτάσεις και λήμματα, τα οποία θα αποτελέσουν τα εργαλεία για την απόδειξη του βασικού Θεωρήματος 4.2.16.

Πρόταση 4.2.6. (Η απάλειψη σέβεται την ορθότητα) *Έστω π μια απόδειξη, r ένας κανόνας στην π, και E σ.κ.μ.δ. σύνολο στην π. Τότε ο κανόνας $r - E$ είναι σωστός κανόνας, και έπεται ότι η $\pi - E$ είναι μια σωστή απόδειξη. Ειδικότερα, είτε οι $r - E$ και r είναι στιγμιότυπα του ιδίου κανόνα, ή $r - E$ είναι ένας κανόνας επανάληψης.*

Απόδειξη. Καταρχήν παρατηρούμε ότι για κάθε κανόνα r, επειδή μόνο οι κλάσεις απλοποιούνται, όλοι οι ταυτοτικοί περιορισμοί ικανοποιούνται στον $r - E$. Τώρα αν r είναι κανόνας "κουτιού", από τη συνθήκη κορεσμού (η οποία ουσιαστικά λέει ότι όταν γίνεται απάλειψη στην κλάση της "εμμέσως ενεργής" εμφάνισης, τότε γίνεται και στην κλάση της κύριας), οι (ενδεχόμενοι) συμφραστικοί περιορισμοί ικανοποιούνται για τον $r - E$. Τελικά, αν r είναι ένας δομικός κανόνας, από τη συνθήκη μη δομικότητας, ικανοποιούνται και οι δομικοί περιορισμοί. Τέλος παρατηρούμε ότι ο κανόνας $r - E$ είναι κανόνας επανάληψης μόνο όταν ο r εισάγει κάποιο εκθετικό που στη συνέχεια απαλείφεται, δηλαδή όταν ο r είναι ένας εκθετικός κανόνας του οποίου ο κύριος τύπος ανήκει στο πεδίο του E. □

Παρατήρηση: Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι όλες οι εμφανίσεις του κανόνα επανάληψης στην $\pi - E$ παραλείπονται. Δηλαδή ουσιαστικά ταυτίζουμε τις επαναλήψεις ακολουθητών.

Λήμμα 4.2.7. *Αν E_1 και E_2 είναι σ.κ.μ.δ., τότε σ.κ.μ.δ. είναι και τα $E_1 \cap E_2$ και $E_1 \cup E_2$.*

Απόδειξη. Το $E_1 \cap E_2$ είναι κορεσμένο διότι, έστω $e' \in E_1 \cap E_2$. Άρα $e' \in E_1$ και $e' \in E_2$. Αν $e \in \mathcal{E}(\pi)$ και $e \curvearrowright e'$, τότε $e \in E_1$ και $e \in E_2$ (από κορεσμό των E_1 και E_2). Άρα $e \in E_1 \cap E_2$. Επίσης το $E_1 \cap E_2$ ικανοποιεί τη συνθήκη μη δομικότητας γιατί την ικανοποιούν και τα E_1 και E_2.

Το $E_1 \cup E_2$ είναι κορεσμένο διότι, έστω $e' \in E_1 \cup E_2$. Άρα $e' \in E_1$ ή $e' \in E_2$. Αν $e \in \mathcal{E}(\pi)$ και $e \curvearrowright e'$, τότε, αν $e' \in E_1$ έπεται ότι $e \in E_1$, ενώ αν $e' \in E_2$, έπεται ότι $e \in E_2$. Επομένως $e \in E_1 \cup E_2$. Επίσης το $E_1 \cup E_2$ ικανοποιεί τη συνθήκη μη δομικότητας γιατί την ικανοποιούν και τα E_1 και E_2. □

Από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι το $\mathcal{E}(\pi)$ περιέχει ένα σ.κ.μ.δ. σύνολο, που είναι μεγαλύτερο από όλα τα υπόλοιπα. Το σύνολο αυτό το **δηλώνουμε** ως $E_{max}(\pi)$ και είναι το μεγαλύτερο κορεσμένο υποσύνολο του $\mathcal{E}(\pi)$, του οποίου καμία κορυφή δεν είναι μαρκαρισμένη.

Λήμμα 4.2.8. *Έστω E ένα σ.κ.μ.δ. σύνολο. Τότε $\mathcal{E}(\pi - E) = \mathcal{E}(\pi) \setminus E$, και ο εκθετικός γράφος της $\pi - E$ είναι ένας πλήρης υπογράφος του αντίστοιχου της π.*

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός ισχύει, διότι όλες οι κλάσεις που δεν ανήκουν στο E παραμένουν ως κλάσεις της $\pi - E$. Επιπλέον όλες οι κλάσεις της $\pi - E$ είναι και κλάσεις της π. Για το δεύτερο ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι για $e, e' \in \mathcal{E}(\pi) \setminus E$ ισχύει ότι: $e' \curvearrowright_1 e$ στην $\pi - E$ αν και μόνον αν $e' \curvearrowright_1 e$ στην π (το ευθύ είναι άμεσο αφού οι κλάσεις της $\pi - E$ είναι και κλάσεις της π, ενώ το αντίστροφο ισχύει λόγω του πρώτου ισχυρισμού). Άρα οι γραμμές (βέλη) του εκθετικού γράφου της $\pi - E$ υπάρχουν στον αντίστοιχο της π. Ο εκθετικός γράφος όμως της $\pi - E$ θα έχει λιγότερες κορυφές, από αυτόν της π. Οπότε $\mathcal{G}(\pi - E) \subset \mathcal{G}(\pi)$. □

Λήμμα 4.2.9. *Αν E, E' είναι σ.κ.μ.δ. στην π και E' είναι ένα υποσύνολο του E, τότε $E \setminus E'$ είναι σ.κ.μ.δ. στην $\pi - E'$.*

Απόδειξη. Αφού καμία κλάση στο E δεν είναι μαρκαρισμένη, το ίδιο ισχύει και στο $E \setminus E'$. Άρα η συνθήκη μη δομικότητας ικανοποιείται. Έστω τώρα $e' \in E \setminus E'$ και έστω $e \in \mathcal{E}(\pi - E') = \mathcal{E}(\pi) \setminus E'$, τέτοιο ώστε $e \curvearrowright_1 e'$. Θα δείξουμε ότι $e \in E \setminus E'$. Έχουμε ότι $e' \in E \setminus E'$, δηλαδή $e' \in E$, $e' \notin E'$ και $e' \in \mathcal{E}(\pi)$. Επομένως $e \curvearrowright_1 e'$ στην π. Άρα $e \in E$ (αφού το E είναι σ.κ.μ.δ. στην π). Όμως $e \notin E'$, διότι $e \curvearrowright_1 e'$ στην $\pi - E'$ (αφού το E' είναι σ.κ.μ.δ. στην $\pi - E'$). Οπότε ικανοποιείται και η συνθήκη κορεσμού. □

Λήμμα 4.2.10. *Έστω ότι το σύνολο E_1 είναι σ.κ.μ.δ. στην π. Τότε το σύνολο E_2 είναι σ.κ.μ.δ. στην $\pi - E_1$ αν και μόνον αν $E_1 \cup E_2$ είναι σ.κ.μ.δ. στην π.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Αφού τα E_1, E_2 είναι σ.κ.μ.δ., έπεται ότι καμία κλάση τους δεν είναι μαρκαρισμένη, κάτι που ισχύει και για το $E_1 \cup E_2$. Τώρα, έστω ότι το $e' \in \mathcal{E}(\pi)$ *δεσμεύει* κάποιο στοιχείο του E_1. Άρα $e' \in E_1$ από τη συνθήκη κορεσμού για το E_1. Αν $e' \in \mathcal{E}(\pi)$ *δεσμεύει* κάποιο στοιχείο του E_2, το οποίο δεν ανήκει στο E_1, τότε $e' \in \mathcal{E}(\pi - E_1)$, άρα $e' \in E_2$ από τη συνθήκη κορεσμού για το E_2. Άρα $E_1 \cup E_2$ είναι σ.κ.μ.δ. στην π.

($\Leftarrow$) Έστω $E_1 \cup E_2$ σ.κ.μ.δ. στην π. Επίσης $E_1 \subseteq E_1 \cup E_2$ σ.κ.μ.δ. στην π. Από το Λήμμα 4.2.9 το $E_1 \cup E_2 \setminus E_1$ (δηλαδή το E_2), είναι σ.κ.μ.δ. στην $\pi - E_1$. □

Πρόταση 4.2.11. *Έστω R_1, R_2 δύο διαφορετικά redexes στην π. Τότε το R_2 είναι redex στην $\pi - R_1$.*

Απόδειξη. $R_1 \neq R_2$. Άρα $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Επιπλέον από το Λήμμα 4.2.7 το σύνολο $R_1 \cap R_2$ είναι σ.κ.μ.δ. στην π. Επίσης από το Λήμμα 4.2.8 ισχύει ότι $\mathcal{E}(\pi - R_1) = \mathcal{E}(\pi) \setminus R_1$. Όμως $R_2 \subseteq \mathcal{E}(\pi)$ και επειδή $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ έπεται ότι $R_2 \subseteq \mathcal{E}(\pi) \setminus R_1$. Δηλαδή το R_2 είναι redex στην $\pi - R_1$. □

Πόρισμα 4.2.12. *Έστω R_1, R_2 δύο διαφορετικά redexes. Τότε η $(\pi - R_1) - R_2$ είναι μια σωστή γραμμική απόδειξη, η οποία ισούται με την $(\pi - R_2) - R_1$.*

Απόδειξη. Άμεσο από την Πρόταση 4.2.6 επειδή τα R_1 και R_2 είναι σ.κ.μ.δ.. □

Στη συνέχεια ορίζουμε μια αναγωγή $\rhd$ πάνω στις γραμμικές αποδείξεις ως εξής:

Ορισμός 4.2.13. *Η απόδειξη π **ανάγεται** στην απόδειξη $\pi - R$, για κάθε R που είναι redex της π, και γράφουμε $\pi \rhd \pi - R$.*

Τώρα, δοθείσης μιας απόδειξης π, ο αριθμός των πιθανών redexes στην π είναι πεπερασμένος. Άρα όλες οι $\rhd$-ακολουθίες αναγωγών είναι πεπερεσμένες και τερματίζουν σε κάποια $\rhd$-κανονική μορφή. Επομένως, για κάθε απόδειξη π μπορούμε να λάβουμε τη *μοναδική* $\rhd$-κανονική της μορφή, την οποία δηλώνουμε ως $\pi^{\rhd}$. Επιπλέον η αναγωγή $\rhd$ ορίζει ένα πλήρες δικτυωτό (lattice) από γραμμικές αποδείξεις, το "$\rhd$-δικτυωτό της π".

Ορισμός 4.2.14. *Το* **"$\rhd$-δικτυωτό της** *π", είναι μια δομή (δικτυωτό) με μέγιστο (top) στοιχείο την π, ελάχιστο (bottom) στοιχείο την $\pi^{\rhd}$, και ισχύει ότι $\pi_i \rhd \pi_j$ αν και μόνον αν υπάρχει μια (πιθανόν κενή) $\rhd$-ακολουθία αναγωγών από την π_i στην π_j.*

Έπεται τώρα το εξής σημαντικό λήμμα:

Λήμμα 4.2.15. *Αν E είναι σ.κ.μ.δ. στην π, τότε (1) $\pi \rhd \pi - E$ και (2) $E_{max}(\pi - E) = E_{max}(\pi) \setminus E$.*

Απόδειξη. (1) Με περιπτώσεις, ελέγχοντας το σύνολο E.

- Αν το E είναι redex, τότε ισχύει από τον ορισμό.
- Έστω ότι το E περιέχει κάποιο redex R. Τότε το $E \setminus R$, λόγω του Λήμματος 4.2.6 και του ορισμού για τα redexes, πρέπει να είναι και αυτό redex. Άρα $\pi \rhd \pi - R \rhd (\pi - R) - E \setminus R = (\pi - E \setminus R) - R$ (από Πόρισμα 4.2.12) $= (\pi - E)$.

(2) Ισχύει ότι $E \subseteq E_{max}(\pi)$ και $E_{max}(\pi)$ είναι σ.κ.μ.δ. στην π. Από το Λήμμα 4.2.9 έπεται ότι το σύνολο $E_{max}(\pi) \setminus E$ είναι σ.κ.μ.δ. στην $\pi - E$ και μάλιστα το μέγιστο σ.κ.μ.δ. της $\pi - E$, διότι προς άτοπο, έστω $E' = E_{max}(\pi - E)$. Άρα $E_{max}(\pi) \setminus E \subseteq E'$. Τότε επειδή το E είναι σ.κ.μ.δ. στην π και το E' είναι σ.κ.μ.δ. στην $\pi - E$, έπεται ότι το σύνολο $E \cup E'$ είναι σ.κ.μ.δ. στην π (Λήμμα 4.2.10). Όμως τότε $(E_{max}(\pi) \setminus E) \cup E \subseteq E \cup E'$, δηλαδή $E_{max}(\pi) \subseteq E \cup E'$ στην π. Άτοπο, από τον ορισμό του $E_{max}(\pi)$. Επομένως $E_{max}(\pi - E) = E_{max}(\pi) \setminus E$. □

Έχουμε πλέον αποδείξει ό,τι χρειάζεται, για να δείξουμε και το βασικό θεώρημα το οποίο ουσιαστικά μας λέει ότι τα περιττά εκθετικά σε μια απόδειξη π είναι αυτά που ανήκουν στο μεγαλύτερο σ.κ.μ.δ. υποσύνολο του $\mathcal{E}(\pi)$.

Θεώρημα 4.2.16. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*
(1) $\pi^{\rhd} = \pi - E_{max}(\pi)$
(2) ο εκθετικός γράφος της $\pi^{\rhd}$ είναι ακριβώς η ένωση όλων των κατευθυνόμενων μονοπατιών στο γράφο της π, που ξεκινάνε από κάποια μαρκαρισμένη κορυφή.

Απόδειξη. (1) Από το Λήμμα 4.2.15, ισχύει ότι $\pi \rhd \pi - E_{max}(\pi)$. Άρα $\pi - E_{max}(\pi) \rhd \pi^{\rhd}$ (αφού η $\pi^{\rhd}$ είναι η $\rhd$-κανονική μορφή της π). Αλλά $E_{max}(\pi - E_{max}(\pi)) = E_{max}(\pi) \setminus E_{max}(\pi) = \emptyset$ (από Λήμμα 4.2.15). Άρα η $\pi - E_{max}(\pi)$ δεν περιέχει σ.κ.μ.δ. σύνολα, δηλαδή $\pi - E_{max}(\pi) = \pi^{\rhd}$.
(2) Το σύνολο $E_{max}(\pi)$ είναι εξ' ορισμού σ.κ.μ.δ.. Άρα από το Λήμμα 4.2.8 έπεται ότι $\mathcal{E}(\pi - E_{max}(\pi)) = \mathcal{E}(\pi^{\rhd}) = \mathcal{E}(\pi) \setminus E_{max}(\pi)$ και $\mathcal{G}(\pi - E_{max}(\pi)) = \mathcal{G}(\pi^{\rhd}) \subset \mathcal{G}(\pi)$. Επιπλέον το $\mathcal{G}(\pi^{\rhd})$ προκύπτει απαλείφοντας τους κορεσμένους υπογράφους του γράφου της π, που δεν περιέχουν μαρκαρισμένες κορυφές. □

Συνεπώς δείξαμε σε αυτή την παράγραφο ότι: *η κλάση e παραμένει στην $\pi^{\triangleright}$ αν και μόνον αν η αντίστοιχη κλάση στην π έχει κάποια δομική αιτία.*

Παρατήρηση: Στο παράδειγμα του Σχήματος 4.1, η $\pi^{\triangleright}$ προκύπτει διαγράφοντας όλα τα εκθετικά $!_2$.

4.3 Η απάλειψη για 'μόνο'- αποδείξεις

Παρατηρούμε ότι για την Πρόταση 4.2.6 της προηγούμενης παραγράφου, το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή δεν ισχύει γενικά ότι αν έχουμε μια απόδειξη π, έναν κανόνα r και ένα σύνολο E από κλάσεις της π, όπου τα $r - E$ και $\pi - E$ είναι σωστά, τότε το E θα είναι σ.κ.μ.δ..

Ορισμός 4.3.1. *Μια απόδειξη π της γραμμικής λογικής, καλείται* **'μόνο'** *αν οι μοναδικές τροπικότητες που προτάσσουν το σκελετό κάθε τύπου που εμφανίζεται στην π, είναι μεταξύ των '!', '?', '!?' και '?!'.*

Παρατηρούμε ότι η συλλογή όλων των πρωτοβάθμιων 'μόνο'-αποδείξεων είναι κλειστή για απαλοιφή της τομής. Για να πάρουμε την ίδια ιδιότητα στη δευτεροβάθμια περίπτωση, πρέπει να απαγορεύσουμε τη χρήση των κανόνων με δευτεροβάθμιους ποσοδείκτες, όπου οι τύποι που αφαιρούνται (δηλαδή οι T ή Y) έχουν εξωτερικές τροπικοτήτες (βλ. [DJS93b]). Αυτό ορίζει ένα κύριο τμήμα της δευτεροβάθμιας γραμμικής λογικής, γνωστό ως το **'μόνο-ευσταθές'** τμήμα.

Για τις 'μόνο'-αποδείξεις μπορούμε να κάνουμε πιο ισχυρή την Πρόταση 4.2.6, καθώς μπορούμε να αποδείξουμε και το αντίστροφο:

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω π μία 'μόνο'-απόδειξη και $E \subseteq \mathcal{E}(\pi)$. Τότε η $\pi - E$ είναι μία σωστή γραμμική απόδειξη αν και μόνον αν το E είναι σ.κ.μ.δ..*

Απόδειξη. Το αντίστροφο ισχύει από την Πρόταση 4.2.6. Για το ευθύ θεωρούμε προς άτοπο, ότι το E δεν είναι σ.κ.μ.δ.. Επειδή η π είναι 'μόνο', η απάλειψη που ορίζεται από το E θα δώσει μια απόδειξη $\pi - E$ στην οποία θα εμφανίζεται ένα από τα ακόλουθα:

- Όταν το E δεν ικανοποιεί τη συνθήκη μη δομικότητας, θα υπάρχει μια εφαρμογή ενός δομικού κανόνα σε κάποιον όχι εκθετικοποιημένο τύπο (άρα η απόδειξη δεν θα ήταν γραμμική, άτοπο).

- Όταν το E δεν ικανοποιεί τη συνθήκη κορεσμού, θα υπάρχει μια εφαρμογή κάποιου συμφραστικού εκθετικού κανόνα όπου το περιβάλλον θα περιέχει μη εκθετικοποιημένο(υς) τύπο(υς). Άρα η $\pi - E$ δεν θα ήταν σωστή απόδειξη, άτοπο.

□

Συνεπώς το ελάχιστο στοιχείο $\pi^{\triangleright}$ του $\triangleright$-δικτυωτού, είναι ελάχιστο με πολύ ισχυρό τρόπο, καθώς για κάθε $E \subseteq \mathcal{E}(\pi^{\triangleright})$, η απάλειψη που ορίζεται από το E, δεν καταλήγει σε απόδειξη που να είναι γραμμικά σωστή.

Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι για μία 'μόνο'-απόδειξη π είναι αδύνατον να απαλείψουμε ακόμα περισσότερα εκθετικά στην $\pi^{\triangleright}$. Αυτό που δεν μπορούμε να κάνουμε είναι να απαλείψουμε μία ή περισσότερες κλάσεις. Όμως υπάρχει η δυνατότητα να περιορίσουμε όσο το δυνατόν τους κανόνες L! και R? που απομένουν, με το να τους εισάγουμε ακριβώς πριν από όπου χρειάζονται. Αν εφαρμόσουμε αυτή τη διαδικασία σε αποδείξεις $\pi^{\triangleright}$, λαμβάνουμε τις αποδείξεις $(\pi^{\triangleright})'$. Όλες αυτές οι αποδείξεις θα έχουν τον ίδιο εκθετικό γράφο. Επιπλέον, θα ταυτοποιούνται στην αναπαράστασή τους με δίκτυα αποδείξης και επομένως θα ταυτίζονται και σημασιολογικά, δηλαδή θα ερμηνεύονται από τον ίδιο χώρο συνάφειας [DJS93b].

Κλείνουμε την παράγραφο με μια εφαρμογή του Θεωρήματος 4.3.2. Έστω π η απόδειξη:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{!_1 A \Rightarrow A}\,(\mathrm{L!})}{\forall x !_1 A \Rightarrow A}\,(\mathrm{L}\forall)}{!_2 \forall x !_1 A \Rightarrow A}\,(\mathrm{L!})}{!_2 \forall x !_1 A \Rightarrow \forall x A}\,(\mathrm{R}\forall)}{!_2 \forall x !_1 A \Rightarrow !_3 \forall x A}\,(\mathrm{R!})$$

Το σύνολο $E = \{1, 2\}$ (δηλαδή περιέχει τις κλάσεις 1 και 2), δεν είναι σ.κ.μ.δ.. Αυτό συμβαίνει διότι το E δεν είναι κορεσμένο (αφού $3 \curvearrowright 2$ και $3 \notin E$). Οπότε πραγματικά διαπιστώνουμε ότι η απόδειξη $\pi - E$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A}\,(\text{επανάληψη})}{\forall x A \Rightarrow A}\,(\mathrm{L}\forall)}{\forall x A \Rightarrow A}\,(\text{επανάληψη})}{\forall x A \Rightarrow \forall x A}\,(\mathrm{R}\forall)}{\forall x A \Rightarrow !_3 \forall x A}\,(\mathrm{R!}, \text{ λάθος εφαρμογή})$$

δεν είναι γραμμικά σωστή.

Αντιθέτως, αν θεωρήσουμε το σύνολο $E' = \{1, 3\}$, το οποίο είναι σ.κ.μ.δ., διαπιστώνουμε ότι η απόδειξη $\pi - E'$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A}\,(\text{επανάληψη})}{\forall x A \Rightarrow A}\,(\mathrm{L}\forall)}{!_2 \forall x A \Rightarrow A}\,(\mathrm{L!})}{!_2 \forall x A \Rightarrow \forall x A}\,(\mathrm{R}\forall)}{!_2 \forall x A \Rightarrow \forall x A}\,(\text{επανάληψη})$$

είναι γραμμικά σωστή. Προφανώς το $E_{max}(\pi)$ είναι το σύνολο $\{1,2,3\}$, οπότε (βάσει του Θεωρήματος 4.2.16) η $\pi^{\rhd}$ είναι η απόδειξη:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A}\,(\text{επανάληψη})}{\forall x A \Rightarrow A}\,(\mathrm{L}\forall)}{\forall x A \Rightarrow A}\,(\text{επανάληψη})}{\forall x A \Rightarrow \forall x A}\,(\mathrm{R}\forall)}{\forall x A \Rightarrow \forall x A}\,(\text{επανάληψη})$$

4.4 Η δυναμική των αποδείξεων

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ποια είναι τα περιττά εκθετικά μιας απόδειξης και πως όταν τα απομακρύνουμε, λαμβάνουμε μια σωστή γραμμική απόδειξη. Μένει επομένως να δείξουμε ότι η δυναμική της αρχικής απόδειξης είναι ίδια με κάθε απόδειξη που λαμβάνουμε όταν διαγράφουμε κάποια από τα περιττά εκθετικά της. Δηλαδή αυτό που θα δείξουμε είναι ότι οι αποδείξεις που έχουν υποστεί απάλειψη έχουν ουσιαστικά το ίδιο σύνολο αναγωγών με τις αντίστοιχες αρχικές τους.

Ορισμός 4.4.1. *Μια απόδειξη π* **ανάγεται** *σε μία απόδειξη π' ($\pi \twoheadrightarrow \pi'$), αν η απόδειξη π' λαμβάνεται από την π, εφαρμόζοντας μια ακολουθία (ενδεχομένως κενή) από στοιχειώδη βήματα αναγωγής.*

Ορισμός 4.4.2. *Έστω c ένας κανόνας τομής για μια απόδειξη π. Ορίζουμε ως $[c]$, το* **είδος του στοιχειώδους βήματος αναγωγής (ή κανονικοποίησης)** *που εκτελείται για να απαλειφθεί η τομή.*

Παρατηρούμε, ότι το $[c]$ εξαρτάται αποκλειστικά, από τους εξής δύο παράγοντες:

- τους κανόνες r_g και r_d που υπερέχουν του c (στην αριστερή, και αντίστοιχα δεξιά υπόθεση),
- την κατάσταση στους r_g και r_d (κύρια, παθητική, "εμμέσως ενεργή") του τύπου τομής.

Επομένως, αντίστοιχα ορίζουμε τέσσερα είδη στοιχειωδών βημάτων αναγωγής: βήματα αντιμετάθεσης, λογικά βήματα, δομικά βήματα και αξιωματικά βήματα.

Στο εξής, θα επικεντρωθούμε σε βήματα τα οποία χρίζουν μη τετριμμένης μεταχείρησης, δηλαδή σε εκείνα όπου ο r_g ή ο r_d είναι κανόνας "κουτιού" και επιπλέον ο κύριος τύπος του, είναι ο τύπος τομής. Επίσης θα εξετάσουμε μία από τις περιπτώσεις όπου οι r_g και r_d είναι δευτεροβάθμιοι κανόνες, που εισάγουν τον τύπο τομής.

- Αν ο τύπος τομής είναι “εμμέσως ενεργός” σε έναν εκθετικό συμφραστικό κανόνα που προηγείται του c, τότε συμβολίζουμε το αντίστοιχο βήμα αναγωγής με $[cc]$ (“μεταβατική τομή”), του οποίου η μορφή είναι:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, A}}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, !A} \quad \dfrac{\overset{\pi_2}{!A, !\Gamma_2 \Rightarrow B, ?\Delta_2}}{!A, !\Gamma_2 \Rightarrow !B, ?\Delta_2}}{!\Gamma_1, !\Gamma_2 \Rightarrow !B, ?\Delta_1, ?\Delta_2} \overset{[cc]}{\rightsquigarrow} \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, A}}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, !A} \quad \overset{\pi_2}{!A, !\Gamma_2 \Rightarrow B, ?\Delta_2}}{!\Gamma_1, !\Gamma_2 \Rightarrow B, ?\Delta_1, ?\Delta_2}}{!\Gamma_1, !\Gamma_2 \Rightarrow !B, ?\Delta_1, ?\Delta_2}$$

- Αν ο τύπος τομής είναι κύριος σε κάποιον κανόνα αμέλειας, τότε συμβολίζουμε το αντίστοιχο βήμα αναγωγής με $[de]$, του οποίου η μορφή είναι:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, A}}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, !A} \quad \dfrac{\overset{\pi_2}{A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{!A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{!\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow ?\Delta_1, \Delta_2} \overset{[de]}{\rightsquigarrow} \dfrac{\overset{\pi_1}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, A} \quad \overset{\pi_2}{A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{!\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow ?\Delta_1, \Delta_2}$$

- Αν ο τύπος τομής είναι κύριος σε κάποιον κανόνα συστολής, τότε συμβολίζουμε το αντίστοιχο βήμα αναγωγής με $[co]$, του οποίου η μορφή είναι:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, A}}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, !A} \quad \dfrac{\overset{\pi_2}{!A, !A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{!A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{!\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow ?\Delta_1, \Delta_2} \overset{[co]}{\rightsquigarrow} \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, A}}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, !A} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, A}}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, !A} \quad \overset{\pi_2}{!A, !A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{!A, !\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow ?\Delta_1, \Delta_2}}{!\Gamma_1, !\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow ?\Delta_1, ?\Delta_1, \Delta_2} \\ \vdots\end{array}}{!\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow ?\Delta_1, \Delta_2}$$

- Αν ο τύπος τομής είναι κύριος σε κάποιον κανόνα εξασθένησης, τότε συμβολίζουμε το αντίστοιχο βήμα αναγωγής με $[w]$, του οποίου η μορφή είναι:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, A}}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, !A} \quad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{!A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{!\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow ?\Delta_1, \Delta_2} \overset{[w]}{\rightsquigarrow} \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{\vdots}}{!\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow ?\Delta_1, \Delta_2}$$

- Αν ο τύπος τομής είναι κύριος σε κάποιον $\forall_2$-κανόνα, τότε συμβολίζουμε το αντίστοιχο βήμα αναγωγής με $[\forall_2]$, του οποίου η μορφή είναι:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A[X]}}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \forall X A[X]} \quad \dfrac{\overset{\pi_2}{A[T/X], \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{\forall X A[X], \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2} \overset{[\forall_2]}{\rightsquigarrow} \dfrac{\overset{\pi_1[T/X]}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A[T/X]} \quad \overset{\pi_2}{A[T/X], \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}$$

Έστω μ ένα στοιχειώδες βήμα κανονικοποίησης. Κάθε εμφάνιση ενός (υπο)τύπου F (αντίστοιχα ενός κανόνα r) στην $\mu(\pi)$ προέρχεται, προφανώς, από μια μοναδική εμφάνιση ενός (υπο)τύπου (αντίστοιχα ενός κανόνα) στην π. Άρα:

Ορισμός 4.4.3. *Ορίζουμε ως* **συνάρτηση ανύψωσης** *(lifting application), τη συνάρτηση που απεικονίζει κάθε εμφάνιση ενός (υπο)τύπου (αντίστοιχα ενός κανόνα) στην $\mu(\pi)$, στην εμφάνιση του μοναδικού (υπο)τύπου της π από τον οποίο προέρχεται, και τη συμβολίζουμε με μ_*. (Δηλαδή $\mu_* : \mu(\pi) \to \pi$.)*

Έχοντας ορίσει τα απαραίτητα, πάλι θα δώσουμε μια σειρά από λήμματα και προτάσεις, για να καταλήξουμε στην απόδειξη του βασικού Θεωρήματος 4.4.13.

Λήμμα 4.4.4. (Ανύψωση των κλάσεων) *Για κάθε στοιχειώδες βήμα κανονικοποίησης μ σε μια απόδειξη π, το μ_* σέβεται τις κλάσεις. Δηλαδή αν F, G είναι εμφανίσεις (υπο)τύπων της $\mu(\pi)$ και $F \sim_{\mu(\pi)} G$, τότε $\mu_*(F) \sim_\pi \mu_*(G)$.*

Απόδειξη. Άμεσο, από τον ορισμό της μ_* και επειδή οι κλάσεις της $\mu(\pi)$ είναι και κλάσεις της π. □

Επομένως κάθε κλάση e στη $\mu(\pi)$ απεικονίζεται από τη μ_* σε μία κλάση e' στην π (δηλαδή $\mu_*(e) \subseteq e'$). Παρατηρούμε ωστόσο ότι η μ_* δεν είναι ένα-προς-ένα, ούτε επί, γενικά. Καταρχήν δεν είναι ένα-προς-ένα επειδή μπορεί να υπάρχουν δύο κλάσεις e_1, e_2 τέτοιες ώστε $\mu_*(e_1) \neq \mu_*(e_2)$. Από την άλλη δεν είναι επί, καθώς με το βήμα αναγωγής προκύπτουν αλλαγές στην απόδειξη. Οπότε μπορεί να υπάρξει κάποιο $e \in \mathcal{E}(\pi)$ τέτοιο ώστε να μην υπάρχει $e' \in \mathcal{E}(\mu(\pi))$, για το οποίο να ισχύει ότι $\mu_*(e') = e$.

Λήμμα 4.4.5. (Ανύψωση της δέσμευσης) *Για κάθε στοιχειώδες βήμα κανονικοποίησης μ σε μια απόδειξη π, το μ_* σέβεται τη δέσμευση. Δηλαδή αν e, e' είναι κλάσεις στη $\mu(\pi)$ και $e \curvearrowright e'$, τότε $\mu_*(e) \curvearrowright \mu_*(e')$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το μ είναι $[cc]$, και $e \curvearrowright e'$ διαμέσου του κανόνα "κουτιού" που αντιμετατίθεται, από το μ, με την τομή. Τότε είτε $\mu_*(e) \curvearrowright_1 \mu_*(e')$ ή υπάρχει στην π κάποια κλάση e'' (η κλάση του τύπου τομής) τέτοια ώστε $\mu_*(e) \curvearrowright_1 e''$ και $e'' \curvearrowright_1 \mu_*(e')$. Άρα $\mu_*(e) \curvearrowright \mu_*(e')$. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις $\mu_*(e) \curvearrowright_1 e''$. Ειδικά για την περίπτωση όπου $T \equiv\, !T'$ ή $?T''$ στο $[\forall_2]$, ενώ στην αρχική απόδειξη ενδεχομένως να υπάρχει κάποια κλάση που να σχετίζεται με το T και να προκαλεί δέσμευση, κάτι τέτοιο δεν ισχύει στην $\mu(\pi)$, διότι το T είναι ενσωματομένο εξ' αρχής στην $\pi_1[T/X]$. □

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύνολο E από κλάσεις μιας απόδειξης π και ας υποθέσουμε ότι μ είναι ένα στοιχειώδες βήμα αναγωγής της π. Τότε:

Ορισμός 4.4.6. Ορίζουμε ως $\mu(E)$ *το σύνολο από κλάσεις στη $\mu(\pi)$, το οποίο απεικονίζεται, από την μ_*, σε κάποια κλάση του E.*[4]

Λήμμα 4.4.7. *Έστω π μια απόδειξη, μ ένα στοιχειώδες βήμα αναγωγής στην π και E ένα υποσύνολο της $\mathcal{E}(\pi)$. Αν το E είναι κορεσμένο, τότε είναι και το $\mu(E)$.*

[4] Κάτι τέτοιο είναι λογικό, καθώς η μ_* σέβεται τις κλάσεις.

Απόδειξη. Έστω τυχαία $e \in \mu(E)$ και $e' \curvearrowright e$, όπου $e' \in \mathcal{E}(\mu(\pi))$. Από το Λήμμα 4.4.5 ισχύει ότι $\mu_*(e') \curvearrowright \mu_*(e)$ στο $\mathcal{E}(\pi)$. Τώρα, επειδή $e \in \mu(E)$, από τον ορισμό, το $\mu_*(e)$ απεικονίζεται σε κάποιο e'', όπου $e'' \in E$. Επίσης το $\mu_*(e')$ απεικονίζεται σε κάποιο e''', όπου $e''' \in \mathcal{E}(\pi)$ και $e''' \curvearrowright e''$. Επιπλέον, αφού το E είναι κορεσμένο, έπεται ότι $e''' \in E$. Άρα $e' \in \mu(E)$ (διότι $\mu_*(e') \subset e'''$). □

Λήμμα 4.4.8. *Έστω π μια απόδειξη, μ ένα στοιχειώδες βήμα αναγωγής στην π και E ένα υποσύνολο της $\mathcal{E}(\pi)$. Αν το E είναι σ.κ.μ.δ., τότε είναι και το $\mu(E)$.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.4.7, το $\mu(E)$ είναι κορεσμένο. Προς άτοπο, έστω ότι υπάρχει κάποια μαρκαρισμένη κλάση e στο $\mu(E)$. Αν μια εμφάνιση κάποιου τύπου F είναι κύρια σε κανόνα συστολής (αντίστοιχα εξασθένησης) στην $\mu(\pi)$, τότε ή αυτή ήδη είναι η περίπτωση για το $\mu_*(F)$ στην π (!A, στο παράδειγμα με τα στοιχειώδη αναγωγικά βήματα), ή μ είναι το βήμα αναγωγής $[co]$ (αντίστοιχα $[w]$) και ο $\mu_*(F)$ είναι "εμμέσως ενεργός" στον κανόνα "κουτιού" που διπλασιάζεται (αντίστοιχα απαλείφεται) (τύπος του $!\Gamma_1$). Άρα είτε η $\mu_*(e)$ είναι επίσης μαρκαρισμένη ή υπάρχει στο $\mathcal{E}(\pi)$ μια μαρκαρισμένη κλάση e' τέτοια ώστε $e' \curvearrowright e$. Τότε επειδή το E είναι κορεσμένο, $e' \in E$. Αυτό όμως είναι άτοπο, καθώς αντιτίθεται στην υπόθεση ότι το E ικανοποιεί τη συνθήκη μη δομικότητας. □

Ορισμός 4.4.9. *Έστω π μία απόδειξη, E ένα σ.κ.μ.δ. σύνολο από κλάσεις στην π και μ ένα στοιχειώδες βήμα κανονικοποίησης, εκτελέσιμο στην π. Το* **ισοδύναμο βήμα του** μ **στην** $\pi - E$, *δηλώνεται με $\hat{\mu}$ και ορίζεται ως εξής:*

- *$\hat{\mu}$=[id] (η κενή αναγωγή) αν το μ είναι είτε [de] με ενεργούς τύπους στο πεδίο του E, ή ένα βήμα αντιμετάθεσης όπου η τομή μετατίθεται προς τα πάνω, από το συμπέρασμα στην υπόθεση ενός εκθετικού κανόνα με κύριο τύπο στο πεδίο του E. (Αυτή η πρόταση συμπεριλαμβάνει και την περίπτωση του βήματος αναγωγής [cc].)*

- *$\hat{\mu}$=μ σε όλες τις άλλες περιπτώσεις.*

Ορισμός 4.4.10. *Έστω r ένας κανόνας σε μια απόδειξη π και μ ένα στοιχειώδες βήμα κανονικοποίησης της π.* **Ορίζουμε ως** $\mu(r)$, *το σύνολο όλων των στιγμιοτύπων από κανόνες στην $\mu(\pi)$, που απεικονίζονται μέσω της μ_* στον r.*

Θεώρημα 4.4.11. (Η απάλειψη σέβεται την κανονικοποίηση) *Έστω μ ένα στοιχειώδες βήμα κανονικοποίησης σε μια απόδειξη π και E ένα σ.κ.μ.δ. σύνολο στην π. Τότε η μ μπορεί να εφαρμοστεί στην π αν και μόνον αν η $\hat{\mu}$ μπορεί να εφαρμοστεί στην $\pi - E$ και $\hat{\mu}(\pi - E) = \mu(\pi) - \mu(E)$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με κατά περίπτωση έλεγχο, όλων των πιθανών εμφανίσεων του κανόνα τομής στην π. Για παράδειγμα αν το μ είναι $[w]$ τότε: ($\Rightarrow$) Το μ εφαρμόζεται στην π και $\mu = [w]$, άρα από τον Ορισμό 4.4.9, η $\hat{\mu}= [w]$ εφαρμόζεται στην $\pi - E$. ($\Leftarrow$) Αν η $\hat{\mu}$ μπορεί να εφαρμοστεί στην $\pi - E$, τότε και στην π μπορούμε να εφαρμόσουμε $[w]$ ($\mu = [w]$).

Επιπλέον ισχύει ότι $\hat{\mu}(\pi - E) = \mu(\pi) - \mu(E)$ αφού το να εφαρμόσουμε $[w]$ στην $\pi - E$, είναι το ίδιο με το να εφαρμόσουμε $[w]$ στην π και έπειτα να απαλείψουμε με το $\mu(E)$ (βλ. ορισμό του $\mu(E)$ και Λήμμα 4.4.8). Ομοίως γίνονται και οι άλλες περιπτώσεις (μια εναλλακτική απόδειξη υπάρχει στο [Sch94]). □

Πόρισμα 4.4.12. *Έστω π μια απόδειξη, E ένα σ.κ.μ.δ. σύνολο της π και μ ένα στοιχειώδες βήμα κανονικοποίησης στην π. Τότε $\mu(\pi) \rhd \hat{\mu}(\pi - E)$.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.2.15 ισχύει ότι $\pi \rhd \pi - E$. Από το Θεώρημα 4.4.11 η απάλειψη σέβεται την $\rhd$. Άρα $\hat{\mu}(\pi - E) = \mu(\pi) - \mu(E)$. Δηλαδή $\mu(\pi) \rhd \hat{\mu}(\pi - E)$ (αφού το $\mu(E)$ είναι σ.κ.μ.δ.). □

Παρατήρηση: Το σύνολο $F \subseteq \mathcal{E}(\mu(\pi))$ μπορεί να είναι σ.κ.μ.δ., ενώ ταυτόχρονα το $\mu_* \subseteq \mathcal{E}(\pi)$ να μην είναι (δηλαδή το αντίστροφο του Λήμματος 4.4.8 δεν ισχύει). Ένα τυπικό παράδειγμα είναι η κλάση ενός κύριου τύπου σε έναν κανόνα "κουτιού" που διπλασιάζεται από την $[co]$ (η 1 στο ακόλουθο σχήμα), η οποία γίνεται σ.κ.μ.δ. μετά το διπλασιασμό. Δηλαδή:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, A}}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, !_1 A} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{!A_1, !_1 A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{!_1 A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{!\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow ?\Delta_1, \Delta_2} \overset{[co]}{\rightsquigarrow} \dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, A}}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, !_1 A} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, A}}{!\Gamma_1 \Rightarrow ?\Delta_1, !_1 A} \qquad \overset{\pi_2}{!_1 A, !_1 A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{!_1 A, !\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow ?\Delta_1, \Delta_2}}{!\Gamma_1, !\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow ?\Delta_1, ?\Delta_1, \Delta_2} \\ \vdots \end{array}}{!\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow ?\Delta_1, \Delta_2}$$

Όπως φαινεται στην αριστερή απόδειξη, η κλάση 1 (ως σύνολο) δεν είναι σ.κ.μ.δ. γιατί είναι μαρκαρισμένη (με c), ενώ στη δεξιά απόδειξη το σύνολο που περιέχει την κλάση 1, (ενδεχομένως) είναι σ.κ.μ.δ..

Τέλος αποδεικνύουμε το βασικό θεώρημα:

Θεώρημα 4.4.13. *Έστω $\mu_\varkappa ... \mu_1$ μια ακολουθία αναγωγών στην π. Τότε $\hat{\mu}_k ... \hat{\mu}_1(\pi^{\rhd}) \rhd (\mu_\varkappa ... \mu_1(\pi))^{\rhd}$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας επαναληπτικά το Πορίσμα 4.4.12 (χρησιμοποιώντας και το Λήμμα 4.2.15) λαμβάνουμε ότι $\mu_\varkappa ... \mu_1(\pi) \rhd \hat{\mu}_k ... \hat{\mu}_1(\pi^{\rhd})$. Συμπεραίνουμε επομένως, ότι η $\hat{\mu}_k ... \hat{\mu}_1(\pi^{\rhd})$ ανήκει στο $\rhd$-δικτυωτό της $\mu_\varkappa ... \mu_1(\pi)$, όπου το ελάχιστο στοιχείο είναι η $(\mu_\varkappa ... \mu_1(\pi))^{\rhd}$. Άρα είναι εμφανές ότι $\hat{\mu}_k ... \hat{\mu}_1(\pi^{\rhd}) \rhd (\mu_\varkappa ... \mu_1(\pi))^{\rhd}$. □

$$\begin{array}{ccccc} \pi & & \rhd & & \pi^{\rhd} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathbf{r}(\pi) & & \rhd & & \hat{\mathbf{r}}(\pi^{\rhd}) \\ & \lhd & & \rhd & \\ & & (\mathbf{r}(\pi))^{\rhd} & & \end{array}$$

Σχήμα 4.2: Αποδείξεις και οι αναγωγές τους.

Ανακεφαλαιώνοντας, αποδείξαμε μια σημαντική ιδιότητα του $\rhd$-δικτυωτού μιας απόδειξης π, η οποία διαισθητικά εκφράζεται ως εξής: *οι αποδείξεις σε ένα $\rhd$-δικτυωτό έχουν, ουσιαστικά, το ίδιο σύνολο αναγωγών.*

Δηλαδή, αν $\mathbf{r}$ συμβολίζει μια ακολουθία αναγωγών στην π, τότε το προαναφερθέν συμπέρασμα απεικονίζεται στο διάγραμμα του Σχήματος 4.2.

Παρατηρούμε τώρα, ότι αν η π δεν είναι 'μόνο', είναι πιθανόν να απαλείψουμε σύνολα από κλάσεις στην π τα οποία δεν είναι σ.κ.μ.δ., και να λάβουμε μια απόδειξη η οποία θα είναι γραμμικά σωστή. Ωστόσο, το αποτέλεσμα μιας τέτοιου είδους απάλειψης θα έχει διαφορετική συμπεριφορά στην αναγωγή, συγκριτικά με αυτή της π και γενικά το Θεώρημα 4.4.11 δεν θα ισχύει [Sch94].

4.5 Εφαρμογή της θεωρίας

Έχοντας εξασφαλίσει πλέον την κατάλληλη θεωρία, μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα για το οποίο έγινε λόγος στο Κεφάλαιο 3, αλλά και στην αρχή αυτού του κεφαλαίου. Θα δείξουμε δηλαδή, ότι οποιοδήποτε επαρκές ζεύγος και αν διαλέξουμε για να ορίσουμε ε.σ.δ. για το CL, το αποτέλεσμα ουσιαστικά θα είναι το ίδιο με το να είχαμε διαλέξει ή το $(!, ?!)$ ή το $(!?, ?)$ (των q και t μεταφράσεων αντίστοιχα).

Θεώρημα 4.5.1. (Danos, Joinet, και Schellinx) *Οι τριάδες $\langle(\cdot)^q, !, ?!\rangle$ και $\langle(\cdot)^t, !?, ?\rangle$ είναι, ουσιαστικά, οι μοναδικές επαγωγικές στρατηγικές διακόσμησης για το CL.*

Απόδειξη. Έστω π μια CL-απόδειξη και ας υποθέσουμε ότι λαμβάνουμε την $\pi^{\circledcirc}$, διακοσμώντας επαγωγικά την π μέσω της $\langle(\cdot)^{\circledcirc}, \mu, \nu\rangle$ όπως στο Θεώρημα 3.3.2. Επειδή το (μ, ν) είναι επαρκές , έπεται ότι είτε (1) $\mu \equiv\, !\alpha?\beta$ και $\nu \equiv\, ?\beta$, ή (2) $\mu \equiv\, !\beta$ και $\nu \equiv\, ?\alpha!\beta$, για τροπικότητες α, β.

Θα δείξουμε ότι στην $\pi^{\circledcirc}$, τα εκθετικά στις κλάσεις οι οποίες δημιουργούνται από τα α και β, είναι *περιττά* και μπορούν να απαλειφθούν. Στην (1) περίπτωση θα βρούμε ότι $(\pi^{\circledcirc})^{\rhd} \equiv \pi^t$ και στη (2) περίπτωση ότι $(\pi^{\circledcirc})^{\rhd} \equiv \pi^q$.

Τότε το θεώρημα έπεται, καθώς για κάθε τριάδα $\langle (\cdot)^{\circledcirc}, \mu, \nu \rangle$, $\pi^{\circledcirc} \rhd \cdots \rhd \pi^{q}$ ή αντίστοιχα $\pi^{\circledcirc} \rhd \cdots \rhd \pi^{t}$ και άρα η $\pi^{\circledcirc}$ θα έχει το ίδιο σύνολο αναγωγών είτε με την π^{q} είτε με την π^{t}.

Θα αποδείξουμε την περίπτωση (2), με επαγωγή στη δομή της π. Η περίπτωση (1) αποδεικνύεται ομοίως. Θα ελέγξουμε τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις.

- Αν η π είναι το αξίωμα $A \Rightarrow A$ τότε η $\pi^{\circledcirc}$ είναι η

$$\cfrac{\cfrac{!\beta A^{\circledcirc} \Rightarrow\, !\beta A^{\circledcirc}}{\vdots}}{!\beta A^{\circledcirc} \Rightarrow\, ?\alpha !\beta A^{\circledcirc}}$$

  Τότε ξεκάθαρα, τα εκθετικά α και β είναι *περιττά* και μπορούν να απαλειφθούν. Επιπλέον μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $A^{\circledcirc}$ με το A^{q}, λαμβάνοντας έτσι την π^{q}.

- Έστω ότι η π τερματίζει με μια εφαρμογή του κανόνα R$\multimap$. Δηλαδή η π είναι η

$$\cfrac{\begin{array}{c}\pi' \\ \vdots \\ A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B, \Delta}$$

  Τότε η $\pi^{\circledcirc}$ είναι η

$$\begin{array}{c}
(\pi')^{\circledcirc} \\
\vdots \\
\cfrac{\cfrac{!\beta\Gamma^{\circledcirc}, !\beta A^{\circledcirc} \Rightarrow\, ?\alpha!\beta B^{\circledcirc}, ?\alpha!\beta\Delta^{\circledcirc}}{\vdots}}{\cfrac{!\beta\Gamma^{\circledcirc}, ?\alpha!\beta A^{\circledcirc} \Rightarrow\, ?\alpha!\beta B^{\circledcirc}, ?\alpha!\beta\Delta^{\circledcirc}}{!\beta\Gamma^{\circledcirc} \Rightarrow\, ?\alpha!\beta A^{\circledcirc} \multimap\, ?\alpha!\beta B^{\circledcirc}, ?\alpha!\beta\Delta^{\circledcirc}}} \\
\vdots \\
!\beta\Gamma^{\circledcirc} \Rightarrow\, ?\alpha!\beta(?\alpha!\beta A^{\circledcirc} \multimap\, ?\alpha!\beta B^{\circledcirc}), ?\alpha!\beta\Delta^{\circledcirc}
\end{array}$$

  Οπότε από την επαγωγική υπόθεση, μπορούμε να εφαρμόσουμε απάλειψη στην $(\pi')^{\circledcirc}$ και να λάβουμε την

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{(\pi')^q}{\vdots}}{!\Gamma^q, !A^q \Rightarrow ?!B^q, ?!\Delta^q}}{\cfrac{\vdots}{\cfrac{\cfrac{!\Gamma^q, ?\alpha!A^q \Rightarrow ?!B^q, ?!\Delta^q}{\Gamma^q \Rightarrow ?\alpha A^q \multimap ?!B^q, ?!\Delta^q}}{\cfrac{\vdots}{!\Gamma^q \Rightarrow ?\alpha!\beta(?\alpha!A^q \multimap ?!B^q), ?!\Delta^q}}}}$$

Τα εκθετικά α και β εδώ, δημιουργούν νέες κλάσεις οι οποίες είναι ελαχιστικές στον εκθετικό γράφο και επιπλέον δεν είναι μαρκαρισμένες (αυτό συμβαίνει καθώς οι τύποι αυτών των κλάσεων είναι κύριοι σε εκθετικούς κανόνες, άρα οι κλάσεις δεν δεσμεύονται, παρά μόνο δεσμεύουν και δημιουργούν σ.κ.μ.δ. σύνολα). Δηλαδή είναι redexes και συνεπώς μπορούν να απαλειφθούν ώστε να λάβουμε την π^q.

- Έστω ότι ο τελευταίος κανόνας της π είναι ο L$\wedge$. Δηλαδή η π είναι η

$$\cfrac{\cfrac{\pi'}{\vdots}}{\cfrac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}}$$

Τότε η $\pi^{\circledcirc}$ είναι η

$$\cfrac{\cfrac{(\pi')^{\circledcirc}}{\vdots}}{\cfrac{!\beta\Gamma^{\circledcirc}, !\beta A^{\circledcirc}, !\beta B^{\circledcirc} \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta^{\circledcirc}}{\cfrac{\vdots}{\cfrac{!\beta\Gamma^{\circledcirc}, !?\alpha!\beta A^{\circledcirc}, !\beta B^{\circledcirc} \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta^{\circledcirc}}{\cfrac{\vdots}{\cfrac{\cfrac{!\beta\Gamma^{\circledcirc}, !?\alpha!\beta A^{\circledcirc}, !?\alpha!\beta B^{\circledcirc} \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta^{\circledcirc}}{!\beta\Gamma^{\circledcirc}, !?\alpha!\beta A^{\circledcirc} \otimes !?\alpha!\beta B^{\circledcirc} \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta^{\circledcirc}}}{\cfrac{\vdots}{!\beta\Gamma^{\circledcirc}, !\beta(!?\alpha!\beta A^{\circledcirc} \otimes !?\alpha!\beta B^{\circledcirc}) \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta^{\circledcirc}}}}}}}}$$

Οπότε από την επαγωγική υπόθεση, μπορούμε να εφαρμόσουμε απάλειψη στην $(\pi')^{\circledcirc}$ και να λάβουμε την

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\pi')^q}{\vdots}}{!\Gamma^q, !A^q, !B^q \Rightarrow ?!\Delta^q}}{\vdots \atop !\Gamma^q, !?\alpha!A^q, !B^q \Rightarrow ?!\Delta^q}}{\vdots \atop !\Gamma^q, !?\alpha!A^q, !?\alpha!B^q \Rightarrow ?!\Delta^q}}{!\Gamma^q, !?\alpha!\beta A^q \otimes !?\alpha!\beta B^q \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta^q}$$

$$\vdots$$

$$!\Gamma^q, !\beta(!?\alpha!\beta A^q \otimes !?\alpha!\beta B^q) \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta^q$$

Όπως και για την προηγούμενη περίπτωση, τα εκθετικά α και β, δημιουργούν νέες κλάσεις οι οποίες είναι ελαχιστικές στον εκθετικό γράφο και επιπλέον δεν είναι μαρκαρισμένες. Δηλαδή είναι redexes και συνεπώς μπορούν να απαλειφθούν ώστε να λάβουμε την π^q.

- Έστω ότι ο τελευταίος κανόνας της π είναι ο L$\rightarrow$. Δηλαδή η π είναι η

$$\dfrac{\begin{matrix} \pi' \\ \vdots \\ \Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \pi'' \\ \vdots \\ B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}$$

Τότε η $\pi^{\circledcirc}$ είναι η

$$\dfrac{\begin{matrix} (\pi')^{\circledcirc} \\ \vdots \\ !\beta\Gamma_1^{\circledcirc} \Rightarrow ?\alpha!\beta A^{\circledcirc}, ?\alpha!\beta\Delta_1^{\circledcirc} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (\pi'')^{\circledcirc} \\ \vdots \\ \underline{!\beta B^{\circledcirc}, !\beta\Gamma_2^{\circledcirc} \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta_2^{\circledcirc}} \\ \vdots \\ ?\alpha!\beta B^{\circledcirc}, !\beta\Gamma_2^{\circledcirc} \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta_2^{\circledcirc} \end{matrix}}{!\beta\Gamma_1^{\circledcirc}, !\beta\Gamma_2^{\circledcirc}, ?\alpha!\beta A^{\circledcirc} \multimap ?\alpha!\beta B^{\circledcirc} \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta_1^{\circledcirc}, ?\alpha!\beta\Delta_2^{\circledcirc}}$$

$$\vdots$$

$$!\beta\Gamma_1^{\circledcirc}, !\beta\Gamma_2^{\circledcirc}, !\beta(?\alpha!\beta A^{\circledcirc} \multimap ?\alpha!\beta B^{\circledcirc}) \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta_1^{\circledcirc}, ?\alpha!\beta\Delta_2^{\circledcirc}$$

Οπότε από την επαγωγική υπόθεση, μπορούμε να εφαρμόσουμε απάλειψη στις $(\pi')^{\circledcirc}$ και $(\pi'')^{\circledcirc}$, και να λάβουμε την

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}(\pi')^q\\ \vdots\end{matrix}}{!\Gamma_1^q \Rightarrow ?!A^q, ?!\Delta_1^q} \quad \cfrac{\begin{matrix}(\pi'')^q\\ \vdots\\ \underline{!B^q, !\Gamma_2^q \Rightarrow ?!\Delta_2^q}\\ \vdots\end{matrix}}{?\alpha!B^q, !\Gamma_2^q \Rightarrow ?!\Delta_2^q}}{\begin{matrix}\underline{!\Gamma_1^q, !\Gamma_2^q, ?!A^q \multimap ?\alpha!B^q \Rightarrow ?!\Delta_1^q, ?!\Delta_2^q}\\ \vdots\\ !\Gamma_1^q, !\Gamma_2^q, !\beta(?!A^q \multimap ?\alpha!B^q) \Rightarrow ?!\Delta_1^q, ?!\Delta_2^q\end{matrix}}$$

Πάλι προφανώς τα εκθετικά α και β είναι περιττά. Οπότε απαλείφοντας τα λαμβάνουμε την π^q.

- Έστω ότι ο τελευταίος κανόνας της π είναι ο LC. Δηλαδή η π είναι η

$$\cfrac{\begin{matrix}\pi'\\ \vdots\\ \Gamma, A, A \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}$$

Τότε η $\pi^{\circledcirc}$ είναι η

$$\cfrac{\begin{matrix}(\pi')^{\circledcirc}\\ \vdots\\ !\beta\Gamma^{\circledcirc}, !\beta A^{\circledcirc}, !\beta A^{\circledcirc} \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta^{\circledcirc}\end{matrix}}{!\beta\Gamma^{\circledcirc}, !\beta A^{\circledcirc} \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta^{\circledcirc}}$$

Οπότε από την επαγωγική υπόθεση, μπορούμε να εφαρμόσουμε απάλειψη στην $(\pi')^{\circledcirc}$ και να λάβουμε την

$$\cfrac{\begin{matrix}(\pi')^q\\ \vdots\\ !\Gamma^q, !A^q, !A^q \Rightarrow ?!\Delta^q\end{matrix}}{!\Gamma^q, !A^q \Rightarrow ?!\Delta^q}$$

η οποία είναι η π^q.

- Έστω, τελικά, ότι η απόδειξη π τερματίζει με μία εφαρμογή του κανόνα τομής. Δηλαδή η π είναι η

$$\cfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ \vdots\\ \Gamma_2, A \Rightarrow \Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}$$

Τότε η $\pi^{\circledcirc}$ είναι η

$$
\dfrac{\begin{array}{c}(\pi_1)^{\circledcirc}\\ \vdots\\ !\beta\Gamma_1^{\circledcirc} \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta_1^{\circledcirc}, ?\alpha!\beta A^{\circledcirc}\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\pi_2)^{\circledcirc}\\ \vdots\\ \underline{!\beta A^{\circledcirc}, !\beta\Gamma_2^{\circledcirc} \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta_2^{\circledcirc}}\\ \vdots\\ ?\alpha!\beta A^{\circledcirc}, !\beta\Gamma_2^{\circledcirc} \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta_2^{\circledcirc}\end{array}}{!\beta\Gamma_1^{\circledcirc}, !\beta\Gamma_2^{\circledcirc} \Rightarrow ?\alpha!\beta\Delta_1^{\circledcirc}, ?\alpha!\beta\Delta_2^{\circledcirc}}
$$

Οπότε από την επαγωγική υπόθεση, μπορούμε να εφαρμόσουμε απάλειψη στις $(\pi_1)^{\circledcirc}$ και $(\pi_2)^{\circledcirc}$ και να λάβουμε την

$$
\dfrac{\begin{array}{c}(\pi_1)^{q}\\ \vdots\\ !\Gamma_1^{q} \Rightarrow ?!\Delta_1^{q}, ?!A^{q}\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\pi_2)^{q}\\ \vdots\\ \underline{!A^{q}, !\Gamma_2^{q} \Rightarrow ?!\Delta_2^{q}}\\ ?!A^{q}, !\Gamma_2^{q} \Rightarrow ?!\Delta_2^{q}\end{array}}{!\Gamma_1^{q}, !\Gamma_2^{q} \Rightarrow ?!\Delta_1^{q}, ?!\Delta_2^{q}}
$$

η οποία είναι η π^{q}.

$\square$

Κεφάλαιο 5

Κατασκευασιμότητα συστημάτων κλασικής λογικής, μέσω της Γραμμικής λογικής

Όπως αναφέραμε στις παραγράφους 1.1 και 1.2, το σύστημα CL δεν είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμο. Δηλαδή δεδομένης μιας CL-απόδειξης, δεν μπορούμε πάντα να απαλείψουμε τις τομές της, επιλέγοντας τυχαία τη σειρά με την οποία θα απαλειφθούν, παρά μόνο αν ακολουθήσουμε τον αλγόριθμο της απόδειξης της ασθενούς κανονικοποίησης του CL (βλ. παράγραφο 1.2). Αντιθέτως για την ιντουισιονιστική λογική (IL) έχουμε την ισχυρή κανονικοποίηση λόγω της περιορισμένης χρήσης των δομικών κανόνων. Επίσης ας αναλογιστούμε και το εξής: η ιντουισιονιστική λογική έχει ως υπολογιστικό ανάλογο (αντιστοιχία Curry-Howard) το σύστημα του λ-λογισμού με τύπους Church, το οποίο είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμο [SU98].[1] Τέτοια αντιστοιχία για την κλασική λογική δεν υπάρχει. Με άλλα λόγια η ισχυρή κανονικοποίηση είναι μια ιδιότητα των κατασκευαστικών συστημάτων (όπως είναι δηλαδή το IL).

Το ερώτημα που τίθεται όμως, είναι το γιατί μας ενδιαφέρει να αποκτήσουμε μια αντιστοιχία Curry-Howard μεταξύ μιας θεωρητικής γλώσσας προγραμματισμού και αποδείξεων σε κλασική λογική. Καταρχήν είναι δελεαστικό, διότι στην κλασική λογική μπορούμε να έχουμε αποδείξεις θεωρημάτων της μορφής $A \vee \neg A$, τις οποίες φυσικά δεν έχουμε στην ιντουισιονιστική λογική. Επίσης είναι γνωστό από ένα αποτέλεσμα του Kreisel [Kre51] ότι το ενδιαφέρον δε βρίσκεται στο να αποκτήσουμε πρόσβαση σε καινούργιες ολικές αναπαραστάσιμες συναρτήσεις, καθώς όλες οι ολικές αναπαραστάσιμες συναρτήσεις της δευτεροβάθμιας κλασικής λογικής, είναι αναπαραστάσιμες στο αντίστοιχο δευτεροβάθμιο ιντουισιονιστικό σύστημα (βλ. [DJS97] και [Gir91]). Αν σκεφτούμε όμως τις αποδείξεις ως *αλγόριθμους* (βλ. αντιστοιχία Curry-Howard), αυτό που κερδίζουμε είναι νέες αποδείξεις των αναπαραστάσεων

[1] Αυτό προκύπτει από το λεγόμενο programming-with-proofs παράδειγμα για την ιντουισιονιστική λογική.

των συναρτήσεων στην κλασική λογική και επομένως βάσει της αντιστοιχίας Curry-Howard *νέους και ενδεχομένως πιο αποτελεσματικούς αλγόριθμους*. Επιπλέον, εκτός του ενδιαφέροντος από τη σκοπιά της θεωρητικής πληροφορικής, σημαντικό είναι και το ερώτημα για το αν μπορούμε να προσδώσουμε σε συστήματα κλασικής λογικής, κατασκευαστικές ιδιότητες, όπως αυτή της ισχυρής κανονικοποίησης (constructivization of classical logic).

Για να επιτύχουμε τα προηγούμενα, είναι απαραίτητο να κατασκευάσουμε κάποιο αποδεικτικό σύστημα κλασικής λογικής, του οποίου οι τύποι θα αναπαριστούν τα δεδομένα που θέλουμε, και για το οποίο η διαδικασία απαλοιφής της τομής (ή αλλιώς κανονικοποίηση) θα είναι ισχυρή και θα συμβάλει (δηλαδή θα ικανοποιείται η ιδιότητα Church-Rosser).

Τέτοια συστήματα πλέον έχουν βρεθεί αρκετά, όπως για παράδειγμα το σύστημα LC του Girard (βλ. [Gir91]). Επιπλέον είδαμε στην παράγραφο 3.3 ότι για το $\{\rightarrow, \forall, \forall_2\}$-τμήμα του CL ικανοποιούνται οι ιδιότητες που θέλουμε. Από εδώ και πέρα, θα δούμε τρεις εναλλακτικές λύσεις του προβλήματος για πλήρη κλασικά συστήματα, χρησιμοποιώντας τη θεωρία που ήδη έχει αναπτυχθεί για τις γραμμικές διακοσμήσεις, και πιο συγκεκριμένα την τεχνική της διακόσμησης και εν συνεχεία "μεταφοράς" της γραμμικής διαδικασίας απαλοιφής της τομής στο σκελετό της διακοσμημένης απόδειξης.

Οι πρώτες δύο λύσεις, προκύπτουν μέσω των διακοσμήσεων που δίνουν οι μεταφράσεις T και Q. Η τρίτη προκύπτει, εστιάζοντας ακριβώς στα σημεία που παρατηρείται ο μη ντετερμινισμός για την απαλοιφή της τομής στην κλασική λογική, και αποδίδοντας την κατάλληλη πληροφορία στο σύστημα για να ανταπεξέλθει αυτό το πρόβλημα. Τελικά, και οι τρεις λύσεις θα μας οδηγήσουν σε αυτό που λέμε "κατασκευασιμότητα της κλασικής, μέσω της γραμμικής, λογικής".

5.1 Τα συστήματα LKQ και LKT

Στην παράγραφο 3.2 είδαμε ότι η μετάφραση του Girard για την ιντουισιονιστική λογική δεν παράγει μια επαγωγική στρατηγική διακόσμησης των IL-αποδείξεων. Αυτό υπενθυμίζουμε ότι συμβαίνει, εξαιτίας της χρήσης των κανόνων L$\rightarrow$, L$\wedge$ και L$\forall_2$ στην περίπτωση που ο ενεργός τύπος της (δεξιάς) υπόθεσης έχει προέλθει από δομικό κανόνα. Επιπλέον εξετάζοντας λεπτομερώς τη δομή των γραμμικών αποδείξεων των $(\cdot)^*$-μεταφρασμένων ακολουθητών, κατασκευάσαμε το λογισμό ακολουθητών ILU, ο οποίος ενσωματώνει ακριβώς τους περιορισμούς που προτείνει η μετάφραση του Girard.

Κάνοντας τις ανάλογες παρατηρήσεις στον κλασικό λογισμό ακολουθητών, οι Danos, Joinet και Schellinx κατασκεύασαν λογισμούς ακολουθητών, οι οποίοι ενσωματώνουν τους περιορισμούς που προτείνουν οι μεταφράσεις Q και T (βλ. παράγραφο 3.3). Βέβαια η μορφή των κανόνων θα διαφέρει ανάλογα με το αν διαλέξουμε την προσθετική ή πολλαπλασιαστική εκδοχή ενός λογικού κανόνα. Ωστόσο, εύκολα κάποιος μπορεί να κατασκευάσει τους κανόνες που χρειάζονται, ούτως ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί των Q και T μεταφράσεων. Για παράδειγμα οι πολλαπλασιαστικοί κανόνες για τη διάζευξη θα είναι οι

$$\frac{!\Gamma, !A, !B \Rightarrow ?!\Delta}{!\Gamma, !(!A \otimes !B) \Rightarrow ?!\Delta}\,(\mathrm{L}\otimes) \qquad \frac{!\Gamma \Rightarrow ?!\Delta, !A \quad !\Gamma' \Rightarrow ?!\Delta', !B}{!\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow !(!A \otimes !B), ?!\Delta, ?!\Delta'}\,(\mathrm{R}\otimes)$$

Εδώ, όπως κάναμε και για το ILU, θα αναφερθούμε στο τμήμα που περιέχει τη συνεπαγωγή και το δευτεροβάθμιο καθολικό προτασιακό ποσοδείκτη. Φυσικά το να επεκτείνουμε το σύστημα προσθέτοντας και τον πρωτοβάθμιο ποσοδείκτη είναι άμεσο, καθώς η συμπεριφορά του πρωτοβάθμιου ποσοδείκτη είναι ανάλογη με αυτή του δευτεροβάθμιου.

Το ακόλουθο λήμμα μας δίνει μια σημαντική πληροφορία.

Λήμμα 5.1.1. *Αν στο* $\{!, ?, \multimap, \forall_2^Q\}$ *μπορούμε να παράγουμε έναν ακολουθητή της μορφής* $\Gamma_1^Q, !\Gamma_2^Q, ?!\Gamma_3^Q \Rightarrow ?!\Delta_3^Q, !\Delta_2^Q, \Delta_1^Q$ *(χρησιμοποιώντας τομές σε τύπους της μορφής* $A^Q, !A^Q, ?!A^Q$*), τότε* $|\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Delta_2| \leq 1$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο μήκος των αποδείξεων. Ας δούμε κάποιες χαρακτηριστικές περιπτώσεις:

- Αν ο ακολουθητής είναι αξίωμα, δηλαδή της μορφής $A^Q \Rightarrow A^Q$, τότε $|\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Delta_2| = 1$.

- Έστω ότι ο τελευταίος κανόνας της απόδειξης είναι ο $R \multimap$. Δηλαδή

$$\frac{\Gamma_1^Q, A^Q, !\Gamma_2^Q, ?!\Gamma_3^Q \Rightarrow ?!\Delta_3^Q, !\Delta_2^Q, B^Q, \Delta_1'^Q}{\Gamma_1^Q, !\Gamma_2^Q, ?!\Gamma_3^Q \Rightarrow ?!\Delta_3^Q, !\Delta_2^Q, A^Q \multimap B^Q, \Delta_1'^Q}\,(\mathrm{R}\multimap)$$

  Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, πρέπει $|\Gamma_1 \cup A \cup \Gamma_3 \cup \Delta_2| \leq 1$. Οπότε $\Gamma_1 = \Gamma_3 = \Delta_2 = \emptyset$. Άρα $|\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Delta_2| \leq 1$.

- Έστω ότι ο τελευταίος κανόνας της απόδειξης είναι ο L?. Τότε για να εφαρμοστεί ο κανόνας πρέπει $\Gamma_1 = \Gamma_3' = \Delta_1 = \Delta_2 = \emptyset$. Δηλαδή

$$\frac{!\Gamma_2^Q, !A^Q \Rightarrow ?!\Delta_3^Q}{!\Gamma_2^Q, ?!A^Q \Rightarrow ?!\Delta_3^Q}\,(\mathrm{L}?)$$

  Τότε από την επαγωγική υπόθεση και τα παραπάνω, ισχύει ότι $\Gamma_1 = \Gamma_3' = \Delta_2 = \emptyset$. Άρα $|\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Delta_2| = 1$.

□

5.1.1 Το LKQ

Ξεκινάμε να κατασκευάσουμε το σύστημα LKQ διαπιστώνοντας τα ακόλουθα:

- Έστω ότι σε μια δοσμένη Q-μεταφρασμένη απόδειξη, στον τελευταίο κανόνα έχει εισαχθεί ο κύριος σύνδεσμος $\multimap$, ή ο ποσοδείκτης $\forall_2$, του κύριου τύπου του κανόνα. Τότε παρατηρούμε ότι για να συνεχίσουμε την απόδειξη εφαρμόζοντας κάποιον άλλο κανόνα, πρέπει να τοποθετήσουμε ! ή ?! μπροστά από τον τύπο, δηλαδή πρέπει να εφαρμόσουμε κάποιον εκθετικό συμφραστικό κανόνα (βλ. Q-μετάφραση).

  Παράδειγμα: έστω η απόδειξη

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma^Q, !A^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, ?!B^Q, \Sigma^Q\end{array}$$

  Θέλουμε να εφαρμόσουμε R$\multimap$ για να λάβουμε τον ακολουθητή $\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, !A^Q \multimap ?!B^Q, \Sigma^Q$. Τότε πρέπει σύμφωνα με τα παραπάνω να κινηθούμε ως εξής:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma^Q, !A^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, ?!B^Q, \Sigma^Q\end{array}}{\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, !A^Q \multimap ?!B^Q, \Sigma^Q}\,(\mathrm{R}\multimap)}{\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, !(!A^Q \multimap ?!B^Q), \Sigma^Q}\,(\mathrm{R}!)$$

  Κάτι τέτοιο όμως είναι εφικτό μόνο στην περίπτωση όπου $\Sigma = \emptyset$. Επομένως ακολουθητές της μορφής $\Gamma^Q, !A^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, ?!B^Q, \Sigma^Q$ με $\Sigma \neq \emptyset$ θα απαγορεύονται στο σύστημά μας.

Τελικά λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω, κατασκευάζουμε το σύστημα LLQ του Σχήματος 5.1.

Το σύστημα LLQ είναι προφανώς τμήμα του $\{?,!,\multimap,\forall_2\}$ (όλοι του οι κανόνες αποδεικνύονται σε αυτό) και ενσωματώνει τους περιορισμούς που προκύπτουν από την Q-μετάφραση. Επίσης πρέπει να τονίσουμε ότι όλοι οι τύποι που εμφανίζονται σε μια LLQ-απόδειξη έχουν μία από τις μορφές $!A^Q$ ή $?!A^Q$ και επιπλέον, το πολύ ένας τύπος της μορφής $!A^Q$ μπορεί να εμφανιστεί στον επόμενο ενός LLQ-ακολουθητή (λόγω του Λήμματος 5.1.1). Επίσης ισχύει το εξής:

Λήμμα 5.1.2. *Το LLQ είναι κλειστό για τομή.*

Απόδειξη. Όπως την απόδειξη της αντίστοιχης κλειστότητας για το ILU (βλ. παράγραφο 3.2). □

Αξιώματα:

$$!A^Q \Rightarrow !A^Q \quad (\mathrm{Ax})$$

Λογικοί κανόνες:

$$\frac{!\Gamma \Rightarrow ?!\Delta, !A \quad ?!B, !\Gamma' \Rightarrow ?!\Delta'}{!(!A \multimap ?!B), !\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow ?!\Delta, ?!\Delta'}\,(\mathrm{L}\multimap) \qquad \frac{!\Gamma, !A \Rightarrow ?!B, ?!\Delta}{!\Gamma \Rightarrow !(!A \multimap ?!B), ?!\Delta}\,(\mathrm{R}\multimap)$$

Κανόνες για το δευτεροβάθμιο ποσοδείκτη (Y όχι ελεύθερο στα Γ,Δ):

$$\frac{?!A[T^Q/X], !\Gamma \Rightarrow ?!\Delta}{!\forall X ?!A, !\Gamma \Rightarrow ?!\Delta}\,(\mathrm{L}\forall_2) \qquad \frac{!\Gamma \Rightarrow ?!A[Y/X], ?!\Delta}{!\Gamma \Rightarrow !\forall X ?!A, ?!\Delta}\,(\mathrm{R}\forall_2)$$

Εκθετικοί δομικοί κανόνες:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A^Q \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{W}!) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?!A^Q, \Delta}\,(\mathrm{W}?) \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{C}!) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow ?A, ?A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta}\,(\mathrm{C}?)$$

Εκθετικοί κανόνες εισαγωγής:

$$\frac{!\Gamma, !A \Rightarrow ?!\Delta}{!\Gamma, ?!A \Rightarrow ?!\Delta}\,(\mathrm{L}?) \qquad \frac{!\Gamma \Rightarrow !A, ?!\Delta}{!\Gamma \Rightarrow ?!A, ?!\Delta}\,(\mathrm{D})$$

Κανόνες τομής:

$$\frac{!\Gamma_1 \Rightarrow ?!\Delta_1, !A^Q \quad !A^Q, !\Gamma_2 \Rightarrow ?!\Delta_2}{!\Gamma_1, !\Gamma_2 \Rightarrow ?!\Delta_1, ?!\Delta_2}\,(\text{τομή}_1) \qquad \frac{!\Gamma_1 \Rightarrow ?!\Delta_1, ?!A^Q \quad ?!A^Q, !\Gamma_2 \Rightarrow ?!\Delta_2}{!\Gamma_1, !\Gamma_2 \Rightarrow ?!\Delta_1, ?!\Delta_2}\,(\text{τομή}_2)$$

Σχήμα 5.1: Ο βοηθητικός λογισμός LLQ.

Διαπιστώνουμε επομένως ότι το LLQ είναι ένα γνήσιο τμήμα της γραμμικής λογικής, και επιπλέον ενσωματώνει ακριβώς τους περιορισμούς της Q-μετάφρασης. Ας παρατηρήσουμε όμως και το εξής:

- Έστω μια κλασική απόδειξη

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ B, \Gamma' \Rightarrow \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', A \to B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(\mathrm{L}\to)$$

  Αν τη μεταφράσουμε με τη μετάφραση Q, τότε προκύπτει η γραμμική απόδειξη

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ !\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, ?!A^Q\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ !B^Q, !\Gamma'^Q \Rightarrow ?!\Delta'^Q\end{matrix}}{?!B^Q, !\Gamma'^Q \Rightarrow ?!\Delta'^Q}\,(\mathrm{L}?)}{!\Gamma^Q, !\Gamma'^Q, ?!A^Q \to ?!B^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, ?!\Delta'^Q}\,(\mathrm{L}\multimap)}{!\Gamma^Q, !\Gamma'^Q, !(?!A^Q \to ?!B^Q) \Rightarrow ?!\Delta^Q, ?!\Delta'^Q}\,(\mathrm{L}!)$$

Αξιώματα:

$$A \Rightarrow \,;A \quad (\mathrm{Ax})$$

Λογικοί κανόνες:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta; A \quad B, \Gamma' \Rightarrow \Delta';}{\Gamma, \Gamma', A \to B \Rightarrow \Delta, \Delta';}\,(\mathrm{L}\!\to) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B;}{\Gamma \Rightarrow \Delta; A \to B}\,(\mathrm{R}\!\to)$$

Κανόνες για το δευτεροβάθμιο ποσοδείκτη (Y όχι ελεύθερο στα Γ,Δ):

$$\frac{A[T/X], \Gamma \Rightarrow \Delta;}{\forall X A, \Gamma \Rightarrow \Delta;}\,(\mathrm{L}\forall_2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[Y/X];}{\Gamma \Rightarrow \Delta; \forall X A}\,(\mathrm{R}\forall_2)$$

Δομικοί κανόνες:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta; A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A;}\,(\mathrm{D})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta; \Pi}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta; \Pi}\,(\mathrm{LW}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta; \Pi}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta; \Pi}\,(\mathrm{RW})$$

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta; \Pi}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta; \Pi}\,(\mathrm{LC}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta; \Pi}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta; \Pi}\,(\mathrm{LC})$$

Κανόνες τομής:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta; A \quad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'; \Pi}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'; \Pi}\,(\text{τομή ουράς}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A; \Pi \quad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta';}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'; \Pi}\,(\text{τομή μέσης})$$

Σχήμα 5.2: Το σύστημα LKQ.

> Όμως βάσει της μετάφρασης Q, πρέπει ο τύπος $A \to B$ να μεταφράζεται στον τύπο $!A^Q \to ?!B^Q$, και όχι στον τύπο $?!A^Q \to ?!B^Q$ (όπως γίνεται στη μεταφρασμένη απόδειξη του παραδείγματος). Με άλλα λόγια στο σύστημα LKQ, πρέπει ο διαχωρισμός ανάμεσα σε γραμμικό και μη-γραμμικό μέρος, να γίνεται στον επόμενο κάθε ακολουθητή.

Τελικά, μπορούμε να εξάγουμε κατευθείαν από το σύστημα LLQ, το λογισμό ακολουθητών LKQ (Σχήμα 5.2), για τον οποίο αναμένουμε ότι η Q-μετάφραση θα ορίζει ε.σ.δ..

Οι ακολουθητές του LKQ είναι της μορφής $\Gamma \Rightarrow \Delta; \Pi$, όπου όπως και για το ILU, το Π είναι ένα πολυσύνολο (με πληθικότητα ≤ 1) που περιέχει το πολύ έναν (τον 'queue' ή 'tail') τύπο (ουράς), η εμφάνιση του οποίου διαχωρίζεται στον ακολουθητή από το σύμβολο ";". Η γραμμική του ερμηνεία αντιστοιχεί σε έναν τύπο ο οποίος δεν έχει μαρκαριστεί (ακόμη) με ?. Εύκολα πλέον μπορούμε να δείξουμε τη σχέση του LLQ με το LKQ:

Λήμμα 5.1.3. *$LLQ \vdash\, !\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, !\Pi^Q$ ανν $LKQ \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta; \Pi$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Λόγω κατασκευής, ο σκελετός μια LLQ-απόδειξης ενός ακολουθητή $!\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, !\Pi^Q$ είναι μια LKQ-απόδειξη του ακολουθητή $\Gamma \Rightarrow \Delta; \Pi$.

($\Leftarrow$) Η τετράδα $\langle (\cdot)^Q, !, ?!, ! \rangle$ είναι ε.σ.δ. για LKQ-αποδείξεις π, η οποία παράγει αποδείξεις π^Q, που στην πραγματικότητα είναι LLQ-αποδείξεις, αφού οι εφαρμογές του κανόνα L$\multimap$ πάντα ακολουθούνται από εφαρμογές του κανόνα L! στην κύριο τύπο, κ.ο.κ.. Για παράδειγμα αν η π είναι η

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta ; A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ B, \Gamma' \Rightarrow \Delta' ;\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \Rightarrow \Delta, \Delta' ;}\,(\mathrm{L}\multimap)$$

τότε

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\text{E.Y.}] \\ !\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, !A^Q\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\text{E.Y.}] \\ \Gamma'^Q, !B^Q \Rightarrow ?!\Delta'^Q\end{matrix}}{\Gamma'^Q, ?!B^Q \Rightarrow ?!\Delta'^Q}\,(\mathrm{L}?)}{!\Gamma^Q, \Gamma'^Q, !A^Q \multimap ?!B^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, ?!\Delta'^Q}\,(\mathrm{L}\multimap)}{!\Gamma^Q, \Gamma'^Q, !(!A^Q \multimap ?!B^Q) \Rightarrow ?!\Delta^Q, ?!\Delta'^Q}\,(\mathrm{L}!)$$

□

Ομοίως με αυτά που αναφέραμε στην παράγραφο 3.2 για το ILU, ορίζουμε μια διαδικασία απαλοιφής της τομής σ^Q, για LKQ-αποδείξεις π, που αντιστοιχεί (είναι η "ανάκλαση" της) στη διαδικασία απαλοιφής της τομής (της γραμμικής λογικής) που εφαρμόζεται στη Q-διακοσμημένη απόδειξη π^Q. Με άλλα λόγια η τετράδα $\langle (\cdot)^Q, !, ?!, ! \rangle$ είναι **ισχυρή** στρατηγική διακόσμησης, ως προς αυτή τη διαδικασία. Επομένως το σύστημα LKQ κληρονομεί τις υπολογιστικές ιδιότητες της γραμμικής λογικής. Δηλαδή

Θεώρημα 5.1.4. *Το σύστημα LKQ είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμο και ικανοποιεί την ιδιότητα Church-Rosser.*

Απόδειξη. Ομοίως με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.6. □

Μπορούμε όμως να δείξουμε μία ακόμα εμφύτευση του LKQ στο LLQ. Δηλαδή να δείξουμε ότι η αποδειξιμότητα του ακολουθητή $\Gamma \Rightarrow \Delta ; \Pi$ στο LKQ αντιστοιχεί στη γραμμική αποδειξιμότητα του ακολουθητή $!\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, \Pi^Q$. Με άλλα λόγια να καταλήξουμε στο ότι και η τετράδα $\langle (\cdot)^Q, !, ?!, \cdot \rangle$ είναι ε.σ.δ. για το LKQ.

Καταρχήν χρειαζόμαστε το εξής λήμμα:

Λήμμα 5.1.5. *Ένας ακολουθητής $!\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, !\Pi^Q$ είναι αποδείξιμος στο $\{?,!,\multimap,\forall_2\}$ αν και μόνον αν είναι αποδείξιμος στο LLQ.*

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Προφανές, καθώς το LLQ είναι τμήμα του $\{?,!,\multimap,\forall_2\}$.

($\Rightarrow$) Γίνεται με επαγωγή στο μήκος των αποδείξεων (χωρίς τομές) στο $\{?,!,\multimap,\forall_2\}$, θεωρώντας ότι τα αξιώματα περιέχουν μόνο ατομικούς τύπους. Επιπλέον χρειαζόμαστε μια τροποποιημένη εκδοχή του λήμματος αντιστροφής (Λήμμα 2.2.1):

- Αν έχουμε μία απόδειξη μήκους n ενός εκ των ακολουθητών $\Gamma \Rightarrow A \multimap B, \Delta$ ή $\Gamma \Rightarrow \forall X A, \Delta$, τότε υπάρχουν αποδείξεις μήκους $\leq n$ των ακολουθητών $\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta$ ή $\Gamma \Rightarrow A, \Delta$ αντίστοιχα (λαμβάνοντας υπόψιν τις συνθήκες για τις προτασιακές μεταβλητές).

Οπότε ας υποθέσουμε ότι ο τελευταίος κανόνας που εφαρμόστηκε είναι δομικός. Τότε το ζητούμενο είναι άμεσο, από την επαγωγική υπόθεση και εν συνεχεία την εφαρμογή του αντίστοιχου δομικού κανόνα στο τμήμα $\{?,!,\multimap,\forall_2\}$.

Έστω τώρα, ότι η δοσμένη απόδειξη τερματίζει με R!, δηλαδή

$$\frac{!\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, \Pi^Q}{!\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, !\Pi^Q}\ (\mathrm{R}!)$$

Ο τύπος Π θα είναι της μορφής $!A^Q \multimap ?!B^Q$ ή $\forall X ?!A^Q$. Οπότε από το λήμμα αντιστροφής θα έχουμε μια απόδειξη του ακολουθητή $!\Gamma^Q, !A^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, ?!B^Q$ ή του $!\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, ?!A^Q$ (μήκους $\leq n$). Επομένως ας υποθέσουμε ότι συνέβαινε το πρώτο. Τότε στο $\{?,!,\multimap,\forall_2\}$ έχουμε:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathrm{E.Y.}]}{!\Gamma^Q, !A^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, ?!B^Q}}{!\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, !A^Q \multimap ?!B^Q}\ (\mathrm{R}\multimap)}{!\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, !(!A^Q \multimap ?!B^Q)}\ (\mathrm{R}!)$$

Ομοίως για τη δεύτερη περίπτωση.

Έστω τώρα τελευταίος κανόνας ο:

$$\frac{!\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta'^Q, !A^Q, !\Pi^Q}{!\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta'^Q, ?!A^Q, !\Pi^Q}\ (\mathrm{R}?)$$

Από το Λήμμα 5.1.1 πρέπει $|A \cup \Pi| \leq 1$. Άρα $\Pi = \emptyset$. Οπότε από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $\{?,!,\multimap,\forall_2\}\vdash\ !\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta'^Q, !A^Q$ και εκτελώντας τον κανόνα R? έπεται το ζητούμενο.

Τέλος, η σημαντικότερη περίπτωση είναι αυτή όπου τελευταίος κανόνας είναι ο L!. Δηλαδή

$$\frac{!\Gamma'^Q, A^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, !\Pi^Q}{!\Gamma'^Q, !A^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, !\Pi^Q}\ (\mathrm{L}!)$$

Από το Λήμμα 5.1.1 έχουμε ότι $|A \cup \Pi| \leq 1$. Άρα $\Pi = \emptyset$. Επομένως από την επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι $\{?,!,\multimap,\forall_2\}\vdash\ !\Gamma'^Q, A^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q$. Το A^Q, όπως αναφέραμε και σε προηγούμενη περίπτωση, θα έχει μία από τις ακόλουθες μορφές: $!B^Q \multimap ?!C^Q$ ή $\forall X ?!B^Q$. Λόγω του Λήμματος 5.1.1, ο ακολουθητής $!\Gamma'^Q, A^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q$ προκύπτει από μια εφαρμογή του κανόνα για τον κύριο σύνδεσμο του A^Q και από πεπερασμένες εφαρμογές δομικών κανόνων, όπως φαίνονται στο Σχήμα 5.3. Επομένως στο τμήμα $\{?,!,\multimap,\forall_2\}$ έχουμε αντίστοιχα:

$$
\begin{array}{c}
\pi' \\
\vdots \\
\dfrac{!B^Q, !\Gamma_2^Q \Rightarrow ?!\Delta_2^Q}{?!B^Q, !\Gamma_2^Q \Rightarrow ?!\Delta_2^Q}\,(\mathrm{L}?) \\
\vdots \\
\text{δομικοί κανόνες} \\
\vdots \\
\dfrac{?!B^Q, !\Gamma_1^Q \Rightarrow ?!\Delta_2^Q}{\forall X ?!B^Q, !\Gamma_1^Q \Rightarrow ?!\Delta_2^Q}\,(\mathrm{L}\forall_2) \\
\vdots \\
\text{δομικοί κανόνες} \\
\vdots \\
\dfrac{\forall X ?!B^Q, !\Gamma_2^Q \Rightarrow ?!\Delta_2^Q}{!(\forall X ?!B^Q), !\Gamma_2^Q \Rightarrow ?!\Delta_2^Q}\,(\mathrm{L}!)
\end{array}
\quad \text{ή} \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \pi_1 & \pi_2 \\ \vdots & \vdots \end{array} \\
\dfrac{!\Gamma_{11}^Q \Rightarrow ?!\Delta_{11}^Q, !B^Q \qquad ?!C^Q, !\Gamma_{12}^Q \Rightarrow ?!\Delta_{12}^Q}{!B^Q \multimap ?!C^Q, !\Gamma_1^Q \Rightarrow ?!\Delta_1^Q}\,(\mathrm{L}\multimap) \\
\vdots \\
\text{δομικοί κανόνες} \\
\vdots \\
\dfrac{!B^Q \multimap ?!C^Q, !\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q}{!(!B^Q \multimap ?!C^Q), !\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q}\,(\mathrm{L}!)
\end{array}
$$

Σχήμα 5.3: Οι δύο πιθανές εκδοχές.

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\mathrm{E.Y.}] \\ !B^Q, !\Gamma_2^Q \Rightarrow ?!\Delta_2^Q\end{array}}{?!B^Q, !\Gamma_2^Q \Rightarrow ?!\Delta_2^Q}\,(\mathrm{L}?)}{!\forall X ?!B^Q, !\Gamma_2^Q \Rightarrow ?!\Delta_2^Q}\,(\mathrm{L}\forall_2)
\qquad
\dfrac{\begin{array}{c}[\mathrm{E.Y.}] \\ !\Gamma_{11}^Q \Rightarrow ?!\Delta_{11}^Q, !B^Q\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\mathrm{E.Y.}] \\ ?!C^Q, !\Gamma_{12}^Q \Rightarrow ?!\Delta_{12}^Q\end{array}}{!(!B^Q \multimap ?!C^Q), !\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q}\,(\mathrm{L}\multimap)
$$

□

Οπότε μπορούμε να αποδείξουμε την εμφύτευση:

Πρόταση 5.1.6. *Ο ακολουθητής* $!\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, \Pi^Q$ *είναι αποδείξιμος στο* $\{?,!,\multimap,\forall_2\}$ *αν και μόνον αν ο ακολουθητής* $\Gamma \Rightarrow \Delta; \Pi$ *είναι αποδείξιμος στο LKQ.*

Απόδειξη. Ο ακολουθητής $!\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, \Pi^Q$ είναι αποδείξιμος στο $\{?,!,\multimap,\forall_2\}$ αν και μόνον αν ο ακολουθητής $!\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, !\Pi^Q$ είναι αποδείξιμος στο $\{?,!,\multimap,\forall_2\}$ (προκύπτει εύκολα λόγω του Λήμματος 5.1.1) αν και μόνον αν ο ακολουθητής $!\Gamma^Q \Rightarrow ?!\Delta^Q, !\Pi^Q$ είναι αποδείξιμος στο LLQ (Λήμμα 5.1.5) αν και μόνον αν ο ακολουθητής $\Gamma \Rightarrow \Delta; \Pi$ είναι αποδείξιμος στο LKQ (Λήμμα 5.1.3). □

Συνεπώς μπορούμε με βεβαιότητα να πούμε ότι η τετράδα $\langle (\cdot)^Q, !, ?!, \cdot \rangle$, είναι και αυτή ε.σ.δ. για LKQ-αποδείξεις π, η οποία παράγει γραμμικές αποδείξεις $\pi^{Q'}$. Φυσικά μπορούμε να το αποδείξουμε και άμεσα, επαληθεύοντας κατά τα γνωστά τον Ορισμό 3.2.2. Επιπλέον ισχύει ότι η συλλογή των Q'-διακοσμημένων LKQ-αποδείξεων είναι κλειστή για γραμμική τομή (ομοίως με το αντίστοιχο Λήμμα 5.1.2), πράγμα το οποίο μας εξασφαλίζει μια εναλλακτική διαδικασία απαλοιφής της τομής $\sigma^{Q'}$ για LKQ-αποδείξεις (από την "ανάκλαση" της γραμμικής διαδικασίας).

Εντούτοις παρατηρείται το εξής φαινόμενο: αν κανονικοποιήσουμε μια τυχαία απόδειξη πρώτα με τη σ^{Q} και έπειτα με τη $\sigma^{Q'}$, παρατηρούμε ότι ενδεχομένως να βρούμε διαφορετικό αποτέλεσμα, δηλαδή η κανονική μορφή που βρίσκουμε βάσει της σ^{Q} να διαφέρει από την αντίστοιχη κανονική μορφή βάσει της $\sigma^{Q'}$. Αυτή η διαφοροποίηση μπορεί να γίνει συγκεκριμένη. Αυτό θα το δείξουμε στη συνέχεια, σε μια ακριβώς όμοια περίπτωση για το σύστημα LKT.

5.1.2 Το LKT

Η ακόλουθη παρατήρηση είναι σημαντική διότι δίνει ακριβώς την ιδέα κατασκευής του LKT.

Παρατήρηση: Ας θεωρήσουμε τις μεταφράσεις $(\cdot)^*$, $(\cdot)^{\circledast}$, Q και T. Τότε διαπιστώνουμε ότι όταν διαγράψουμε όλες τις εμφανίσεις των ? στην T-μετάφραση, λαμβάνουμε τη μετάφραση του Girard $(\cdot)^*$. Από την άλλη μεριά, η αντίστοιχη διαδικασία για την Q-μετάφραση θα μας δώσει την $(\cdot)^{\circledast}$.

Σύμφωνα και με την παραπάνω παρατήρηση, το σύστημα LKT (Σχήμα 5.4) είναι το κλασικό ανάλογο του ILU (το ILU λαμβάνεται από το LKT αν θεωρήσουμε τους συνήθεις ιντουισιονιστικούς περιορισμούς στους "επόμενους" των ακολουθητών). Εδώ οι ακολουθητές είναι της μορφής $\Pi; \Gamma \Rightarrow \Delta$ όπου το Π (πολυσύνολο με πληθικότητα ≤ 1) περιέχει το πολύ ένα "διαχωρισμένο" τύπο, τον 'tête' ή 'head' τύπο (κεφαλής). Όπως και για το ILU, το Π αντιστοιχεί σε ένα γραμμικό τύπο ο οποίος δεν έχει μαρκαριστεί (ακόμη) με !. Τελικά, το LKT είναι ένα τμήμα του συστήματος κλασικής λογικής LU (βλ. [Gir93]).

Μπορούμε πλέον να δώσουμε τη σχέση ανάμεσα στο σύστημα CL και τα LKQ και LKT. Οι ακόλουθες δύο προτάσεις είναι οι αντίστοιχες "κλασικές" της Πρότασης 3.2.3.

Πρόταση 5.1.7. *Αν* $LKQ \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta; \Pi$, *τότε* $C_p^2 L \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \Pi$. *Αντίστροφα, αν* $C_p^2 L \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, *τότε* $LKQ \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta;$.

Απόδειξη. Η απόδειξη και για τις δύο κατευθύνσεις γίνεται με επαγωγή στο μήκος των αποδείξεων, για τα αντίστοιχα συστήματα ακολουθητών. Ας ελέγξουμε ένα μη προφανές βήμα για την αντίστροφη κατεύθυνση. Έστω ότι ο τελευταίος κανόνας της CL-απόδειξης είναι ο L→. Τότε από την επαγωγική υπόθεση, οι ακολουθητές $\Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1;$ και $B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2;$ αποδεικνύονται στο LKQ. Όμως δεν μπορούμε άμεσα να εφαρμόσουμε τον κανόνα L→. Γι' αυτό χρησιμοποιώντας "τομές μέσης" έπεται ότι:

Αξιώματα:

$$A; \Rightarrow A \quad (\mathrm{Ax})$$

Λογικοί κανόνες:

$$\frac{;\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B; \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{A \to B; \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} (\mathrm{L}\!\to) \qquad \frac{\Pi; \Gamma, A \Rightarrow \Delta, B}{\Pi; \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B} (\mathrm{R}\!\to)$$

Κανόνες για τους δευτεροβάθμιο ποσοδείκτη (Y όχι ελεύθερο στα Γ,Δ):

$$\frac{A[T/X]; \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall X A; \Gamma \Rightarrow \Delta} (\mathrm{L}\forall_2) \qquad \frac{\Pi; \Gamma \Rightarrow \Delta, A[Y/X]}{\Pi; \Gamma \Rightarrow \Delta, \forall X A} (\mathrm{R}\forall_2)$$

Δομικοί κανόνες:

$$\frac{A; \Gamma \Rightarrow \Delta}{; A, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\mathrm{D})$$

$$\frac{\Pi; \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Pi; \Gamma, A \Rightarrow \Delta} (\mathrm{LW}) \qquad \frac{\Pi; \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Pi; \Gamma \Rightarrow A, \Delta} (\mathrm{RW})$$

$$\frac{\Pi; \Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Pi; \Gamma, A \Rightarrow \Delta} (\mathrm{LC}) \qquad \frac{\Pi; \Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Pi; \Gamma \Rightarrow A, \Delta} (\mathrm{LC})$$

Κανόνες τομής:

$$\frac{\Pi; \Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A; \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Pi; \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} (\text{τομή κεφαλής}) \qquad \frac{; \Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Pi; A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Pi; \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} (\text{τομή μέσης})$$

Σχήμα 5.4: Το σύστημα LKT.

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1; \qquad \cfrac{A \Rightarrow ; A \qquad \cfrac{B; \Rightarrow B}{; B \Rightarrow B} (\mathrm{D})}{A \to B, A \Rightarrow B;} (\mathrm{L}\!\to)}{\Gamma_1, A \to B \Rightarrow B, \Delta_1;} (\text{τομή}) \qquad \Gamma_2, B \Rightarrow \Delta_2;}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \to B \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2;} (\text{τομή})$$

□

Πρόταση 5.1.8. *Αν* $LKT \vdash \Pi; \Gamma \Rightarrow \Delta$*, τότε* $C_p^2 L \vdash \Pi, \Gamma \Rightarrow \Delta$*. Αντίστροφα, αν* $C_p^2 L \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$*, τότε* $LKQ \vdash ; \Gamma \Rightarrow \Delta$*.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται ομοίως με αυτές των Προτάσεων 3.2.3 και 5.1.7. Ας ελέγξουμε πάλι ένα μη προφανές βήμα για την αντίστροφη κατεύθυνση. Αυτή τη φορά αυτό όπου ο τελευταίος κανόνας της CL-απόδειξης είναι ο $\mathrm{L}\forall_2$. Τότε από την επαγωγική υπόθεση, ο ακολουθητής $; \Gamma, A[T/X] \Rightarrow \Delta$ αποδεικνύεται στο LKT. Όμως δεν μπορούμε άμεσα να εφαρμόσουμε τον κανόνα $\mathrm{L}\forall_2$. Γι' αυτό χρησιμοποιώντας "τομή μέσης" έπεται ότι:

$$\cfrac{; \Gamma, A[T/X] \Rightarrow \Delta \qquad \cfrac{A[T/X]; \Rightarrow A[T/X]}{\forall X A; \Rightarrow A[T/X]} (\mathrm{L}\forall_2)}{; \Gamma, \forall X A \Rightarrow \Delta} (\text{τομή})$$

□

Τέλος από τις παραπάνω προτάσεις προκύπτει το

Πόρισμα 5.1.9. *$LKT \vdash ; \Gamma \Rightarrow \Delta$ αν και μόνον αν $LKQ \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta;$.*

Το ακόλουθο θεώρημα είναι η "κλασική εκδοχή" του Θεωρήματος 3.2.4.

Θεώρημα 5.1.10. *Αν π είναι μια απόδειξη στο $\{!, ?, \multimap, \forall_2^T\}$ ενός ακολουθητή*

$$\Gamma_1^T, ?\Gamma_2^T, !?\Gamma_3^T \Rightarrow !?\Delta_3^T, !\Delta_2^T, \Delta_1^T$$

και όλες οι εμφανίσεις των τύπων τομής είναι της μορφής A^T, $?A^T$ ή $!?A^T$, καθώς και όλα τα αξιώματα είναι της μορφής $A^T \Rightarrow A^T$, τότε η $sk(\pi)$ είναι μια LKT-απόδειξη του ακολουθητή

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2; \Gamma_3 \Rightarrow \Delta_3, \Delta_2, \Delta_1.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στο μήκος της απόδειξης π, δείχνοντας ταυτόχρονα ότι $|\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Delta_3| \leq 1$.

- Έστω ότι η π είναι αξίωμα της μορφής $A^T \Rightarrow A^T$. Τότε η $sk(\pi)$ είναι το αξίωμα $A; \Rightarrow A$ και επιπλέον επειδή $\Gamma_1 \equiv A$ έπεται ότι $|\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Delta_3| = 1$.

- Έστω τελευταίος κανόνας της π ο

$$\frac{\Gamma_1'^T, ?\Gamma_2^T \Rightarrow !?A^T, !?\Delta_3^T \qquad ?B^T, !?\Gamma_3^T \Rightarrow ?\Delta_2^T, \Delta_1^T}{!?A^T \multimap ?B^T, \Gamma_1'^T, ?\Gamma_2^T, !?\Gamma_3^T \Rightarrow !?\Delta_3^T, !\Delta_2^T, \Delta_1^T} \text{(L}\multimap\text{)}$$

  όπου $\Gamma_1 \equiv \{A \multimap B, \Gamma_1'\}$.

  Παρατηρούμε τώρα λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, ότι $|\Gamma_1' \cup \Gamma_2 \cup \Delta_3 \cup A| \leq 1$. Άρα $\Gamma_1' = \Gamma_2 = \Delta_3 = \emptyset$. Δηλαδή $|\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Delta_3| = 1$.

  Επομένως χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και την επαγωγική υπόθεση, λαμβάνουμε την LKT-απόδειξη $sk(\pi)$

$$\frac{\begin{matrix}[\text{E.Y.}] \\ ; \Rightarrow A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\text{E.Y.}] \\ B; \Gamma_3 \Rightarrow \Delta_2, \Delta_1\end{matrix}}{A \rightarrow B; \Gamma_3 \Rightarrow \Delta_2, \Delta_1} \text{(L}\multimap\text{)}$$

Ομοίως, για τις υπόλοιπες περιπτώσεις. □

Άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 5.1.10 είναι η εμφύτευση του LKT στη γραμμική λογική.

Πόρισμα 5.1.11. *Ο ακολουθητής $\Pi; \Gamma \Rightarrow \Delta$ αποδεικνύεται στο LKT αν και μόνον αν ο ακολουθητής $\Pi^T, !?\Gamma^T \Rightarrow ?\Delta^T$ αποδεικνύεται στο $\{!, ?, \multimap, \forall_2^T\}$-τμήμα της γραμμικής λογικής, όπου το $\forall_2^T$ δηλώνει ότι οι τύποι που αφαιρούνται πρέπει να είναι της μορφής X^T.*

Συνεπώς, ουσιαστικά έχουμε αποδείξει ότι η τετράδα $\langle(\cdot)^T, \cdot, !?, ?\rangle$ είναι ε.σ.δ. για το σύστημα LKT. Επίσης εύκολα αποδεικνύεται ότι και η τετράδα $\langle(\cdot)^T, ?, !?, ?\rangle$ είναι ε.σ.δ. για το σύστημα LKT (επαληθεύοντας τον Ορισμό 3.2.2). Δηλαδή, σε αντιστοιχία με το σύστημα LKQ, υπάρχουν δύο επαγωγικές στρατηγικές διακόσμησης για LKT-αποδείξεις π:

1. Η T-διακόσμηση $\langle(\cdot)^T, ?, !?, ?\rangle$, που παράγει γραμμικές αποδείξεις π^T.

2. Η T′-διακόσμηση $\langle(\cdot)^T, \cdot, !?, ?\rangle$, που παράγει γραμμικές αποδείξεις $\pi^{T'}$.

Επομένως, και για το σύστημα LKT βρίσκουμε δύο διαδικασίες (σ^T και $\sigma^{T'}$) που απαλείφουν τις τομές από κάποια LKT-απόδειξη π, οι οποίες αντιστοιχούν στην "ανάκλαση" στο LKT, της γραμμικής κανονικοποίησης στις π^T και $\pi^{T'}$, αντίστοιχα. Επιπλέον πρέπει να τονίσουμε ότι το LKT κληρονομεί τις υπολογιστικές ιδιότητες της γραμμικής λογικής, για τον ίδιο λόγο που τις κληρονομεί και το LKQ. Δηλαδή

Θεώρημα 5.1.12. *Το σύστημα LKT είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμο και ικανοποιεί την ιδιότητα Church-Rosser.*

Απόδειξη. Ομοίως με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.6. □

Όπως είχαμε αναφέρει και για την αντίστοιχη περίπτωση στο LKQ, θα δείξουμε τη διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στις διαδικασίες σ^T και $\sigma^{T'}$.

Διαφορά ανάμεσα στη σ^T και τη $\sigma^{T'}$

Περίπτωση 1: Ας θεωρήσουμε μία τομή μέσης σε μία LKT-απόδειξη π:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \vdots\\ ;\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \vdots\\ \Pi; A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2\end{matrix}}{\Pi; \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}\ (\text{τομή μέσης})$$

Τότε η τομή που θα προκύψει στην απόδειξη π^T θα είναι της μορφής:

$$\dfrac{\dfrac{\boxed{\begin{matrix}\pi_1^T\\ \vdots\\ !?\Gamma_1^T \Rightarrow ?\Delta_1^T, ?A^T\end{matrix}}}{!?\Gamma_1^T \Rightarrow ?\Delta_1^T, !?A^T}\ (\mathrm{R}!) \qquad \begin{matrix}\pi_2^T\\ \vdots\\ ?\Pi^T, !?A^T, !?\Gamma_2^T \Rightarrow ?\Delta_2^T\end{matrix}}{?\Pi^T, !?\Gamma_1^T, !?\Gamma_2^T \Rightarrow ?\Delta_1^T, ?\Delta_2^T}\ (\text{τομή})$$

Αντίστοιχα στην $\pi^{T'}$ η τομή θα είναι της μορφής:

$$\dfrac{\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\pi_1^{T\,\prime}\\ \vdots \\ !?\Gamma_1^T \Rightarrow ?\Delta_1^T, ?A^T\end{array}}}{!?\Gamma_1^T \Rightarrow ?\Delta_1^T, !?A^T}\,(\mathrm{R!}) \qquad \begin{array}{c}\pi_2^{T\,\prime}\\ \vdots \\ \Pi^T, !?A^T, !?\Gamma_2^T \Rightarrow ?\Delta_2^T\end{array}}{\Pi^T, !?\Gamma_1^T, !?\Gamma_2^T \Rightarrow ?\Delta_1^T, ?\Delta_2^T}\,(\text{τομή})$$

Παρατήρηση: Και για τις δύο περιπτώσεις, σε αντιστοιχία με την ορολογία των δικτύων απόδειξης, η υποαπόδειξη της π που καταλήγει στον ακολουθητή της αριστερής υπόθεσης της τομής, καλείται *κουτί*. Αυτό συμβαίνει διότι ο τελευταίος κανόνας είναι εκθετικός συμφραστικός, δηλαδή κανόνας "κουτιού". Γι' αυτό και στις αποδείξεις π^T και $\pi^{T\,\prime}$, τις αποδείξεις *κουτιά*, τις τοποθετούμε μέσα σε κουτιά.

Για να απαλειφθεί η τομή, και με τη σ^T και με τη $\sigma^{T\,\prime}$, πρέπει να αντιμεταθέσουμε το *κουτί* προς τα δεξιά και πάνω (δηλαδή προς τα φύλλα του δέντρου), εν τω μεταξύ διπλασιάζοντας και/ή διαγράφοντας το, έως ότου φτάσουμε στο σημείο όπου εισάγεται το εκθετικό στον τύπο τομής, από τον εκθετικό κανόνα αμέλειας L!, ή κάποιο αξίωμα. Τότε η καινούργια τομή θα έχει τύπο χαμηλότερης πολυπλοκότητας, οπότε συνεχίζοντας ομοίως τη διαδικασία, η τομή απαλείφεται δίνοντας την ίδια κανονική μορφή και για τις δύο διαδικασίες.

Περίπτωση 2: Έστω τώρα ότι η απόδειξη π αντί για τομή μέσης, είχε τομή κεφαλής. Δηλαδή η π τώρα είναι της μορφής:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots \\ \Pi;\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots \\ A;\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2\end{array}}{\Pi;\Gamma_1,\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1,\Delta_2}\,(\text{τομή κεφαλής})$$

Τότε η π^T θα είναι της μορφής:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^T\\ \vdots \\ ?\Pi^T, !?\Gamma_1^T \Rightarrow ?\Delta_1^T, ?A^T\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2^T\\ \vdots \\ ?A^T, !?\Gamma_2^T \Rightarrow ?\Delta_2^T\end{array}}{?\Pi^T, !?\Gamma_1^T, !?\Gamma_2^T \Rightarrow ?\Delta_1^T, ?\Delta_2^T}\,(\text{τομή})$$

Όμως η $\pi^{T\,\prime}$ θα είναι της μορφής:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^{T\,\prime}\\ \vdots \\ \Pi^T, !?\Gamma_1^T \Rightarrow ?\Delta_1^T, ?A^T\end{array} \qquad \dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\pi_2^{T\,\prime}\\ \vdots \\ A^T, !?\Gamma_2^T \Rightarrow ?\Delta_2^T\end{array}}}{?A^T, !?\Gamma_2^T \Rightarrow ?\Delta_2^T}\,(\mathrm{L?})}{\Pi^T, !?\Gamma_1^T, !?\Sigma^T \Rightarrow ?\Delta_1^T, ?\Delta_2^T}\,(\text{τομή})$$

Παρατηρούμε επομένως ότι μόνο στην $\pi^{T'}$ η δεξιά υποαπόδειξη είναι *κουτί*. Αυτό ακριβώς είναι το σημείο που περιγράφει τη *διαφορά* ανάμεσα στη σ^T και τη $\sigma^{T'}$. Δηλαδή, για να απαλείψουμε την τομή από την π^T (βάσει της σ^T) ελέγχουμε την π_2^T και βρίσκουμε το σημείο εισαγωγής του ? για τον τύπο τομής $?A^T$. Η εισαγωγή θα γίνεται είτε μέσω αξιώματος (οπότε η τομή απαλείφεται άμεσα), είτε μέσω ενός συμφραστικού κανόνα (L?), του οποίου θα προηγείται ο λογικός κανόνας που εισάγει τον κύριο σύνδεσμο του A^T. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε βρει το *κουτί* (η απόδειξη μέχρι την εισαγωγή του ? στον τύπο A^T), το οποίο θα αντιμεταθέσουμε προς τα πάνω στην π_1^T, πιθανόν διπλασιάζοντας και/ή διαγράφοντας το, έως ότου φτάσουμε στην εισαγωγή του ? στον τύπο τομής $?A^T$, από ένα κανόνα αμέλειας R?. Έπειτα η διαδικασία συνεχίζεται ούτως ώστε να μεταφερθεί η τομή είτε σε αξίωμα, είτε σε κάποιον από τους υποτύπους του A^T.

Από την άλλη μεριά, για να απαλείψουμε την τομή από την $\pi^{T'}$ (βάσει της $\sigma^{T'}$), πρέπει να αντιμεταθέσουμε το *κουτί* $\pi_2^{T'}$ προς τα πάνω, στην $\pi_1^{T'}$, πιθανόν διπλασιάζοντας και/ή διαγράφοντας το, έως ότου φτάσουμε στην εισαγωγή του ? στον τύπο τομής $?A^T$, από ένα κανόνα αμέλειας R?. Τότε θα προηγείται του R? είτε ο λογικός κανόνας που εισάγει τον κύριο σύνδεσμο του A^T, είτε αξίωμα. Αν προηγείται αξίωμα, η τομή απαλείφεται άμεσα. Διαφορετικά αντιμεταθέτουμε την αντίστοιχη υποαπόδειξη προς τα πάνω, στην $\pi_2^{T'}$, έως ότου φτάσουμε σε αξίωμα, ή λογικό κανόνα που εισάγει τον κύριο σύνδεσμο του A^T.

Επομένως η διαφορά ανάμεσα στις διαδικασίες σ^T και $\sigma^{T'}$, βρίσκεται ουσιαστικά στο μέγεθος των υποαποδείξεων που διαγράφονται ή/και διπλασιάζονται κατά τη διάρκεια απαλοιφής των τομών κεφαλής κάποιας απόδειξης. Δηλαδή, ενώ στην περίπτωση της $\pi^{T'}$ το *κουτί* είναι η υποαπόδειξη που καταλήγει στον ακολουθητή $A^T, !?\Gamma_2^T \Rightarrow ?\Delta_2^T$ (βλ. απόδειξη $\pi^{T'}$), για την π^T το *κουτί* θα είναι όπως φαίνεται στην εξής εικόνα:

$$
\dfrac{\pi_1^T \atop {\vdots \atop ?\Pi^T, !?\Gamma_1^T \Rightarrow ?\Delta_1^T, ?A^T} \qquad {\dfrac{\boxed{\pi_2^T \atop {\vdots \atop A^T, !?\Sigma^T \Rightarrow ?E^T}}}{?A^T, !?\Sigma^T \Rightarrow ?E^T}\,(\mathrm{L?}) \atop {\vdots \atop {\text{δομικοί κανόνες} \atop {\vdots \atop ?A^T, !?\Gamma_2^T \Rightarrow ?\Delta_2^T}}}}}{?\Pi^T, !?\Gamma_1^T, !?\Gamma_2^T \Rightarrow ?\Delta_1^T, ?\Delta_2^T}\,(\text{τομή})
$$

Δηλαδή το μέγεθος του αρχικού *κουτιού* για την π^T είναι $\leq$ του μεγέθους του αρχικού *κουτιού*, για την $\pi^{T'}$.

Συμπεραίνουμε τελικά ότι, το μέγεθος των υποαποδείξεων που διαγράφονται ή/και διπλασιάζονται κατά τη διάρκεια της απαλοιφής των τομών κεφαλής κάποιας απόδειξης, είναι ελαχιστικό στη σ^T και μεγιστικό στη $\sigma^{T'}$.

5.2 Το σύστημα $\mathbf{LK^{tq}}$

Ας θεωρήσουμε το συστήμα κλασικής λογικής LK και το σύστημα κλασικής γραμμικής λογικής LL, όπως αυτά ορίζονται στα Παραρτήματα B και D, αντιστοίχως. Το σύστημα LL, χρησιμοποιείται ουσιαστικά ως ένας κατάλληλος συμβολισμός για δίκτυα απόδειξης με ήμερα προσθετικά (taLL). Σημειώνουμε εδώ ότι το σύστημα taLL είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμο και ικανοποιεί την ιδιότητα συμβολής, δηλαδή ικανοποιεί τις ιδιότητες που ικανοποιούν και τα άλλα συστήματα δικτύων απόδειξης που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1 (βλ. [DJS97]). Επιπλέον πρέπει να παρατηρήσουμε ότι λόγω μιας πρόσφατης δουλειάς των Joinet, Schellinx και Tortora de Falco [JSTdF00], τα αποτελέσματα που θα ειπωθούν στη συνέχεια (ισχυρή κανονικοποίηση και ιδιότητα συμβολής των *tq*-αναγωγών) ισχύουν ακόμα και όταν στις κλασικές αποδείξεις επιτρέψουμε τη χρήση οποιουδήποτε συνδυασμού από προσθετικούς και πολλαπλασιαστικούς κανόνες εισαγωγής, για κάθε λογικό σύνδεσμο.

Σκοπός των Danos, Joinet και Schellinx, ήταν να κατασκευάσουν ένα σύστημα κλασικής λογικής το οποίο να έχει τις ιδιότητες που θέλουμε. Δηλαδή να είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμο και να ικανοποιεί την ιδιότητα Church-Rosser. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το LK (έχουμε αναφέρει για το CL, αλλά και το LK είναι ουσιαστικά το ίδιο, καθώς απλά έχουμε προσθέσει στο CL ρητούς κανόνες για την άρνηση) δεν ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες. Ο μη ντετερμινισμός που δημιουργείται στη διαδικασία απαλοιφής της τομής παίζει σημαντικό ρόλο σε αυτό. Όμως ας εστιάσουμε ακριβώς στα σημεία που προκαλούν πρόβλημα, τα οποία είναι γνωστά και ως *διλήμματα* καθώς κάθε φορά πρέπει να επιλέγουμε μία εκ των δύο δυνατών επιλογών.

5.2.1 Το δομικό δίλημμα

Το δομικό δίλημμα αφορά το πρόβλημα μη ντετερμινισμού κατά την απαλοιφή των τομών σε κλασικές αποδείξεις, το οποίο σχολιάστηκε στη σελίδα 12 του Κεφαλαίου 1. Ας δούμε όμως συγκεκριμένα τι συμβαίνει. Έστω ότι έχουμε την ακόλουθη απόδειξη του ακολουθητή $A \vee_m A \Rightarrow A \wedge_m A$, και θέλουμε να απαλείψουμε την τομή (εφαρμόζουμε πολλαπλασιαστικούς κανόνες):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad A \Rightarrow A}{A \vee A \Rightarrow A, A}\,(\mathrm{L}\vee)}{A \vee A \Rightarrow A}\,(\mathrm{RC}) \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad A \Rightarrow A}{A, A \Rightarrow A \wedge A}\,(\mathrm{R}\wedge)}{A \Rightarrow A \wedge A}\,(\mathrm{LC})}{A \vee A \Rightarrow A \wedge A}\,(\text{τομή})$$

Στο πρώτο βήμα της διαδικασίας για την απαλοιφή της τομής, πρέπει να επιλέξουμε είτε την απόδειξη της αριστερής υπόθεσης της τομής, είτε την απόδειξη της δεξιάς υπόθεσης, ώστε να διπλασιαστεί (ουσιαστικά μετακινούμε τη μία υποαπόδειξη προς την άλλη). Δηλαδή αν επιλέγαμε την *αριστερή* επιλογή θα βρίσκαμε:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\Rightarrow A \quad A\Rightarrow A}{A\vee A\Rightarrow A,A}\,(\text{L}\vee)}{A\vee A\Rightarrow A}\,(\text{RC}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\Rightarrow A \quad A\Rightarrow A}{A\vee A\Rightarrow A,A}\,(\text{L}\vee)}{A\vee A\Rightarrow A}\,(\text{RC}) \qquad \dfrac{A\Rightarrow A \quad A\Rightarrow A}{A,A\Rightarrow A\wedge A}\,(\text{R}\wedge)}{A,A\vee A\Rightarrow A\wedge A}\,(\text{τομή})}{A\vee A, A\vee A\Rightarrow A\wedge A}\,(\text{τομή})}{A\vee A\Rightarrow A\wedge A}\,(\text{LC})$$

Παρατηρούμε επομένως ότι το επίπεδο της τομής έχει χαμηλώσει. Οπότε συνεχίζουμε τη διαδικασία. Πάλι υπάρχουν δύο δυνατές επιλογές (για κάθε τομή): οι αντίστοιχες *αριστερές* και *δεξιές*. Αν τώρα εξακολουθητικά, εφαρμόζουμε την αριστερή επιλογή, θα καταλήξουμε στην κανονική μορφή:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\Rightarrow A \quad A\Rightarrow A}{A\vee A\Rightarrow A,A}\,(\text{L}\vee)}{A\vee A\Rightarrow A}\,(\text{RC}) \qquad \dfrac{\dfrac{A\Rightarrow A \quad A\Rightarrow A}{A\vee A\Rightarrow A,A}\,(\text{L}\vee)}{A\vee A\Rightarrow A}\,(\text{RC})}{A\vee A, A\vee A\Rightarrow A\wedge A}\,(\text{R}\wedge)}{A\vee A\Rightarrow A\wedge A}\,(\text{LC})$$

Αντιθέτως αν κάποιος επιλέξει στο δεύτερο βήμα να εφαρμόσει *δεξιά* επιλογή, τότε τα πράγματα αλλάζουν. Στο παράδειγμα μας δηλαδή, θα είχαμε

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\Rightarrow A \quad A\Rightarrow A}{A\vee A\Rightarrow A,A}\,(\text{L}\vee)}{A\vee A\Rightarrow A}\,(\text{RC}) \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\Rightarrow A \quad A\Rightarrow A}{A\vee A\Rightarrow A,A}\,(\text{L}\vee) \quad \dfrac{A\Rightarrow A \quad A\Rightarrow A}{A,A\Rightarrow A\wedge A}\,(\text{R}\wedge)}{A,A\vee A\Rightarrow A\wedge A,A}\,(\text{τομή}) \quad \dfrac{A\Rightarrow A \quad A\Rightarrow A}{A,A\Rightarrow A\wedge A}\,(\text{R}\wedge)}{A,A,A\vee A\Rightarrow A\wedge A, A\wedge A}\,(\text{τομή}) \\ \hline\hline A,A\vee A\Rightarrow A\wedge A\end{array}}{A\vee A, A\vee A\Rightarrow A\wedge A}\,(\text{τομή})}{A\vee A\Rightarrow A\wedge A}\,(\text{LC})$$

με αποτέλεσμα το μέγεθος της απόδειξης να αυξάνεται και το επίπεδο της ψηλότερης τομής να παραμένει το ίδιο.

Με άλλα λόγια τυχαίες ακολουθίες από επιλογές, μπορούν να οδηγήσουν είτε σε άπειρες αναγωγές, είτε σε αυθαίρετα μεγάλες κανονικές μορφές. Επομένως θα πρέπει να γίνεται εξακολουθητικά η ίδια επιλογή (δηλαδή η τομή να ανεβαίνει προς τα φύλλα του δέντρου των προγόνων ενός εκ των τύπων τομής), για να τερματίζει πάντα η διαδικασία.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι στο πρώτο βήμα είχαμε επιλέξει *δεξιά*. Τότε:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad A \Rightarrow A}{A \vee A \Rightarrow A, A}\,(\mathrm{L}\vee) \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad A \Rightarrow A}{A, A \Rightarrow A \wedge A}\,(\mathrm{R}\wedge)}{A \Rightarrow A \wedge A}}{A \vee A \Rightarrow A, A \wedge A}\,(\text{τομή}) \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad A \Rightarrow A}{A, A \Rightarrow A \wedge A}\,(\mathrm{R}\wedge)}{A \Rightarrow A \wedge A}}{A \vee A \Rightarrow A \wedge A, A \wedge A}\,(\text{τομή})}{A \vee A \Rightarrow A \wedge A}\,(\mathrm{RC})$$

και συνεχίζοντας εξακολουθητικά με *δεξιές* επιλογές, θα καταλήγαμε στην κανονική μορφή:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad A \Rightarrow A}{A, A \Rightarrow A \wedge A}\,(\mathrm{R}\wedge)}{A \Rightarrow A \wedge A}\,(\mathrm{LC}) \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad A \Rightarrow A}{A, A \Rightarrow A \wedge A}\,(\mathrm{R}\wedge)}{A \Rightarrow A \wedge A}\,(\mathrm{LC})}{A \vee A \Rightarrow A \wedge A, A \wedge A}\,(\mathrm{L}\vee)}{A \vee A \Rightarrow A \wedge A}\,(\mathrm{RC})$$

Διαπιστώνουμε επομένως, ότι οι *αριστερές* εξακολουθητικές επιλογές οδηγούν σε κανονική μορφή, διαφορετική από αυτή που προκύπτει από τις *δεξιές* εξακολουθητικές επιλογές. Επομένως η διαδικασία για να *συμβάλει*, θα πρέπει να γνωρίζει εκ των προτέρων με ποια επιλογή να ξεκινήσει και να συνεχίσει (δηλαδή ποια υποαπόδειξη να μετακινεί κάθε φορά). Ο απλούστερος τρόπος για να ξεπεράσουμε αυτό το *αριστερό/δεξιό* δίλημμα, είναι να ορίσουμε ένα πρωτόκολλο εκ των προτέρων, προσθέτοντας έτσι την απαιτούμενη πληροφορία στους τύπους.

Η πληροφορία προστίθεται σε ένα τύπο, χρωματίζοντάς τον. Οπότε ο ακόλουθος ορισμός είναι απαραίτητος.

Ορισμός 5.2.1. *Ένας τύπος είναι* **χρωματισμένος***, όταν είναι εφοδιασμένος με μία απεικόνιση των υποτύπων του σε ένα "χώρο χρωμάτων", ο οποίος δηλώνεται με* $\{t,q\}$*, ή με άλλα λόγια όταν κάθε υποτύπος του φέρει χρώμα. Επίσης δηλώνουμε ρητά το* **χρώμα** ϵ *ενός τύπου* A *ως άνω δείκτη, δηλαδή:* A^{ϵ}.

Το, εμπλουτισμένο με χρώματα, σύστημα που προκύπτει καλείται LK^{tq}, και διατηρεί τους κανόνες του LK, οι οποίοι όμως τώρα εφαρμόζονται σε χρωματισμένους τύπους. Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι οι κανόνες σέβονται τα χρώματα. Δηλαδή τα χρώματα θα ανατίθενται τυχαία, με την προϋπόθεση όμως ότι σέβονται τις ταυτοτικές κλάσεις.

Στο εξής δεχόμαστε την εξής συνθήκη: το χρώμα t (αντίστοιχα το q) καθορίζει την *αριστερή* (αντίστοιχα *δεξιά*) επιλογή (ή πρωτόκολλο). Αντιστοίχως, μια εμφάνιση ενός χρωματισμένου τύπου στον "προηγούμενο" (αντίστοιχα "επόμενο") ενός ακολουθητή, καλείται *ελκυστική* (*attractive*) αν το χρώμα του είναι t (αντίστοιχα q). Αυτή η ορολογία εισάγεται για να μας δηλώνει ότι η απόδειξη του ακολουθητή που περιέχει το *μη-ελκυστικό* τύπο τομής, θα πρέπει να κινηθεί πρώτη.

Παρατήρηση: Εναλλακτικά οι τύποι A^q και A^t συμβολίζονται με $\overrightarrow{A}$ και $\overleftarrow{A}$ αντίστοιχα. Τώρα, το να αναθέτουμε χρώματα, δεν σημαίνει ότι επιβάλουμε κάποια στρατηγική κανονικοποίησης. Αυτό συμβαίνει διότι δεν επιλέγουμε τομές, αλλά τον τρόπο με τον οποίο τις ανάγουμε. Επίσης, το γεγονός ότι οι Danos, Joinet και Schellinx δώσανε στα χρωμάτα τα ονόματα q και t, δεν είναι τυχαίο. Με άλλα λόγια, το χρώμα t καθορίζει την αριστερή επιλογή, ακριβώς γιατί αν είχαμε μεταφράσει μια κλασική απόδειξη με τη μετάφραση t, η απαλοιφή της γραμμικής τομής που θα προέκυπτε στη διακόσμηση, θα γινόταν με τον *αριστερό* τρόπο, καθώς ο γραμμικός τύπος τομής στην αριστερή υπόθεση του κανόνα τομής, θα προερχόταν από κανόνα "κουτιού".

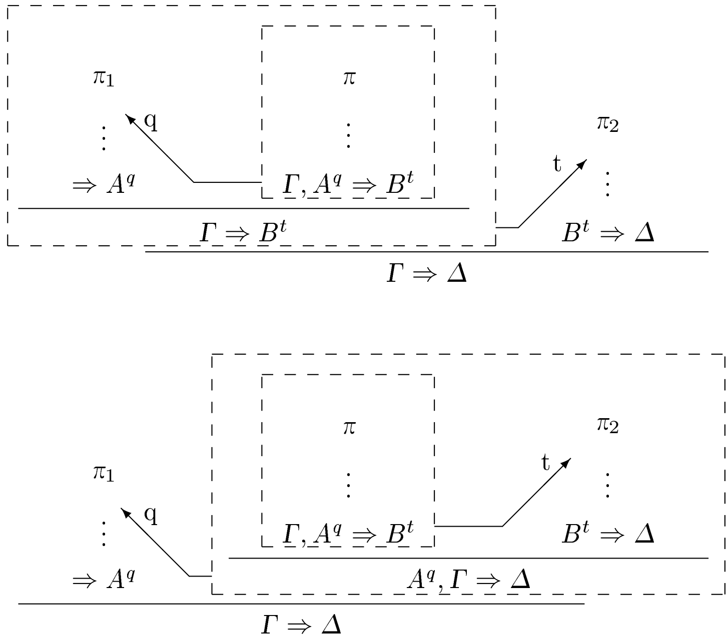
5.2.2 Το λογικό δίλημμα

Το λογικό δίλημμα αντιστοιχεί ακριβώς στο μη ντετερμινισμό που παρατηρήσαμε στη σελίδα 50, ο οποίος είχε να κάνει με το πως απαλείφονται οι τομές, όταν οι τύποι τους είναι κύριοι σε λογικούς κανόνες. Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση μιας απόδειξης της μορφής:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A^q \Rightarrow B^t\end{array}}{\Gamma \Rightarrow (A^q \multimap B^t)^t} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Rightarrow A^q\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ B^t \Rightarrow \Delta\end{array}}{(A^q \multimap B^t)^t \Rightarrow \Delta}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Τότε ο *μη-ελκυστικός* τύπος τομής είναι αυτός που βρίσκεται στην αριστερή υπόθεση του κανόνα τομής. Ωστόσο, στη συγκεκριμένη περίπτωση όπου και οι δύο τύποι τομής είναι κύριοι τύποι των λογικών κανόνων που προηγούνται, η τομή απαλείφεται λαμβάνοντας ως απογόνους δύο τομές που εφαρμόζονται στους άμεσους υποτύπους του τύπου τομής (για το παράδειγμα στους A^q και B^t), χωρίς να λαμβάνεται υπόψιν ποιος είναι ο *μη-ελκυστικός* τύπος τομής. Φυσικά και αυτή η πληροφορία θα εισαχθεί στο σύστημα LK^{tq} (μέσω του tq-πρωτοκόλλου, βλ. παράγραφο 5.2.3). Συνεπώς υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις για να απαλειφθεί η τομή του παραδείγματος. Οι περιπτώσεις αυτές φαίνονται στο Σχήμα 5.5. Σε αυτό το σημείο αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στον ακολουθητή $\Gamma, A^q \Rightarrow B^t$ οι τύποι A^q και B^t, είναι και οι δύο *μη-ελκυστικοί.* Το επόμενο βήμα τώρα, είναι να απαλειφθούν οι διαδοχικές τομές, για τις δύο περιπτώσεις. Οι διαδικασίες που πρέπει να γίνουν, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, φαίνονται στο Σχήμα 5.5.

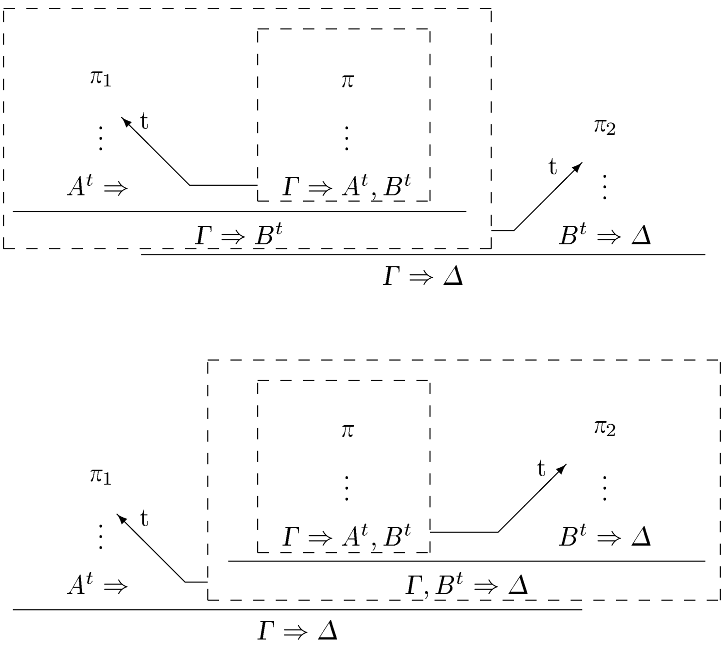
Ας παρατηρήσουμε όμως καλύτερα τι ακριβώς θα συμβεί. Στην πρώτη περίπτωση η π_1 διπλασιάζει (ή διαγράφει) μόνο την π, ενώ η π_2 διπλασιάζει (ή διαγράφει) τις π_1 και π μαζί (όποια μορφή αυτές έχουν αποκτήσει μετά την "μετακίνηση" της π προς την π_1). Αντιθέτως, στη δεύτερη περίπτωση η π_1 διπλασιάζει (ή διαγράφει) τις π και π_2 μαζί, ενώ η π_2 διπλασιάζει (ή διαγράφει) μόνο την π.



Σχήμα 5.5: Το q/t δίλημμα.

Με άλλα λόγια, έχει σημασία με ποια σειρά θα γίνει η εφαρμογή των τομών, στο δεύτερο βήμα απαλοιφής της τομής, καθώς όπως είδαμε στο παράδειγμα μας, οι δύο ενδεχόμενες περιπτώσεις καταλήγουν σε διαφορετικές αποδείξεις. Αν τώρα, ελέγξουμε και τις άλλες δυνατές περιπτώσεις, παρατηρούμε το ίδιο φαινόμενο, όταν ο τύπος τομής είναι ο $A \wedge_m B$ ή ο $A \vee_m B$. Αν θεωρήσουμε λοιπόν, ότι για το σύνδεσμο $\rightarrow_m$ το δίλημμα υπήρχε, όταν είχαμε τα χρώματα (q,t) για τους τύπους (A,B), τότε για το σύνδεσμο $\wedge_m$ υπάρχει όταν τα χρώματα είναι (t,t), ενώ για το σύνδεσμο $\vee_m$, όταν είναι (q,q). Δηλαδή παρατηρούμε ότι το δίλημμα παρουσιάζεται, όταν οι τύποι που είναι ενεργοί στον "μίας υπόθεσης" κανόνα είναι και οι δύο *μη-ελκυστικοί*. Για παράδειγμα το Σχήμα 5.6 αντιστοιχεί στην περίπτωση του $A \vee_m B$. Ας θυμηθούμε πάλι το πρόβλημα επιλογής που είχαμε στην παράγραφο 3.3. Αυτό παρουσιαζόταν όταν θέλαμε να διακοσμήσουμε τους πολλαπλασιαστικούς κανόνες $L\wedge$ και $R\vee$ με τις μεταφράσεις q και t αντίστοιχα. Επομένως παρουσιάζεται μια άμεση συσχέτιση του διλήμματος του Σχήματος 5.6 και της επιλογής στο παράδειγμα της σελίδας 50. Με άλλα λόγια, παρατηρούμε ότι τέτοιες διαδοχικές τομές είναι το αποτέλεσμα ενός *πολλαπλασιαστικού βήματος-κλειδιού*, και το να λέμε ότι παίζει ρόλο η *σειρά* με την οποία εφαρμόζονται αυτές (πράγμα που επιφέρει τη μη συμβολή της διαδικασίας), είναι το ίδιο με το να πούμε ότι πρέπει να κάνουμε *επιλογή* (το οποίο επιφέρει το μη ντετερμινισμό).

Για να ξεπεράσουμε και αυτό το εμπόδιο, πρέπει να προσθέσουμε ακόμα ένα κομμάτι πληροφορίας στο σύστημα. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο ισοδύναμους τρόπους. Ο πρώτος (τον οποίο και θα θεωρήσουμε στο εξής) είναι



Σχήμα 5.6: Το t/t δίλημμα.

να **προσανατολίσουμε** τους κανόνες "μίας υπόθεσης" για τους πολλαπλασιαστικούς συνδέσμους (δηλαδή να τους εφοδιάσουμε με την κατάλληλη πληροφορία), καθορίζοντας έτσι πότε στο λογικό βήμα η τομή στον A_l[2] γίνεται πρώτα ή όχι. Με άλλα λόγια στο πρωτόκολλο, θα πρέπει να εφοδιάσουμε τους τύπους με χρώματα και επιπλέον τους κανόνες που αναφέραμε, με αυτή την πληροφορία (orientation).

Ο δεύτερος τρόπος θα ήταν να **προσανατολίσουμε** τους συνδέσμους, δηλαδή αντίστοιχα με τους κανόνες, να δώσουμε την πληροφορία στους συνδέσμους[3]. Για παράδειγμα, αν ο τύπος τομής είναι ο $A^q \to B^t$, ο **προσανατολισμός** "$A^q \overset{\curvearrowright}{\to} B^t$" λέει ότι κατά την αναγωγή, θα πρέπει πρώτα να εφαρμοστεί τομή στον A. Αν θέλαμε να εφαρμοστεί πρώτα τομή στον B, ο **προσανατολισμός** θα ήταν ο "$A^q \overset{\curvearrowleft}{\to} B^t$".

Το σύστημα που λαμβάνεται, **προσανατολίζοντας** είτε τους κανόνες, είτε τους συνδέσμους, εξακολουθεί να καλείται LK^{tq}.

5.2.3 Το tq-πρωτόκολλο

Σε αυτή την παράγραφο ορίζουμε ένα σχήμα κανονικοποίησης για το σύστημα LK^{tq}, το οποίο ενσωματώνει όλα αυτά που αναφέραμε στις παραγράφους 5.2.1 και 5.2.2, και το οποίο θα καλούμε *tq-πρωτόκολλο.*

[2] ο κάτω δείκτης l, δηλώνει ότι ο τύπος A βρίσκεται στο αριστερό μέρος του ακολουθητή

[3] Παρατηρούμε ότι δεν είναι ανάγκη οι ταυτοτικές κλάσεις να σέβονται τον **προσανατολισμό**.

Παρατήρηση: Σε κάθε στιγμιότυπο ενός κανόνα τομής σε μια LK^{tq}-απόδειξη, ο τύπος τομής θα είναι χρωματισμένος είτε με q είτε με t. Δηλαδή οι τομές θα έχουν μία εκ των μορφών:

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ \Rightarrow A^q\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ A^q \Rightarrow\end{matrix}}{\Rightarrow} \quad \text{και} \quad \frac{\begin{matrix}\vdots \\ \Rightarrow A^t\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ A^t \Rightarrow\end{matrix}}{\Rightarrow}$$

Θα καλούμε την υποαπόδειξη που περιέχει την *ελκυστική* εμφάνιση του τύπου τομής, *ελκυστική υποαπόδειξη*.

Ορισμός 5.2.2. (Το tq-πρωτόκολλο) *Η αναγωγή των τομών, σε κάποια LK^{tq}-απόδειξη, προχωρά σύμφωνα με το* **tq-πρωτόκολλο** *μέσω δύο πιθανών ειδών βημάτων, τα δομικά $S1$ και $S2$, και τα λογικά L (βήματα-κλειδιά):*

- L-**βήμα**: *εφαρμόζεται όταν και οι δύο τύποι τομής είναι κύριοι σε κάποιο λογικό κανόνα. Σε αυτή την περίπτωση λαμβάνουμε ως απογόνους μία ή δύο τομές, στον(στους) άμεσο(υς) υποτύπο(υς) του τύπου τομής. Η σειρά με την οποία εφαρμόζονται αυτές οι τομές καθορίζεται από τον* **προσανατολισμό**.

- S-**βήμα**: *εφαρμόζεται κάθε φορά που δεν εφαρμόζεται L-βήμα. Κάθε δομικό βήμα αποτελείται από την 'μεταφορά' μιας από τις υποαποδείξεις του τύπου τομής, προς τα πάνω στο δέντρο των προγόνων του τύπου τομής της άλλης υποαπόδειξης, διπλασιάζοντας την και συστέλλοντας το περιβάλλον της κάθε φορά που διέρχεται από κάποιο κανόνα συστολής (ή μέσω του περιβάλλοντος ενός 'δύο υποθέσεων' προσθετικού κανόνα). Αυτή η διαδικασία τερματίζει όταν φτάσει σε εισαγωγή του τύπου τομής από αξιώματα, όπου εκεί οι "αξιωματικές τομές" απαλείφονται άμεσα, ή όταν φτάσει στην εισαγωγή του τύπου τομής από κάποιο κανόνα εξασθένησης, ο οποίος αντικαθίσταται από εξασθενήσεις στους τύπους του περιβάλλοντος, ή όταν φτάσει σε κανόνα εισαγωγής του κυρίου συνδέσμου του τύπου τομής.*

  Η επιλογή για το ποια υποαπόδειξη θα μετακινηθεί πρώτη καθορίζεται από τα εξής: αν ο ελκυστικός τύπος τομής είναι κύριος σε ένα λογικό κανόνα τότε μετακινούμε την ελκυστική υποαπόδειξη ($S2$). Αν δεν είναι, μετακινούμε την άλλη ($S1$).

Για να αποδείξουμε την ασθενή κανονικοποίηση του συστήματος LK^{tq} (που ικανοποιεί το tq-πρωτόκολλο) χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.2.3. *Η* **ενέργεια** *μιας τομής c είναι το ζεύγος $(d(A), s(A))$, όπου $d(A)$ είναι ο αριθμός των συμβόλων στον τύπο A και $s(A)$ είναι το είδος του* tq-*βήματος αναγωγής που εφαρμόζεται στην c ($S1$, $S2$ ή L).*

Παρατήρηση: Εξ' ορισμού των *tq*-βημάτων, όταν εφαρμόζονται στην c, η *ενέργεια* (των απογόνων) της c μειώνεται (οι ενέργειες είναι λεξικογραφικά διατεταγμενες, με $S1 > S2 > L$). Αυτό βέβαια δεν ισχύει πάντα στην περίπτωση ενός δευτεροβάθμιου L-βήματος, όπου η ενδεχόμενη αύξηση του $d(A)$ μπορεί να είναι πολύ μεγάλη.

Εν συνεχεία μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.2.4. (ασθενούς κανονικοποίησης) *Το σύστημα LK^{tq}, είναι ισοδύναμο με το LK^{tq} χωρίς την τομή.*

Απόδειξη. Θα αναφέρω μόνο το σκελετό της απόδειξης, καθώς οι λεπτομέρειες αφενώς έπονται εύκολα, αφετέρου υπάρχουν στο [DJS97].

Η απόδειξη γίνεται ως συνήθως με διπλή επαγωγή, μόνο που τώρα τα μεγέθη δεν είναι ο βαθμός της απόδειξης και το επίπεδο της τομής, αλλά τα μεγέθη της *ενέργειας*. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι, αν έχουμε μια απόδειξη π, και μια τομή c στην π με τύπο τομής A, τότε η ενέργεια των (απογόνων των) υπολοίπων τομών της π δεν αυξάνεται. Οπότε από την προηγούμενη παρατήρηση, η ενέργεια των απογόνων της c μειώνεται μετά από ένα tq-βήμα και συνεπώς λαμβάνουμε το ζητούμενο από την επαγωγική υπόθεση. □

Αυτό που έχει αρκετό ενδιαφέρον τώρα, είναι να δούμε ένα παράδειγμα για το πως γίνεται η κανονικοποίηση με το *tq-πρωτόκολλο*. Έστω η LK^{tq}-απόδειξη:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B^t \Rightarrow B^t}{B^t, C^t \Rightarrow B^t}\,(\mathrm{LW})}{B^t, C^t, A^q \Rightarrow B^t}\,(\mathrm{LW})}{B^t, C^t \Rightarrow (A^q \rightarrow B^t)^q}\,(\mathrm{R}\rightarrow)}{(B^t \wedge C^t)^q \Rightarrow (A^q \rightarrow B^t)^q}\,(\mathrm{L}\wedge) \qquad \dfrac{A^q \Rightarrow A^q \qquad B^t \Rightarrow B^t}{(A^q \rightarrow B^t)^q, A^q \Rightarrow B^t}\,(\mathrm{L}\rightarrow)}{(B^t \wedge C^t)^q, A^q \Rightarrow B^t}\,(\text{τομή})$$

όπου για τον κανόνα R→, ο **προσανατολισμός** λέει ότι πρώτα πρέπει να γίνει τομή στον A^q και μετά στον B^t.

Επομένως παρατηρούμε ότι πρέπει να εφαρμοστεί δομικό βήμα. Ο *ελκυστικός* τύπος τομής, είναι αυτός που βρίσκεται στη δεξιά υπόθεση, και επιπλέον παρατηρούμε ότι είναι κύριος τύπος σε λογικό κανόνα. Άρα πρέπει να μετακινήσουμε την *ελκυστική υποαπόδειξη* (S2):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B^t \Rightarrow B^t}{B^t, C^t \Rightarrow B^t}\,(\mathrm{LW})}{B^t, C^t, A^q \Rightarrow B^t}\,(\mathrm{LW})}{B^t, C^t \Rightarrow (A^q \rightarrow B^t)^q}\,(\mathrm{R}\rightarrow) \qquad \dfrac{A^q \Rightarrow A^q \qquad B^t \Rightarrow B^t}{(A^q \rightarrow B^t)^q, A^q \Rightarrow B^t}\,(\mathrm{L}\rightarrow)}{B^t, C^t, A^q \Rightarrow B^t}\,(\text{τομή})}{(B^t \wedge C^t)^q, A^q \Rightarrow B^t}\,(\mathrm{L}\wedge)$$

Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι το *tq-πρωτόκολλο* ενήργησε σωστά, καθώς αν είχε επιλέξει να μετακινήσει την άλλη υποαπόδειξη, η διαδικασία δεν θα τερμάτιζε. Για τη συνέχεια τώρα, παρατηρούμε ότι επειδή ο τύποι τομής είναι κύριοι σε λογικούς κανόνες, θα εφαρμοστεί L-βήμα αναγωγής. Ο **προσανατολισμός** δίνει τη σειρά των τομών:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A^q \Rightarrow A^q$}
\AxiomC{$B^t \Rightarrow B^t$}
\RightLabel{(LW)}
\UnaryInfC{$B^t, C^t \Rightarrow B^t$}
\RightLabel{(LW)}
\UnaryInfC{$B^t, C^t, A^q \Rightarrow B^t$}
\RightLabel{(τομή)}
\BinaryInfC{$B^t, C^t, A^q \Rightarrow B^t$}
\AxiomC{$B^t \Rightarrow B^t$}
\RightLabel{(τομή)}
\BinaryInfC{$B^t, C^t, A^q \Rightarrow B^t$}
\RightLabel{(L$\wedge$)}
\UnaryInfC{$(B^t \wedge C^t)^q, A^q \Rightarrow B^t$}
\end{prooftree}
$$

Οπότε έχουμε φτάσει σε αξιωματικές τομές, οι οποίες απαλείφονται άμεσα. Επομένως λαμβάνουμε την εξής κανονική μορφή:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$B^t \Rightarrow B^t$}
\RightLabel{(LW)}
\UnaryInfC{$B^t, C^t \Rightarrow B^t$}
\RightLabel{(LW)}
\UnaryInfC{$B^t, C^t, A^q \Rightarrow B^t$}
\RightLabel{(L$\wedge$)}
\UnaryInfC{$(B^t \wedge C^t)^q, A^q \Rightarrow B^t$}
\end{prooftree}
$$

Συνεπώς, διαπιστώνουμε ότι η διαδικασία που καθορίζει το *tq-πρωτόκολλο* τερματίζει.

5.2.4 Η επαγωγική στρατηγική διακόσμησης για το $\mathbf{LK^{tq}}$

Για να αποδείξουμε ότι το *tq-πρωτόκολλο* που ορίστηκε στη προηγούμενη παράγραφο, είναι μια ισχυρή διαδικασία απαλοιφής των τομών, η οποία επιπλέον συμβάλει, θα παρουσιάσουμε μια ε.σ.δ. του LK^{tq}, τέτοια ώστε η tq-κανονικοποίηση μιας απόδειξης να μπορεί να προσομοιωθεί από την κανονικοποίηση της αντίστοιχης διακοσμημένης απόδειξης.

Όπως είδαμε και από τις διακοσμήσεις του CL, όταν μεταφράζουμε ένα LK-κανόνα, στη διακοσμημένη απόδειξη ενδεχομένως θα δημιουργούνται κάποιες εφαρμογές εκθετικών κανόνων (αμέλειας και συμφραστικών), πριν και/ή μετά την εφαρμογή του αντίστοιχου γραμμικού κανόνα. Θα καλούμε αυτούς τους "επιπλέον" κανόνες *προ-* και *μετα-εκθετικούς*.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα. Στην παράγραφο 3.3 αναφερθήκαμε στις διακοσμήσεις q και t του LK. Αυτές οι δύο διακοσμήσεις αντιστοιχούν στις δύο πιθανές επιλογές του "δομικού διλήμματος". Δηλαδή αν έχουμε μια τομή

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Rightarrow A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ A \Rightarrow\end{array}}{\Rightarrow}
$$

τότε οι t και q μεταφράσεις, δίνουν τις εξής διακοσμήσεις αντίστοιχα:

$$\dfrac{\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\pi_1^t\\ \vdots\\ \Rightarrow ?A^t\end{array}}}{\Rightarrow !?A^t} \qquad \begin{array}{c}\pi_2^t\\ \vdots\\ !?A^t \Rightarrow\end{array}}{\Rightarrow} \qquad \text{και} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^q\\ \vdots\\ \Rightarrow ?!A^q\end{array} \qquad \dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\pi_2^q\\ \vdots\\ !A^q \Rightarrow\end{array}}}{?!A^q \Rightarrow}}{\Rightarrow}$$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε μία από τις περιπτώσεις, μία από τις υποθέσεις (υποαποδείξεις) είναι *κουτί* (όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα). Τότε το *κουτί* για κάθε διακόσμηση αντιστοιχεί στην *μη-ελκυστική υποαπόδειξη* στο LK^{tq}. Με άλλα λόγια η ε.σ.δ. που θα ορίσουμε για το LK^{tq}, αποτελεί ουσιαστικά την *ένωση* των ε.σ.δ. που ορίζουν οι μεταφράσεις q και t για το LK.

Παρατήρηση: Στο Κεφάλαιο 4 αποδείξαμε ότι οι μόνες, ουσιαστικά, ε.σ.δ. για το LK είναι αυτές που δίνουν οι μεταφράσεις q και t. Χρησιμοποιώντας αντίστοιχα επιχειρήματα, όλα τα υπόλοιπα επαρκή ζεύγη ορίζουν ουσιαστικά το ίδιο *tq-πρωτόκολλο*.

Ο επόμενος ορισμός (περιορισμένος στη συνεπαγωγή, την άρνηση και τον καθολικό ποσοδείκτη) δίνει λεπτομερώς τη μετάφραση με την οποία διακοσμούμε το LK^{tq}.

Ορισμός 5.2.5. *Ορίζουμε μια απεικόνιση D από χρωματισμένους κλασικούς τύπους σε γραμμικούς τύπους ως εξής:*

- $D(X^t) = D(X^q) = X$ *για ατομικούς τύπους.*
- $D(A^\epsilon \to_m B^{\epsilon'}) = \mu^\epsilon D(A) \multimap \mu^{\epsilon'} D(B)$ *και* $D(A^\epsilon \to_a B^{\epsilon'}) = \mu^\epsilon D(A) \rightsquigarrow \mu^{\epsilon'} D(B)$ *, εκτός αν* $(\epsilon, \epsilon') = (q, t)$ *(δηλαδή όταν εμφανίζεται το λογικό δίλημμα), οπότε θα είναι:* $D(A^q \to_m B^t) = \begin{cases} \mu^q D(A) \multimap ?\mu^t D(B) \\ !\mu^q D(A) \multimap \mu^t D(B) \end{cases}$ *ανάλογα με τον* **προσανατολισμό**. *(Τα μ^ϵ και $\mu^{\epsilon'}$ είναι η μεγαλύτερη τροπικότητα του επαρκούς ζεύγους, δηλαδή $\mu^t = !?$ και $\mu^q = ?!$.)*
- $D(\forall X A^\epsilon) = \forall X \mu^\epsilon D(A)$.
- $D(\neg A^\epsilon) = (\mu^\epsilon D(A))^\perp$.

Τελικά, λόγω του παραπάνω ορισμού, η D ορίζεται ρητά στο Σχήμα 5.7. Ας θεωρήσουμε τώρα τις δύο μεταφράσεις για την (q, t) περίπτωση του $\to_m$:

- Η πρώτη $?!D(A) \multimap ?!?D(B)$, αντιστοιχεί στον **προσανατολισμό** "πρώτα τομή στο A και μετά στο B", κατά τη διάρκεια του λογικού βήματος για τη συνεπαγωγή.

$A \to_m B$	t	q
t	$!?D(A) \multimap !?D(B)$	$!?D(A) \multimap ?!D(B)$
q	$?!D(A) \multimap ?!?D(B)$ $!?!D(A) \multimap !?D(B)$	$?!D(A) \multimap ?!D(B)$

$A \to_\alpha B$	t	q
t	$!?D(A) \rightsquigarrow !?D(B)$	$!?D(A) \rightsquigarrow ?!D(B)$
q	$?!D(A) \rightsquigarrow !?D(B)$	$?!D(A) \rightsquigarrow ?!D(B)$

$\forall XA$	
t	$\forall X!?D(A)$
q	$\forall X?!D(A)$

$\neg A$	
t	$(!?D(A))^\perp$
q	$(?!D(A))^\perp$

Σχήμα 5.7: Η μετάφραση D για το LK^{tq}.

- Η δεύτερη, $!?!D(A) \multimap !?D(B)$ αντιστοιχεί στον αντίθετο **προσανατολισμό** (“πρώτα τομή στο B και μετά στο A”).

Παρατηρούμε ωστόσο, ότι οι δύο μεταφράσεις μπορούν να “ενοποιηθούν” ως $!?!D(A) \multimap ?!?D(B)$. Αυτό δείχνει ότι ο **προσανατολισμός** δεν χρειάζεται να σέβεται τις ταυτοτικές κλάσεις, και επομένως αρκεί να ορίσουμε δύο είδων ‘μίας υπόθεσης’ κανόνες για τους πολλαπλασιαστικούς συνδέσμους. Αυτοί θα αντιστοιχούν στους δύο τρόπους (όπως του παραδείγματος στη σελίδα 50) με τους οποίους ένας τέτοιος κανόνας μπορεί να διακοσμηθεί.

Παρατήρηση: Αν μας δοθεί ένας γραμμικός τύπος $D(F)$ τότε εύκολα μπορεί να αναχθεί το χρώμα των υποτύπων του F, καθώς ισχύει ότι: ένας υποτύπος G του F έχει *χρώμα* t αν και μόνον αν στον $D(F)$ είναι άμεσα μαρκαρισμένος με ?, ενώ έχει *χρώμα* q αν και μόνον αν στον $D(F)$ είναι άμεσα μαρκαρισμένος με ! [DJS97].

Θεώρημα 5.2.6. *Η πεντάδα $\langle (\cdot)^D, !?, !, ?, ?! \rangle$ είναι ε.σ.δ. για το σύστημα LK^{tq}. Επομένως, μια απόδειξη π του ακολουθητή $\Gamma^t, \Lambda^q \Rightarrow \Delta^t, \Sigma^q$ απεικονίζεται σε μια απόδειξη $D(\pi)$ του ακολουθητή $!?D(\Gamma), !D(\Lambda) \Rightarrow ?D(\Delta), ?!D(\Sigma)$ της οποίας ο σκελετός ταυτίζεται με την π.*

Απόδειξη. Κατά τα γνωστά, επαληθεύοντας για την π τον Ορισμό 3.2.2. Ας ελέγξουμε δύο περιπτώσεις:

- Έστω το LK^{tq}-αξίωμα $A^t \Rightarrow A^t$. Τότε

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{D(A) \Rightarrow D(A)}{D(A) \Rightarrow ?D(A)}\,(\mathrm{R}?)}{?D(A) \Rightarrow ?D(A)}\,(\mathrm{L}?)}{!?D(A) \Rightarrow ?D(A)}\,(\mathrm{L}!)$$

- Έστω ο LK^{tq}-κανόνας:

$$\frac{\Gamma_1^t \Rightarrow \Delta_1^t, A^q \qquad B^t, \Gamma_2^q \Rightarrow \Delta_2^q}{\Gamma_1^t, \Gamma_2^q, (A^q \to B^t)^q \Rightarrow \Delta_1^t, \Delta_2^q}\,(\mathrm{L}{\to_m})$$

  Τότε εφαρμόζοντας τους κατάλληλους προ-εκθετικούς και μετα-εκθετικούς κανόνες θα έχουμε ότι:

$$\dfrac{\dfrac{!?D(\Gamma_1) \Rightarrow ?D(\Delta_1), ?!D(A) \qquad \dfrac{!?D(B), !D(\Gamma_2) \Rightarrow ?!D(\Delta_2)}{?!?D(B), !D(\Gamma_2) \Rightarrow ?!D(\Delta_2)}\,(\mathrm{L}?)}{!?D(\Gamma_1), !D(\Gamma_2), ?!D(A) \to ?!?D(B) \Rightarrow ?D(\Delta_1), ?!D(\Delta_2)}\,(\mathrm{L}{\multimap})}{!?D(\Gamma_1), !D(\Gamma_2), !(?!D(A) \to ?!?D(B)) \Rightarrow ?D(\Delta_1), ?!D(\Delta_2)}\,(\mathrm{L}!)$$

Ομοίως και για τις άλλες περιπτώσεις (επειδή αυτές είναι πολλές, υπάρχει μια εναλλακτική απόδειξη στο [DJS97]). □

Τώρα, για να επεκτείνουμε τη μετάφραση D στο πλήρες προτασιακό μέρος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις "δϋικές-ισοδυναμίες" μεταξύ των μεταφράσεων των συνδέσμων:

$$\epsilon\ \overset{\epsilon'}{\boxed{\mu A\left\{\begin{matrix}\multimap\\ \rightsquigarrow\end{matrix}\right\}\nu B}} \qquad \bar{\epsilon}\ \overset{\epsilon'}{\boxed{\mu^{\perp} A\left\{\begin{matrix}⅋\\ \oplus\end{matrix}\right\}\nu B}} \qquad \epsilon\ \overset{\bar{\epsilon}'}{\boxed{\mu A\left\{\begin{matrix}\otimes\\ \&\end{matrix}\right\}\nu^{\perp} B}}$$

Η παύλα πάνω από ένα χρώμα, δηλώνει δϋικότητα, και το δϋικό χρώμα του q είναι το t (και αντίστροφα). Επίσης η δϋικότητα μιας τροπικότητας μ ($\mu^{\perp}$), λαμβάνεται αντικαθιστώντας όλα τα ! με ?, και όλα τα ? με !. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να μεταφράσουμε τον τύπο $A^q \vee_m B^t$, εργαζόμαστε ως εξής: βρίσκουμε το $D(A^t \to_m B^t) = !?D(A) \multimap !?D(B)$, θεωρούμε τη δϋική τροπικότητα μόνο για αυτή του A και βέβαια αλλάζουμε το σύνδεσμο. Άρα $D(A^q \vee_m B^t) = ?!D(A) ⅋ !?D(B)$.

Τέλος πρέπει να παρατηρήσουμε και το εξής: για μια δοσμένη LL-απόδειξη π του ακολουθητή $!?D(\Gamma), !D(\Lambda) \Rightarrow ?D(\Delta), ?!D(\Sigma)$, δεν μπορούμε γενικά να αναθέσουμε χρώματα σε όλους τους τύπους που εμφανίζονται στην $sk(\pi)$, έτσι ώστε να λάβουμε μια σωστή LK^{tq}-απόδειξη του ακολουθητή $\Gamma^t, \Lambda^q \Rightarrow \Delta^t, \Sigma^q$. Το αντιπαράδειγμα είναι το εξής: ο ακολουθητής $!A \Rightarrow ?A$ είναι προφανώς αποδείξιμος στο LL, ενώ ο ακολουθητής $A^q \Rightarrow A^t$ δεν είναι αποδείξιμος στο LK^{tq}, όταν ο A είναι ατομικός τύπος. Ωστόσο αυτή είναι η μοναδική προβληματική περίπτωση, η οποία εύκολα διορθώνεται αν θεωρήσουμε ότι έχουμε ταυτοτικά αξιώματα μόνο για τύπους που έχουν εξωτερικές τροπικότητες. Δηλαδή η ακόλουθη Πρόταση είναι αληθής (βλ. [DJS97]).

Πρόταση 5.2.7. *Ο ακολουθητής $\Gamma^t, \Lambda^q \Rightarrow \Delta^t, \Sigma^q$ είναι αποδείξιμος στο LK^{tq} αν και μόνον αν ο ακολουθητής $!?D(\Gamma), !D(\Lambda) \Rightarrow ?D(\Delta), ?!D(\Sigma)$ είναι αποδείξιμος στο LL, όπου τα ταυτοτικά αξιώματα ισχύουν μόνο για τύπους που έχουν εξωτερικές τροπικότητες.*

5.2.5 Το θεώρημα ισχυρής κανονικοποίησης

Στην παράγραφο αυτή θα εκμεταλλευτούμε τις δυνατότητες του εμπλουτισμένου σύστηματος κλασικής λογικής LK^{tq}, για να αποδείξουμε ότι είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμο. Χρειαζόμαστε όμως ακόμα έναν ορισμό (της "προσαρμοσμένης" απόδειξης) και ένα θεώρημα προσομοίωσης (Θεώρημα 5.2.9).

Έστω π μια LK^{tq}-απόδειξη και $D(\pi)$ η διακόσμηση της π, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 5.2.4. Έστω c μία τομή στην π, με τύπο τομής A^t (βλ. σχήμα σελίδας 96). Τότε η διακόσμηση της θα περιέχει την:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow ?D(A)}}{\Rightarrow !?D(A)}\,(\mathrm{R}!) \qquad \dfrac{\vdots}{!?D(A) \Rightarrow}}{\Rightarrow}\,(\text{τομή})$$

Για να απαλειφθεί η τομή c στην LK^{tq}-απόδειξη, βάσει του tq-πρωτοκόλλου, η διαδικασία θα ξεκινήσει από κάποιο λογικό ή δομικό βήμα. Ας υποθέσουμε καταρχήν ότι για να απαλειφθεί η c από την π, εφαρμόζεται το tq-βήμα $S2$. Δηλαδή ο *ελκυστικός* τύπος τομής (ο A^t στην δεξιά υπόθεση) θα είναι κύριος σε κάποιο λογικό κανόνα, οπότε η διακόσμηση της π θα περιέχει την:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow ?D(A)}}{\Rightarrow !?D(A)}\,(\mathrm{R}!) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{D(A) \Rightarrow}}{?D(A) \Rightarrow}\,(\mathrm{L}?)}{!?D(A) \Rightarrow}\,(\mathrm{L}!)}{\Rightarrow}\,(\text{τομή})$$

Επομένως, εφαρμόζοντας ένα "αμέλειας εκθετικό" βήμα αναγωγής για το σύστημα LL, λαμβάνουμε την "προσαρμοσμένη" διακόσμηση:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow ?D(A)} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{D(A) \Rightarrow}}{?D(A) \Rightarrow}\,(\mathrm{L}?)}{\Rightarrow}\,(\text{τομή})$$

Στη συνέχεια ας υποθέσουμε ότι για να απαλειφθεί η c πρέπει να εφαρμόσουμε το tq-βήμα αναγωγής L. Αυτό συμβαίνει όταν και οι δύο τύποι τομής είναι κύριοι σε κάποιο λογικό κανόνα. Επομένως η διακόσμηση της π θα περιέχει την:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow D(A)}}{\Rightarrow ?D(A)}\,(\mathrm{R}?)}{\Rightarrow !?D(A)}\,(\mathrm{R}!) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{D(A) \Rightarrow}}{?D(A) \Rightarrow}\,(\mathrm{L}?)}{!?D(A) \Rightarrow}\,(\mathrm{L}!)}{\Rightarrow}\,(\text{τομή})$$

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να εφαρμόσουμε δύο διαδοχικά “αμέλειας εκθετικά” βήματα αναγωγής στο LL, ώστε να ληφθεί η “προσαρμοσμένη” διακόσμηση:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Rightarrow D(A)\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ D(A) \Rightarrow\end{matrix}}{\Rightarrow} \text{ (τομή)}$$

Τέλος αν πρέπει να εφαρμοστεί για την απαλοιφή της c το tq-βήμα S1, η διακόσμηση της π θα περιέχει την:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Rightarrow ?D(A)\end{matrix}}{\Rightarrow\, !?D(A)} \text{ (R!)} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ !?D(A) \Rightarrow\end{matrix}}{\Rightarrow} \text{ (τομή)}$$

Παρατηρούμε ότι για αυτή, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε κάποιο βήμα αναγωγής στο LL, οπότε η “προσαρμοσμένη” της απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια.

Ορισμός 5.2.8. *Ορίζουμε ως την* **“προσαρμοσμένη” διακόσμηση** *της π, η οποία θα συμβολίζεται με $D^{-}(\pi)$, την LL-απόδειξη όπου οι διακοσμήσεις των τομών έχουν “προσαρμοστεί” όπως παραπάνω. Δηλαδή κατάλληλα “αμέλειας εκθετικά” βήματα αναγωγής έχουν εφαρμοστεί για κάθε γραμμική τομή, στης οποίας το σκελετό εκτελείται το tq-βήμα S2 ή το tq-βήμα L.*

Το αποτέλεσμα αυτής της “προσαρμογής” είναι ότι ο τύπος τομής στη “προσαρμοσμένη” διακόσμηση έχει δύο (αντίστοιχα ένα, μηδέν) εξωτερικά εκθετικά, στην περίπτωση όπου εφαρμόζεται το βήμα $S1$ (αντίστοιχα $S2$, L) στην LK^{tq}-απόδειξη (βλ. τα παραδείγματα που αναφέρθηκαν προηγουμένως).

Θεώρημα 5.2.9. (προσομοίωσης) *Η “προσαρμοσμένη” διακόσμηση που απεικονίζει αποδείξεις του LK^{tq} σε γραμμικές αποδείξεις, είναι ένας ομομορφισμός που σέβεται την κανονικοποίηση. Δηλαδή, για κάθε απόδειξη π του LK^{tq} και κάθε αναγωγή της π στην π', υπάρχει μια αναγωγή από την $D^{-}(\pi)$ στην $D^{-}(\pi')$. Αυτή η αναγωγή δεν είναι κενή, εκτός πιθανόν της περίπτωσης όπου ο τύπος τομής είναι ο $\neg A$ και εφαρμόζεται L-βήμα αναγωγής.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται εξετάζοντας όλες τις δυνατές περιπτώσεις βημάτων αναγωγής που προκύπτουν. Καταρχήν η αναγωγή δεν θα είναι κενή, γιατί κατά τη διάρκειά της, η ενέργεια (των απογόνων) της δοσμένης τομής μειώνεται. Επιπλέον επειδή η διακόσμηση είναι “προσαρμοσμένη”, τα εκθετικά (των απογόνων) του τύπου τομής στη διακόσμηση θα μειώνονται ή ο κύριος σύνδεσμος θα εξαφανίζεται (όταν το βήμα αναγωγής είναι L). Άρα και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει αλλαγή στην απόδειξη. Εξαίρεση βέβαια αποτελεί η περίπτωση όπου οι απόγονοι της τομής στο $\neg A$ έχουν μεγιστική ενέργεια.

Ας δούμε αναλυτικά δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις που επιβεβαιώνουν τα παραπάνω:

- Έστω οι αποδείξεις π και π' αντίστοιχα:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{A^t \Rightarrow B^t}}{\Rightarrow (A^t \multimap B^t)^t} \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow A^t} \quad \dfrac{\vdots}{B^t \Rightarrow}}{(A^t \multimap B^t)^t \Rightarrow}}{\Rightarrow} \dashrightarrow \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow A^t} \quad \dfrac{\vdots}{A^t \Rightarrow B^t}}{\Rightarrow B^t} \quad \dfrac{\vdots}{B^t \Rightarrow}}{\Rightarrow}$$

  Τότε η απόδειξη $D(\pi)$ θα είναι η:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{!?D(A) \Rightarrow ?D(B)}}{!?D(A) \Rightarrow !?D(B)}}{\Rightarrow !?D(A) \multimap !?D(B)}}{\Rightarrow ?(!?D(A) \multimap !?D(B))}}{\Rightarrow !?(!?D(A) \multimap !?D(B))} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow ?D(A)}}{\Rightarrow !?D(A)} \quad \dfrac{\vdots}{!?D(B) \Rightarrow}}{!?D(A) \multimap !?D(B) \Rightarrow}}{?(!?D(A) \multimap !?D(B)) \Rightarrow}}{!?(!?D(A) \multimap !?D(B)) \Rightarrow}}{\Rightarrow}$$

  Επομένως η $D^-(\pi)$ θα είναι η:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{!?D(A) \Rightarrow ?D(B)}}{!?D(A) \Rightarrow !?D(B)}}{\Rightarrow !?D(A) \multimap !?D(B)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow ?D(A)}}{\Rightarrow !?D(A)} \quad \dfrac{\vdots}{!?D(B) \Rightarrow}}{!?D(A) \multimap !?D(B) \Rightarrow}}{\Rightarrow}$$

  Επιπλέον η $D^-(\pi')$ θα είναι η:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow ?D(A)}}{\Rightarrow !?D(A)} \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{!?D(A) \Rightarrow ?D(B)}}{!?D(A) \Rightarrow !?D(B)}}{\Rightarrow !?D(B)} \quad \dfrac{\vdots}{!?D(B) \Rightarrow}}{\Rightarrow}$$

  Τέλος παρατηρούμε, ότι προφανώς η $D^-(\pi)$ ανάγεται στη $D^-(\pi')$.

- Έστω οι αποδείξεις π και π' αντίστοιχα:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{A^t \Rightarrow}}{\Rightarrow (\neg A^t)^t} \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow A^t}}{(\neg A^t)^t \Rightarrow}}{\Rightarrow} \dashrightarrow \dfrac{\dfrac{\vdots}{A^t \Rightarrow} \quad \dfrac{\vdots}{\Rightarrow A^t}}{\Rightarrow}$$

  Τότε η απόδειξη $D(\pi)$ θα είναι η:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ !?D(A)\Rightarrow\end{array}}{\Rightarrow(!?D(B))^{\perp}}}{\Rightarrow ?(!?D(B))^{\perp}}}{\Rightarrow !?(!?D(B))^{\perp}}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Rightarrow ?D(A)\end{array}}{\Rightarrow !?D(A)}}{(!?D(A))^{\perp}\Rightarrow}}{?(!?D(A))^{\perp}\Rightarrow}}{!?(!?D(A))^{\perp}\Rightarrow}}{\Rightarrow}
$$

Επομένως η $D^{-}(\pi)$ θα είναι η:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ !?D(A)\Rightarrow\end{array}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Rightarrow ?D(A)\end{array}}{\Rightarrow !?D(A)}}{\Rightarrow}
$$

η οποία όπως παρατηρούμε, ταυτίζεται με την $D^{-}(\pi')$.

□

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το βασικό μας θεώρημα:

Θεώρημα 5.2.10. (Ισχυρή κανονικοποίηση) *Το σύστημα* LK^{tq} *(με το tq-πρωτόκολλο) είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμο.*

Απόδειξη. Προς άτοπο, έστω ότι απαλείφοντας τις τομές κάποιας LK^{tq}-απόδειξης, εφαρμόζοντας τις οδηγίες του *tq-πρωτοκόλλου*, δημιουργείται μια άπειρη αναγωγή. Τότε μεταφράζουμε με την D, τις αποδείξεις της αναγωγής και στη συνέχεια βρίσκουμε τις αντίστοιχες "προσαρμοσμένες" αποδείξεις. Λόγω του Θεωρήματος 5.2.9 (προσομοίωσης), θα υπήρχε μια άπειρη αναγωγή στο LL, η οποία θα δημιουργόταν από αυτές τις "προσαρμοσμένες" αποδείξεις. Άτοπο, διότι το σύστημα LL είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμο. □

Παρατήρηση: Μέσω των διακοσμήσεων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους χώρους συνάφειας της γραμμικής λογικής, ως δηλωτική σημασιολογία για το σύστημα LK^{tq}. Δηλαδή έστω π μια LK^{tq}-απόδειξη και $D(\pi)^{\star}$ ο χώρος συνάφειας της $D(\pi)$. Τότε η ερμηνεία αυτή, είναι μη-τετριμμένη και σταθερή κατά την *tq*-κανονικοποίηση. Δηλαδή, η συνάρτηση $\star\circ D$ είναι μία δηλωτική σημασιολογία για το LK^{tq} (βλ. [DJS97]).

5.2.6 Το θεώρημα συμβολής

Στην παράγραφο αυτή θα παραθέσω την ιδέα της απόδειξης της ιδιότητας συμβολής για το σύστημα LK^{tq}, η οποία είναι η δεύτερη σημαντική ιδιότητα που επιθυμούμε να ικανοποιεί το σύστημα αυτό. Επειδή η ιδιότητα συμβολής για τη γραμμική λογική έχει αποδειχτεί για τα συστήματα δικτύων απόδειξης, θα εργαστούμε άμεσα με αυτά και συγκεκριμένα με το σύστημα taLL.

Παρατηρούμε ότι οι κανονικές μορφές μιας δοσμένης απόδειξης απεικονίζονται στο ίδιο δίκτυο απόδειξης, αλλά κάθε δίκτυο απόδειξης μπορεί να έχει περισσότερες από μία ακολουθητικές μορφές. Άρα για να πάρουμε τη μοναδικότητα των κανονικών (ακολουθητικών) μορφών χρειαζόμαστε κάτι ισχυρότερο. Αυτό που πρέπει να γίνει, είναι να χρησιμοποιήσουμε κάποια πληθωρικότερη μετάφραση για την ε.σ.δ. του LK^{tq}, κατορθώνοντας έτσι τα δίκτυα απόδειξης που θα προκύπτουν να είναι "στέρεα", δηλαδή να έχουν μία (σχεδόν) μοναδική ακολουθητική μορφή (δηλαδή ενδεχομένως περισσότερες από μία ακολουθητικές μορφές, θα διαφέρουν το πολύ ως προς αντιμετάθεση δομικών κανόνων).

Επομένως ορίζουμε την "πληθωρικότερη" μετάφραση $()^{D'}$, χρησιμοποιώντας τα "μεγαλύτερα" επαρκή ζεύγη: $\mu_L^{t'} = !?!$, $\mu_R^{t'} = ?!$ και $\mu_L^{q'} = !?$, $\mu_R^{q'} = ?!?$. Το γεγονός ότι αυτά ορίζουν διακόσμησεις (έστω $D'(\pi)$, για κάθε LK^{tq}-απόδειξη π), έπεται από το ότι $\mu_s^{t'} = \mu_s^t!$ και $\mu_s^{q'} = \mu_s^q?$. Πλέον για τις D'-μεταφρασμένες LK^{tq}-αποδείξεις, τα αντίστοιχα δίκτυα απόδειξης θα έχουν μία (σχεδόν) μοναδική ακολουθητική μορφή. Επίσης παρατηρούμε ότι το Θεώρημα 5.2.9 (προσομοίωσης) ισχύει και για τη D', χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα (ή επειδή τα επιπλέον εκθετικά που προστίθενται είναι *περιττά*).

Μετά από όλα αυτά, μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.11. (συμβολής) *Δύο tq-κανονικές μορφές μιας LK^{tq}-απόδειξης ταυτίζονται, ή διαφέρουν το πολύ ως προς αντιμετάθεση δομικών κανόνων.*

Απόδειξη. Έστω π_1 και π_2 δύο tq-κανονικές μορφές μιας LK^{tq}-απόδειξης π. Θα δείξουμε ότι οι π_1 και π_2 ταυτίζονται, ή διαφέρουν το πολύ ως προς αντιμετάθεση δομικών κανόνων.

Διακοσμούμε τις π, π_1 και π_2 σύμφωνα με τη D', που αναφέραμε νωρίτερα, και στη συνέχεια βρίσκουμε τις αντίστοιχες "προσαρμοσμένες" αποδείξεις οι οποίες θα είναι οι $D'^-(\pi)$, $D'^-(\pi_1)$ και $D'^-(\pi_2)$, αντίστοιχα. Τώρα από το Θεώρημα 5.2.9 (προσομοίωσης), ισχύει ότι η $D'^-(\pi)$ ανάγεται και στην $D'^-(\pi_1)$ και στην $D'^-(\pi_2)$. Στη συνέχεια θεωρούμε τα taLL-δίκτυα απόδειξης αυτών των αποδείξεων. Έστω ότι αυτά συμβολίζονται με $\Delta.A.(D'^-(\pi))$, $\Delta.A.(D'^-(\pi_1))$ και $\Delta.A.(D'^-(\pi_2))$, αντίστοιχα. Τότε παρατηρούμε ότι το $\Delta.A.(D'^-(\pi))$ θα ανάγεται και στο $\Delta.A.(D'^-(\pi_1))$ και στο $\Delta.A.(D'^-(\pi_2))$. Λόγω όμως της ιδιότητας Church-Rosser για το σύστημα δικτύων απόδειξης taLL, τα $\Delta.A.(D'^-(\pi_1))$ και $\Delta.A.(D'^-(\pi_2))$ θα ταυτίζονται. Επομένως (λόγω όσων αναφέραμε παραπάνω) οι μοναδικές ακολουθητικές μορφές αυτών, θα ταυτίζονται, ή θα διαφέρουν το πολύ ως προς αντιμετάθεση δομικών κανόνων. Δηλαδή $D'^-(\pi_1) \equiv_s D'^-(\pi_2)$ (με $\equiv_s$ δηλώνουμε την ταύτιση το πολύ με διαφορά ως προς την αντιμετάθεση δομικών κανόνων) και επομένως $sk(D'^-(\pi_1)) \equiv_s sk(D'^-(\pi_2))$. Άρα $\pi_1 \equiv_s \pi_2$. □

Επίλογος

Η εισαγωγή της Γραμμικής λογικής είχε ως αποτέλεσμα να έρθει στο προσκήνιο η μελέτη των κλασικών συστημάτων ως γλωσσών προγραμματισμού. Στην εργασία αυτή παρουσιάστηκε ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να αποδείξουμε κατασκευαστικές ιδιότητες (ισχυρή κανονικοποίηση, ιδιότητα συμβολής) για κάποια συστήματα κλασικής λογικής. Επομένως, το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε μια αντιστοιχία Curry-Howard ανάμεσα σε αυτά τα συστήματα κλασικής λογικής και σε κάποιες υπολογιστικές γλώσσες. Έτσι, θα μπορούμε να θεωρούμε τις κλασικές αποδείξεις ως προγράμματα και συνεπώς, με αυτή την έννοια, να προγραμματίζουμε στην κλασική λογική (πράγμα το οποίο θεωρείτο απίθανο μέχρι πριν από μερικά χρόνια). Ήδη παρατηρούμε ότι στο [DJS97] γίνεται μια παρουσίαση του συστήματος LK ως προγραμματική γλώσσα.

Μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση αυτού του ζητήματος, αλλά για το σύστημα κλασικής φυσικής απαγωγής CND (το οποίο αποτελεί τμήμα του συστήματος FD), έγινε από τον Parigot [Par91]. Η ιδέα αυτής της δουλειάς είναι η επέκταση της αντιστοιχίας Curry-Howard ανάμεσα στους λ-όρους (της γλώσσας του λ-λογισμού με απλούς τύπους) και στις εντουισιονιστικές αποδείξεις (σε φυσική απαγωγή), σε μια αντιστοιχία Curry-Howard ανάμεσα στους όρους του λμ-λογισμού (βλ. [Par92]) και σε αποδείξεις στην κλασική φυσική απαγωγή.

Μια άλλη προσέγγιση στο ζήτημα αυτό, η οποία ορίζει αντιστοιχία Curry-Howard ανάμεσα στο σύστημα κλασικής λογικής LKT και το σύστημα λμ-λογισμού του Parigot, έγινε από τους Danos, Joinet και Schellinx [DJS93a]. Από αυτή την εργασία εξάγεται το συμπέρασμα ότι το σύστημα, με ακολουθητές, LKT αποτελεί ένα μεταλογισμό του συστήματος φυσικής απαγωγής CND και επιπλέον ότι οι CND-αναγωγές προσομοιώνονται στο LKT από τη διαδικασία απαλοιφής της τομής σ^T.

Από εδώ και στο εξής είναι ενδιαφέρον να αναζητήσουμε τέτοιες αντιστοιχίες, ανάμεσα στα συστήματα LKQ και LK^{tq} και σε κατάλληλες υπολογιστικές γλώσσες.

Μια σύγχρονη εργασία σε αυτή την κατεύθυνση, είναι αυτή των Miller και Pimentel [MP04]. Σε αυτή την εργασία χρησιμοποιείται μια γλώσσα λογικού προγραμματισμού, η οποία ενσωματώνει τις ιδέες της Γραμμικής λογικής και καθορίζει λεπτομερώς κάποια ακολουθητικά συστήματα λογικής. Σε αυτά τα ακολουθητικά συστήματα συμπεριλαμβάνονται και τα LKT, LKQ.

Τελικά, γίνεται αντιληπτό ότι η Γραμμική λογική συνετέλεσε σημαντικά στο να αναθεωρηθούν οι απόψεις σε ό,τι αφορά τις προγραμματιστικές δυνατότητες της κλασικής λογικής, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί νέο ενδιαφέρον για τη μελέτη συστημάτων κλασικής λογικής και από τη σκοπιά των μαθηματικών αλλά και από τη σκοπιά της θεωρητικής πληροφορικής.

Παράρτημα Α

Ιντουισιονιστική λογική (σύστημα IL)

Αξιώματα:

$$A \Rightarrow A \quad \text{(Ax)} \qquad\qquad \Gamma, \bot \Rightarrow A \quad \text{(f)}$$

Κανόνας τομής:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad A, \Gamma_2 \Rightarrow B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow B}\,(\text{τομή})$$

Πολλαπλασιαστικοί λογικοί κανόνες:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad B, \Gamma_2 \Rightarrow C}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \to B \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}{\to}) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}\,(\mathrm{R}{\to})$$

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad \Gamma_2 \Rightarrow B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \wedge B}\,(\mathrm{R}\wedge) \qquad \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}\wedge)$$

Προσθετικοί λογικοί κανόνες:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}\,(\mathrm{R}{\to}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{\Gamma, A \to B \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}{\to})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\,(\mathrm{R}\vee_1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\,(\mathrm{R}\vee_2)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow C \quad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}\vee)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}\wedge_1) \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}\wedge_2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}\,(\mathrm{R}\wedge)$$

Κανόνες για τους πρωτοβάθμιους ποσοδείκτες (y όχι ελεύθερο στα Γ,C):

$$\frac{\Gamma, A[t/x] \Rightarrow C}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}\forall) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[y/x]}{\Gamma \Rightarrow \forall x A}\,(\mathrm{R}\forall)$$

$$\frac{\Gamma, A[y/x] \Rightarrow C}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}\exists) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[t/x]}{\Gamma \Rightarrow \exists x A}\,(\mathrm{R}\exists)$$

Δομικοί κανόνες:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow C}{\Gamma, A \Rightarrow C}\,(\mathrm{W}) \qquad \frac{\Gamma, A, A \Rightarrow C}{\Gamma, A \Rightarrow C}\,(\mathrm{C})$$

Λαμβάνουμε το δευτεροβάθμιο σύστημα IL_2 προσθέτοντας:

Κανόνες για τους δευτεροβάθμιους ποσοδείκτες (Y όχι ελεύθερο στα Γ,C):

$$\frac{\Gamma, A[T/X] \Rightarrow C}{\Gamma, \forall X A \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}\forall_2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[Y/X]}{\Gamma \Rightarrow \forall X A}\,(\mathrm{R}\forall_2)$$

$$\frac{\Gamma, A[Y/X] \Rightarrow C}{\Gamma, \exists X A \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}\exists_2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[T/X]}{\Gamma \Rightarrow \exists X A}\,(\mathrm{R}\exists_2)$$

Η άρνηση ορίζεται ως $\neg A := A \to \bot$.

Παρατηρήσεις:

- Ας παρατηρήσουμε τον κανόνα L→. Ο τύπος $A \to B$ καλείται κύριος τύπος του κανόνα. Οι εμφανίσεις A και B στις υποθέσεις είναι οι ενεργοί τύποι. Όλες οι άλλες εμφανίσεις τύπων καλούνται παθητικές και διαχωρίζουμε με προφανή τρόπο τις πάνω από τις κάτω εμφανίσεις των παθητικών τύπων. Οι τύποι με παθητικές εμφανίσεις σε κάποιο κανόνα αποτελούν το περιβάλλον του κανόνα. Τέλος, στους δευτεροβάθμιους κανόνες ($\mathrm{L}\forall_2$, $\mathrm{R}\exists_2$) οι ενεργές εμφανίσεις είναι οι $A[T]$ και $A[Y]$.

- Οι πολλαπλασιαστικές και προσθετικές εκδοχές των λογικών κανόνων είναι αλληλοαποδείξιμες (από τους πολλαπλασιαστικούς κανόνες λαμβάνουμε τους προσθετικούς και αντίστροφα με χρήση των δομικών κανόνων).

- Η αντικατάσταση $A[t/x]$ συμβολίζει ότι στο A, κάθε ελεύθερη εμφάνιση του x, αντικαθίσταται από τον όρο t.

- Στους δευτεροβάθμιους κανόνες τα X και Y είναι ατομικοί τύποι, ενώ τα T είναι τύποι.

- Το σύστημα $\mathrm{I}_p^2\mathrm{L}$ λαμβάνεται αν επεκτείνουμε το προτασιακό IL με τους δευτεροβάθμιους κανόνες για τους $\forall_2$ και $\exists_2$, όπου οι ποσοδείκτες εφαρμόζονται πάνω σε προτασιακές μεταβλητές. Είναι δηλαδή το σύστημα λογικής το οποίο, μέσω της αντιστοιχίας Curry-Howard-de Bruijn αντιστοιχεί στο σύστημα F του Girard.

Παράρτημα B

Κλασική λογική (σύστημα CL)

Αξιώματα:

$$A \Rightarrow A \quad (\mathrm{Ax}) \qquad \Gamma, \bot \Rightarrow \Delta \quad (\mathrm{f}) \qquad \Gamma \Rightarrow \top, \Delta \quad (\mathrm{t})$$

Κανόνας τομής:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A \qquad A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2} \,(\text{τομή})$$

Πολλαπλασιαστικοί λογικοί κανόνες:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A \qquad \Gamma_2, B \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \to B \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2} \,(\mathrm{L}{\to}) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta} \,(\mathrm{R}{\to})$$

$$\frac{\Gamma_1, A \Rightarrow \Delta_1 \qquad \Gamma_2, B \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \lor B \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2} \,(\mathrm{L}{\lor}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \lor B, \Delta} \,(\mathrm{R}{\lor})$$

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \Rightarrow B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \land B, \Delta_1, \Delta_2} \,(\mathrm{R}{\land}) \qquad \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \land B \Rightarrow \Delta} \,(\mathrm{L}{\land})$$

Προσθετικοί λογικοί κανόνες:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta} \,(\mathrm{R}{\to}_1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta} \,(\mathrm{R}{\to}_2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta} \,(\mathrm{L}{\to})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \lor B, \Delta} \,(\mathrm{R}{\lor}_1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \lor B, \Delta} \,(\mathrm{R}{\lor}_2)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}\vee)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}\wedge_1) \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}\wedge_2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta}\ (\mathrm{R}\wedge)$$

Κανόνες για τους πρωτοβάθμιους ποσοδείκτες (y όχι ελεύθερο στα Γ,Δ):

$$\frac{\Gamma, A[t/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}\forall) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[y/x], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x A, \Delta}\ (\mathrm{R}\forall)$$

$$\frac{\Gamma, A[y/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}\exists) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[t/x], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x A, \Delta}\ (\mathrm{R}\exists)$$

Δομικοί κανόνες:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{LW}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\ (\mathrm{RW})$$

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{LC}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\ (\mathrm{RC})$$

Λαμβάνουμε το δευτεροβάθμιο σύστημα CL_2 προσθέτοντας:

Κανόνες για τους δευτεροβάθμιους ποσοδείκτες (Y όχι ελεύθερο στα Γ,Δ):

$$\frac{\Gamma, A[T/X] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall X A \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}\forall_2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[Y/X]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall X A}\ (\mathrm{R}\forall_2)$$

$$\frac{\Gamma, A[Y/X] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists X A \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}\exists_2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[T/X]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists X A}\ (\mathrm{R}\exists_2)$$

Η άρνηση ορίζεται ως $\neg A := A \rightarrow \bot$.

Παρατηρήσεις:

- Ας παρατηρήσουμε τον κανόνα L→. Ο τύπος $A \rightarrow B$ καλείται κύριος τύπος του κανόνα. Οι εμφανίσεις A και B στις υποθέσεις είναι οι ενεργοί τύποι. Όλες οι άλλες εμφανίσεις τύπων καλούνται παθητικές και διαχωρίζουμε με προφανή τρόπο τις πάνω από τις κάτω εμφανίσεις των παθητικών τύπων. Οι τύποι με παθητικές εμφανίσεις σε κάποιο κανόνα αποτελούν το περιβάλλον του κανόνα. Τέλος, στους δευτεροβάθμιους κανόνες (L$\forall_2$, R$\exists_2$) οι ενεργές εμφανίσεις είναι οι $A[T]$ και $A[Y]$.

- Οι πολλαπλασιαστικές και προσθετικές εκδοχές των λογικών κανόνων είναι αλληλοαποδείξιμες (από τους πολλαπλασιαστικούς κανόνες λαμβάνουμε τους προσθετικούς και αντίστροφα με χρήση των δομικών κανόνων).

- Η αντικατάσταση $A[t/x]$ συμβολίζει ότι στο A, κάθε ελεύθερη εμφάνιση του x, αντικαθίσταται από τον όρο t.

- Στους δευτεροβάθμιους κανόνες τα X και Y είναι ατομικοί τύποι, ενώ τα T είναι τύποι.

- Το σύστημα $\mathrm{C}_p^2\mathrm{L}$ λαμβάνεται αν επεκτείνουμε το προτασιακό CL με τους δευτεροβάθμιους κανόνες για τους $\forall_2$ και $\exists_2$, όπου οι ποσοδείκτες εφαρμόζονται πάνω σε προτασιακές μεταβλητές.

Συμβολισμός: Λαμβάνουμε το σύστημα κλασικής λογικής LK ως εξής. Για κάθε λογικό σύνδεσμο (αντίστοιχα σταθερά) τοποθετούμε ένα κάτω δείκτη m αν είναι πολλαπλασιαστικός (αντίστοιχα πολλαπλασιαστική) και a αν είναι προσθετικός (αντίστοιχα προσθετική). Για παράδειγμα η πολλαπλασιαστική συνεπαγωγή είναι $(\to_m)$, ενώ η προσθετική διάζευξη είναι $(\vee_a)$. Τότε τα αξιώματα για τις σταθερές γίνονται:

$$\Rightarrow \top_m \quad (\top_m) \qquad \mathit{\Gamma} \Rightarrow \top_a, \mathit{\Delta} \quad (\top_a)$$

$$\bot_m \Rightarrow \quad (\top_m) \qquad \mathit{\Gamma}, \bot_a \Rightarrow \mathit{\Delta} \quad (\top_a)$$

Τέλος εισάγουμε ρητά τους κανόνες για την άρνηση:

$$\frac{\mathit{\Gamma} \Rightarrow A, \mathit{\Delta}}{\mathit{\Gamma}, \neg A \Rightarrow \mathit{\Delta}}\,(L\neg) \qquad \frac{\mathit{\Gamma}, A \Rightarrow \mathit{\Delta}}{\mathit{\Gamma} \Rightarrow \neg A, \mathit{\Delta}}\,(R\neg)$$

Παράρτημα C

Ιντουισιονιστική Γραμμική λογική (σύστημα ILL)

Αξιώματα:

$$A \Rightarrow A \qquad (\mathrm{Ax})$$

Κανόνας τομής:

$$\dfrac{\Gamma_1 \Rightarrow A \qquad A, \Gamma_2 \Rightarrow B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow B}\ (\text{τομή})$$

Πολλαπλασιαστικοί λογικοί κανόνες:

$$\dfrac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \otimes B, \Gamma \Rightarrow C}\ (\mathrm{L}\otimes) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \otimes B}\ (\mathrm{R}\otimes)$$

$$\dfrac{\Gamma_1 \Rightarrow A \qquad B, \Gamma_2 \Rightarrow C}{A \multimap B, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow C}\ (\mathrm{L}\multimap) \qquad \dfrac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B}\ (\mathrm{R}\multimap)$$

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma, 1 \Rightarrow A}\ (\mathrm{R}\wedge) \qquad \Rightarrow 1 \quad (\mathrm{R}1)$$

Προσθετικοί λογικοί κανόνες:

$$\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow C}{A \& B, \Gamma \Rightarrow C}\ (\mathrm{L}\&_1) \qquad \dfrac{B, \Gamma \Rightarrow C}{A \& B, \Gamma \Rightarrow C}\ (\mathrm{L}\&_2) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \& B}\ (\mathrm{R}\&)$$

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B}\ (\mathrm{R}\oplus_1) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B}\ (\mathrm{R}\oplus_2) \qquad \dfrac{A, \Gamma \Rightarrow C \qquad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \oplus B, \Gamma \Rightarrow C}\ (\mathrm{L}\oplus)$$

$$0, \Gamma \Rightarrow C \quad (\mathrm{L}0) \qquad \Gamma \Rightarrow \top \quad (\mathrm{R}\top)$$

Κανόνες για τους πρωτοβάθμιους ποσοδείκτες (y όχι ελεύθερο στα Γ,C):

$$\frac{\Gamma, A[t/x] \Rightarrow C}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}\forall) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[y/x]}{\Gamma \Rightarrow \forall x A}\,(\mathrm{R}\forall)$$

$$\frac{\Gamma, A[y/x] \Rightarrow C}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}\exists) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[t/x]}{\Gamma \Rightarrow \exists x A}\,(\mathrm{R}\exists)$$

Εκθετικοί κανόνες:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{W}!) \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow C}{\Gamma, !A \Rightarrow C}\,(\mathrm{C}!)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow C}{\Gamma, !A \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}!) \qquad \frac{!\Gamma \Rightarrow A}{!\Gamma \Rightarrow !A}\,(\mathrm{R}!)$$

Λαμβάνουμε το δευτεροβάθμιο σύστημα ILL_2 προσθέτοντας:

Κανόνες για τους δευτεροβάθμιους ποσοδείκτες (Y όχι ελεύθερο στα Γ,C):

$$\frac{\Gamma, A[T/X] \Rightarrow C}{\Gamma, \forall X A \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}\forall_2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[Y/X]}{\Gamma \Rightarrow \forall X A}\,(\mathrm{R}\forall_2)$$

$$\frac{\Gamma, A[Y/X] \Rightarrow C}{\Gamma, \exists X A \Rightarrow C}\,(\mathrm{L}\exists_2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[T/X]}{\Gamma \Rightarrow \exists X A}\,(\mathrm{R}\exists_2)$$

Για να οριστεί η άρνηση, θα έπρεπε να είχαμε συμπεριλάβει και την προσθετική συνεπαγωγή $\rightsquigarrow$. Τότε $A^{\perp} := A \rightsquigarrow \mathbf{0}$.

Παρατήρησεις:

- Ας παρατηρήσουμε τον κανόνα L$\multimap$. Ο τύπος $A \multimap B$ καλείται κύριος τύπος του κανόνα. Οι εμφανίσεις A και B στις υποθέσεις είναι οι ενεργοί τύποι. Όλες οι άλλες εμφανίσεις τύπων καλούνται παθητικές και διαχωρίζουμε με προφανή τρόπο τις πάνω από τις κάτω εμφανίσεις των παθητικών τύπων. Οι τύποι με παθητικές εμφανίσεις σε κάποιο κανόνα αποτελούν το περιβάλλον του κανόνα. Τέλος, στους δευτεροβάθμιους κανόνες (L$\forall_2$, R$\exists_2$) οι ενεργές εμφανίσεις είναι οι $A[T]$ και $A[Y]$.
- Η αντικατάσταση $A[t/x]$ συμβολίζει ότι στο A, κάθε ελεύθερη εμφάνιση της μεταβλητής x, αντικαθίσταται από τον όρο t.
- Στους δευτεροβάθμιους κανόνες τα X και Y είναι ατομικοί τύποι, ενώ τα T είναι τύποι.

- Το σύστημα I_p^2LL λαμβάνεται αν επεκτείνουμε το προτασιακό ILL με τους δευτεροβάθμιους κανόνες για τους $\forall_2$ και $\exists_2$, όπου οι ποσοδείκτες εφαρμόζονται πάνω σε προτασιακές μεταβλητές.

Παράρτημα D

Κλασική Γραμμική λογική (σύστημα CLL)

Αξιώματα:

$$A \Rightarrow A \qquad \text{(Ax)}$$

Κανόνας τομής:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}\ (\text{τομή})$$

Κανόνες και αξιώματα για τις σταθερές:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, 1 \Rightarrow \Delta}\ (\text{L1}) \qquad \Rightarrow 1 \quad (\text{R1})$$

$$(\text{όχι } L\top) \qquad \Gamma \Rightarrow \top, \Delta \quad (R\top)$$

$$\bot \Rightarrow \quad (L\bot) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \bot}\ (R\bot)$$

$$\Gamma, 0 \Rightarrow \Delta \quad (\text{L0}) \qquad (\text{όχι R0})$$

Πολλαπλασιαστικοί λογικοί κανόνες:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1 \quad \Gamma_2 \Rightarrow B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \otimes B, \Delta_1, \Delta_2}\ (\text{R}\otimes) \qquad \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \otimes B \Rightarrow \Delta}\ (\text{L}\otimes)$$

$$\frac{\Gamma_1, A \Rightarrow \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \parr B \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}\ (\text{L}\parr) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \parr B, \Delta}\ (\text{R}\parr)$$

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A \quad B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \multimap B \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}\ (\text{L}\multimap) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B, \Delta}\ (\text{R}\multimap)$$

Προσθετικοί λογικοί κανόνες:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A\&B \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{L}\&_1) \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A\&B \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{L}\&_2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A\&B, \Delta}\,(\mathrm{R}\&)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B, \Delta}\,(\mathrm{R}\oplus_1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B, \Delta}\,(\mathrm{R}\oplus_2)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \oplus B \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{L}\oplus)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightsquigarrow B, \Delta}\,(\mathrm{R}\rightsquigarrow_1) \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightsquigarrow B, \Delta}\,(\mathrm{R}\rightsquigarrow_2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightsquigarrow B \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{L}\rightsquigarrow)$$

Κανόνες για τους πρωτοβάθμιους ποσοδείκτες (y όχι ελεύθερο στα Γ,Δ):

$$\frac{\Gamma, A[t/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{L}\forall) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[y/x], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x A, \Delta}\,(\mathrm{R}\forall)$$

$$\frac{\Gamma, A[y/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{L}\exists) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[t/x], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x A, \Delta}\,(\mathrm{R}\exists)$$

Εκθετικοί δομικοί κανόνες:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{W}!) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta}\,(\mathrm{W}?)$$

$$\frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{C}!) \qquad \frac{!\Gamma \Rightarrow ?A, ?A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta}\,(\mathrm{C}?)$$

Εκθετικοί κανόνες αμέλειας (dereliction):

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta}\,(\mathrm{R}?) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{L}!)$$

Εκθετικοί συμφραστικοί κανόνες(contextual):

$$\frac{!\Gamma, A \Rightarrow ?\Delta}{!\Gamma, ?A \Rightarrow ?\Delta}\,(\mathrm{L}?) \qquad \frac{!\Gamma \Rightarrow A, ?\Delta}{!\Gamma \Rightarrow !A, ?\Delta}\,(\mathrm{R}!)$$

Λαμβάνουμε το δευτεροβάθμιο σύστημα CLL_2 προσθέτοντας:

Κανόνες για τους δευτεροβάθμιους ποσοδείκτες (Y όχι ελεύθερο στα Γ,Δ):

$$\frac{\Gamma, A[T/X] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall X A \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{L}\forall_2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[Y/X], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall X A, \Delta}\,(\mathrm{R}\forall_2)$$

$$\frac{\Gamma, A[Y/X] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists X A \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{L}\exists_2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[T/X], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists X A, \Delta}\,(\mathrm{R}\exists_2)$$

Η άρνηση ορίζεται ως $A^{\perp} := A \multimap \perp$, και επιπλέον τα ακόλουθα είναι αποδείξιμα:

$$\begin{array}{rcl}
A & \Longleftrightarrow & (A^{\perp})^{\perp} \\
1 & \Longleftrightarrow & \perp^{\perp} \\
\top & \Longleftrightarrow & 0^{\perp} \\
A \otimes B & \Longleftrightarrow & (A^{\perp} \parr B^{\perp})^{\perp} \\
A \oplus B & \Longleftrightarrow & (A^{\perp} \& B^{\perp})^{\perp} \\
\exists x A & \Longleftrightarrow & (\forall x A^{\perp})^{\perp} \\
\exists X A & \Longleftrightarrow & (\forall X A^{\perp})^{\perp} \\
!A & \Longleftrightarrow & (?A^{\perp})^{\perp}
\end{array}$$

Επομένως οι κανόνες (τα αξιώματα) για τα $\otimes, \oplus, \exists, \exists_2, !\,(1, 0)$ είναι "De Morgan"-αποδείξιμοι (αποδείξιμα) από εκείνους (εκείνα) των $\parr, \&, \forall, \forall_2, ?$ $(\perp, \top)$. Αυτή η ιδιότητα μπορεί να οδηγήσει σε μία "μιας πλευράς" εκδοχή του CL. Για παράδειγμα τα αξιώματα και ο κανόνας για το $\otimes$ θα ήταν της μορφής:

$$A, A^{\perp} \quad (\mathrm{Ax}) \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \qquad \Delta, B}{\Gamma, \Delta, A \otimes B}\,(\otimes)$$

Το πλήρες "μίας πλευράς" CLL μπορεί να βρεθεί στο [Tro92].

Παρατηρήσεις:

- Ας παρατηρήσουμε τον κανόνα L$\multimap$. Ο τύπος $A \multimap B$ καλείται κύριος τύπος του κανόνα. Οι εμφανίσεις A και B στις υποθέσεις είναι οι ενεργοί τύποι. Όλες οι άλλες εμφανίσεις τύπων καλούνται παθητικές και διαχωρίζουμε με προφανή τρόπο τις πάνω από τις κάτω εμφανίσεις των παθητικών τύπων. Οι τύποι με παθητικές εμφανίσεις σε κάποιο κανόνα αποτελούν το περιβάλλον του κανόνα. Στους εκθετικούς συμφραστικούς κανόνες όμως, επειδή οι τύποι στο περιβάλλον παίζουν σημαντικό ρόλο, οι εμφανίσεις τους καλούνται πλέον "εμμέσως ενεργές". Τέλος, στους δευτεροβάθμιους κανόνες (L$\forall_2$, R$\exists_2$) οι ενεργές εμφανίσεις είναι οι $A[T]$ και $A[Y]$.

- Η αντικατάσταση $A[t/x]$ συμβολίζει ότι στο A, κάθε ελεύθερη εμφάνιση του x, αντικαθίσταται από τον όρο t.
- Στους δευτεροβάθμιους κανόνες τα X και Y είναι ατομικοί τύποι, ενώ τα T είναι τύποι.
- Το σύστημα $\mathrm{C}_p^2\mathrm{LL}$ λαμβάνεται αν επεκτείνουμε το προτασιακό CLL με τους δευτεροβάθμιους κανόνες για τους $\forall_2$ και $\exists_2$, όπου οι ποσοδείκτες εφαρμόζονται πάνω σε προτασιακές μεταβλητές.

Συμβολισμός: Αν στο συστημα CLL προσθέσουμε ρητά τους κανόνες για τη γραμμική άρνηση λαμβάνουμε το σύστημα κλασικής γραμμικής λογικής LL. Οι κανόνες αυτοί είναι οι:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, A^{\perp} \Rightarrow \Delta}\,(L^{\perp}) \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A^{\perp}, \Delta}\,(R^{\perp})$$

Βιβλιογραφία

[Dan90] V. Danos. *Lα Logique Linéαire αppliquée à l'étude de divers processus de normalization (principalement du λ-calcul).* PhD thesis, Université Paris VII, 1990.

[DJS93a] V. Danos, J. B. Joinet, and H. Schellinx. LKT and λμ-calculus. 1993. Manuscript.

[DJS93b] V. Danos, J. B. Joinet, and H. Schellinx. The Structure of Exponentials: Uncovering the Dynamics of Linear Logic Proofs. *Computational Logic and Proof Theory*, pages 159–171, Springer Verlag, 1993.

[DJS97] V. Danos, J. B. Joinet, and H. Schellinx. A new deconstructive logic: linear logic. *Journal of Symbolic Logic*, 62(3):755–807, 1997.

[DR89] V. Danos and L. Regnier. The structure of multiplicatives. *Archive for Mathematical Logic*, 28:181–203, 1989.

[Gen35] G. Gentzen. Untersuchungen über das logische Schliessen I, II. *Mathematische Zeitschrift*, 39:176–210, 405–431, 1935.

[Gir87] J.-Y. Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50:1–102, 1987.

[Gir91] J.-Y. Girard. A new constructive logic: classical logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 1(3):255–296, 1991.

[Gir93] J.-Y. Girard. On the unity of logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 59:201–217, 1993.

[GLT88] J. Y. Girard, Y. Lafont, and P. Taylor. *Proofs and Types.* Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7. Cambridge University Press, 1988.

[Gri74] V. N. Grishin. A non-standard logic, and its application to set theory. *Studies in formalized languages and nonclassical logics*, Nauka:Moscow, 135–171, 1974.

[JSTdF00] J. B. Joinet, H. Schellinx, and L. Tortora de Falco. SN and CR for free-style LK^{tq}: linear decorations and simulation of normalization. Équipe de Logique Mathématique, Université Paris VII, 2000.

[Kle52] S. C. Kleene. *Introduction to Metamathematics.* North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1952.

[Kre51] G. Kreisel. On the interpretation of non-finitist proofs, I. *Journal of Symbolic Logic*, 16(4):241–267, 1951.

[MP04] D. Miller and E. Pimentel. Linear logic as a framework for specifying sequent calculus. In *Lecture notes in Logic 17, Logic Colloquium '99*, 2004.

[Ono90] H. Ono. Structural rules and a logical hierarchy. *P. P. Petkov,ed., Mathematical Logic*, Plenum Press:New York, London, 95–104, 1990.

[Par91] M. Parigot. Free deduction: an analysis of computation in classical logic. In Voronkov, editor, *Russian Conference on Logic Programming*, A, pages 361–380. Springer Verlag. LNAI 592, 1991.

[Par92] M. Parigot. $\lambda\mu$-calculus: an algorithmic interpretation of classical natural deduction. In Voronkov, editor, *Logic Programming and Automated Reasoning*, A, pages 190–201. Springer Verlag. LNAI 624, 1992.

[Roo91] D. Roorda. *Resource Logics: Proof-theoretical Investigations.* PhD thesis, University of Amsterdam, 1991.

[Sch94] H. Schellinx. *The Noble Art of Linear Decorating.* ILLC Dissertation Series, 1994-1. Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam, 1994.

[SU98] Morten Heine B. Sørensen and Pawel Urzyczyn. Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.

[Tro92] A. S. Troelstra. *Lectures notes on Linear Logic.* CSLI Lecture notes 29. Center for the Study of Language and Information, Stanford, 1992.

[TS00] A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory, Second Edition.* Cambridge University Press, 2000.

Ευρετήριο

$\rhd$-αναγωγή, 59
$\rhd$-δικτυωτό, 60
'μόνο' απόδειξη, 61
'μόνο-ευσταθές', 61

C_p^2L, 115
C_p^2LL, 124
CL, 113
CLL, 8, 121

IL, 109
ILL, 9, 117

LK, 115
LL, 124

redex, 56

tq-πρωτόκολλο, 96

I_p^2L, 111
I_p^2LL, 119

απάλειψη, 55
αριστερή επιλογή, 91

δίκτυα απόδειξης, 14
δεξιά επιλογή, 91
διακόσμηση, 33
δυναμική αποδείξεων, 53

ε.σ.δ., 34
ελκυστικός τύπος, 92
ενέργεια, 96
επαγωγική στρατηγική διακόσμησης, 34
επαρκές ζεύγος, 46

ισχυρή στρατηγική διακόσμησης, 45

κορεσμένο σύνολο, 56

μετάφραση $(\cdot)^{\circledast}$, 36
μετάφραση του Girard, 22

πεδίο, 55
περιττά εκθετικά, 53
πληθωρικές μεταφράσεις, 36
προσανατολισμός, 95
προσαρμοσμένη διακόσμηση, 103
προσεγγιστές, 13
πρωτογενής τύπος, 26

σ.κ.μ.δ., 56
σκελετός, 21
στρατηγική διακόσμησης, 33
συνάρτηση ανύψωσης, 65
συνθήκη κορεσμού, 56
συνθήκη μη δομικότητας, 56
σύστημα ILU, 38

τροπική μετάφραση, 22
τροπικότητα, 22

φυσική απαγωγή, 3

χρωματισμένος τύπος, 92
χρώμα, 92
χώροι συνάφειας, 19
χώροι φάσεων, 19

όχι σχετικά εκθετικοποιημένο, 56