Γαρυφαλλιά Βαφειάδου

ΕΝΟΡΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ:
ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΚΑΙ
ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Διπλωματική εργασία

μΠλ∀

ΑΘΗΝΑ 2001

Πρόλογος

Στην εργασία αυτή, παρουσιάζουμε τις βασικές αρχές της Ενορατικής Ανάλυσης, μιας θεωρίας που αναπτύχθηκε από τον L.E.J.Brouwer, σαν απόπειρα ανακατασκευής της Ανάλυσης σύμφωνα με την μη κλασική, ενορατική άποψη, συγχρόνως με την έκφρασή τους σε ένα τυπικό σύστημα, όπως αυτή προτάθηκε από τους S.C.Kleene, R.E.Vesley και, στη συνέχεια, δύο αποδείξεις συνέπειας του συστήματος αυτού, που βασίζονται στην έννοια της πραγματοποίησης που όρισε ο Kleene, η δεύτερη από τις οποίες μάλιστα, είναι περατοκρατική.

Θέλω να ευχαριστήσω τον Γιάννη Μοσχοβάκη, τον Γιώργο Κολέτσο και τον Κώστα Δημητρακόπουλο για το ότι δέχτηκαν να είναι μέλη της επιτροπής, αλλά πιο πολύ για τα όσα έμαθα από αυτούς στη διάρκεια των σπουδών μου, καθώς και για τη γενικότερη υποστήριξή τους. Προ παντός θέλω να ευχαριστήσω την Joan Rand Μοσχοβάκη, για τα μαθηματικά που έμαθα από αυτήν και για την πολύ μεγάλη ενθάρρυνση που μου προσέφερε και για τα μαθηματικά, αλλά και για την ίδια τη ζωή.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μικρή (ιστορική) εισαγωγή

In wisdom there is no logic.
In science logic often leads to the right result, but it cannot be trusted to do so if its application is indefinitely repeated.
In mathematics it is uncertain whether the whole of logic is admissible and it is uncertain whether the problem of admissibility is decidable.
Brouwer, 1908

1. Κατασκευαστικά μαθηματικά

Κατασκευαστικά μαθηματικά υπάρχουν πολλών ειδών και αποχρώσεων. Η ιδέα που είναι κοινή ανάμεσά τους και τα χαρακτηρίζει σαν κατασκευαστικά είναι ότι, για να αποδείξεις πως κάτι υπάρχει, πρέπει να πεις κι έναν τρόπο για να το βρεις, να το κατασκευάσεις. Αυτή η αντίληψη εμφανίζεται σαν μια συνειδητή στάση, στα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα. Μέχρι τότε, το μεγαλύτερο κομμάτι των μαθηματικών ήταν, στην ουσία, κατασκευαστικό, εκτός από τη Γεωμετρία, όπου η χρήση της σε άτοπο απαγωγής, δηλαδή της αρχής του αποκλειομένου τρίτου, ήταν έντονη.

Την εποχή εκείνη όμως, παρατηρήθηκε μια ραγδαία αυξανόμενη χρήση αφηρημένων σε πολύ ψηλό βαθμό εννοιών και αποδεικτικών μεθόδων. Είναι τότε που ο Dedekind έδωσε τον ορισμό των πραγματικών αριθμών μέσω των *τομών Dedekind*, σύμφωνα με τον οποίο, μια άπειρη συλλογή ρητών αριθμών συνιστά ένα αντικείμενο, έναν πραγματικό αριθμό· και, βέβαια, είναι η εποχή που ο Cantor δημιούργησε τη Θεωρία Συνόλων, τους άπειρους διατακτικούς και πληθικούς αριθμούς.

Η κατασκευαστική άποψη, όπως παρατηρεί ο Troelstra, μπορεί να θεωρηθεί ότι ήρθε σαν αντίδραση σ' όλα αυτά [Troelstra 1991].

Ο Gauss έγραφε ήδη στα 1831:
"Διαμαρτύρομαι ... ενάντια στη χρήση του άπειρου μεγέθους σαν να ήταν κάτι τελειωμένο· αυτή η χρήση δεν είναι αποδεκτή στα μαθηματικά. Το άπειρο είναι μόνο *façon de parler* [*τρόπος του λέγειν*]: στο νου του έχει κανείς όρια που προσεγγίζονται από κάποιους λόγους όσο είναι επιθυμητό, ενώ άλλοι λόγοι μπορεί να αυξάνονται απεριόριστα" [Gauss' Werke].

· **Kronecker.** Η πρώτη σαφής εκδήλωση της κατασκευαστικής άποψης προήλθε από τον Kronecker, που πίστευε ότι "οι φυσικοί αριθμοί έχουν δοθεί από τον Θεό και όλα τα υπόλοιπα είναι έργα των ανθρώπων". Αποδεχόταν τις αποδείξεις ύπαρξης αριθμών, μόνο αν περιείχαν μεθόδους εύρεσής τους, και μόνο ιδιότητες που μπορούν να ελεγχθούν σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

· **Οι Γάλλοι ημιενορατικοί.** Οι Baire, Borel, Lebesque, Lusin και Poincaré υποστήριξαν διάφορες απόψεις, λιγότερο ή περισσότερο κατασκευαστικές.
Για παράδειγμα, στα 1914 ο Borel έγραφε:
"Δεν μπορώ να κατανοήσω τι μπορεί να σημαίνει η αφηρημένη δυνατότητα μιας πράξης, η οποία είναι αδύνατη για τον ανθρώπινο νου. Για μένα, αυτό είναι μια καθαρά μεταφυσική αφαίρεση χωρίς καμία επιστημονική υπόσταση". Ο Borel μάλιστα, θεωρούσε ήδη ότι το συνεχές είναι, όπως οι φυσικοί αριθμοί, αυθύπαρκτη έννοια, ότι γίνεται αντιληπτή με *ενόραση (intuition).*

· **Ο Poincaré** είχε, σχετικά με την αριστοτελική λογική, την άποψη, ότι ένας συλλογισμός δεν μας λέει τίποτε ουσιωδώς καινούργιο. Θεωρούσε ότι, στα μαθηματικά, είναι αναγκαίο κάτι παραπάνω από την λογική, είναι αναγκαία η *ενόραση*. Εβλεπε σαν την κατ' εξοχήν μέθοδο, την αρχή της επαγωγής.

· **Brouwer.** Στα 1907 δημοσιεύθηκε η διδακτορική διατριβή του Brouwer, με τίτλο "Για τα θεμέλια των μαθηματικών". Αποτέλεσε την αφετηρία της ανάπτυξης των ιδεών του για τα μαθηματικά και τη θεμελίωση της ενορατικής άποψης, καθώς προσέφερε μια πολύ πιο ριζοσπαστική και συγκροτημένη διατύπωση των ενορατικών θέσεων, απ' όσες είχαν προηγηθεί.

Οι κύριες ιδέες του Brouwer σχετικά με τα μαθηματικά:

· Τα μαθηματικά δεν είναι τυπικά· αντικείμενό τους είναι νοητικές κατασκευές, οι οποίες είναι άμεσα αντιληπτές από το νου και δεν συνίστανται στον τυπικό χειρισμό συμβόλων. Ακριβείς είναι μόνο οι νοητικές κατασκευές του ιδανικού μαθηματικού.

· Τα μαθηματικά είναι ανεξάρτητα από τις εξωτερικές εμπειρίες, όπως, κατ' αρχήν, και από τη γλώσσα. Η κοινοποίηση μέσω της γλώσσας μπορεί να χρησιμεύσει για να υποδειχθούν στους άλλους όμοιες κατασκευές, χωρίς όμως καμία εγγύηση ότι θα προκύψουν πράγματι όμοιες.

· Τα μαθηματικά δεν εξαρτώνται από τη λογική, αλλά η λογική από τα μαθηματικά.

Στο άρθρο του "The unreliability of the logical principles", το 1908, απορρίπτει τη λογική του Αριστοτέλη, και ειδικά την αρχή του αποκλειομένου τρίτου. Δέχεται ότι, για πεπερασμένα σύνολα βέβαια αυτή ισχύει, η χρήση της όμως σε άπειρα σύνολα αποτελεί μία αυθαίρετη μεταφορά. Ενισχύει μάλιστα το επιχείρημά του με ένα παράδειγμα κάποιων όχι διαπιστωμένων ιδιοτήτων των δεκαδικών ψηφίων του π.

Οι φυσικοί αριθμοί είναι για τον Brouwer άμεσα αντιληπτοί με ενόραση. Η γένεσή τους από μία αρχική μονάδα με το νόμο της προσθήκης μιας νέας, διαφορετικής μονάδας κάθε φορά, είναι μία απλή νοητική κατασκευή. Κάτι τέτοιο, βέβαια, δέχονται όλοι οι μαθηματικοί.

Ομως, για τον Brouwer, σε αντίθεση με τους περισσότερους, και το συνεχές είναι άμεσα αντιληπτό με ενόραση. Κάθε απόπειρα κατασκευής του συνεχούς από τους φυσικούς, τη θεωρούσε αδύνατη και επέκρινε όσους ισχυρίζονταν ότι πετύχαιναν τέτοιες κατασκευές, αφού αναγκαστικά υιοθετούσαν κάποιο αξίωμα πληρότητας ή κάποιο άπειρο αντικείμενο. Χαρακτηριστικά, παραθέτουμε τα εξής αποσπάσματα:

"Ομως, το συνεχές σαν ολότητα μας δόθηκε με ενόραση· μία κατασκευή του, μία πράξη που θα δημιουργούσε από τη μαθηματική ενόραση "όλα" τα σημεία του σαν ατομικότητες, είναι ασύλληπτη και αδύνατη. Η μαθηματική ενόραση είναι ανίκανη να δημιουργήσει άλλο από αριθμήσιμα σύνολα ατομικοτήτων." [Brouwer 1907]

"Γι' αυτά [τους φυσικούς αριθμούς, την αρχή της πλήρους επαγωγής κλπ.] έθεσαν αξιωματικά την ύπαρξη και την ορθότητα ανεξάρτητα από

τη γλώσσα και τη λογική και θεώρησαν την μη αντιφατικότητά τους βέβαιη, ακόμη και χωρίς λογική απόδειξη.
Για το συνεχές όμως, φαίνεται ότι δεν είδαν μία προέλευση αυστηρά ξένη προς τη γλώσσα και τη λογική." [Brouwer 1981].

Σε μία σειρά άρθρων του που δημοσιεύθηκαν από το 1912 και μετά, ο Brouwer παρουσίασε μία ενορατική Θεωρία Συνόλων και επιχείρησε μία ανακατασκευή της Ανάλυσης. Σ' αυτά εμφανίζεται η έννοια που αρχικά ο Brouwer αποκαλούσε *σύνολο* (Menge) και, στη συνέχεια, *spread (spreiding)* [Brouwer 1918].

Για τον Brouwer, σύνολο δεν είναι μία ολότητα αντικειμένων, αλλά ένας *νόμος κατασκευής* τους. Τα αντικείμενα αυτά, τα "στοιχεία" του συνόλου, κατασκευάζονται σε βήματα, με διαδοχικές επιλογές από κάποιο αριθμήσιμο σύνολο, ας πούμε τους φυσικούς αριθμούς, σύμφωνα με το νόμο. Ετσι, σε κάθε αντικείμενο αντιστοιχεί μία ακολουθία επιλογών. Αν αυτή δεν σταματάει (πράγμα που καθορίζεται από το νόμο), τότε το αντίστοιχο αντικείμενο παραμένει υπό κατασκευή, ημιτελές, δεν μπορούμε ποτέ να το έχουμε ολόκληρο.

Η έννοια της *ακολουθίας επιλογών* είναι χαρακτηριστική για τα μαθηματικά του Brouwer. Αρχικά, θεωρούσε αποδεκτές μόνο αυτές που προκύπτουν με βάση κάποιο νόμο. Αργότερα όμως, δέχτηκε ότι μπορεί να μην καθορίζονται κατ' ανάγκη εκ των προτέρων από ένα νόμο, αλλά σε κάθε βήμα γίνεται ελεύθερα μία επιλογή, σε κάθε βήμα μπορεί να αποφασιστεί αν θα χρησιμοποιηθεί κάποιος νόμος ή όχι. Ετσι, ακολουθίες επιλογών είναι όλες οι ακολουθίες φυσικών αριθμών. Αυτό έχει την εξής σημαντική συνέπεια: αν θέλουμε να διαπιστώσουμε αν ένα τυχαίο "στοιχείο" ενός συνόλου, μία ακολουθία επιλογών, έχει κάποια ιδιότητα, αυτό είναι δυνατόν μόνο στην περίπτωση που μπορούμε ν' αποφασίσουμε με δεδομένη μόνο πεπερασμένη πληροφορία, όση περιέχεται σε κάποιο πεπερασμένο αρχικό τμήμα.

Αυτή ακριβώς η θεώρηση των ακολουθιών επιλογών, επέτρεψε στον Brouwer, όπως θα δούμε αναλυτικότερα, να χειρίζεται με κατασκευαστικό τρόπο το σύνολο των ακολουθιών φυσικών αριθμών, ένα μη αριθμήσιμο σύνολο, το *ενορατικό συνεχές*. Ετσι, έγινε δυνατή η ανάπτυξη μίας ενορατικής θεωρίας για το συνεχές.

2. Αναδρομικές συναρτήσεις και η θέση του Church

· **Η θεωρία των (γενικών) αναδρομικών συναρτήσεων.** Στη δεκαετία του '30, η κατασκευαστική αντίληψη για τα μαθηματικά εμφανίζεται πάνω σε μία βάση διαφορετική από την ενορατική, αυτή των αλγορίθμων, των κατασκευαστικών διαδικασιών για τον υπολογισμό συναρτήσεων. Γεννιούνται οι ορισμοί των *(γενικών ή ολικών) αναδρομικών συναρτήσεων* από τον Gödel[1] (πάνω στην αρχική ιδέα του Herbrand) το 1934, των *λ-ορίσιμων συναρτήσεων* στα πλαίσια του λ-λογισμού που ο Church εισήγαγε στα 1932, των*(Turing-) υπολογίσιμων συναρτήσεων* από τον Turing στα 1936-1937.

Στα 1936 επίσης, ο Church διατυπώνει τη θέση ότι οι έννοιες του *(διαισθητικά) υπολογίσιμου* και του *αναδρομικού* συμπίπτουν· είναι η γνωστή *θέση του Church*, που ισχυροποιήθηκε με τις αποδείξεις της ταύτισης των παραπάνω κλάσεων συναρτήσεων, που επακολούθησαν. (Οι Kleene και Church έδειξαν ότι οι λ-ορίσιμες συναρτήσεις συμπίπτουν με τις αναδρομικές και ο Turing ότι οι (Turing-) υπολογίσιμες συμπίπτουν με τις άλλες δύο κλάσεις.)

Η θέση του Church αποτέλεσε μία κατευθυντήρια αρχή για τις σχολές των κατασκευαστικών μαθηματικών, παρά τις διαφορές τους:

· **Markov.** Τα κατασκευαστικά μαθηματικά του Markov έχουν σαν κεντρική τους έννοια τους *κανονικούς αλγορίθμους (αλγορίθμους Markov)* και δέχονται τη θέση του Church σαν τη θεμελιώδη αρχή τους, μάλιστα συνέπεια της άποψης του Markov είναι ότι οι (αριθμοθεωρητικές) συναρτήσεις είναι οι αναδρομικές.

· **Bishop.** Η θέση του Church είναι ακόμη συνεπής με τα κατασκευαστικά μαθηματικά όπως τα ανέπτυξε ο Bishop, που θέλησε να κινηθεί μόνο στο κοινά αποδεκτό τμήμα των μαθηματικών, αποφεύγοντας αποκλειστικά ενορατικές ή κλασικές έννοιες και αρχές, και θέτοντας σαν θεμελιακή απαίτηση το να έχουν όλα τα μαθηματικά αριθμητικό νόημα.

· **Heyting.** Η Ενορατική Αριθμητική του Heyting, βασισμένη στο έργο του Brouwer, είναι κι αυτή συνεπής με τη θέση του Church, η οποία στην περίπτωση αυτή εκφράζεται, συνδυασμένη με μία αρχή αριθμήσιμης

[1]Ο Gödel στην απόδειξη του θεωρήματος μη πληρότητας (1931) ορίζει την κλάση που σήμερα αποκαλούμε "*πρωτογενείς αναδρομικές συναρτήσεις*" και που είχε εισαχθεί (όχι βέβαια σε τυπικά πλαίσια) από τον Skolem το 1919. Στη συνέχεια όρισε την ευρύτερη κλάση των (γενικών) αναδρομικών συναρτήσεων.

επιλογής, από το αξίωμα-σχήμα

$$\mathcal{CT}_0 : \; \forall \mathrm{n}\, \exists \mathrm{m}\, \mathrm{A}(\mathrm{n},\mathrm{m}) \rightarrow \exists \mathrm{w}\, \forall \mathrm{n}\, \exists \mathrm{m}\, [\mathrm{A}(\mathrm{n},\mathrm{U}(\mathrm{m})) \wedge \mathrm{T}(\mathrm{w},\mathrm{n},\mathrm{m})].$$

· Αν στην Ενορατική Ανάλυση περιοριστούμε στις ακολουθίες επιλογών που ακολουθούν ένα νόμο, τότε η θέση του Church μπορεί να εκφραστεί από το αξίωμα

$$\mathcal{CT} : \; \forall \alpha\, \exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \exists \mathrm{z}\, [\mathrm{T}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \wedge \mathrm{U}(\mathrm{z}) = \alpha(\mathrm{y})].$$

ή αλλιώς από το αξίωμα

$$\forall \alpha\, \mathrm{GR}(\alpha),$$

όπου το $\mathrm{GR}(\alpha)$ είναι κατηγόρημα που εκφράζει ότι η α είναι (γενική) αναδρομική.
Και στις δύο προηγούμενες εκφράσεις, ο καθολικός ποσοδείκτης $\forall \alpha$ αναφέρεται μόνο στις ακολουθίες επιλογών που ακολουθούν ένα νόμο.

· Ακόμη όμως κι αν θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε σ' ολόκληρο το χώρο των ακολουθιών επιλογών, όπου προφανώς το $\mathcal{CT}$ δεν ισχύει[2], η θέση του Church μπορεί να εκφραστεί από το σχήμα

$$\mathcal{CT}_{\mathcal{I}} : \; \exists \alpha\, \mathrm{A}(\alpha) \rightarrow \exists \alpha\, (\, \mathrm{GR}(\alpha) \wedge \mathrm{A}(\alpha)),$$

όπου ο $\exists \alpha\, \mathrm{A}(\alpha)$ είναι κλειστός τύπος. [Mosch-Rand '67]

· **Πραγματοποίηση.** Ο Kleene θεωρούσε ότι υπάρχει στενή σχέση ανάμεσα στα ενορατικά μαθηματικά και τη θεωρία των αναδρομικών συναρτήσεων, εξαιτίας της κατασκευαστικής φύσης και των δύο, και θέλησε να βρει μία ακριβή μαθηματική διασύνδεσή τους. Αυτό το κατόρθωσε με την έννοια της *πραγματοποίησης*, μίας έννοιας που, στην πρώτη της εκδοχή, την *αριθμητική πραγματοποίηση*, αποτέλεσε μία ερμηνεία της Ενορατικής Θεωρίας Αριθμών και, στις επόμενες, και της Ενορατικής Ανάλυσης. Την έννοια αυτή εμπνεύστηκε, μεταξύ άλλων, και από τη θέση του Hilbert, που εκφράζεται στο ακόλουθο απόσπασμα από το

[2] Ο Brouwer απέρριπτε τη θέση του Church μ' αυτή την έννοια (του $\mathcal{CT}$), γιατί είχε σαν συνέπεια το ότι κάθε ακολουθία επιλογών διέπεται ένα νόμο· αρνιόταν μάλιστα ακόμη και την ταύτιση των αναδρομικών με αυτές που ακολουθούν ένα νόμο, αφού η αναδρομικότητα θέτει εκ των προτέρων περιορισμούς στη μελλοντική γένεση των επιλογών.

"Grundlagen der Mathematik" των Hilbert-Bernays, καθώς εκθέτουν την περατοκρατική άποψη για τα μαθηματικά:

"Μία υπαρξιακή πρόταση για αριθμούς, δηλαδή μία πρόταση της μορφής "υπάρχει κάποιος αριθμός n με την ιδιότητα $A(n)$", εκλαμβάνεται από περατοκρατική άποψη σαν μία "μερική κρίση", δηλαδή σαν μία μη πλήρης έκφραση μίας ακριβέστερης πρότασης, η οποία συνίσταται στο να παρέχεται είτε άμεσα ένας αριθμός n με την ιδιότητα $A(n)$, είτε μία διαδικασία εύρεσης ενός τέτοιου αριθμού..."

Με αυτά ακριβώς αρχίζει το άρθρο στο οποίο ο Kleene παρουσίασε για πρώτη φορά την έννοια της πραγματοποίησης.

· Οι Kleene και Vesley, στο βιβλίο τους **"Foundations of Intuitionistic Mathematics"** [Kleene–Vesley '65], εκθέτουν ένα τυπικό σύστημα για την Ενορατική Ανάλυση, στο οποίο εκφράζονται οι αρχές και οι έννοιες που εισήγαγε ο Brouwer. Εκεί δίνεται και μία ερμηνεία, μέσω μίας κατάλληλης έννοιας πραγματοποίησης, της *συναρτησιακής πραγματοποίησης*, καθώς και μία απόδειξη συνέπειας του συστήματος που παρουσιάζεται, η οποία απορρέει από την ερμηνεία αυτή.

Αργότερα, ο Kleene, στο **"Formalized Recursive Functionals and Formalized Realizability"** [Kleene 1969], τυποποίησε την έννοια της συναρτησιακής πραγματοποίησης και έδωσε μία μεταμαθηματική απόδειξη της σχετικής συνέπειας του συστήματός του για την Ενορατική Ανάλυση ως προς ένα υποσύστημά του, το οποίο αποτελεί το κοινό τμήμα με το αντίστοιχο κλασικό σύστημα για την Ανάλυση.

Θα αναφερόμαστε με τη συντομογραφία "IM" στο [Kleene 1952] και την "FIM" στο [Kleene–Vesley '65].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το σύστημα $\mathcal{I}$ για την Ενορατική Ανάλυση

1. Γλώσσα και αξιώματα

Παρουσιάζουμε πρώτα το βασικό σύστημα $\mathcal{B}$, που αποτελεί το κοινό τμήμα της Κλασικής και της Ενορατικής Ανάλυσης. Από το $\mathcal{B}$, με την προσθήκη ενός αξιώματος που εκφράζει την *αρχή της διπλής άρνησης* (ή ισοδύναμα *του αποκλειομένου τρίτου*), προκύπτει το αντίστοιχο κλασικό σύστημα, ενώ με την προσθήκη ενός αξιώματος που εκφράζει την μη κλασική *αρχή συνέχειας του Brouwer*, προκύπτει το ενορατικό σύστημα (για την Ανάλυση) $\mathcal{I}$.

Η γλώσσα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι κατάλληλη για την τυποποίηση της θεωρίας των γενικών και μερικών αναδρομικών συναρτήσεων (ή συναρτησοειδών, functionals) με μεταβλητές φυσικούς αριθμούς και συναρτήσεις από το ω στο ω.

Γλώσσα. Τα τυπικά σύμβολα του συστήματος $\mathcal{B}$ είναι τα εξής:

- $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$,
- αριθμητικές μεταβλητές: a,b,c,…,x,y,z, …,
- συναρτησιακές μεταβλητές: α,β,γ,…,
- το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $=$,
- οι συναρτησιακές σταθερές $\mathrm{f}_0, \ldots, \mathrm{f}_{26}$,
- το λ του Church,
- τα άγκιστρα του Kleene $\{,\}$,
- κόμματα, παρενθέσεις και το ; .

Σχολια. 1. Οι αριθμητικές μεταβλητές εκφράζουν αριθμούς, οι συναρτησιακές ολικές συναρτήσεις από το ω στο ω (ως προς την κύρια ερμηνεία).

2. Κάθε συναρτησιακή σταθερά f_i, i=0,...,26, εκφράζει μία συγκεκριμένη πρωτογενή αναδρομική συνάρτηση

$$\mathrm{f}_i(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{k_i}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l_i})$$

με ορίσματα k_i φυσικούς αριθμούς και l_i συναρτήσεις από το ω στο ω, όπως φαίνεται από τα αξιώματα που ισχύουν για κάθε σύμβολο f_i και που δίνονται στον κατάλογο των αξιωμάτων.

Για παράδειγμα:

η f_0 εκφράζει τη σταθερή συνάρτηση $f_0 = 0$ με $k_0 = l_0 = 0$,

η $\mathrm{f}_1 \equiv\, '$ τη συνάρτηση του επομένου $f_1(n) = n + 1$ με $k_1 = 1$, $l_1 = 0$,

η $\mathrm{f}_2 \equiv +$ την πρόσθεση $f_2(n, m) = n + m$ με $k_2 = 2$, $l_2 = 0$,

η $\mathrm{f}_3 \equiv \cdot$ τον πολλαπλασιασμό $f_3(n, m) = n \cdot m$ με $k_3 = 2$, $l_3 = 0$.

3. Οι συναρτήσεις που εκφράζονται από τις $\mathrm{f}_0, \ldots, \mathrm{f}_{26}$, αρκούν για την παραγωγή της κλάσης των συναρτήσεων που θέλουμε να τυποποιήσουμε εδώ. Η επιλογή τους δεν είναι μοναδική, έχει γίνει για ευκολία στην ανάπτυξη της θεωρίας από τον Kleene.

4. Το $=$ χρησιμοποιείται για να δηλώσει την ισότητα όρων, δηλαδή εκφράσεων για αριθμούς. Η ισότητα για εκφράσεις που αντιστοιχούν σε συναρτήσεις θα οριστεί.

5. Θα ακολουθήσουμε την εξής σύμβαση για τους τύπους των γραμμάτων που χρησιμοποιούμε: τα όρθια γράμματα για τυπικά αντικείμενα (και τα ονόματά τους στη μεταγλώσσα), τα πλάγια γράμματα για διαισθητικά αντικείμενα (όπως αριθμούς και συναρτήσεις), μικρά λατινικά για αριθμούς και τυπικές εκφράσεις γι' αυτούς, μικρά ελληνικά για συναρτήσεις και τυπικές εκφράσεις γι' αυτές, εκτός, αν ορίζουμε συγκεκριμένα κάτι διαφορετικά, όπως για παράδειγμα, τα σύμβολα για τις συναρτησιακές σταθερές f_i.

p-όροι και p-συναρτητές.

Ο ορισμός δίνεται σε δύο στάδια και στη συνέχεια δίνεται και ένας τρίτος σχετικός ορισμός. Στο πρώτο στάδιο δίνουμε τον ορισμό των εννοιών *όρος* και *συναρτητής*, αναδρομικά και παράλληλα και για τις δύο έννοιες.

1.1. Ορισμος (των όρων και των συναρτητών).

1. Οι αριθμητικές μεταβλητές είναι όροι.
2. Οι συναρτησιακές μεταβλητές είναι συναρτητές.
3. Για κάθε $i = 0, \dots, 26$, αν $k_i = 1$ και $l_i = 0$, τότε ο f_i είναι συναρτητής.
4. Για κάθε $i = 0, \dots, 26$, αν $\mathrm{t}_1, \dots, \mathrm{t}_{k_i}$ είναι όροι και $\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_{l_i}$ είναι συναρτητές, τότε ο $\mathrm{f}_i(\mathrm{t}_1, \dots, \mathrm{t}_{k_i}, \mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_{l_i})$ είναι όρος.
5. Αν ο u είναι συναρτητής και ο t όρος, τότε ο $(\mathrm{u})(\mathrm{t})$ είναι όρος.
6. Αν η x είναι αριθμητική μεταβλητή και ο t όρος, τότε ο $\lambda \mathrm{x}\,\mathrm{t}$ είναι συναρτητής.

   Μία έκφραση είναι όρος ή συναρτητής ανν προκύπτει από τα 1– 6.

Σχολια. 1. Το 0 είναι όρος, από τον κανόνα 4, για $k_i = l_i = 0$.

2. Η f_1 (που εκφράζει τη συνάρτηση του επομένου) είναι συναρτητής, από τον κανόνα 3.

3. Οι όροι εκφράζουν (πάντα ως προς την κύρια ερμηνεία) φυσικούς αριθμούς σταθερούς, ή μεταβλητούς, αν έχουν ελεύθερες μεταβλητές (όπως η αόριστη τιμή $f(x)$ μιας συνάρτησης). Οι συναρτητές, αντίστοιχα, εκφράζουν ολικά ορισμένες συναρτήσεις από το ω στο ω.

1.2. Ορισμος (των p-όρων και των p-συναρτητών). Επεκτείνουμε τώρα τον προηγούμενο ορισμό, ώστε να δημιουργήσουμε εκφράσεις που να αντιστοιχούν σε μερικές συναρτήσεις, ορίζοντας τις έννοιες p-*όρος* και p-*συναρτητής*, ως εξής:

A. Στους κανόνες 1-6 του προηγούμενου ορισμού αντικαθιστούμε τα "όρος" και "συναρτητής" με "p-όρος" και "p-συναρτητής", αντίστοιχα.

B. Προσθέτουμε τον ακόλουθο κανόνα:
   7. Αν $\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1, \dots, \mathrm{t}_k$ είναι p-όροι και $\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_l$ είναι p-συναρτητές, τότε ο $\{\mathrm{t}_0\}(\mathrm{t}_1, \dots, \mathrm{t}_k, \mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_l)$ είναι p-όρος.

C. Στους προηγούμενους κανόνες, στις θέσεις των p-συναρτητών επιτρέπεται η εισαγωγή p-όρων.

Αυτό έχει εφαρμογή στους κανόνες 4, 5 και 7· για παράδειγμα, στον κανόνα 5, αν οι u, t είναι p-όροι, τότε ο (u)(t) είναι p-όρος.
Αν χρησιμοποιηθεί αυτός ο κανόνας, στην περίπτωση του 7 (και κατά βούληση στις άλλες για λόγους αναγνωσιμότητας), το κόμμα που διαχωρίζει (στον αρχικό όρο) τις αριθμητικές μεταβλητές από τις συναρτησιακές, αντικαθίσταται από ; .

Ετσι, p-όρος ή p-συναρτητής είναι ακριβώς ότι προκύπτει από τα A-C.

1.3. Ορισμος (των P-όρων και των P-συναρτητών). Τέλος, ορίζουμε τις έννοιες P-*όρος* και P-*συναρτητής*, που είναι, αντίστοιχα, ένας p-όρος που δεν είναι όρος και ένας p-συναρτητής που δεν είναι συναρτητής.

Τύποι.

1.4. Ορισμος (των τύπων). Ατομικοί τύποι της γλώσσας είναι οι ισότητες μεταξύ όρων (και όχι p-όρων). Εχουμε λοιπόν:

1. Αν s, t είναι όροι, τότε ο s=t είναι τύπος.
2. Αν A, B είναι τύποι, τότε οι $A \to B$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg A$ είναι τύποι.
3. Αν A είναι τύπος, x αριθμητική μεταβλητή και α συναρτησιακή μεταβλητή, τότε οι $\forall$xA, $\exists$xA, $\forall$αA, $\exists$αA είναι τύποι.

   Μία έκφραση είναι τύπος ανν προκύπτει από τα 1– 3.

Ελεύθερες και δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητών. Ορίζονται όπως συνήθως· οι τελεστές που δεσμεύουν μεταβλητές είναι τώρα οι: $\forall$x, $\exists$x, $\forall$α, $\exists$α, λx, όπου x αριθμητική και α συναρτησιακή μεταβλητή.

Αντικάτασταση. Με E(t) θα δηλώνεται το αποτέλεσμα της αντικατάστασης των ελεύθερων εμφανίσεων μίας αριθμητικής μεταβλητής x από έναν όρο t, και ανάλογα για συναρτησιακή μεταβλητή και συναρτητή. Για p-όρους και p-συναρτητές, η αντικατάσταση είναι επιτρεπτή μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως θα δούμε (Κεφάλαιο 4).

Πρωτογενείς, γενικές και μερικές αναδρομικές συναρτήσεις.

1.5. Ορισμος. Μία συνάρτηση $f(a_1,\ldots,a_k,\alpha_1,\ldots,\alpha_l)$ είναι πρωτογενής (γενική, μερική) αναδρομική αν, σαν συνάρτηση των $a_1,\ldots,a_k$

είναι πρωτογενής (γενική, μερική) αναδρομική ομοιόμορφα ως προς τις $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, δηλαδή αν,
για κάθε $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, για τη συνάρτηση

$$f'(a_1, \ldots, a_k) = f(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$$

υπάρχει μία πρωτογενής αναδρομική παραγωγή (παραγωγή από τα αντίστοιχα σχήματα για γενικές, μερικές) από τις $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, ανεξάρτητη από τις $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$.

1.6. Λημμα. Αν οι συναρτήσεις $\psi(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta)$ και $\chi(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, x)$ είναι πρωτογενείς ή γενικές ή μερικές αναδρομικές, τότε και η

$$\psi(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \lambda x\, \chi(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, x))$$

είναι πρωτογενής ή γενική ή μερική αναδρομική, αντίστοιχα.

Αποδειξη. Με επαγωγή στην παραγωγή της

$$\psi'(a_1, \ldots, a_k) = \psi(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta)$$

από τις $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta$.
Για την περίπτωση που είναι πρωτογενής αναδρομική:

Βαση. Η ψ' είναι μία από τις $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, β, οπότε το συμπέρασμα είναι προφανές.

Επαγωγικο βημα. Περίπτωση σχήματος αντικατάστασης.
Εστω

$$\psi'(a_1, \ldots, a_k) = \varphi'(\psi'_1(a_1, \ldots, a_k), \ldots, \psi'_m(a_1, \ldots, a_k)),$$

όπου οι $\varphi', \psi'_1, \ldots, \psi'_m$ προηγούνται (από την ψ') στην παραγωγή της ψ' από τις $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta$. Τότε η

$$\overline{\psi}(a_1, \ldots, a_k) = \psi(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \lambda x\, \chi(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, x))$$

προκύπτει (σύμφωνα με τον ορισμό της ομοιομορφίας) από μία ακριβώς όμοια παραγωγή από τις $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\lambda x\, \chi(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, x)$, οπότε

$$\overline{\psi}(a_1, \ldots, a_k) = \overline{\varphi'}(\overline{\psi'}_1(a_1, \ldots, a_k), \ldots, \overline{\psi'}_m(a_1, \ldots, a_k)),$$

όπου $\overline{\varphi'}$, $\overline{\psi'}_1, \ldots, \overline{\psi'}_m$ οι αντίστοιχες με τις $\varphi', \psi'_1 \ldots, \psi'_m$ στη νέα παραγωγή.
Από την επαγωγική υπόθεση, οι $\overline{\varphi'}, \overline{\psi'}_1, \ldots, \overline{\psi'}_m$ είναι πρωτογενείς αναδρομικές ως προς τις $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\lambda x\, \chi(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, x)$ και

η $\chi(a_1,\dots,a_k,\,\alpha_1,\dots,\alpha_l,x)$ ως προς τις $\alpha_1,\dots,\alpha_l$.
Από την προφανή μεταβατικότητα της σχέσης "*πρωτογενής αναδρομική ως προς Ψ*", η $\overline{\psi}(a_1,\dots,a_k)$ είναι πρωτογενής αναδρομική ως προς τις $\alpha_1,\dots,\alpha_l$. ⊣

1.7. Λημμα. Εστω s όρος (u συναρτητής) [P ατομικός τύπος] με ελεύθερες μεταβλητές μεταξύ των $\mathrm{a}_1,\dots,\mathrm{a}_k,\,\upalpha_1,\dots,\upalpha_l$. Τότε, ως προς την κύρια ερμηνεία, ο s (ο u(x), για x αριθμητική μεταβλητή που δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον u) [ο P] εκφράζει, αντίστοιχα, σαν την αόριστη τιμή της, μία πρωτογενή αναδρομική συνάρτηση των $a_1,\dots,a_k,\,\alpha_1,\dots,\alpha_l$ (συνάρτηση των $a_1,\dots,a_k,\alpha_1,\dots,\alpha_l,x$) [κατηγόρημα των $a_1,\dots,a_k,\,\alpha_1,\dots,\alpha_l$], όπου οι $a_1,\dots,a_k,\,\alpha_1,\dots,\alpha_l$, x, είναι οι ερμηνείες των $\mathrm{a}_1,\dots,\mathrm{a}_k,\,\upalpha_1,\dots,\upalpha_l,\mathrm{x}$.

Αποδειξη. Με επαγωγή, βάσει των αντίστοιχων αναδρομικών ορισμών. Π.χ. για όρους και συναρτητές:

Βαση: προκύπτει από την κύρια ερμηνεία των αριθμητικών και των συναρτησιακών μεταβλητών.

Επαγωγικο βημα. Κανόνας 3: Ο $\mathrm{f}_i(\mathrm{t}_1,\dots,\mathrm{t}_{k_i},\mathrm{u}_1,\dots,\mathrm{u}_{l_i})$ έχει σαν ερμηνεία μία πρωτογενή αναδρομική συνάρτηση των $a_1,\dots,a_k,\alpha_1,\dots,\alpha_l$, από την επαγωγική υπόθεση και το προηγούμενο Λήμμα και το ότι αν ένας συναρτητής u δεν είναι της μορφής λx s, τότε η ερμηνεία του u είναι ίση με $\lambda x\, u(x)$. ⊣

Αξιώματα και κανόνες του βασικού συστήματος B.

A. Αξιώματα και κανόνες για τον ενορατικό κατηγορηματικό λογισμό 2 ειδών.

A1. Αξιώματα και κανόνες για τον προτασιακό λογισμό.

Τα A, B, C είναι τύποι.

1a. $\mathrm{A}\to(\mathrm{B}\to\mathrm{A})$.

1b. $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to ((\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C})) \to (\mathrm{A} \to \mathrm{C}))$.

2. $\dfrac{\mathrm{A} \qquad \mathrm{A} \to \mathrm{B}}{\mathrm{B}}$.

3. $\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}))$.

4a. $(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \to \mathrm{A}$.

4b. $(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \to \mathrm{B}$.

5a. $\mathrm{A} \to (\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$.

5b. $\mathrm{B} \to (\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$.

6. $(\mathrm{A} \to \mathrm{C}) \to ((\mathrm{B} \to \mathrm{C}) \to ((\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \to \mathrm{C}))$.

7. $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to ((\mathrm{A} \to \neg\mathrm{B}) \to \neg\mathrm{A})$.

8. $\neg\mathrm{A} \to (\mathrm{A} \to \mathrm{B})$.

Σχολιο. Αν το **8** αντικατασταθεί από το: $\mathbf{8^C}$. $\neg\neg\mathrm{A} \to \mathrm{A}$, τότε προκύπτει ένα σύστημα για τον κλασικό προτασιακό λογισμό.

A2. Επιπρόσθετα αξιώματα και κανόνες για τον κατηγορηματικό λογισμό.

Οι $\mathrm{A(x)}$, $\mathrm{A}(\alpha)$, C είναι τύποι, η x είναι αριθμητική μεταβλητή που δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον C στα **9N**, **12N**, η α είναι συναρτησιακή μεταβλητή που δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον C στα **9F**, **12F**, ο t είναι όρος από τον οποίο η x είναι αντικαταστάσιμη στον $\mathrm{A(x)}$ στα **10N**, **11N**, ο u είναι συναρτητής από τον οποίο η α είναι αντικαταστάσιμη στον $\mathrm{A}(\alpha)$ στα **10F**, **11F**.

9N. $\dfrac{\mathrm{C} \to \mathrm{A(x)}}{\mathrm{C} \to \forall\mathrm{x}\,\mathrm{A(x)}}$.

10N. $\forall\mathrm{x}\,\mathrm{A(x)} \to \mathrm{A(t)}$.

11N. $\mathrm{A(t)} \to \exists \mathrm{x}\, \mathrm{A(x)}$.

12N. $\dfrac{\mathrm{A(x)} \to \mathrm{C}}{\exists \mathrm{x}\, \mathrm{A(x)} \to \mathrm{C}}$.

9F. $\dfrac{\mathrm{C} \to \mathrm{A}(\alpha)}{\mathrm{C} \to \forall \alpha\, \mathrm{A}(\alpha)}$.

10F. $\forall \alpha\, \mathrm{A}(\alpha) \to \mathrm{A(u)}$.

11F. $\mathrm{A(u)} \to \exists \alpha\, \mathrm{A}(\alpha)$.

12F. $\dfrac{\mathrm{A}(\alpha) \to \mathrm{C}}{\exists \alpha\, \mathrm{A}(\alpha) \to \mathrm{C}}$.

B. Επιπρόσθετα αξιώματα για την Ενορατική Θεωρία Αριθμών.

Οι x, a, b, c είναι αριθμητικές μεταβλητές και ο A(x) τύπος.

13. $\mathrm{A(0)} \wedge \forall \mathrm{x}\, (\mathrm{A(x)} \to \mathrm{A(x')}) \to \mathrm{A(x)}$.

14. $\mathrm{a'} = \mathrm{b'} \to \mathrm{a} = \mathrm{b}$.

15. $\neg \mathrm{a'} = 0$.

16. $\mathrm{a} = \mathrm{b} \to (\mathrm{a} = \mathrm{c} \to \mathrm{b} = \mathrm{c})$.

17. $\mathrm{a} = \mathrm{b} \to \mathrm{a'} = \mathrm{b'}$.

18. $\mathrm{a} + 0 = \mathrm{a}$.

19. $\mathrm{a} + \mathrm{b'} = (\mathrm{a} + \mathrm{b})'$.

20. $\mathrm{a} \cdot 0 = 0$.

21. $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b'} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} + \mathrm{a}$.

C. Αξιώματα για συναρτήσεις.

Οι r(x), t είναι όροι, η x αριθμητική μεταβλητή αντικαταστάσιμη από τον t στον r(x), ο $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \alpha)$ τύπος με την x ελεύθερη για την α.

$^{\mathrm{x}}$0.1 $(\lambda \mathrm{x}\, \mathrm{r(x)})(\mathrm{t}) = \mathrm{r(t)}$.

$^{\mathrm{x}}$1.1 $\mathrm{a} = \mathrm{b} \to \alpha(\mathrm{a}) = \alpha(\mathrm{b})$.

$^{\mathrm{x}}$2.1 $\forall \mathrm{x}\, \exists \alpha\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \alpha) \to \exists \alpha\, \forall \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \lambda \mathrm{y}\, \alpha(2^{\mathrm{x}} \cdot 3^{\mathrm{y}}))$.

D. Αξιώματα για τις συναρτησιακές σταθερές.

Τα αξιώματα για τις συναρτησιακές σταθερές $\mathrm{f}_0, \ldots, \mathrm{f}_{26}$ δίνονται σε κατάλογο στο τέλος του Κεφαλαίου.
Είναι μίας από τις δύο ακόλουθες μορφές:

$$(1) \qquad \mathrm{f}_i(\mathrm{y}, \mathrm{a}, \alpha) = \mathrm{p}(\mathrm{y}, \mathrm{a}, \alpha),$$

$$(2) \quad \begin{cases} \mathrm{f}_i(0, \mathrm{a}, \alpha) = \mathrm{q}(\mathrm{a}, \alpha) \\ \mathrm{f}_i(\mathrm{y}', \mathrm{a}, \alpha) = \mathrm{r}\,(\mathrm{y}, \mathrm{f}_i(\mathrm{y}, \mathrm{a}, \alpha), \mathrm{a}, \alpha), \end{cases}$$

όπου y, a είναι αριθμητικές μεταβλητές, α συναρτησιακή μεταβλητή και οι $\mathrm{p}\,(\mathrm{y}, \mathrm{a}, \alpha)$, $\mathrm{q}\,(\mathrm{a}, \alpha)$, $\mathrm{r}\,(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{a}, \alpha)$ είναι όροι που περιέχουν ελεύθερες μεταβλητές μόνο μεταξύ αυτών που δηλώνονται, και μόνο συναρτησιακά σύμβολα μεταξύ των $\mathrm{f}_0, \ldots, \mathrm{f}_{i-1}$· οι $\mathrm{y}, \mathrm{a}, \alpha$ είναι ελεύθερες [1] για την z στον $\mathrm{r}\,(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{a}, \alpha)$.

E. Αξίωμα της Ανάστροφης Επαγωγής (Bar Induction).

$$\begin{aligned} \mathcal{BI}: \quad & \forall \mathrm{a}\,[\,\mathrm{Seq}(\mathrm{a}) \to \mathrm{R}(\mathrm{a}) \vee \neg \mathrm{R}(\mathrm{a})\,] \;\wedge\; \forall \alpha\, \exists \mathrm{x}\, \mathrm{R}(\overline{\alpha}(\mathrm{x})) \wedge \\ & \forall \mathrm{a}\,[\,\mathrm{Seq}(\mathrm{a}) \wedge \mathrm{R}(\mathrm{a}) \to \mathrm{A}(\mathrm{a})\,] \wedge \\ & \forall \mathrm{a}\,[\,\mathrm{Seq}(\mathrm{a}) \wedge \forall \mathrm{s}\, \mathrm{A}(\mathrm{a} * 2^{\mathrm{s}+1}) \to \mathrm{A}(\mathrm{a})\,] \\ & \to \mathrm{A}(1). \end{aligned}$$

Ολα τα προηγούμενα αποτελούν το **βασικό σύστημα** $\mathcal{B}$.

Τό **σύστημα** $\mathcal{I}$ προκύπτει με την προσθήκη του ακόλουθου σχήματος, που εκφράζει την *Αρχή (Συνέχειας) του Brouwer* (για συναρτήσεις):

$$\begin{aligned} \mathcal{BP}: \quad & \forall \alpha\, \exists \beta\, \mathrm{A}(\alpha,\beta) \to \exists \tau \forall \alpha\, [\,\forall \mathrm{t}\, \exists! \mathrm{y}\, \tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) > 0 \wedge \\ & \forall \beta\, [\,\forall \mathrm{t}\, \exists \mathrm{y}\, \tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) = \beta(\mathrm{t}) + 1 \to \mathrm{A}(\alpha,\beta)\,]\,]. \end{aligned}$$

[1] Χρησιμοποιούμε πολλές φορές για συντομία την έκφραση "ο t είναι ελεύθερος για την x" αντί για την "η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t".

2. Προτάσεις σχετικές με τα αξιώματα για συναρτήσεις

2.1. Ορισμος. Η ισότητα για συναρτητές ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{u} = \mathrm{v} \;\equiv\; \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{u}(\mathrm{x}) = \mathrm{v}(\mathrm{x})),$$

όπου η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στους u, v.

2.2. Προταση. Για x αριθμητική μεταβλητή, r(x), s(x) όρους και b αριθμητική μεταβλητή ελεύθερη για την x στον r(x) και η οποία δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον r(x) (εκτός αν $\mathrm{b} \equiv \mathrm{x}$), α συναρτησιακή μεταβλητή, έχουμε τα εξής:

(a) $\mathrm{r}(\mathrm{x}) = \mathrm{s}(\mathrm{x}) \vdash^{\mathrm{x}} \lambda \mathrm{x}\,\mathrm{r}(\mathrm{x}) = \lambda \mathrm{x}\,\mathrm{s}(\mathrm{x})$,

(b) $\vdash \lambda \mathrm{x}\,\mathrm{r}(\mathrm{x}) = \lambda \mathrm{b}\,\mathrm{r}(\mathrm{b})$.

Σημειωση. Οταν σε μία τυπική απόδειξη $\mathrm{A} \vdash \mathrm{B}$ υπάρχουν μεταβλητές δηλωμένες στο $\vdash$, όπως π.χ. $\vdash^{\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_n \alpha_1 \ldots \alpha_m}$, σημαίνει ότι σε κάποιο βήμα της απόδειξης αυτές δεσμεύονται, με χρήση κάποιων από τα **9N**, **9F**, **12N**, **12F**.

2.3. Λημμα. (Θεώρημα Αντικατάστασης). Εστω $\mathrm{E_R}$ όρος ή συναρτητής [τύπος] που περιέχει μία συγκεκριμένη εμφάνιση ενός όρου (συναρτητή) R, όχι σαν μεταβλητή κάποιου λ [λ ή ποσοδείκτη], $\mathrm{E_S}$ το αποτέλεσμα της αντικατάστασης αυτής της εμφάνισης από έναν όρο (συναρτητή) S, και $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$, $[\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ οι ελεύθερες μεταβλητές του R ή του S που δεσμεύονται από κάποιο λ [λ ή ποσοδείκτη], στο πεδίο του οποίου βρίσκεται ο R. Τότε:

$$\mathrm{R} = \mathrm{S} \vdash^{\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_n} \mathrm{E_R} = \mathrm{E_S} \qquad [\,\mathrm{R} = \mathrm{S} \vdash^{\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_n \alpha_1 \ldots \alpha_m} \mathrm{E_R} \leftrightarrow \mathrm{E_S}\,].$$

Παρατηρηση. Η απόδειξη για τους τύπους θα μπορεί να γίνει πλήρως, αφού αναπτύξουμε τη θεωρία *και* για p-όρους και p-συναρτητές.

Αποδειξη. Θα δείξουμε το συμπέρασμα για $\mathrm{E_R}$ όρο ή συναρτητή, με επαγωγή στο *βάθος d* της εμφάνισης του R στον $\mathrm{E_R}$. Ορίζουμε το *βάθος* μίας εμφάνισης ενός R σε κάποιον $\mathrm{E_R}$ ως εξής:
(στη συνέχεια, λέγοντας R, θα εννοούμε μία συγκεκριμένη εμφάνιση

του R στον $\mathrm{E_R}$).

Περ.1 $\mathrm{E_R} \equiv \mathrm{R}:\ d = 0$ και

$d = r + 1$ στις υπόλοιπες περιπτώσεις:

Περ.2 $\mathrm{E_R} \equiv \mathrm{u_R(t)}$, όπου ο R έχει $d = r$ στον $\mathrm{u_R}$.

Περ.3 $\mathrm{E_R} \equiv \mathrm{f}_i(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_{k_i}, \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{l_i})$, όπου ο R έχει $d = r$ σε κάποιον από τους όρους $\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_{k_i}$ ή τους συναρτητές $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{l_i}$.

Περ.4 $\mathrm{E_R} \equiv \alpha(\mathrm{t_R})$, όπου ο R έχει $d = r$ στον $\mathrm{t_R}$.

Περ.5 $\mathrm{E_R} \equiv (\lambda \mathrm{x}\, \mathrm{s(x)})(\mathrm{t_R})$, όπου r είναι το maximum των d των ελεύθερων εμφανίσεων της x στον s(x) και του R στον $\mathrm{t_R}$.

Περ.6 $\mathrm{E_R} \equiv \lambda \mathrm{x}\, \mathrm{s_R}$, όπου ο R έχει $d = r$ στον $\mathrm{s_R}$.

Εχουμε τώρα τα εξής:

Περ.1: Προφανής.

Περ.2: Από την επαγωγική υπόθεση, $\mathrm{u_R} = \mathrm{u_S}$, δηλαδή

$$\forall \mathrm{x}\, (\mathrm{u_R(x)} = \mathrm{u_S(x)}),$$

όπου x όχι ελεύθερη στους $\mathrm{u_R}$, $\mathrm{u_S}$,
οπότε εξειδικεύοντας,

$$\mathrm{u_R(t)} = \mathrm{u_S(t)},$$

Περ.3: Εστω ότι ο R εμφανίζεται στον $\mathrm{u_1} \equiv \mathrm{u_{1R}}$. Τότε, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι

$$\mathrm{u_{1R}} = \mathrm{u_{1S}}$$

και, από τα αξιώματα για την ισότητα,

$$\mathrm{E_R} = \mathrm{E_S}.$$

Περ.4: Από το αξίωμα $^{\mathrm{x}}\mathbf{1.1}$.

Περ.5: Εστω ότι ο s(x) περιέχει n ελεύθερες εμφανίσεις της x. Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση για νέες μεταβλητές a, b και τον s(a) n διαδοχικές φορές, έχουμε

$$\mathrm{a} = \mathrm{b} \ \vdash\ \mathrm{s(a)} = \mathrm{s(b)},$$

αντικαθιστώντας μία εμφάνιση της a στον s(a) κάθε φορά.

Επίσης, από το $^{\mathrm{x}}\mathbf{0.1}$ έχουμε

$$\begin{array}{ll} (\lambda x\, s(x))(a) = s(a) \;\; \text{και} \;\; (\lambda x\, s(x))(b) = s(b), & \text{οπότε} \\ a = b \vdash (\lambda x\, s(x))(a) = (\lambda x\, s(x))(b), & \text{οπότε} \\ \vdash \forall a \forall b\, (a = b \to (\lambda x\, s(x))(a) = (\lambda x\, s(x))(b)), & \text{άρα} \\ \vdash\; t_R = t_S \to (\lambda x\, s(x))(t_R) = \lambda x\, s(x))(t_S), & \end{array}$$

αφού οι a, b είναι νέες για τον s(x).

Από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ακόμη ότι

$$R = S\; \vdash^{x_1 \ldots x_n} t_R = t_S,$$

οπότε

$$R = S \vdash^{x_1 \ldots x_n} E_R = E_S.$$

Περ.6: Από τα αξιώματα ισότητας και το ^{x}**0.1**, έχουμε:

$$\begin{array}{ll} r(x) = s(x) \vdash (\lambda x\, r(x))(x) = (\lambda x\, s(x))(x), & \text{άρα} \\ r(x) = s(x) \vdash^{x} \forall x\, [\, (\lambda x\, r(x))(x) = (\lambda x\, s(x))(x)\,], & \text{δηλαδή} \\ r(x) = s(x) \vdash^{x} \lambda x\, r(x) = \lambda x\, s(x), & \end{array}$$

από τον ορισμό της ισότητας για συναρτητές. $\dashv$

Το αξίωμα αριθμήσιμης επιλογής.

Το ^{x}**2.1** αποτελεί ένα σχήμα αριθμήσιμης επιλογής, ενορατικά αποδεκτό. Το ασθενέστερο σχήμα που αποδεικνύουμε στη συνέχεια, αρκεί για την ανάπτυξη, ουσιαστικά, της θεωρίας που μας ενδιαφέρει.

2.4 Λημμα. $\vdash \exists x\, A(x) \leftrightarrow \exists \alpha\, A(\alpha(0))$,

όπου α συναρτησιακή μεταβλητή ελεύθερη για την x στον A(x) και η οποία δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον A(x).

Αποδειξη. Το $\alpha(0)$ είναι όρος, άρα το

$$A(\alpha(0)) \to \exists x\, A(x)$$

είναι αξίωμα. Από αυτό και τον κανόνα **12F**, έχουμε το

$$\exists \alpha\, A(\alpha(0)) \to \exists x\, A(x).$$

Αντίστροφα, υποθέτοντας το $A(x)$, αφού $\vdash (\lambda t\, x)(0) = x$, παίρνουμε από το θεώρημα αντικατάστασης το

$$A((\lambda t\, x)(0)).$$

Από αυτό και το **11F** έχουμε το

$$\exists\alpha\, \mathrm{A}(\alpha(0)),$$

οπότε

$$\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \exists\alpha\, \mathrm{A}(\alpha(0))$$

και, από το **12N**, το

$$\exists \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \exists\alpha\, \mathrm{A}(\alpha(0)). \qquad \dashv$$

2.5 Πρόταση. $\vdash \forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists\alpha\, \forall \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x},\alpha(\mathrm{x}))$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε το $\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$. Από το προηγούμενο Λήμμα και το θεώρημα αντικατάστασης, έχουμε το

$$\forall \mathrm{x}\, \exists\alpha\, \mathrm{A}(\mathrm{x},\alpha(0)),$$

οπότε, από το $^{\mathrm{x}}$**2.1**, έχουμε το

$$\text{(a)} \quad \exists\alpha\, \forall \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, (\lambda \mathrm{y}\, \alpha(2^{\mathrm{x}} \cdot 3^{\mathrm{y}}))(0)).$$

Υποθέτουμε το

$$\text{(b)} \quad \forall \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, (\lambda \mathrm{y}\, \alpha(2^{\mathrm{x}} \cdot 3^{\mathrm{y}}))(0)).$$

Από το $^{\mathrm{x}}$**0.1** και το θεώρημα αντικατάστασης, έχουμε τώρα το

$$\forall \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, (\lambda \mathrm{x}\, (\lambda \mathrm{y}\, \alpha(2^{\mathrm{x}} \cdot 3^{\mathrm{y}}))(0))(\mathrm{x})),$$

οπότε από το **11F** έχουμε το

$$\exists\alpha\, \forall \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x},\alpha(\mathrm{x})).$$

Ετσι, από το (b) με το **12F** και, στη συνέχεια, από το (a) με την αρχική υπόθεση, έχουμε τελικά το

$$\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists\alpha\, \forall \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x},\alpha(\mathrm{x})). \qquad \dashv$$

Παρατηρήσεις. 1) Από το σχήμα της προηγούμενης Πρότασης συνεπάγεται (εύκολα) το ακόλουθο σχήμα *αριθμήσιμης συμπερίληψης*

$$\forall \mathrm{x}\, \exists ! \mathrm{y}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists\alpha\, \forall \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x},\alpha(\mathrm{x})),$$

που αρκεί για όλη σχεδόν την ανάπτυξη της θεωρίας που παρουσιάζουμε. Σημειώνουμε εδώ ότι, ενώ στο κλασικό πλαίσιο το $\forall \mathrm{x}\, \exists ! \mathrm{y}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ είναι τετριμμένη συνέπεια του $\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ χάρη στην *αρχή του ελαχίστου* *για τους φυσικούς αριθμούς*, δεν συμβαίνει το ίδιο στα κατασκευαστικά πλαίσια, παρά μόνο στην περίπτωση που το A(x,y) εκφράζει ένα αποκρίσιμο κατηγόρημα.

(Υπενθύμιση. $\forall \mathrm{x}\, \exists! \mathrm{y}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \equiv \forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, [\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \wedge \forall \mathrm{z}\, (\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \rightarrow \mathrm{y} = \mathrm{z})\,]$).

2) Επίσης, ενώ και πάλι στο κλασικό πλαίσιο το σχήμα της προηγούμενης Πρότασης είναι σχεδόν τετριμμένο εξ αιτίας της *αρχής του ελαχίστου για τους φυσικούς αριθμούς*, στο ενορατικό (κατασκευαστικό) πλαίσιο, αν το A(x,y) δεν εκφράζει κάποιο αποκρίσιμο κατηγόρημα, τότε πράγματι γίνεται κάποια "επιλογή".

λ-κανονική μορφή.

Η αντικατάσταση σ' έναν p-όρο ή p-συναρτητή ή τύπο ενός τμήματός του της μορφής $(\lambda \mathrm{x}\, \mathrm{r}(\mathrm{x}))(\mathrm{t})$ από τον r(t) σύμφωνα με το $^{\mathbf{x}}\mathbf{0.1}$, μία *β-αναγωγή*, οδηγεί σε (τυπικά) ίσους p-όρους ή p-συναρτητές και (τυπικά) ισοδύναμους τύπους. Στο σύστημά μας, η διάκριση των αντικειμένων σε (p-)όρους και (p-)συναρτητές, δηλαδή σε δύο είδη (τύπους, types), εξασφαλίζει ότι κάθε τέτοια ακολουθία αναγωγών είναι πεπερασμένη, πράγμα που δεν συμβαίνει γενικά σε συστήματα χωρίς τυποποίηση (όπως στον καθαρό λ-λογισμό).
Μία έκφραση είναι σε *λ-κανονική μορφή*, αν δεν περιέχει τμήματα της μορφής $(\lambda \mathrm{x}\, \mathrm{r}(\mathrm{x}))(\mathrm{t})$. Σύμφωνα με το θεώρημα Church-Rosser, η κανονική μορφή είναι μοναδική, με την έννοια ότι είναι ανά δύο "congruent". Στο ακόλουθο Λήμμα διατυπώνεται το σχετικό συμπέρασμα, που προκύπτει με (διπλή) επαγωγή.

13. Λήμμα. Κάθε p-όρος, κάθε p-συναρτητής και κάθε τύπος έχει λ-κανονική μορφή.

3. Η Αρχή της Ανάστροφης Επαγωγής

Ιστοί και Ακολουθίες Επιλογών.

Στην Ενορατική Θεωρία Συνόλων ή Ανάλυση του Brouwer, κεντρικό ρόλο έχουν, όπως αναφέρθηκε στην Εισαγωγή, οι έννοιες του *spread* και της *ακολουθίας επιλογών* (choice sequence) . Αποδίδουμε στα ελληνικά το *spread* με τον όρο *ιστός*[2].

Ενας *ιστός* παράγεται:

(i) επιλέγοντας φυσικούς αριθμούς διαδοχικά, ή ελεύθερα ή σύμφωνα με κάποιο *νόμο επιλογής*, ο οποίος, όταν δίνονται οι προηγούμενες επιλογές (αν υπάρχουν) και κάποιος αριθμός, μας καθορίζει αν αυτός ο αριθμός μπορεί να επιλεγεί σ' αυτό το βήμα ή όχι, και

(ii) συσχετίζοντας, σύμφωνα με κάποιο *νόμο συσχέτισης*, μετά από κάθε επιλογή, ένα αντικείμενο (που εξαρτάται από τις προηγούμενες επιλογές (αν υπάρχουν) και την τελευταία επιλογή) από κάποιο σταθερό αριθμήσιμο σύνολο, με αυτή την επιλογή.

Το (i) καθορίζει πότε θα σταματήσει (αν ποτέ γίνει κάτι τέτοιο) η διαδικασία αυτή.

Αν μία ακολουθία επιλογών τερματίζει, τότε η πεπερασμένη ακολουθία των αντικειμένων που συσχετίστηκαν με τις επιλογές αυτές, είναι ένα "στοιχείο" του ιστού. Αν η ακολουθία συνεχίζεται επ' άπειρον, το αντίστοιχο "στοιχείο" του ιστού είναι η άπειρη ακολουθία των συσχετισμένων αντικειμένων, που παραμένει πάντοτε ημιτελές. Ο ιστός *δεν* είναι η ολότητα των "στοιχείων" που παράγονται μ' αυτό τον τρόπο, αλλά *το ζεύγος των νόμων επιλογής και συσχέτισης*, που καθορίζουν τη διαδικασία γένεσης των "στοιχείων" του.

Ο καθολικός ιστός.

Ο ιστός που προκύπτει από το νόμο επιλογής κάποιου ιστού και τον *τετριμμένο νόμο συσχέτισης*, δηλαδή αυτόν, που με κάθε επιλογή συσχετίζει τον ίδιο τον αριθμό που έχει επιλεγεί, αντί για το νόμο συσχέτισης του αρχικού ιστού, αποτελεί έναν ιστό που απαρτίζεται από τις ίδιες τις ακολουθίες επιλογών.

Ο *καθολικός ιστός* (universal spread) είναι αυτός που προκύπτει από το νόμο επιλογής, ο οποίος επιτρέπει *κάθε* επιλογή (και τον τετριμμένο νόμο συσχέτισης, όπως πριν), έχει δηλαδή σαν "στοιχεία" *όλες τις ακολουθίες φυσικών αριθμών.*

[2] Ο όρος *ιστός* (αρχαία ελληνική λέξη (και) για τον αργαλειό) προέρχεται από μία αναλογία που ο Wim Veldman χρησιμοποιεί σ' ένα αδημοσίευτο άρθρο του, για να περιγράψει το *universal spread*, τον *καθολικό ιστό*, που θα ορίσουμε πιο κάτω.

Για την περιγραφή και το χειρισμό των ακολουθιών επιλογών, θα χρησιμοποιήσουμε τους *αριθμούς ακολουθιών* (sequence numbers) που κωδικοποιούν αρχικά τμήματα ακολουθιών φυσικών αριθμών ως εξής: οι x πρώτες τιμές μίας ακολουθίας α δίνονται από το

$$\overline{\alpha}(x) = p_0^{\alpha(0)+1} \cdot \ldots \cdot p_{x-1}^{\alpha(x-1)+1},$$

όπου $p_0, p_1, \ldots$ οι πρώτοι αριθμοί. Ετσι, έχουμε μία 1-1 απεικόνιση των αρχικών τμημάτων ακολουθιών επιλογών επί του συνόλου των αριθμών a, για τους οποίους ισχύει το κατηγόρημα $Seq(a)$ (σε αντιστοιχία με το τυπικό κατηγόρημα Seq(a), $Seq(a) \Leftrightarrow a > 0 \wedge \forall i_{i<lh(a)}((a)_i > 0)$).

Οι ιδιότητες των ακολουθιών επιλογών που ενδιαφέρουν στα ενορατικά πλαίσια, είναι εκείνες που διαπιστώνονται με βάση κάποιο αρχικό τμήμα της κάθε ακολουθίας επιλογών, είναι δηλαδή της μορφής $\exists x R(\overline{\alpha}(x))$, όπου $R(a)$ είναι αριθμητικό κατηγόρημα, αποκρίσιμο τουλάχιστον για τους αριθμούς ακολουθιών.

Ορίζουμε τις ακόλουθες έννοιες, *σχετικά με ένα αριθμητικό, αποκρίσιμο για τους αριθμούς* a *ώστε* $Seq(a)$*, κατηγόρημα* $R(a)$:

3.1. Ορισμοι. Ενας αριθμός ακολουθίας $\overline{\alpha}(t)$ (ή το αντίστοιχο αρχικό τμήμα μιας ακολουθίας επιλογών) είναι:

(*a*) *εξασφαλισμένος* ανν $\exists x_{x \le t} R(\overline{\alpha}(x))$,

(*b*) *ήδη εξασφαλισμένος* ανν $\exists x_{x<t} R(\overline{\alpha}(x))$,

(*c*) *μόλις εξασφαλισμένος* ανν $\forall x_{x<t} \neg R(\overline{\alpha}(x)) \wedge R(\overline{\alpha}(t))$,

(*d*) *εξασφαλίσιμος* ανν $\forall \beta\, [\overline{\beta}(t) = \overline{\alpha}(t) \to \exists x R(\overline{\beta}(x))]$.

Η Αρχή της Ανάστροφης Επαγωγής.

Για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα ενορατικά μαθηματικά μία πρόταση της μορφής

$$\forall \alpha \exists x R(\overline{\alpha}(x)),$$

δηλαδή μία υπόθεση "εξασφαλισιμότητας", ποια πρέπει να είναι η ερμηνεία του $\forall \alpha$;

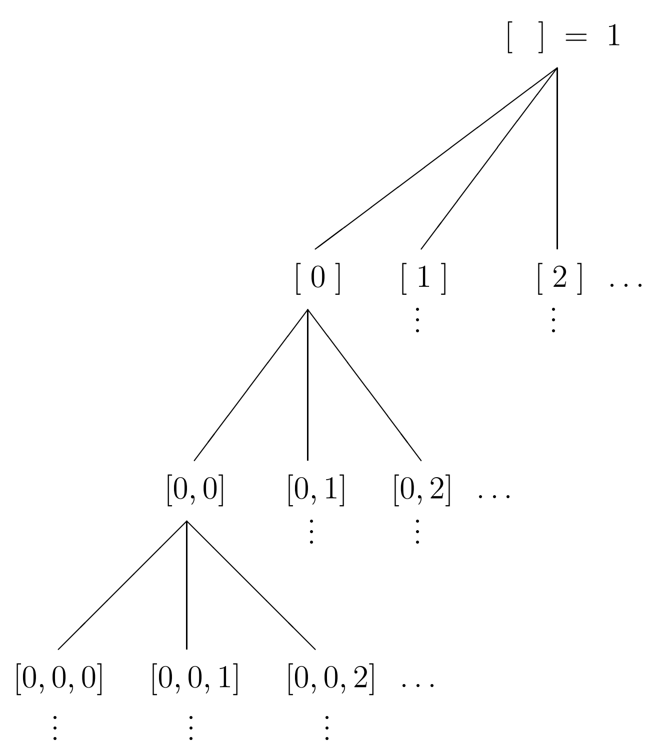
Εφόσον δεν μπορούμε να διαθέτουμε ολόκληρη μία συνάρτηση α (αφού αυτή είναι ένα *άπειρο αντικείμενο*), μία λύση είναι να περιοριστούμε σε συναρτήσεις που ακολουθούν ένα νόμο, όπως οι πρωτογενείς ή οι γενικές αναδρομικές συναρτήσεις. Ομως κάτι τέτοιο είναι αφενός περιοριστικό, αφετέρου έχει σαν συνέπεια την κατάρρευση του σημαντικού για την Ενορατική Ανάλυση *Θεωρήματος της Βεντάλιας*, που θα δούμε πιο κάτω.

Ο Brouwer βρήκε έναν τρόπο να χρησιμοποιεί μία τέτοια υπόθεση "εξασφαλισιμότητας", θεωρώντας σαν ερμηνεία του $\forall\alpha$ *όλες* τις ακολουθίες επιλογών, μέσα από μία νέα μορφή επαγωγής, την *ανάστροφη επαγωγή*.

Κοιτάζοντας "ανάποδα", ο Brouwer είδε ότι οι αριθμοί ακολουθιών που είναι εξασφαλίσιμοι αλλά όχι ήδη εξασφαλισμένοι, είναι ακριβώς αυτοί που προκύπτουν από τον ακόλουθο επαγωγικό ορισμό:

Στην κλάση που δημιουργούμε, ανήκουν όλοι οι αριθμοί ακολουθιών a για τους οποίους ισχύει το $R(a)$ και, έπειτα, κάθε αριθμός ακολουθίας a για τον οποίο ξέρουμε ότι ανήκει ήδη το $a * 2^{s+1}$, για κάθε s.

Ας σκεφτούμε ότι έχουμε το δέντρο όλων των ακολουθιών επιλογών, με τους αντίστοιχους αριθμούς ακολουθιών (που κωδικοποιούν τα αρχικά τους τμήματα) σε κάθε κόμβο:



Η υπόθεση $\forall\alpha\exists x R(\overline{\alpha}(x))$ μας λέει ότι για κάθε κλαδί υπάρχει κάποιο x ώστε να ισχύει το $R(\overline{\alpha}(x))$. Η ιδέα του Brouwer είναι ότι, ξεκινώντας από τους πρώτους (ως προς την κατεύθυνση με αρχή τη ρίζα) κόμβους των κλαδιών για τους οποίους ισχύει το R, και πηγαίνοντας προς τη ρίζα του δέντρου, θα συναντήσουμε ακριβώς τους ίδιους κόμβους μ' αυτούς που θα συναντήσουμε κινούμενοι αντίθετα.

Αυτό δεν είναι κάτι τετριμμένο. Αρκεί γι' αυτό να σκεφτούμε ότι το σύνολο των "πρώτων" κόμβων για τους οποίους ισχύει το R στον καθολικό ιστό, μπορεί να είναι άπειρο, και μάλιστα "μακρύ" (με την έννοια της διάταξης) όσο οποιοσδήποτε αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Για τον Brouwer, η ισοδυναμία των δύο αυτών ορισμών του συνόλου των εξασφαλίσιμων αλλά όχι ήδη εξασφαλισμένων κόμβων (αριθμών ακολουθιών) προέκυπτε με ενορατικούς συλλογισμούς.

Το τυπικό σχήμα $\mathcal{BI}$.

Ο Kleene εισάγει ένα αξίωμα-σχήμα με τη μορφή μίας αρχής επαγωγής, σύμφωνα με την οποία, αν:

(i) η $A(a)$ είναι ιδιότητα που την έχουν οι αριθμοί ακολουθιών, οι οποίοι έχουν την ιδιότητα $R(a)$ και

(ii) η $A(a)$ διαδίδεται επαγωγικά (κατά τον ορισμό της σελίδας 25),

τότε την ιδιότητα αυτή τη διαθέτουν όλοι οι εξασφαλίσιμοι άλλα όχι ήδη εξασφαλισμένοι (ως προς το κατηγόρημα $R(a)$) αριθμοί ακολουθιών.

Η αρχή αυτή διατυπώνεται (τυπικά) ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{BI}: \quad & \forall \mathrm{a}\,[\,\mathrm{Seq(a)} \rightarrow \mathrm{R(a)} \vee \neg\mathrm{R(a)}\,] \;\wedge\; \forall\alpha\,\exists \mathrm{x}\,\mathrm{R}(\overline{\alpha}(\mathrm{x})) \wedge \\
& \forall \mathrm{a}\,[\,\mathrm{Seq(a)} \wedge \mathrm{R(a)} \rightarrow \mathrm{A(a)}\,] \wedge \\
& \forall \mathrm{a}\,[\,\mathrm{Seq(a)} \wedge \forall \mathrm{s}\,\mathrm{A}(\mathrm{a} * 2^{\mathrm{s}+1}) \rightarrow \mathrm{A(a)}\,] \\
& \rightarrow \mathrm{A}(1).
\end{aligned}
$$

Η μορφή αυτή είναι απλουστευμένη και δίνει το συμπέρασμα για τον αριθμό ακολουθίας 1. Αποδεικνύεται κλασικά, με χρήση του αξιώματος της επαγωγής (της αριθμητικής).

Παρατηρηση. Στο $\mathcal{BI}$ είναι απαραίτητο το $\mathrm{R(a)} \vee \neg\mathrm{R(a)}$: αν παραλείψουμε το $\forall \mathrm{a}\,[\,\mathrm{Seq(a)} \rightarrow \mathrm{R(a)} \vee \neg\mathrm{R(a)}\,]$, τότε αυτό που απομένει αποδεικνύεται κλασικά, και στο σύστημα $\mathcal{I}$ αποδεικνύεται η άρνηση της καθολικής κλειστότητας ενός κατάλληλου στιγμιοτύπου. Αυτό δείχνει ότι στο $\mathcal{I}$ υπάρχει κάποιο αξίωμα που δεν ισχύει κλασικά, και αυτό είναι η *αρχή συνέχειας του Brouwer, $\mathcal{BP}$.*

Τυποποίηση της έννοιας του ιστού.

Ενας ιστός μπορεί να χαρακτηριστεί μέσω μίας συνάρτησης σ, από τη σχέση

$$\sigma(a) = 0,$$

όπου a είναι αριθμός ακολουθίας, δηλαδή η σ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου των κωδικών των αρχικών τμημάτων των ακολουθιών επιλογών του εν λόγω ιστού.

Αν δεχτούμε τη σύμβαση ότι όλες οι ακολουθίες επιλογών ενός ιστού είναι άπειρες (αν δεν είναι, τότε μπορούμε να τις επεκτείνουμε π.χ. με το 0, 0,...) και ότι αρχίζουν όλες με το ίδιο στοιχείο (οπότε αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι συσχετίζεται με την *κενή* ακολουθία επιλογών), τότε ο ακόλουθος τύπος εκφράζει την έννοια του ιστού στο σύστημά μας:

$$\begin{aligned}\mathrm{Spr}(\sigma) \equiv \quad & \forall \mathrm{a}\,[\,\sigma(\mathrm{a}) = 0 \to \mathrm{Seq}(\mathrm{a})\,] \wedge \\ & \forall \mathrm{a}\,[\,\sigma(\mathrm{a}) = 0 \to \exists \mathrm{s}\,\sigma(\mathrm{a} * 2^{\mathrm{s}+1}) = 0\,] \wedge \\ & \forall \mathrm{a}\,[\,\mathrm{Seq}(\mathrm{a}) \wedge \sigma(\mathrm{a}) > 0 \to \forall \mathrm{s}\,\sigma(\mathrm{a} * 2^{\mathrm{s}+1}) > 0\,].\end{aligned}$$

Τώρα η $\mathcal{BI}$ μπορεί να διατυπωθεί ανάλογα για τυχόντα ιστό και (η νέα γενικότερη διατύπωση) να αποδειχθεί από την $\mathcal{BI}$. Η απόδειξη βασίζεται στην *κατασκευή μίας απεικόνισης του καθολικού ιστού σ' έναν οποιοδήποτε ιστό*, πράγμα που έχει γενικότερα ενδιαφέρον.

Η απεικόνιση αυτή είναι

(a) ταυτοτική στις ακολουθίες του (τυχόντος) ιστού, ενώ,

(b) γι' αυτές που δεν ανήκουν σ' αυτόν, κάνει το εξής:
  · το αρχικό τους τμήμα, που ανήκει στον ιστό (αυτό είναι τουλάχιστον η κενή ακολουθία), το απεικονίζει στον εαυτό του και

  · στη συνέχεια, διαλέγει μία από τις επεκτάσεις της ακολουθίας που ανήκουν στον ιστό και που πάντα υπάρχουν, όπως φαίνεται από τον δεύτερο όρο της σύζευξης στον ορισμό του $\mathrm{Spr}(\sigma)$.

4. Το Θεώρημα της Βεντάλιας

4.1. Ορισμος. *Ιστός πεπερασμένης διακλάδωσης (finitary spread, fan)* [θα γράφουμε *πδ-ιστός*] είναι ένας ιστός, στον οποίο κάθε επιλογή γίνεται από ένα πεπερασμένο (πιθανόν διαφορετικό) σύνολο κάθε φορά. Παράδειγμα, ένας ιστός F, για τον οποίο υπάρχει μία συνάρτηση β, η οποία περιορίζει τις επιλογές, δηλαδή για κάθε ακολουθία επιλογών α του F και κάθε t, ισχύει $\forall t\, \alpha(t) \leq \beta(\overline{\alpha}(t))$.

Οπως και για τους ιστούς γενικά, έτσι και για τους πδ-ιστούς, οι υποκείμενες ακολουθίες επιλογών αποτελούν, με τον τετριμμένο νόμο συσχέτισης $\rho(\overline{\alpha}(x')) = \alpha(x)$, πδ-ιστούς και οι ίδιες.

Το θεώρημα της Βεντάλιας είναι (στην εκδοχή του που παρουσιάζουμε εδώ) ένα ενορατικό ανάλογο (αντιστροφοαντίθετο) του *Λήμματος του König*, το οποίο μας λέει ότι κάθε άπειρο δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης έχει (τουλάχιστον) ένα άπειρο κλαδί. Δίνουμε πρώτα τη διαισθητική διατύπωση και απόδειξη.

4.2. Θεωρημα (της Βενταλιας). Εστω ότι F είναι πδ-ιστός, που καθορίζεται από μία συνάρτηση β, ώστε για κάθε ακολουθία επιλογών α του F να ισχύει

$$\forall t\, \alpha(t) \leq \beta(\overline{\alpha}(t)).$$

Αν για κάποιο αποκρίσιμο (στους αριθμούς ακολουθιών) αριθμητικό κατηγόρημα $R(a)$ έχουμε, για κάθε α στον F, ότι $\exists x R(\overline{\alpha}(x))$, τότε υπάρχει αριθμός z, που είναι άνω φράγμα των ελάχιστων x, για τα οποία ισχύει το $R(\overline{\alpha}(x))$.

Αποδειξη. Εστω a αριθμός ακολουθίας που ανήκει στον F, δηλαδή που παριστάνει αρχικό τμήμα ακολουθίας του F.

Σαν *πδ-υποϊστό (subfan) που πηγάζει από το a*, F_a, ορίζουμε τον πδ-ιστό που αποτελείται από τις ακολουθίες επιλογών α, που επεκτείνουν το a μέσα στο F, δηλαδή τις ακολουθίες α ώστε $a * \overline{\alpha}(x)$ να είναι κωδικός αρχικού τμήματος ακολουθίας του F.

Υποθέτουμε ότι για κάθε α στον F ισχύει

$$(*) \quad \exists x R(\overline{\alpha}(x)).$$

Παρατηρούμε ότι, αν ένας αριθμός ακολουθίας της μορφής $a * 2^{s+1}$ ανήκει στον F, τότε $a = \overline{\alpha}(x)$, για κάποια α, x με α στο F και

$s = \alpha(x)$, οπότε

$$(**) \quad s \leq \beta(\overline{\alpha}(x)) = \beta(a).$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαγωγής που αντιστοιχεί στον επαγωγικό ορισμό του συνόλου

$$S = \{ \text{ οι εξασφαλίσιμοι-όχι ήδη εξασφαλισμένοι ως προς το } R \text{ αριθμοί ακολουθιών του } F\}$$

μαζί με την $(**)$, για να δείξουμε ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει για κάθε πδ-υποϊστό F_a του F που πηγάζει από κάποιο στοιχείο $a = \overline{\delta}(y)$ του S, για το κατηγόρημα $\lambda w\, R(a * w)$.

Βαση. Για τον πδ-υποϊστό F_a με a από το S, ώστε να ισχύει το $R(a)$, παίρνουμε για z το 0.

Επαγωγικο Βημα. Εστω a που ανήκει στο S επειδή οι αριθμοί $a * 2^{s+1}$, για κάθε $s \leq \beta(a)$ ανήκουν στο S. Η επαγωγική υπόθεση είναι ότι, για κάθε s, για τον πδ-υποϊστό $F_{a*2^{s+1}}$ υπάρχει ένα άνω φράγμα z_s. Το

$$z = max(z_0, \ldots, z_{\beta(a)}) + 1$$

είναι ένα άνω φράγμα για το F_a. Εδώ τελειώνει η επαγωγή, και έχουμε το συμπέρασμα για όλους τους πδ- υποϊστούς F_a του F, με a στο S.

Η υπόθεση $(*)$ εξασφαλίζει ότι το 1 ανήκει στο S, άρα για τον F_1, δηλαδή τον F, και το κατηγόρημα $\lambda w\, R(1 * w)$, δηλαδή το $R(a)$, έχουμε το συμπέρασμα. ⊣

Θα παρουσιάσουμε τώρα μία τυπική διατύπωση και απόδειξη του Θεωρήματος της Βεντάλιας.

4.3. Λημμα. $\forall \mathrm{s}\, \forall \mathrm{z}\, \forall \mathrm{w}\, [\, \mathrm{B}(\mathrm{s},\mathrm{z}) \wedge \mathrm{w} \geq \mathrm{z} \rightarrow \mathrm{B}(\mathrm{s},\mathrm{w})\,] \vdash \forall \mathrm{s}_{\mathrm{s}\leq \mathrm{b}} \exists \mathrm{z}\, \mathrm{B}(\mathrm{s},\mathrm{z}) \rightarrow \exists \mathrm{z}\, \forall \mathrm{s}_{\mathrm{s}\leq \mathrm{b}} \mathrm{B}(\mathrm{s},\mathrm{z}),$

όπου b, s, z, w διαφορετικές μεταξύ τους αριθμητικές μεταβλητές, B(s,z) τύπος που δεν περιέχει ελεύθερες τις b και w, στον οποίο η z είναι αντικαταστάσιμη από την w.

Αποδειξη. Εφαρμόζουμε το αξίωμα της επαγωγής (της αριθμητικής) για το b. ⊣

4.4. Θεωρημα. $\vdash\ \forall \mathrm{a}\,[\,\mathrm{Seq(a)} \to \mathrm{R(a)} \lor \neg\mathrm{R(a)}\,] \land \forall \alpha_{\mathrm{B}(\alpha)} \exists \mathrm{x}\, \mathrm{R}(\overline{\alpha}(\mathrm{x}))$
$\to \exists \mathrm{z}\, \forall \alpha_{\mathrm{B}(\alpha)} \exists \mathrm{x}_{\mathrm{x} \leq \mathrm{z}} \mathrm{R}(\overline{\alpha}(\mathrm{x})),$
όπου $\mathrm{B}(\alpha) \equiv \forall \mathrm{t}\, \alpha(\mathrm{t}) \leq \beta(\overline{\alpha}(\mathrm{t})).$

Αποδειξη. I. Εισάγουμε μία συναρτησιακή μεταβλητή σ για να εκφράσουμε τον πδ-ιστό που προκύπτει από τη συνθήκη

$$\mathrm{B}(\alpha) \equiv \forall \mathrm{t}\, \alpha(\mathrm{t}) \leq \beta(\overline{\alpha}(\mathrm{t})).$$

Θέλουμε να ισχύει το :

$$\text{(a)}\ \ \forall \mathrm{a}\,[\,\sigma(\mathrm{a}) = 0 \leftrightarrow \mathrm{Seq(a)} \land \forall \mathrm{t}_{\mathrm{t}<\mathrm{lh(a)}} (\mathrm{a})_{\mathrm{t}} \dot{-} 1 \leq \beta \left(\prod_{\mathrm{i}<\mathrm{t}} \mathrm{p}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{a})_{\mathrm{i}}} \right)].$$

Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της ισοδυναμίας, κατά τα γνωστά, εφόσον αποτελείται από ατομικούς τύπους και φραγμένους (από πρωτογενείς αναδρομικές συναρτήσεις) ποσοδείκτες, είναι ισοδύναμο με έναν standard τύπο[3] , δηλαδή με έναν τύπο της μορφής $\mathrm{p(a)}=0$, όπου $\mathrm{p(a)}$ είναι όρος με $\vdash \mathrm{p(a)} \leq 1$.
Υποθέτουμε το $\forall \mathrm{a}\,[\,\sigma(\mathrm{a}) = \mathrm{p(a)}\,]$, οπότε παίρνουμε το (a).
Εξειδικεύοντας για $\mathrm{a} = \overline{\alpha}(\mathrm{x})$, ($\overline{\alpha}(\mathrm{x})$ όρος), από το (a) έχουμε το

$$\text{(b)}\ \ \sigma(\overline{\alpha}(\mathrm{x})) = 0 \ \leftrightarrow\ \forall \mathrm{t}_{\mathrm{t}<\mathrm{x}}\, \alpha(\mathrm{t}) \leq \beta(\overline{\alpha}(\mathrm{t})),$$

χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των $\mathrm{lh(a)}$, $\dot{-}$, $(\mathrm{a})_{\mathrm{i}}$.
Επίσης,

$$\vdash\ \forall \mathrm{t}\ \alpha(\mathrm{t}) \leq \beta(\overline{\alpha}(\mathrm{t})) \leftrightarrow \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{t}_{\mathrm{t}<\mathrm{x}} \alpha(\mathrm{t}) \leq \beta(\overline{\alpha}(\mathrm{t})).$$

($\to$ προφανής, $\leftarrow$ εξειδικεύοντας για $\mathrm{x} \equiv \mathrm{t}'$, αφού $\vdash\ \mathrm{t} < \mathrm{t}'$) και
$\alpha \in \sigma\ \equiv\ \forall \mathrm{x}\, \sigma(\overline{\alpha}(\mathrm{x})) = 0$, οπότε

$$\text{(c)}\ \ \mathrm{B}(\alpha)\ \leftrightarrow \alpha \in \sigma.$$

Επίσης $\sigma(1)=\sigma(\overline{\alpha}(0))$. Το δεξί μέλος του (b) ισχύει για x=0, οπότε $\sigma(1)=0$.
Ακόμη, ισχύει $\mathrm{Spr}(\sigma)$, γιατί το $\mathrm{s} \equiv 0$ μας δίνει το $\exists \mathrm{s}$ στον ορισμό του $\mathrm{Spr}(\sigma)$, και το (b) μας δίνει το υπόλοιπο.

II. Χρησιμοποιούμε το σχήμα

[3]Βλέπε Κεφάλαιο 4, 1.3.

$$\begin{aligned}\vdash \quad & \mathrm{Spr}(\sigma) \wedge \sigma(1) = 0 \ \wedge \forall \mathrm{a}\, [\sigma(\mathrm{a}) = 0 \rightarrow \mathrm{R}(\mathrm{a}) \vee \neg \mathrm{R}(\mathrm{a})] \wedge \\ & \forall \alpha_{\alpha \in \sigma}\, \exists \mathrm{x}\, \mathrm{R}(\overline{\alpha}(\mathrm{x})) \ \wedge \ \forall \mathrm{a}\, [\sigma(\mathrm{a}) = 0 \wedge \mathrm{R}(\mathrm{a}) \rightarrow \mathrm{A}(\mathrm{a})] \wedge \\ & \forall \mathrm{a}\, [\sigma(\mathrm{a}) = 0 \wedge \forall \mathrm{s}\, (\sigma(\mathrm{a} * 2^{\mathrm{s}+1}) = 0 \rightarrow \mathrm{A}(\mathrm{a} * 2^{\mathrm{s}+1})) \rightarrow \mathrm{A}(\mathrm{a})] \\ & \rightarrow \mathrm{A}(1),\end{aligned}$$

που εκφράζει το $\mathcal{BI}$ για τους ιστούς (και όχι ειδικά για τον καθολικό ιστό, όπως το $\mathcal{BI}$). (Από το I, προκύπτουν οι δύο πρώτες υποθέσεις (του σχήματος), ενώ παραμένει ανοιχτή μία υπόθεση.)
Το εφαρμόζουμε για τα R, σ που έχουμε και παίρνοντας σαν $\mathrm{A(a)}$ τον τύπο:

$$\mathrm{A}(\mathrm{a}) \equiv \exists \mathrm{z}\, \forall \alpha\, [\, \forall \mathrm{t}\, \alpha(\mathrm{t}) \leq \beta\, (\mathrm{a} * \overline{\alpha}(\mathrm{t})) \rightarrow \exists \mathrm{x}_{\mathrm{x} \leq \mathrm{z}} \mathrm{R}\, (\mathrm{a} * \overline{\alpha}(\mathrm{x}))\,],$$

που εκφράζει ότι, για τον πδ-υποϊστό που πηγάζει από το a, υπάρχει z, που είναι άνω φράγμα του μήκους των ακολουθιών από το a μέχρι το "φράχτη" R. Ετσι, μαζί με το προηγούμενο Λήμμα, αποδεικνύεται το θεώρημα. $\dashv$

5. Η Αρχή του Brouwer

Ο Brouwer έδειξε, σχεδόν τετριμμένα, ότι ο καθολικός ιστός δεν μπορεί να απεικονιστεί με 1-1 τρόπο στους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή ότι οι ακολουθίες φυσικών αριθμών δεν είναι αριθμήσιμες, *χωρίς να χρησιμοποιήσει το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor*, επικαλούμενος μία αρχή συνέχειας, τη λεγόμενη *αρχή του Brouwer*. Σύμφωνα με αυτήν, για να μπορούμε να αποδώσουμε σε κάθε ακολουθία α μία (αριθμητική) τιμή b, πρέπει το b να υπολογίζεται από τις y πρώτες τιμές της α, για κάποιο y.

Το επιχείρημά του ήταν το εξής: έχουμε μία απεικόνιση του καθολικού ιστού στους φυσικούς αριθμούς, και έστω ότι η α παίρνει (μέσα από αυτή την απεικόνιση), την αριθμητική τιμή b, που υπολογίζεται από τα $\alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)$· τότε, κάθε συνάρτηση β, με $\beta(y) \neq \alpha(y)$, παίρνει την ίδια τιμή μέσα από αυτή την απεικόνιση, ενώ είναι διαφορετική.

Ο Brouwer, ήδη, μιλώντας για τον προσδιορισμό της τιμής b για κάποια συνάρτηση α, χρησιμοποίησε την έκφραση "*ο αλγόριθμος του νόμου συσχέτισης*".

Για να διατυπώσουμε στο συστημά μας την αρχή του Brouwer, λαμβάνοντας υπόψιν και αυτή τη διατύπωση, σημειώνουμε τα εξής:

ο αλγόριθμος υπολογισμού της τιμής b πρέπει

(a) για κάθε αρχικό τμήμα $\alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)$ μιας ακολουθίας επιλογών α, να αποφασίζει αν επαρκούν οι τιμές αυτές για τον υπολογισμό του b·

(b) αν η απάντηση είναι "ναι", να υπολογίζει το b.

Αυτά μπορούν να αποδοθούν από μία συνάρτηση τ, που δρα πάνω στους αριθμούς ακολουθιών $\overline{\alpha}(y)$ και: παραμένει 0 όσο ο αλγόριθμος δεν απαντάει "ναι", ενώ, την πρώτη φορά που θα δοθεί απάντηση "ναι", τότε θα γίνει $\tau(\overline{\alpha}(y)) = b+1$.
Χωρίς πρόβλημα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, αμέσως μετά, η τ γίνεται 0, ώστε να ισχύει

$$\forall t\, \exists!\, y\, \tau(\overline{\alpha}(y)) > 0,$$

γιατί, αν $\forall t\, \exists y\, \tau(\overline{\alpha}(y)) > 0$, θέτουμε:

$$\tau_1(a) = \begin{cases} \tau(a), & \text{αν } Seq(a) \wedge \forall z_{z<lh(a)} \tau\left(\Pi_{i<z} p_i^{(a)_i}\right) = 0, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Αν θέλουμε να απεικονίσουμε ακολουθίες σε ακολουθίες και όχι σε αριθμούς, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής: έστω ότι η συνάρτηση β θα είναι η τιμή της α. Τότε, για κάθε t, θα πρέπει το $\beta(t)$ να υπολογίζεται από το $\overline{\alpha}(y)$ για κάποιο y, οπότε δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε έναν αριθμό $\beta(t)$, για την ακολυθία $t, \alpha(0), \alpha(1), \ldots$, όπως πριν. Ετσι, οδηγούμαστε στην εξής διατύπωση της *αρχής του Brouwer για συναρτήσεις*, η οποία προτάθηκε από τον Kleene:

$$\begin{aligned} \mathcal{BP}: \quad & \forall \alpha\, \exists \beta\, \mathrm{A}(\alpha,\beta) \rightarrow \exists \tau \forall \alpha\, [\forall t\, \exists! y\, \tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) > 0 \wedge \\ & \forall \beta\, [\forall t\, \exists y\, \tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) = \beta(t) + 1 \rightarrow \mathrm{A}(\alpha,\beta)\,]\,]. \end{aligned}$$

6. Κατάλογος των $\mathrm{f}_0, \dots, \mathrm{f}_{26}$ και των αξιωμάτων τους

Παραθέτουμε τώρα τον κατάλογο των συναρτησιακών σταθερών του συστήματός μας, καθώς και των αντίστοιχων αξιωμάτων.

- $\mathrm{f}_0 \equiv 0,$ $\quad k_0 = 0,\ l_0 = 0,$
- f_1 $\quad \neg \mathrm{a}' = 0,\ \mathrm{a} = \mathrm{b} \to \mathrm{a}' = \mathrm{b}',\ \mathrm{a}' = \mathrm{b}' \to \mathrm{a} = \mathrm{b},$ $\quad k_1 = 1,\ l_1 = 0,$
- f_2 $\quad \mathrm{a} + 0 = \mathrm{a},\ \mathrm{a} + \mathrm{b}' = (\mathrm{a} + \mathrm{b})',$ $\quad k_2 = 2,\ l_2 = 0,$
- f_3 $\quad \mathrm{a} \cdot 0 = 0,\ \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}' = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} + \mathrm{a},$ $\quad k_2 = 2,\ l_2 = 0,$
- f_4 $\quad \mathrm{a}^0 = 1,\ \mathrm{a}^{\mathrm{b}'} = \mathrm{a}^{\mathrm{b}} \cdot \mathrm{a},$ $\quad k_4 = 2,\ l_4 = 0,$
- f_5 $\quad 0! = 1,\ (\mathrm{a}')! = (\mathrm{a}!) \cdot \mathrm{a}',$ $\quad k_5 = 1,\ l_5 = 0,$
- f_6 $\quad \mathrm{pd}(0) = 0,\ \mathrm{pd}(\mathrm{a}') = \mathrm{a},$ $\quad k_6 = 1,\ l_6 = 0,$
- f_7 $\quad \mathrm{a} \dot{-} 0 = \mathrm{a},\ \mathrm{a} \dot{-} \mathrm{b}' = \mathrm{pd}(\mathrm{a} \dot{-} \mathrm{b}),$ $\quad k_7 = 2,\ l_7 = 0,$
- f_8 $\quad \min(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{b} \dot{-} (\mathrm{b} \dot{-} \mathrm{a}),$ $\quad k_8 = 2,\ l_8 = 0,$
- f_9 $\quad \max(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = (\mathrm{a} \dot{-} \mathrm{b}) + \mathrm{b},$ $\quad k_9 = 2,\ l_9 = 0,$
- f_{10} $\quad \overline{\mathrm{sg}}(0) = 1,\ \overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{a}') = 0,$ $\quad k_{10} = 1,\ l_{10} = 0,$
- f_{11} $\quad \mathrm{sg}(0) = 0,\ \mathrm{sg}(\mathrm{a}') = 1,$ $\quad k_{11} = 1,\ l_{11} = 0,$
- f_{12} $\quad |\mathrm{a} - \mathrm{b}| = (\mathrm{a} \dot{-} \mathrm{b}) + (\mathrm{b} \dot{-} \mathrm{a}),$ $\quad k_{12} = 2,\ l_{12} = 0,$
- f_{13} $\quad \mathrm{rm}(0, \mathrm{b}) = 0,$ $\quad k_{13} = 2,\ l_{13} = 0,$
  $\mathrm{rm}(\mathrm{a}', \mathrm{b}) = (\mathrm{rm}(\mathrm{a}, \mathrm{b}))' \cdot \mathrm{sg}\,|\mathrm{b} - (\mathrm{rm}(\mathrm{a}, \mathrm{b}))'|,$
- f_{14} $\quad [0 \mid \mathrm{b}] = 0,$ $\quad k_{14} = 2,\ l_{14} = 0,$
  $[\mathrm{a}' \mid \mathrm{b}] = [\mathrm{a}, \mathrm{b}] + \overline{\mathrm{sg}}\,|\,\mathrm{b} - (\mathrm{rm}(\mathrm{a}, \mathrm{b}))'\,|,$

- f_{15} $\quad \mathrm{f}_{15}(0,\alpha)=0,\ \mathrm{f}_{15}(\mathrm{z}',\alpha)=\mathrm{f}_{15}(\mathrm{z},\alpha)+\alpha(\mathrm{z}),$ $\qquad k_{15}=1,\ l_{15}=1,$

  [μας δίνει τα: $\vdash \sum_{\mathrm{y}<0}\alpha(\mathrm{y})=0,$
  $\vdash \sum_{\mathrm{y}<\mathrm{z}'}\alpha(\mathrm{y})=(\sum_{\mathrm{y}<\mathrm{z}}\alpha(\mathrm{y}))+\alpha(\mathrm{z})$]

- f_{16} $\quad \mathrm{f}_{16}(0,\alpha)=1,\ \mathrm{f}_{16}(\mathrm{z}',\alpha)=\mathrm{f}_{16}(\mathrm{z},\alpha)\cdot\alpha(\mathrm{z}),$ $\qquad k_{16}=1,\ l_{16}=1,$

  [μας δίνει τα: $\vdash \prod_{\mathrm{y}<0}\alpha(\mathrm{y})=1,$
  $\vdash \prod_{\mathrm{y}<\mathrm{z}'}\alpha(\mathrm{y})=(\prod_{\mathrm{y}<\mathrm{z}}\alpha(\mathrm{y}))+\alpha(\mathrm{z})$]

- f_{17} $\quad \mathrm{f}_{17}(0,\alpha)=\alpha(0),\ \mathrm{f}_{17}(\mathrm{z}',\alpha)=\mathrm{f}_{8}(\mathrm{f}_{17}(\mathrm{z},\alpha),\alpha(\mathrm{z}')),$ $\qquad k_{17}=1,\ l_{17}=1,$

  [μας δίνει τα: $\vdash \min_{\mathrm{y}\leq 0}\alpha(\mathrm{y})=\alpha(0),$
  $\vdash \min_{\mathrm{y}\leq \mathrm{z}'}\alpha(\mathrm{y})=\min(\min_{\mathrm{y}\leq\mathrm{z}}\alpha(\mathrm{y}),\alpha(\mathrm{z}'))$]

- f_{18} $\quad \mathrm{f}_{18}(0,\alpha)=\alpha(0),\ \mathrm{f}_{18}(\mathrm{z}',\alpha)=\mathrm{f}_{9}(\mathrm{f}_{18}(\mathrm{z},\alpha),\alpha(\mathrm{z}')),$ $\qquad k_{18}=1,\ l_{18}=1,$

  [μας δίνει τα: $\vdash \max_{\mathrm{y}\leq 0}\alpha(\mathrm{y})=\alpha(0),$
  $\vdash \max_{\mathrm{y}\leq \mathrm{z}'}\alpha(\mathrm{y})=\max(\max_{\mathrm{y}\leq\mathrm{z}}\alpha(\mathrm{y}),\alpha(\mathrm{z}'))$]

- f_{19} $\quad \mathrm{p}_0=2,\ \mathrm{p}_{\mathrm{i}'}=\mu\mathrm{b}_{\mathrm{b}<\mathrm{p}_\mathrm{i}!+2}\,[\mathrm{p}_\mathrm{i}<\mathrm{b}\wedge \mathrm{Pr}(\mathrm{b})],$ $\qquad k_{19}=1,\ l_{19}=0,$

  [$\vdash \mathrm{Pr}(\mathrm{a})\leftrightarrow \mathrm{a}>1\ \wedge\neg\exists\mathrm{c}\,(1<\mathrm{c}<\mathrm{a}\wedge\mathrm{c}\mid\mathrm{a})$]

- f_{20} $\quad (\mathrm{a})_\mathrm{i}=\mu\mathrm{x}_{\mathrm{x}<\mathrm{a}}\,[\mathrm{p}_\mathrm{i}^{\mathrm{x}}\mid\mathrm{a}\wedge\neg\mathrm{p}_\mathrm{i}^{\mathrm{x}'}\mid\mathrm{a}]$ $\qquad k_{20}=2,\ l_{20}=0,$

- f_{21} $\quad \mathrm{lh}(\mathrm{a})=\sum_{\mathrm{i}<\mathrm{a}}\mathrm{sg}\ ((\mathrm{a})_\mathrm{i}),$ $\qquad k_{21}=1,\ l_{21}=0,$

- f_{22} $\quad \mathrm{a}*\mathrm{b}=\mathrm{a}\cdot\prod_{\mathrm{i}<\mathrm{lh}(\mathrm{b})}\mathrm{p}_{\mathrm{lh}(\mathrm{a})+\mathrm{i}}^{(\mathrm{b})_\mathrm{i}},$ $\qquad k_{22}=2,\ l_{22}=0,$

- f_{23} $\quad \overline{\alpha}(\mathrm{x})=\prod_{\mathrm{i}<\mathrm{x}}\mathrm{p}_\mathrm{i}^{\alpha(\mathrm{i})+1},$ $\qquad k_{23}=1,\ l_{23}=1,$

- f_{24} $\quad \widetilde{\alpha}(\mathrm{x})=\prod_{\mathrm{i}<\mathrm{x}}\mathrm{p}_\mathrm{i}^{\alpha(\mathrm{i})},$ $\qquad k_{24}=1,\ l_{24}=1,$

- f_{25} $\quad \mathrm{a}\circ\mathrm{b}=\prod_{\mathrm{i}<\max(\mathrm{a},\mathrm{b})}\mathrm{p}_\mathrm{i}^{\max((\mathrm{a})_\mathrm{i},(\mathrm{b})_\mathrm{i})},$ $\qquad k_{25}=2,\ l_{25}=0,$

- f_{26} $\quad \mathrm{ccp}(0)=1,\ \ \mathrm{ccp}(\mathrm{y}')=\mathrm{ccp}(\mathrm{y})\cdot\mathrm{p}_\mathrm{y}^{\mathrm{r}(\mathrm{y},\mathrm{ccp}(\mathrm{y}))},$ $\qquad k_{26}=1,\ l_{26}=0,$

  [$\mathrm{r}(\mathrm{y},\mathrm{z})$ όρος για τον οποίο $\vdash \mathrm{r}(\mathrm{y},\ \mathrm{z})\leq 1$ και ο οποίος θα οριστεί στο κεφάλαιο 3].

Σχολια. 1) Στον ορισμό (δηλ. στα αξιώματα για) κάθε f_i, $i = 0, \ldots, 26$, χρησιμοποιούνται μόνο f_j για $j < i$.

2) Ο κατάλογος αυτός μπορεί να επεκτείνεται με άλλες συναρτήσεις, αν είναι χρήσιμο για την ανάπτυξη της θεωρίας, εφόσον παραμένουμε στην ίδια κλάση συναρτήσεων.

3) Ορίζουμε επίσης ένα τυπικό κατηγόρημα, που θα εκφράζει ότι ένας αριθμός κωδικοποιεί ένα αρχικό τμήμα μίας ακολουθίας:

$$\mathrm{Seq}(\mathrm{a}) \equiv \mathrm{a} > 0 \wedge \forall \mathrm{i}_{\mathrm{i}<\mathrm{lh}(\mathrm{a})} (\mathrm{a})_{\mathrm{i}} > 0.$$

Με αυτούς τους ορισμούς είναι δυνατή η απόδειξη των απαραίτητων ιδιοτήτων, πράγμα που γίνεται με πληρότητα στα IM, FIM.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Πραγματοποίηση και συνέπεια του συστήματος $\mathcal{I}$

1. Η έννοια της πραγματοποίησης

Πραγματοποίηση με αριθμούς.

Η ερμηνεία της Ενορατικής Αριθμητικής που βασίζεται στην έννοια της πραγματοποίησης (realizability), ξεκινάει από την ιδέα ότι κάθε πρόταση, εκτός από τις τελείως στοιχειώδεις, παρέχει μία μερική, ελλιπή πληροφορία, διαβεβαιώνοντας όμως ότι, με την παροχή επιπρόσθετης πληροφορίας, θα μπορούσε να καταστεί πλήρης.

Ειδικότερα, μία (υπαρξιακή) πρόταση της μορφής $\exists x A(x)$ βεβαιώνει ότι μπορούμε να βρούμε κάποιο x, ώστε να ισχύει το $A(x)$, και μάλιστα και το x και η επιβεβαίωση του $A(x)$ να δίνονται με αποτελεσματικό τρόπο: αυτή ακριβώς είναι η απαραίτητη πληροφορία, η οποία μπορεί να κωδικοποιηθεί από φυσικούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας παραδείγματος χάριν τους αριθμούς Gödel αναδρομικών συναρτήσεων. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι αυτοί οι αριθμοί *πραγματοποιούν* τις αντίστοιχες προτάσεις.

Για παράδειγμα, ένας κλειστός ατομικός τύπος, μία ισότητα αριθμών στην ουσία, θεωρείται ότι είναι πλήρης πρόταση, δεν έχουμε ανάγκη από κάποιο παραπάνω στοιχείο για να ελέγξουμε την αλήθεια της. Ετσι, αν αληθεύει, μπορούμε να λέμε ότι πραγματοποιείται από το 0· αν είναι ψευδής, δεν πραγματοποιείται από κανέναν αριθμό. Ενας κλειστός τύπος της μορφής $\exists \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x})$ πραγματοποιείται από έναν αριθμό n, αν ο αριθμός $(n)_0$ πραγματοποιεί τον τύπο $\mathrm{A}((\mathbf{n})_1)$, με $\mathbf{n}$ το ψηφίο του n.

Ενας κλειστός τύπος της μορφής $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ πραγματοποιείται από έναν αριθμό n, αν, για κάθε αριθμό m που πραγματοποιεί τον τύπο A, η μερική αναδρομική συνάρτηση με αριθμό Gödel n ορίζεται στο m, δηλαδή $\{n\}(m)\downarrow$ με το γνωστό από τη Θεωρία Αναδρομής συμβολισμό, και ο αριθμός $\{n\}(m)$ πραγματοποιεί τον τύπο B.

Αναδρομικά λοιπόν, ορίζεται πότε ένας αριθμός πραγματοποιεί έναν κλειστό τύπο.

Συναρτησιακή πραγματοποίηση.

Αναπτύσσοντας την ίδια βασική ιδέα, προκύπτει μία ερμηνεία για την Ενορατική Ανάλυση. Εδώ, έχουμε προτάσεις ας πούμε της μορφής $\exists\beta\, A(\beta)$, όπου η β είναι μία συναρτησιακή μεταβλητή, οπότε πρέπει να μπορεί να δοθεί μία συνάρτηση β και ο τρόπος να επαληθευτεί το $A(\beta)$.

Κατασκευαστικά, όπως φαίνεται από τα όσα είπαμε για τη θέση του Church, η β θα πρέπει να είναι γενική αναδρομική συνάρτηση, αν όμως η A περιέχει κι άλλες ελεύθερες συναρτησιακές μεταβλητές, τότε θα πρέπει η β να είναι αναδρομική ως προς τις συναρτήσεις – τιμές των υπόλοιπων συναρτησιακών μεταβλητών.
Παραδείγματος χάριν, στην

$$(\exists\beta\,\forall x)\,[\,\alpha(x)=\beta(x)\,],$$

η ζητούμενη β πρέπει να είναι η ίδια η α, δηλαδή κάλλιστα μία μη αναδρομική συνάρτηση, αναδρομική όμως ως προς την α, που εμφανίζεται ελεύθερη στην $(\exists\beta\,\forall x)\,[\,\alpha(x)=\beta(x)\,]$.

Ο τρόπος που θα γίνει η κωδικοποίηση της επιπρόσθετης πληροφορίας για κάθε τύπο, θα είναι τώρα, όχι με φυσικούς αριθμούς, αλλά με *αριθμητικές συναρτήσεις μίας (αριθμητικής) μεταβλητής*.

Θα ορίσουμε, συνεπώς, μία σχέση $\mathcal{R}$ ανάμεσα σε συναρτήσεις και τύπους της γλώσσας της Ενορατικής Ανάλυσης: μία συνάρτηση ϵ κι ένας τύπος E θα βρίσκονται στη σχέση $\mathcal{R}$, αν η ϵ κωδικοποιεί την απαραίτητη, ώστε ο E να γίνει κατασκευαστικά "πλήρης πρόταση", πληροφορία, παίρνοντας υπόψιν μία δεδομένη αποτίμηση των ελεύθερων μεταβλητών του E.

Για να οριστεί η κατάλληλη έννοια πραγματοποίησης για την Ενορατική Ανάλυση, είναι απαραίτητες ορισμένες έννοιες και συμπεράσματα από τη *θεωρία των μερικών αναδρομικών συναρτησοειδών τύπου* 2[1], που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

[1] Αντικείμενα τύπου 0 είναι οι φυσικοί αριθμοί, αντικείμενα τύπου 1 οι (μερικές) συναρτήσεις από το ω στο ω, αντικείμενα τύπου 2 οι (μερικές) συναρτήσεις από το $\omega \rightharpoonup \omega$ στο ω.

2. Στοιχεία από τη θεωρία ολικών και μερικών αναδρομικών συναρτησοειδών τύπου 2

Εστω Ψ μία (πεπερασμένη) λίστα μεταβλητών (όχι τυπικών) για αριθμούς ή/και συναρτήσεις.

Συμβολισμος. Με $\varphi[\Psi]$ δηλώνουμε μία συνάρτηση των μεταβλητών της Ψ, με τιμές μερικές ή ολικές αριθμητικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής.

2.1. Ορισμος. Η $\varphi[\Psi]$ είναι *πρωτογενής ή γενική ή μερική αναδρομική, απολύτως ή ως προς* Θ, όπου Θ είναι λίστα συναρτήσεων, αν

$$\varphi[\Psi] \simeq \lambda t\, \varphi(\Psi, t),$$

όπου $t \notin \Psi$ και η $\varphi(\Psi, t)$ είναι συνάρτηση με τιμές φυσικούς αριθμούς, του αντίστοιχου είδους.

Οπως στην περίπτωση της αρχής του Brouwer (για συναρτήσεις), ένα *συνεχές συναρτησοειδές* [2], που απεικονίζει κάθε $\alpha : \omega \to \omega$ σε μία $\beta : \omega \to \omega$, μπορεί να αναπαρασταθεί από μία συνάρτηση $\tau : \omega \to \omega$ τέτοια ώστε, για κάθε φυσικό αριθμό t και κάθε $\alpha : \omega \to \omega$ να ισχύει ότι

$$\tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) > 0, \quad \text{για ακριβώς ένα } y,$$

και, γι' αυτό το y, να έχουμε

$$\tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) = \beta(t) + 1,$$

δηλαδή την τιμή της β στο t (συν 1).

Συμβολισμος. Οδηγούμαστε έτσι στον ορισμό μίας (συγκεκριμένης) μερικής αναδρομικής συνάρτησης F δύο συναρτησιακών μεταβλητών, έστω τ και α, η οποία δίνει τιμές αριθμητικές συναρτήσεις και θα συμβολίζεται με $\{\tau\}[\alpha]$.

2.2. Ορισμος.

$$F(\tau, \alpha) \simeq_{\text{ορ}} \{\tau\}[\alpha] \simeq_{\text{ορ}} \lambda t \tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y_t)) \dot{-} 1,$$

[2] Ενα συναρτησοειδές $F : \omega^\omega \to \omega^\omega$ είναι *συνεχές* (ως προς την τοπολογία του Baire) αν, για κάθε $\alpha \in \omega^\omega$ και $x \in \omega$, υπάρχει $y \in \omega$ ώστε, για κάθε $\beta \in \omega^\omega$, αν $\overline{\alpha}(y) = \overline{\beta}(y)$, τότε $(F(\alpha))(x) = (F(\beta))(x)$.

όπου $y_t \simeq \mu y\, [\tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) > 0]$.

Λέμε ότι η $\{\tau\}[\alpha]$ είναι:

(i) *κατάλληλα ορισμένη*, αν $(\forall t\, \exists! y)\, [\tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) > 0]$, και

(ii) *ολικά ορισμένη*, αν $(\forall t\, \exists y)\, [\tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) > 0]$.

Σχολια. 1) Αν η $\{\tau\}[\alpha]$ είναι ολικά ορισμένη, τότε μπορούμε, όπως στην περίπτωση της διατύπωσης της αρχής του Brouwer, να βρούμε μία συνάρτηση τ_1, ώστε η $\{\tau_1\}[\alpha]$ να είναι κατάλληλα ορισμένη και να ισχύει

$$\tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) = \tau_1(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)),$$

για κάθε $y \leq y_t$.

2) Ο συμβολισμός $\{\tau\}[\alpha]$ είναι ανάλογος με τον $\{e\}(x)$ της θεωρίας των μερικών αναδρομικών συναρτήσεων από το ω στο ω, όπου, μία συνάρτηση $\varphi(x)$ με αριθμό Gödel e, συμβολίζεται και με $\{e\}(x)$, καθώς στην περίπτωσή μας, η $\tau : \omega \to \omega$ "κωδικοποιεί" ένα συναρτησοειδές από το ω^ω στο ω^ω.

2.3. Λημμα. (Kleene) Για κάθε μερική αναδρομική συνάρτηση $\varphi[\Theta, \alpha]$, υπάρχει μία *πρωτογενής* αναδρομική συνάρτηση $\psi[\Theta]$, τέτοια ώστε, για όλα τα Θ, α, να ισχύει

$$\{\psi[\Theta]\}[\alpha] \simeq \varphi[\Theta, \alpha],$$

και, αν η $\varphi[\Theta, \alpha]$ είναι ολική, τότε η $\{\psi[\Theta]\}[\alpha]$ είναι επίσης ολική, και μάλιστα κατάλληλα ορισμένη.

Συμβολισμος. Με βάση αυτό το Λήμμα, εισάγουμε έναν ακόμη νέο συμβολισμό (αντίστοιχος υπάρχει και στη θεωρία μερικών αναδρομικών συναρτήσεων μίας μεταβλητής). Η συνάρτηση $\psi[\Theta]$, της οποίας η ύπαρξη εξασφαλίζεται από το Λήμμα, θα συμβολίζεται με

$$\Lambda\alpha\, \varphi[\Theta, \alpha],$$

δηλαδή ο *τελεστής* Λ μας δίνει κατά κάποιο τρόπο ένα "δείκτη" για την $\varphi[\Theta, \alpha]$, με τη μορφή μίας πρωτογενούς αναδρομικής συνάρτησης, η οποία δρα όπως στο Λήμμα.

Βασικη Παρατηρηση. Η $\Lambda\alpha\,\varphi[\Theta,\alpha]$ *δεν* είναι μοναδική για την $\varphi[\Theta,\alpha]$, υποδηλώνει μία *επιλογή*, η οποία γίνεται κατά την εφαρμογή του θεωρήματος Κανονικής Μορφής για συναρτήσεις μερικές, αριθμητικών μεταβλητών, που είναι αναδρομικές ως προς κάποιες (πεπερασμένου πλήθους) ολικές συναρτήσεις μίας ή περισσότερων αριθμητικών μεταβλητών, IM σελ. 292, 330): ο αριθμός Gödel e μίας μερικής αναδρομικής συνάρτησης που εμφανίζεται εκεί, δεν είναι, ως γνωστόν, μοναδικός. Αυτό θα φανεί στην απόδειξη του Λήμματος, που ακολουθεί.

Αποδειξη. Εστω ότι η λίστα Θ είναι η b,β και ότι η $\varphi[b,\beta,\alpha]$ είναι μερική αναδρομική, οπότε

$$\varphi[b,\beta,\alpha] \simeq \lambda t\,\varphi(b,\beta,\alpha,t),$$

με $\varphi(b,\beta,\alpha,t)$ μερική αναδρομική.

Από το θεώρημα Κανονικής Μορφής που αναφέραμε στη Βασική Παρατήρηση, υπάρχει ένας αριθμός e ώστε, για όλα τα b,β,α,t:

$$\begin{array}{ll} 1) & \varphi(b,\beta,\alpha,t) \simeq U\left(\mu y\, T_2^{1,1}(\widetilde{\beta}(y),\widetilde{\alpha}(y),e,b,t,y)\right) \\ 2) & T_2^{1,1}(\widetilde{\beta}(y),\widetilde{\alpha}(y),e,b,t,y), \ \text{ για ένα το πολύ } y. \end{array}$$

Θέτουμε:

$$\psi(b,\beta,s) \simeq \begin{cases} U(y)+1, & \text{αν } lh(s)>1 \ \& \ T_2^{1,1}(\widetilde{\beta}(y),\widetilde{\alpha}(y),e,b,t,y), \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου το s "κωδικοποιεί" τα $y,\,t,\,\alpha$ ως εξής:

$$y = lh(s)\dot{-}1,\ t=(s)_0\dot{-}1,\ \alpha(i)=(s)_{i+1}\dot{-}1 \quad (i<y).$$

Η $\psi(b,\,\beta,\,s)$ είναι πρωτογενής αναδρομική, οπότε είναι πρωτογενής αναδρομική και η $\psi[b,\beta] \simeq \lambda s\,\psi(b,\beta,s)$, για την οποία έχουμε:

$$\begin{aligned} \{\psi[b,\beta]\}[\alpha] &\simeq \lambda t\,\psi[b,\beta](2^{t+1} * \overline{\alpha}(y_t))\dot{-}1 \\ &\simeq \lambda t\,(\lambda s\,\psi(b,\beta,s))(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y_t))\dot{-}1 \\ &\simeq \lambda t\,\psi(b,\beta,2^{t+1} * \overline{\alpha}(y_t))\dot{-}1 \\ &\simeq \lambda t\,\varphi(b,\beta,\alpha,t) \\ &\simeq \varphi[b,\beta,\alpha], \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{αφού} & y_t & \simeq & \mu y\,[\,\psi[\,b,\beta\,](2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) > 0\,] \\ & & \simeq & \mu y\,[\,(\lambda s\,\psi(b,\beta,s))(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) > 0\,] \\ & & \simeq & \mu y\,[\,\psi(b,\beta,2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) > 0\,], \\ \text{οπότε} & & & T_2^{1,1}(\widetilde{\beta}(y),\widetilde{\alpha}(y),e,b,t,y). \end{array}$$

$\dashv$

Σημειωση. Στο κατηγόρημα $T_2^{1,1}$ ο κάτω δείκτης δηλώνει το πλήθος των (αριθμητικών) μεταβλητών της μερικής αναδρομικής συνάρτησης με αριθμό Gödel e, στην περίπτωση αυτή δύο, οι b και t, ενώ οι επάνω δείκτες δηλώνουν το πλήθος των μεταβλητών των συναρτήσεων των οποίων αρχικά τμήματα κωδικοποιούνται από τα δύο (στην περίπτωσή μας) πρώτα ορίσματα, και ως προς τις οποίες η $\{e\}$ είναι αναδρομική.

Συμβολισμοι. Γενικεύουμε τώρα τους συμβολισμούς που δόθηκαν από την αρχή αυτού του Κεφαλαίου, για λίστες k αριθμητικών ορισμάτων $a_1,\ldots,a_k$ και l συναρτησιακών ορισμάτων $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$, στη θέση μίας μοναδικής συνάρτησης α (δηλαδή της περίπτωσης $(k,l)=(0,1)$).

Θέτουμε πρώτα:

$<>= 1$ και

$< a_0,\ldots,a_m >= p_0^{a_0}\cdots p_m^{a_m}$, και, στη συνέχεια,

$< a_1,\ldots,a_k;\alpha_1,\ldots,\alpha_l >^1 \; = \; \lambda t \; < a_1,\ldots,a_k;\alpha_1(t),\ldots,\alpha_l(t) >.$

Στον δεύτερο συμβολισμό, ο πάνω δείκτης 1 παραλείπεται, όποτε είναι προφανές από τα συμφραζόμενα ότι $l>0$.
Χρησιμοποιούμε το ; για να διαχωρίζουμε τα αριθμητικά από τα συναρτησιακά ορίσματα· αυτό χρειάζεται για την περίπτωση που στη θέση συναρτήσεων συναντάμε κάποιους αριθμούς.

Τώρα ορίζουμε:

1a. $\{\tau\}[a] = \{\tau\}[\lambda t\, a]$,

1b. $\{\tau\} = \{\tau\}[0] = \{\tau\}[\lambda t\, 0]$,

1c. $\{\tau\}[a_1, \ldots, a_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_l] = \{\tau\}[< a_1, \ldots, a_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_l >]$,
όπου $k + l > 1$.

Ακόμη:

2a. $\Lambda a\, \varphi[\Theta, a] = \Lambda \alpha\, \varphi[\Theta, \alpha(0)]$,

2b. $\Lambda \varphi[\Theta] = \Lambda a\, \varphi[\Theta] = \Lambda \alpha\, \varphi[\Theta]$,

2c. $\Lambda a_1 \ldots a_k \alpha_1 \ldots \alpha_l\, \varphi[\Theta, a_1, \ldots, a_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_l] =$
$\Lambda \alpha\, \varphi[\Theta, (\alpha(0))_0, \ldots, (\alpha(0))_{k-1}; (\alpha)_k, \ldots, (\alpha)_{k+l-1}]$,
όπου $k + l > 1$.

Από τα προηγούμενα προκύπτουν τώρα τα ακόλουθα:

3a. $\{\Lambda a\, \varphi[\Theta, a]\}[a] = \varphi[\Theta, a]$,

3b. $\{\Lambda \varphi[\Theta]\} = \varphi[\Theta]$,

3c. $\{\Lambda a_1 \ldots a_k \alpha_1 \ldots \alpha_l\, \varphi[\Theta, a_1, \ldots, a_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_l]\}[a_1, \ldots, a_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_l] =$
$\varphi[\Theta, a_1, \ldots, a_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_l]$,
όπου $k + l > 1$.

3. Συναρτησιακή πραγματοποίηση

3.1. ΟΡΙΣΜΟΣ (της συναρτησιακής πραγματοποίησης). Δίνουμε τώρα τον ορισμό της *συναρτησιακής πραγματοποίησης*, μίας σχέσης ανάμεσα σε συναρτήσεις από το ω στο ω και σε τύπους του τυπικού συστήματος $\mathcal{I}$. Η σχέση αυτή ορίζεται παίρνοντας υπόψιν, σαν παράμετρο, μία αποτίμηση των ελεύθερων μεταβλητών του τύπου, στον οποίο αναφερόμαστε κάθε φορά, και είναι η

$$\epsilon\ r_\Psi\ \mathrm{E} : \ \text{η } \epsilon \text{ πραγματοποιεί τον E ως προς } \Psi,$$

όπου $\epsilon : \omega \to \omega$, E τύπος, Ψ λίστα μεταβλητών που περιέχει όλες όσες εμφανίζονται ελεύθερες στον E και Ψ μία αποτίμηση σε αριθμούς και συναρτήσεις από το ω στο ω, για τις μεταβλητές της Ψ.

Πριν τη διατύπωση του ορισμού, αναφέρουμε τα εξής:

(i) Η αλήθεια για τους ατομικούς τύπους (ισότητες αριθμών) είναι ταυτόσημη κλασικά και ενορατικά.

(ii) Ορίζουμε: $(\epsilon)_i = \lambda t\ (\epsilon(t))_i$, δηλαδή $(\epsilon)_i(t) = (\epsilon(t))_i$, για κάθε

$\epsilon : \omega \to \omega$ και κάθε $t \in \omega$.

(iii) Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\{\epsilon\}[\alpha]\downarrow$ για να δηλώσουμε ότι η $\{\epsilon\}[\alpha]$ είναι *ολικά* ορισμένη.
Ο ορισμός δίνεται με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του E.

1. $\epsilon\ r_\Psi$ P, όπου P ατομικός $\Longleftrightarrow_{\text{ορ}}$ ο P αληθεύει ως προς Ψ, δηλαδή ο P αληθεύει για τις τιμές που η Ψ αποδίδει στις μεταβλητές της Ψ. $\mathcal{R}_P$

2. $\epsilon\ r_\Psi\ \mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \Longleftrightarrow_{\text{ορ}} (\epsilon)_0\ r_\Psi\ \mathrm{A}$ και $(\epsilon)_1\ r_\Psi\ \mathrm{B}$. $\wedge\mathcal{R}$

3. $\epsilon\ r_\Psi\ \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \Longleftrightarrow_{\text{ορ}}$ αν $(\epsilon(0))_0 = 0$ τότε $(\epsilon)_1\ r_\Psi$ A και
   αν $(\epsilon(0))_0 \neq 0$ τότε $(\epsilon)_1\ r_\Psi$ B. $\vee\mathcal{R}$

4. $\epsilon\ r_\Psi\ \mathrm{A} \to \mathrm{B} \Longleftrightarrow_{\text{ορ}}$ για κάθε α $(: \omega \to \omega)$, αν $\alpha\ r_\Psi$ A τότε
   $\{\epsilon\}[\alpha]\downarrow$ και $\{\epsilon\}[\alpha]\ r_\Psi$ B. $\to\mathcal{R}$

5. $\epsilon\ r_\Psi\ \neg\mathrm{A} \Longleftrightarrow_{\text{ορ}}$ για κάθε α, ισχύει η άρνηση του $\alpha\ r_\Psi$ A
   (ισοδύναμα, ανν $\epsilon\ r_\Psi\ (\mathrm{A} \to 1 = 0)$,
   λόγω των 4 και 1: δεν υπάρχει α ώστε $\neg\mathcal{R}$
   $\alpha\ r_\Psi\ 1{=}0$, αφού $1{=}0$ πάντα ψευδής
   ατομικός τύπος).

6. $\epsilon\ r_\Psi\ \forall\mathrm{x}\,\mathrm{A} \Longleftrightarrow_{\text{ορ}}$ για κάθε x $(\in \omega)$, $\{\epsilon\}[x]\downarrow$ και
   $\{\epsilon\}[x]\ r_{\Psi,\,x}$ A, όπου x η τιμή του x. $\forall N\mathcal{R}$

7. $\epsilon\ r_\Psi\ \exists\mathrm{x}\,\mathrm{A} \Longleftrightarrow_{\text{ορ}} (\epsilon)_1\ r_{\Psi,\,(\epsilon(0))_0}$ A, όπου $(\epsilon(0))_0$
   η τιμή του x. $\exists N\mathcal{R}$

8. $\epsilon\ r_\Psi\ \forall\alpha\,\mathrm{A} \Longleftrightarrow_{\text{ορ}}$ για κάθε α, $\{\epsilon\}[\alpha]\downarrow$ και $\{\epsilon\}[\alpha]\ r_{\Psi,\,\alpha}$ A,
   όπου α η τιμή του α. $\forall F\mathcal{R}$

9. $\epsilon\ r_\Psi\ \exists\alpha\,\mathrm{A} \Longleftrightarrow_{\text{ορ}} \{(\epsilon)_0\}\downarrow$ και $(\epsilon)_1\ r_{\Psi,\{(\epsilon)_0\}}$ A,
   όπου $\{(\epsilon)_0\}$ η τιμή του α. $\exists F\mathcal{R}$

Παρατηρηση. Στις περιπτώσεις που στη λίστα τιμών Ψ προστίθεται ένας καινούργιος αριθμός ή μία καινούργια συνάρτηση, θα πρέπει η αντίστοιχη μεταβλητή να μην ανήκει ήδη στη λίστα Ψ. Αν κάτι τέτοιο συμβαίνει, αλλάζουμε πρώτα τις δεσμευμένες μεταβλητές του τύπου E που είναι απαραίτητο ώστε να ικανοποιηθεί η απαίτηση αυτή.
Σημειώνουμε ότι, με επαγωγή σύμφωνα με τον ορισμό της σχέσης $\epsilon\ r_\Psi$ E, αποδεικνύεται εύκολα ότι, αν δύο τύποι E και F είναι “congruent”, τότε $\epsilon\ r_\Psi\ \mathrm{E} \Longleftrightarrow \epsilon\ r_\Psi\ \mathrm{F}$.

3.2. Ορισμος. (a) Ενας *κλειστός* τύπος E είναι *πραγματοποιήσιμος*, αν πραγματοποιείται από κάποια *γενική αναδρομική συνάρτηση* $\epsilon : \omega \to \omega$.

(b) Ενας *ανοιχτός* τύπος είναι *πραγματοποιήσιμος*, αν η καθολική του κλειστότητα είναι πραγματοποιήσιμος τύπος.

3.3. Ορισμος. Αν T είναι μία κλάση ολικών συναρτήσεων από το ω στο ω, τότε ένας κλειστός τύπος E είναι *πραγματοποιήσιμος/T*, αν υπάρχει συνάρτηση ϵ *γενική αναδρομική ως προς* T, η οποία πραγματοποιεί τον E.

Εναλλακτικά, για την έννοια του *πραγματοποιήσιμου τύπου*, μπορεί να δοθεί και ο ακόλουθος ορισμός, που είναι ανεξάρτητος από την επιλογή της λίστας μεταβλητών Ψ, και δίνεται όμοια για κλειστούς και ανοιχτούς τύπους:

3.4. Ορισμος. Εστω E τύπος με ελεύθερες μεταβλητές μόνο από τη λίστα Ψ (η Ψ μπορεί να είναι κενή).
Ο E είναι *πραγματοποιήσιμος*, αν υπάρχει γενική αναδρομική συνάρτηση φ, ώστε, για κάθε αποτίμηση $\varPsi$ για τη λίστα μεταβλητών Ψ, να ισχύει

$$\varphi[\varPsi] \; r_{\varPsi} \; \mathrm{E}.$$

Η φ λέγεται *συνάρτηση πραγματοποίησης του τύπου* E *για τη λίστα μεταβλητών* Ψ.
(Υπενθύμιση: $\varphi[\varPsi] = \lambda t \varphi(\varPsi, t)$, όπου $\varphi(\varPsi, t)$ είναι συνάρτηση με τιμές από το ω).

Ο νέος ορισμός είναι ισοδύναμος με τον προηγούμενο:
Αν ο E είναι κλειστός, τότε η Ψ είναι κενή, οπότε, αν υπάρχει γενική αναδρομική συνάρτηση ϵ ώστε

$$\epsilon \; r_{\varPsi} \; \mathrm{E},$$

τότε θέτουμε

$$\varphi[\varPsi] = \epsilon,$$

δηλαδή

$$\varphi[\varPsi](t) = (\lambda t \, \varphi(\varPsi, t))(t) = \epsilon(t),$$

και ανάλογα για το αντίστροφο. $\dashv$

Εστω E ανοιχτός τύπος και $\forall\mathrm{\alpha}\forall\mathrm{a}\,\mathrm{E}$ η καθολική του κλειστότητα. Τότε, αν η φ είναι συνάρτηση πραγματοποίησης του E για τις μεταβλητές $\mathrm{\alpha}, \mathrm{a}$, τότε έχουμε

$$\Lambda\alpha\Lambda a\,\varphi[\alpha, a] \;\; r \;\; \forall\mathrm{\alpha}\forall\mathrm{a}\,\mathrm{E}.$$

Αντίστροφα, αν η ϵ είναι γενική αναδρομική και

$$\epsilon\; r_{\Psi}\; \forall\mathrm{\alpha}\forall\mathrm{a}\,\mathrm{E}, \quad (\Psi \text{ κενή}),$$

τότε η

$$\lambda\alpha\lambda a\,\{\{\epsilon\}[\alpha]\}[a].$$

όπου οι α, a είναι οι τιμές των $\mathrm{\alpha}, \mathrm{a}$, είναι γενική αναδρομική συνάρτηση πραγματοποίησης του E για τις $\mathrm{\alpha}, \mathrm{a}$. ⊣

Στον ορισμό της έννοιας "πραγματοποιήσιμος/T τύπος", οι συναρτήσεις της κλάσης T δεν δίνονται σαν τιμές στις ελεύθερες μεταβλητές των τύπων. Την δυνατότητα αυτή παρέχει ο επόμενος ορισμός.

3.5. Ορισμος. Εστω ότι οι μεταβλητές ενός τύπου E βρίσκονται στη λίστα $\Psi = (\Phi, \Theta)$ και έστω $\varPsi = (\varPhi, \varTheta)$ μία αποτίμηση για την Ψ ($\varPhi$, $\varTheta$ οι αντίστοιχες για τις Φ, Θ). Επίσης, έστω T μία κλάση ολικών συναρτήσεων.
Τότε:
Ο τύπος E είναι *πραγματοποιήσιμος-$\varTheta/T$*, αν υπάρχει συνάρτηση φ γενική αναδρομική ως προς (κάποιες από) τις συναρτήσεις των $\varTheta, T$, τέτοια ώστε, για κάθε $\varPhi$,

$$\varphi[\varPhi] \;\; r_{\varPsi}\; \mathrm{E}.$$

Ανάλογα, ορίζεται η έννοια του *πραγματοποιήσιμου-$\varTheta$* τύπου.

Παραδειγμα. Ο τύπος

$$\exists\mathrm{\alpha}\,[\mathrm{\alpha}(0) = 1 \wedge \forall\mathrm{x}\,\mathrm{\alpha}(\mathrm{x}') = \mathrm{x}'\cdot\mathrm{\alpha}(\mathrm{x})]$$

είναι αποδείξιμος στο σύστημα $\mathcal{B}$ (FIM σελ.39). Θα δούμε ότι είναι πραγματοποιήσιμος.
Εχουμε:

(a) $\epsilon\; r\; \exists\mathrm{\alpha}\,[\,\mathrm{\alpha}(0) = 1 \wedge \forall\mathrm{x}\;\mathrm{\alpha}(\mathrm{x}') = \mathrm{x}'\cdot\mathrm{\alpha}(\mathrm{x})\,]$

ανν (σύμφωνα με τον $\exists F\mathcal{R}$)

(b) $\{(\epsilon)_0\}\!\downarrow$ και $(\epsilon)_1\; r_{\{(\epsilon)_0\}}\,[\,\mathrm{\alpha}(0) = 1 \wedge \forall\mathrm{x}\;\mathrm{\alpha}(\mathrm{x}') = \mathrm{x}'\cdot\mathrm{\alpha}(\mathrm{x})\,]$, όπου $\{(\epsilon)_0\}$ η τιμή της α,

αννν (σύμφωνα με τον $\wedge\mathcal{R}$)

(c) $\{(\epsilon)_0\}\downarrow$ και $((\epsilon)_1)_0\ r_{\{(\epsilon)_0\}}\ \alpha(0) = 1$ και
$((\epsilon)_1)_1\ r_{\{(\epsilon)_0\}}\ \forall \mathrm{x}\,\alpha(\mathrm{x}') = \mathrm{x}' \cdot \alpha(\mathrm{x})$.

Εστω $(\epsilon)_1 = \zeta,\ (\epsilon)_0 = \eta,\ (\zeta)_1 = \theta.\ (*)$

Εχουμε τώρα (από το $(*)$), ότι:

(a) ανν $(\zeta)_0\ r_{\{\eta\}}\ \alpha(0) = 1$ και

(d) $\theta\ r_{\{\eta\}}\ \forall \mathrm{x}\,\alpha(\mathrm{x}') = \mathrm{x}' \cdot \alpha(\mathrm{x})$, όπου $\{\eta\}$ η τιμή της α.

Αλλά,

(d) ανν $\{\theta\}[x]\ r_{\{\eta\},x}\ \alpha(\mathrm{x}') = \mathrm{x}' \cdot \alpha(\mathrm{x})$, για κάθε x,
όπου x η τιμή της x, $\{\eta\}$ η τιμή της α, από το $\forall N\mathcal{R}$.

Αρκεί λοιπόν να θέσουμε

$$\{\eta\} = \lambda t\ (t!),$$

οπότε

$$\eta = \Lambda\lambda t\,(t!) \qquad (\text{άρα και } \{\eta\}\downarrow).$$

Ετσι, ο τύπος $\alpha(\mathrm{x}') = \mathrm{x}' \cdot \alpha(\mathrm{x})$ είναι αληθής ως προς $\{\eta\}, x$, για κάθε φυσικό αριθμό x.

Στη συνέχεια, για τον προσδιορισμό μίας κατάλληλης θ, παρατηρούμε ότι αρκεί να έχουμε

$$\{\theta\}[x] = \lambda t\ 0$$

(ή οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση).

Οπότε αρκεί να πάρουμε

$$\theta = \Lambda x \lambda t\ 0 = (\zeta)_1 \qquad (\text{λόγω του } (*)),$$

και, ανάλογα,

$$(\zeta)_0 = \lambda t\ 0.$$

Αρα, τελικά θέλουμε να έχουμε

$$\zeta = <\lambda t\ 0,\ \Lambda x\lambda t\ 0>,$$

οπότε αρκεί να θέσουμε

$$\epsilon = <\eta, \zeta> = <\Lambda\lambda t(t!),\ <\lambda t\ 0,\ \Lambda x\lambda t\ 0>> . \qquad \dashv$$

(Σημείωση. Οι ισότητες μεταξύ συναρτήσεων δηλώνουν απλώς ορισμό.)

4. Η συνέπεια του συστήματος $\mathcal{I}$

Το θεώρημα που θα παρουσιάσουμε τώρα, νομιμοποιεί την ερμηνεία της Ενορατικής Ανάλυσης μέσω της έννοιας της συναρτησιακής πραγματοποίησης. Είναι ένα θεώρημα ορθότητας για την ερμηνεία αυτή. Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει από το θεώρημα αυτό, είναι η συνέπεια του συστήματος $\mathcal{I}$.

Πρώτα, διατυπώνουμε τρία απαραίτητα βασικά Λήμματα.

4.1. Λημμα. Εστω Ψ_1 λίστα μεταβλητών, οι οποίες περιέχονται σε μία λίστα μεταβλητών Ψ, και είναι ακριβώς αυτές που εμφανίζονται ελεύθερες σε έναν τύπο E (ίσως με διαφορετική σειρά). Εστω $\mathit{\Psi}$ μία αποτίμηση για την Ψ, και $\mathit{\Psi}_1$ η αντίστοιχη αποτίμηση για την Ψ_1 (οπότε προφανώς $\mathit{\Psi}_1 \subseteq \mathit{\Psi}$). Τότε

$$\epsilon \ r_{\mathit{\Psi}_1} \, \mathrm{E} \iff \epsilon \ r_{\mathit{\Psi}} \, \mathrm{E}.$$

4.2. Λημμα. (a) Εστω $\mathrm{A(x)}$ τύπος που περιέχει ελεύθερες μόνο τις μεταβλητές της λίστας Ψ και την αριθμητική μεταβλητή x, όπου η x δεν ανήκει στην Ψ, και t όρος που περιέχει ελεύθερες μόνο τις μεταβλητές της λίστας Ψ και την x, ώστε η x να είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον $\mathrm{A(x)}$, και $t\,(\mathit{\Psi}, x)$ η τιμή του t για μία αποτίμηση $\mathit{\Psi}$, x της λίστας Ψ, x (όπου x είναι η τιμή της x).
Τότε

$$\epsilon \ r_{\mathit{\Psi},\, t(\mathit{\Psi},x)} \, \mathrm{A(x)} \iff \epsilon \ r_{\mathit{\Psi},\, x} \, \mathrm{A(t)}.$$

(b) Με τις ανάλογες συνθήκες, αν $\mathrm{\alpha}$ είναι συναρτησιακή μεταβλητή, u συναρτητής, α η τιμή της $\mathrm{\alpha}$ και $u[\mathit{\Psi}, \alpha]$ η τιμή του u,
έχουμε

$$\epsilon \ r_{\mathit{\Psi},\, u[\mathit{\Psi},\alpha]} \, \mathrm{A(\alpha)} \iff \epsilon \ r_{\mathit{\Psi},\, \alpha} \, \mathrm{A(u)}.$$

4.3. Λημμα. Εστω E τύπος και E' ο τύπος που προκύπτει από τον E, αν αντικατασταθούν όλοι οι υποτύποι του E της μορφής $\neg \mathrm{A}$ από τους αντίστοιχους $\mathrm{A} \rightarrow 1 = 0$.
Τότε

$$\epsilon \ r_{\mathit{\Psi}} \, \mathrm{E} \iff \epsilon \ r_{\mathit{\Psi}} \, \mathrm{E}'.$$

4.4. Θεωρημα. (Kleene). Εστω Γ (πεπερασμένη) λίστα τύπων και Ε τύπος. Τότε:

(a) Αν $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \mathrm{E}$ και οι τύποι της Γ είναι πραγματοποιήσιμοι, τότε και ο Ε είναι πραγματοποιήσιμος.

(b) Ανάλογα, για πραγματοποιήσιμους/T τύπους.

(c) Αν οι τύποι της Γ και ο Ε περιέχουν ελεύθερες μόνο τις μεταβλητές της λίστας $\Psi = (\Phi, \Theta)$ και $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \mathrm{E}$ με τις μεταβλητές της Θ σταθερές και, επιπλέον, οι τύποι της Γ είναι πραγματοποιήσιμοι-Θ, τότε και ο Ε είναι πραγματοποιήσιμος-Θ.

(d) Ανάλογα, για πραγματοποιήσιμους-Θ/T τύπους.

Αποδειξη. (a) Με επαγωγή στην τυπική απόδειξη $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} \mathrm{E}$.
Πρώτα δείχνουμε ότι τα αξιώματα του συστήματος $\mathcal{I}$ είναι πραγματοποιήσιμα. Για κάθε αξίωμα Ε δίνεται μία (πρωτογενής) αναδρομική συνάρτηση ϵ ώστε, για κάθε λίστα μεταβλητών Ψ, η οποία περιλαμβάνει όλες όσες εμφανίζονται ελεύθερες στο Ε , και, για κάθε αποτίμηση Ψ για την Ψ , να ισχύει

$$\epsilon \; r_{\Psi} \; \mathrm{E}.$$

Θέτοντας

$$\varphi[\Psi] = \epsilon,$$

δηλαδή θέτοντας

$$\varphi(\Psi, t) = \epsilon(t) \quad \text{και} \quad \varphi[\Psi] = \lambda t \, \varphi(\Psi, t),$$

παίρνουμε μία συνάρτηση πραγματοποίησης του Ε για την Ψ.

Συμβολισμος. Θα χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία “$\epsilon \downarrow r_{\Psi}$ E” αντί για “$\epsilon\downarrow$ και $\epsilon \; r_{\Psi}$ E”.

I. Αξιωματα.

1a. $\mathrm{E} \equiv \mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{A})$. Η κατάλληλη ϵ είναι η $\Lambda\alpha\Lambda\beta\,\alpha$:
Εστω $\epsilon : \omega \to \omega$. Τότε:
$\epsilon \; r_{\Psi} \; \mathrm{E} \equiv \mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{A})$ ανν (από το $\to \mathcal{R}$)
για κάθε α, αν $\alpha \; r_{\Psi}$ A, τότε $\{\epsilon\}[\alpha] \downarrow r_{\Psi} \; \mathrm{B} \to \mathrm{A}$.
Αλλά, $\{\epsilon\}[\alpha] \; r_{\Psi} \; \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ ανν (από το $\to \mathcal{R}$)
για κάθε β, αν $\beta \; r_{\Psi}$ B, τότε $\{\{\epsilon\}[\alpha]\}[\beta] \downarrow r_{\Psi}$ A.

Αρκεί λοιπόν, αν $\alpha\ r_\Psi$ A, να έχουμε ότι

$$\{\{\epsilon\}[\alpha]\}[\beta]\downarrow \ \text{και}\ \{\{\epsilon\}[\alpha]\}[\beta] \simeq \alpha.$$

Θέτοντας

$$\epsilon = \Lambda\alpha\Lambda\beta\ \alpha,$$

έχουμε

$$\{\epsilon\}[\alpha] = \{\Lambda\alpha\Lambda\beta\ \alpha\}[\alpha] \simeq \Lambda\beta\,\alpha\ \ \text{και}\ \ \{\Lambda\beta\,\alpha\}[\beta] \simeq \alpha,$$

από το Λήμμα 2.3.

1b. $\mathrm{E} \equiv (\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to ((\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C})) \to (\mathrm{A} \to \mathrm{C}))$.

Υποθέτουμε ότι (i) $\pi\ r_\Psi\ \mathrm{A} \to \mathrm{B}$,

(ii) $\rho\ r_\Psi\ \mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C})$,

(iii) $\alpha\ r_\Psi$ A.

Τότε, από το $\to\mathcal{R}$,

$$\{\pi\}[\alpha]\downarrow r_\Psi\ \mathrm{B}\ \ \text{και}\ \ \{\rho\}[\alpha]\downarrow r_\Psi\ \mathrm{B} \to \mathrm{C},$$

άρα, πάλι από το $\to\mathcal{R}$,

$$(iv)\ \ \{\{\rho\}[\alpha]\}[\{\pi\}[\alpha]]\downarrow r_\Psi\ \mathrm{C}.$$

Αλλά

$$\{\{\rho\}[\alpha]\}[\{\pi\}[\alpha]] \simeq \{\Lambda\alpha\{\{\rho\}[\alpha]\}[\{\pi\}[\alpha]]\}[\alpha],$$

από το Λήμμα 2.3,
οπότε, από το (iv), το $\to\mathcal{R}$ και, πάλι το Λήμμα 2.3,

$$\Lambda\alpha\{\{\rho\}[\alpha]\}[\{\pi\}[\alpha]]\downarrow r_\Psi\ \mathrm{A} \to \mathrm{C},$$

οπότε, όμοια ,λόγω του (ii) και του $\to\mathcal{R}$,

$$\Lambda\rho\Lambda\alpha\{\{\rho\}[\alpha]\}[\{\pi\}[\alpha]]\downarrow r_\Psi\ (\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C})) \to (\mathrm{A} \to \mathrm{C}),$$

και όμοια

$$\Lambda\pi\Lambda\rho\Lambda\alpha\{\{\rho\}[\alpha]\}[\{\pi\}[\alpha]]\downarrow r_\Psi\ \mathrm{E}.$$

3.	$\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}))$,	$\epsilon = \Lambda\alpha\Lambda\beta <\alpha,\beta>$.
4a.	$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \to \mathrm{A}$,	$\epsilon = \Lambda\alpha\,(\alpha)_0$.
4b.	$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \to \mathrm{B}$,	$\epsilon = \Lambda\alpha\,(\alpha)_1$.
5a.	$\mathrm{A} \to \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$,	$\epsilon = \Lambda\alpha <0;\alpha>$.
5b.	$\mathrm{B} \to \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$,	$\epsilon = \Lambda\alpha <1;\alpha>$.

6. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$,
$$\epsilon = \Lambda\pi\Lambda\rho\Lambda\sigma\,[\lambda t\,\overline{sg}((\sigma(0))_0)\cdot(\{\pi\}[(\sigma)_1])(t)+ \\ sg((\sigma(0))_0)\cdot(\{\rho\}[(\sigma)_1])(t)].$$

7. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$,
Η ϵ του 1b.

8. $\neg A \to (A \to B)$, $\qquad \epsilon = \Lambda\pi\,\lambda t\,0.$

Εστω $\pi\ r_\Psi\ \neg A$. Τότε για κάθε α ισχύει "όχι $\alpha\ r_\Psi$ A". Αρα, για κάθε συνάρτηση β, έχουμε
$$\beta\ \ r_\Psi\ A \to B,$$
οπότε και
$$\lambda t\,0\ \ r_\Psi\ A \to B.$$
Ετσι,
$$\Lambda\pi\,\lambda t\,0\ \ \ r_\Psi\ \neg A \to (A \to B).$$

10N. $E \equiv \forall x\,A(x) \to A(t)$, $\qquad$ A(x), t όπως στο Λήμμα 4.2(a).

Εστω
$$\pi\ \ r_{\Psi,x}\ \forall x\,A(x).$$
Τότε, από το Λήμμα 4.1, έχουμε
$$\pi\ \ r_\Psi\ \forall x\,A(x),$$
οπότε, από το $\forall N\mathcal{R}$, έχουμε, για κάθε x,
$$\{\pi\}[x]\downarrow r_{\Psi,x}\ A(x),$$
άρα, για κάθε x και για $t(\Psi,x)$ όπως στο Λήμμα 4.2(a),
$$\{\pi\}[t(\Psi,x)]\ \ r_{\Psi,t(\Psi,x)}A(x),$$
άρα, από το Λήμμα 4.2(a),
$$\{\pi\}[t(\Psi,x)]\ \ r_{\Psi,x}\ A(t).$$
Επομένως, αφού

$\epsilon\ \ r_{\Psi,x}$ E ανν για κάθε π, αν $\pi\ r_{\Psi,x}\ \forall x\,A(x)$, τότε $\{\epsilon\}[\pi]\downarrow r_{\Psi,x}\ A(t)$,

αρκεί να έχουμε
$$\{\epsilon\}[\pi] \simeq \{\pi\}[t(\Psi,x)],$$
δηλαδή αρκεί να πάρουμε την
$$\epsilon = \Lambda\pi\{\pi\}[t(\Psi,x)].$$

10F. $\mathrm{E} \equiv \forall\alpha \mathrm{A}(\alpha) \to \mathrm{A}(\mathrm{u})$, $\quad$ $\mathrm{u}, \mathrm{A}(\mathrm{u})$ όπως στο Λήμμα 4.2(b).
Ανάλογα με το 10N, έστω

$$\pi \;\; r_{\Psi,\alpha}\, \forall\alpha\, \mathrm{A}(\alpha),$$

οπότε, από το Λήμμα 4.1,

$$\pi \;\; r_{\Psi}\, \forall\alpha\, \mathrm{A}(\alpha),$$

άρα, από το $\forall F\mathcal{R}$, για κάθε α,

$$\{\pi\}[\alpha] \downarrow r_{\Psi,\alpha}\, \mathrm{A}(\alpha),$$

άρα

$$\{\pi\}[u\,[\Psi,\alpha]] \;\; r_{\Psi,\, u\,[\Psi,\alpha]}\, \mathrm{A}(\alpha),$$

άρα, από το Λήμμα 4.2(b),

$$\{\pi\}[u\,[\Psi,\alpha]] \;\; r_{\Psi,\alpha}\, \mathrm{A}(\mathrm{u}).$$

Οπότε αρκεί

$$\{\epsilon\}[\pi] \simeq \{\pi\}[u[\Psi,\alpha]],$$

δηλαδή αρκεί να πάρουμε

$$\epsilon = \Lambda\pi\{\pi\}[u[\Psi,\alpha]].$$

11N. $\mathrm{E} \equiv \mathrm{A}(\mathrm{t}) \to \exists\mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x})$, $\quad$ $\mathrm{A}(\mathrm{x})$, t όπως στο Λήμμα 4.2(a).
Εστω

$$\pi \;\; r_{\Psi,x}\, \mathrm{A}(\mathrm{t}).$$

Τότε, από το Λήμμα 4.2(a), για $t(\Psi,x)$ όπως εκεί, έχουμε

$$\text{(a)} \quad \pi \;\; r_{\Psi,\, t(\Psi,x)}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}).$$

Για να ισχύει

$$\epsilon\; r_{\Psi,x}\, \mathrm{E},$$

θα πρέπει, σύμφωνα με το $\to\mathcal{R}$, για κάθε π όπως στο (a), να έχουμε

$$\{\epsilon\}[\pi] \downarrow r_{\Psi,x}\, \exists\mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}),$$

δηλαδή, σύμφωνα με το Λήμμα 4.1,

$$\{\epsilon\}[\pi] \downarrow r_{\Psi}\, \exists\mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}),$$

δηλαδή, σύμφωνα με το $\exists N\mathcal{R}$,

$$\text{(b)} \quad \{\epsilon\}[\pi]\downarrow \text{ και } (\{\epsilon\}[\pi])_1 \;\; r_{\Psi,\, (\{\epsilon\}[\pi](0))_0}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}).$$

Από τα (a), (b), αρκεί

$$(\{\epsilon\}[\pi](0))_0 = t\,(\Psi, x) \;\text{ και }\; (\{\epsilon\}[\pi])_1 \simeq \pi,$$

δηλαδή αρκεί να πάρουμε

$$\epsilon = \Lambda\pi < \lambda y\, t(\Psi, x), \pi > .$$

11F. $\quad \mathrm{E} \equiv \mathrm{A(u)} \rightarrow \exists\upalpha\, \mathrm{A}(\upalpha), \qquad \mathrm{A}(\upalpha)$, u όπως στο Λήμμα 4.2(b).

Για να ισχύει για κάποια ϵ

$$\epsilon \;\; r_{\Psi,\,\alpha}\; \mathrm{A(u)} \rightarrow \exists\upalpha\, \mathrm{A}(\upalpha),$$

έχουμε τα εξής:

Εστω

$$\pi \;\; r_{\Psi,\,\alpha}\; \mathrm{A(u)}.$$

Τότε, από το Λήμμα 4.2(b), για $u\,[\Psi, \alpha]$ όπως εκεί, έχουμε

$$\pi \;\; r_{\Psi,\, u[\Psi,\,\alpha]}\; \mathrm{A}(\upalpha).$$

άρα, θα πρέπει, σύμφωνα με το $\rightarrow\mathcal{R}$ να έχουμε

$$\{\epsilon\}[\pi] \downarrow r_{\Psi,\,\alpha}\; \exists\upalpha\, \mathrm{A}(\upalpha),$$

οπότε, από το Λήμμα 4.1,

$$\{\epsilon\}[\pi] \;\; r_{\Psi}\; \exists\upalpha\, \mathrm{A}(\upalpha),$$

δηλαδή, σύμφωνα με το $\exists F\mathcal{R}$,

$$(\{\epsilon\}[\pi])_1 \;\; r_{\Psi,\, \{(\{\epsilon\}[\pi])_0\}}\; \mathrm{A}(\upalpha),$$

όπου $\{(\{\epsilon\}[\pi])_0\}$ η τιμή της $\upalpha$.

Αρκεί γι' αυτό να έχουμε

$$(\{\epsilon\}[\pi])_1 \simeq \pi$$

και

$$\{(\{\epsilon\}[\pi])_0\} \simeq u\,[\Psi, \alpha], \text{ δηλ. } \{(\{\epsilon\}[\pi])_0\} \simeq \Lambda(u\,[\Psi, \alpha]).$$

Αρα, αρκεί να πάρουμε

$$\epsilon = \Lambda\pi < \Lambda(u\,[\Psi, \alpha]), \pi > .$$

13. $\mathrm{E} \equiv \mathrm{A}(0) \wedge \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{A}(\mathrm{x}')) \to \mathrm{A}(\mathrm{x})$.

Η $\epsilon = \Lambda\alpha\,\rho[x,\alpha]$, όπου η ρ ορίζεται στη συνέχεια, είναι η συνάρτηση που δίνεται για την περίπτωση αυτή.

Ορίζουμε τη συνάρτηση ρ ως εξής:

$$\begin{aligned}\rho\,[\,0,\alpha\,] &= (\alpha)_0,\\ \rho\,[\,x',\alpha\,] &= \{\{(\alpha)_1\}[x]\}\,[\rho\,[x,\alpha\,]\,].\end{aligned}$$

Θέτοντας

$$\rho\,[\,x,\alpha\,] = \lambda t\,\rho\,(x,\alpha,t),$$

ο παραπάνω ορισμός παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\rho\,(0,\alpha,t) &= \psi\,(\alpha,t),\\ \rho\,(x',\alpha,t) &\simeq \chi\,(x,\alpha,\lambda t\,\rho\,(x,\alpha,t),t),\end{aligned}$$

όπου η ψ (με $\psi(\alpha,t) = (\alpha(t))_0$), είναι πρωτογενής αναδρομική και η χ μερική αναδρομική.

Από το θεώρημα αναδρομής για την περίπτωση συναρτήσεων μερικών αναδρομικών ως προς κάποιες (ολικές) συναρτήσεις μίας λίστας Ψ (IM, σελ. 353), στην περίπτωση αυτή την α, η εξίσωση

$$\{z\}(x,\alpha,t) \simeq \begin{cases} \psi\,(\alpha,t), & \text{αν } x = 0,\\ \chi\,(x \dot- 1,\alpha,\ \lambda t\,\{z\}(x \dot- 1,\alpha,t),\ t), & \text{αν } x \neq 0,\end{cases}$$

έχει λύση ως προς z, έστω e.

Θέτουμε

$$\rho\,(x,\alpha,t) = \{e\}(x,\alpha,t).$$

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$\epsilon = \Lambda\alpha\,\rho\,[x,\alpha\,]\ \ r_{\Psi,\,x}\ \mathrm{E}.$$

Εστω ότι

$$(*)\quad \alpha\ \ r_{\Psi,\,x}\ \ \mathrm{A}(0) \wedge \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{A}(\mathrm{x}')).$$

Θα δείξουμε με επαγωγή στο x (στη μεταγλώσσα), ότι

$$\{\epsilon\}[\alpha] = \rho\,[x,\alpha]\ \ r_{\Psi,\,x}\ \mathrm{A}(\mathrm{x}).$$

Βαση. $x = 0$. Αρα $\rho\,[x,\alpha] = \rho\,[0,\alpha] = (\alpha)_0$.

Από το $(*)$ και το Λήμμα 4.1,

$$\alpha \;\; r_{\Psi} \;\; \mathrm{A}(0) \wedge \forall \mathrm{x}\, (\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{A}(\mathrm{x}')),$$

οπότε, από το $\wedge\mathcal{R}$, έχουμε

$$(\alpha)_0 \;\; r_{\Psi} \; \mathrm{A}(0)$$

και, από το Λήμμα 4.2(a),

$$(\alpha)_0 \;\; r_{\Psi,\,0} \; \mathrm{A}(\mathrm{x}).$$

Επαγωγικο Βημα. Θα δείξουμε ότι

$$\rho\,[x', \alpha] \;\; r_{\Psi,\,x'} \; \mathrm{A}(\mathrm{x}).$$

Εχουμε την εξής επαγωγική υπόθεση:

$$\rho\,[x, \alpha] \;\; r_{\Psi,\,x} \; \mathrm{A}(\mathrm{x}).$$

Από το $(*)$ και το Λήμμα 4.1, έχουμε

$$(\alpha)_1 \;\; r_{\Psi} \; \forall \mathrm{x}\, (\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{A}(\mathrm{x}')),$$

άρα, από το $\forall N\mathcal{R}$, για κάθε x,

$$\{(\alpha)_1\}[x] \;\; r_{\Psi,\,x} \; \mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{A}(\mathrm{x}'),$$

οπότε, από την επαγωγική υπόθεση,

$$\{\{(\alpha)_1\}[x]\}[\rho\,[x, \alpha]\,] \;\; r_{\Psi,\,x} \; \mathrm{A}(\mathrm{x}'),$$

δηλαδή, σύμφωνα με τον ορισμό της ρ,

$$\rho\,[x', \alpha] \;\; r_{\Psi,\,x} \; \mathrm{A}(\mathrm{x}'),$$

οπότε, από το Λήμμα 4.2(a),

$$\rho\,[x', \alpha] \;\; r_{\Psi,\,x'} \; \mathrm{A}(\mathrm{x}).$$

Παρατηρηση. Για την απόδειξη της πραγματοποίησης του Αξιώματος (-σχήματος) της Επαγωγής, χρησιμοποιήθηκε η αντίστοιχη αρχή επαγωγής στη μεταγλώσσα. Πιο κάτω, με ανάλογο τρόπο, θα αποδείξουμε με *ανάστροφη επαγωγή* και πάλι στη μεταγλώσσα, ότι το αξίωμα της ανάστροφης επαγωγής $\mathcal{BI}$ είναι πραγματοποιήσιμο.

14. $\mathrm{a}' = \mathrm{b}' \to \mathrm{a} = \mathrm{b}$. $\quad \epsilon = \Lambda \pi \lambda t\, 0.$

Αν για κάποια συνάρτηση π έχουμε

$$\pi \;\; r_{a,\,b} \; \mathrm{a}' = \mathrm{b}',$$

τότε, από το $\mathcal{R}_P$ προκύπτει ότι

$$\text{ο } \mathrm{a}' = \mathrm{b}' \text{ είναι αληθής ως προς } a,\ b,$$

άρα $a+1=b+1$, οπότε $a=b$, και έτσι

$$\text{ο } \mathrm{a} = \mathrm{b} \text{ είναι αληθής ως προς } a,\ b.$$

Εχουμε επομένως ότι

$$\lambda t\, 0 \;\; r_{a,b} \;\; \mathrm{a} = \mathrm{b},$$

και, τελικά,

$$\Lambda\pi\lambda t\, 0 \;\; r_{a,b} \;\; \mathrm{a}' = \mathrm{b}' \rightarrow \mathrm{a} = \mathrm{b}.$$

Με ανάλογο τρόπο, βρίσκουμε συναρτήσεις για αρκετά ακόμη αξιώματα:

15.	$\neg \mathrm{a}' = 0,$	$\epsilon = \lambda t\, 0.$
16.	$\mathrm{a} = \mathrm{b} \rightarrow (\mathrm{a} = \mathrm{c} \rightarrow \mathrm{b} = \mathrm{c}),$	$\epsilon = \Lambda\pi\Lambda\rho\lambda t\, 0.$
17.	$\mathrm{a} = \mathrm{b} \rightarrow \mathrm{a}' = \mathrm{b}',$	$\epsilon = \Lambda\pi\lambda t\, 0.$
18.	$\mathrm{a} + 0 = \mathrm{a},$	$\epsilon = \lambda t\, 0.$
19.	$\mathrm{a} + \mathrm{b}' = (\mathrm{a} + \mathrm{b})',$	$\epsilon = \lambda t\, 0.$
20.	$\mathrm{a} \cdot 0 = 0,$	$\epsilon = \lambda t\, 0.$
21.	$\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}' = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} + \mathrm{a},$	$\epsilon = \lambda t\, 0.$

$^{\mathrm{x}}$**0.1** $(\lambda \mathrm{x}\, \mathrm{r}(\mathrm{x}))(\mathrm{t}) = \mathrm{r}(\mathrm{t}),$

όπου $\mathrm{r}(\mathrm{x})$, t όροι και x αριθμητική μεταβλητή,
αντικαταστάσιμη από τον όρο t στον όρο $\mathrm{r}(\mathrm{x})$: $\epsilon = \lambda t\, 0.$

$^{\mathrm{x}}$**1.1** $\mathrm{a} = \mathrm{b} \rightarrow \alpha(\mathrm{a}) = \alpha(\mathrm{b}),$ $\epsilon = \Lambda\pi\lambda t\, 0.$

$^{\mathrm{x}}$**2.1** $\mathrm{E} \equiv \forall \mathrm{x}\, \exists \alpha\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \alpha) \rightarrow \exists \alpha\, \forall \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \lambda \mathrm{y} \alpha\, (2^{\mathrm{x}} \cdot 3^{\mathrm{y}})),$

$$\epsilon = \Lambda\pi < \Lambda\lambda t\, \{(\{\pi\}[(t)_0])_0\}((t)_1),\ \Lambda x\, (\{\pi\}[x])_1 > .$$

Εστω ότι

$$\pi \;\; r_{\Psi}\; \forall \mathrm{x}\, \exists \alpha\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \alpha).$$

Τότε, από τα $\forall N\mathcal{R}$, $\exists F\mathcal{R}$, για κάθε x,

(a) $(\{\pi\}[x])_1 \;\; r_{\Psi,\, x,\, \{(\{\pi\}[x])_0\}}\; \mathrm{A}(\mathrm{x}, \alpha)$ και $\{(\{\pi\}[x])_0\}\downarrow .$

Εχουμε τώρα ότι:

$$\begin{array}{llll} & \{(\{\pi\}[x])_0\} & \simeq & \lambda y\,\{(\{\pi\}[x])_0\}(y) \\ & & \simeq & \lambda y\,\{(\{\pi\}[(<x,y>)_0])_0\}((<x,y>)_1) \\ \text{(b)} & & \simeq & \lambda y(\lambda t\,\{(\{\pi\}[(t)_0])_0\}((t)_1))(<x,y>). \end{array}$$

Επομένως, από τα (a) και (b), έχουμε τελικά,

$$(\{\pi\}[x])_1 \;\; r_{\Psi,\,x,\,\lambda t\,\{(\{\pi\}[(t)_0])_0\}((t)_1)} \;\; \mathrm{A}(\mathrm{x}, \lambda \mathrm{y}\,\alpha(<\mathrm{x},\mathrm{y}>)),$$

από το Λήμμα 4.2(b).

Για τα αξιώματα που αφορούν τις συναρτησιακές σταθερές $\mathrm{f}_i,\ i \geq 4$, δίνουμε τη συνάρτηση $\epsilon = \lambda t\, 0$.

II. Κανονεσ.

Παρατηρηση. Εστω Ε τύπος, Ψ λίστα μεταβλητών, η οποία περιέχει τις ελεύθερες μεταβλητές του Ε, Ψ_1 η λίστα των μεταβλητών της Ψ, οι οποίες έχουν πράγματι ελεύθερες εμφανίσεις στον Ε και, για κάθε $\mathit{\Psi}$ αποτίμηση της Ψ, $\mathit{\Psi}_1$ η αντίστοιχη της Ψ_1.
Αν φ είναι γενική αναδρομική συνάρτηση πραγματοποίησης του Ε για τη λίστα Ψ, τότε παίρνουμε μία γενική αναδρομική συνάρτηση πραγματοποίησης του Ε για τη λίστα Ψ_1, ως εξής:
Θέτουμε

$$\varphi_1[\mathit{\Psi}_1] = \varphi[\mathit{\Psi}^*],$$

όπου η $\mathit{\Psi}^*$ προκύπτει από την $\mathit{\Psi}$ αντικαθιστώντας (στην $\mathit{\Psi}$) κάθε αριθμό (συνάρτηση) που είναι τιμή μεταβλητής, η οποία δεν ανήκει στην Ψ_1, με 0 ($\lambda t\, 0$). Τότε, η φ_1 είναι γενική αναδρομική συνάρτηση πραγματοποίησης του Ε για τη λίστα Ψ_1.
Συμπέρασμα: η έννοια της πραγματοποίησης, σύμφωνα με τον δεύτερο, εναλλακτικό ορισμό, είναι, όπως είχαμε αναφέρει, ανεξάρτητη από την επιλογή της λίστας.

Δείχνουμε στη συνέχεια, πως οι κανόνες του συστήματος $\mathcal{I}$ οδηγούν από πραγματοποιήσιμους τύπους σε πραγματοποιήσιμους.

2. $\dfrac{\mathrm{A} \qquad \mathrm{A} \to \mathrm{B}}{\mathrm{B}}$ **.**

Εστω Ψ λίστα μεταβλητών, η οποία περιέχει όλες τις ελεύθερες μεταβλητές του τύπου $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$.
Κάνουμε την επαγωγική υπόθεση ότι υπάρχουν γενικές αναδρομικές συναρτήσεις πραγματοποίησης α, γ των A, $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ αντίστοιχα, για τη λίστα Ψ (χάρη στην προηγούμενη παρατήρηση, μπορούμε να θεωρήσουμε (σωστά) τις α, γ ως προς την ίδια λίστα Ψ).
Επομένως, για κάθε αποτίμηση $\mathit{\Psi}$ για τη λίστα Ψ, έχουμε

$$(*) \qquad \alpha[\mathit{\Psi}] \;\; r_{\mathit{\Psi}}\, \mathrm{A} \;\; \text{και} \;\; \gamma\,[\mathit{\Psi}] \;\; r_{\mathit{\Psi}}\, \mathrm{A} \to \mathrm{B}.$$

Θέτουμε, για κάθε αποτίμηση $\mathit{\Psi}$ για την Ψ,

$$\beta[\mathit{\Psi}] \simeq \{\gamma[\mathit{\Psi}]\}[\alpha[\mathit{\Psi}]\,],$$

οπότε η $\beta[\mathit{\Psi}]$ είναι μερική αναδρομική.
Επειδή οι $(*)$ ισχύουν για κάθε $\mathit{\Psi}$, από το $\to\mathcal{R}$ προκύπτει ότι η $\beta[\mathit{\Psi}]$ είναι συνάρτηση ολικά ορισμένη για κάθε $\mathit{\Psi}$, οπότε είναι γενική αναδρομική και

$$\beta[\mathit{\Psi}] \;\; r_{\mathit{\Psi}}\, \mathrm{B},$$

δηλαδή είναι συνάρτηση πραγματοποίησης του B.

9N. $\dfrac{\mathrm{C} \to \mathrm{A(x)}}{\mathrm{C} \to \forall \mathrm{x}\; \mathrm{A(x)}}$, x όχι ελεύθερη στον C.

Εστω ότι, για κάθε $\mathit{\Psi}$, x, έχουμε

$$\psi\,[\Psi,\, x] \;\; r_{\mathit{\Psi},\, x}\, \mathrm{C} \to \mathrm{A(x)} \quad \text{και} \quad \gamma \;\; r_{\mathit{\Psi}}\, \mathrm{C},$$

οπότε και $\gamma \;\; r_{\mathit{\Psi},\, x}\, \mathrm{C}$.
Τότε έχουμε

$$\{\psi\,[\mathit{\Psi}, x]\}[\gamma] \downarrow r_{\mathit{\Psi},\, x}\, \mathrm{A(x)},$$

άρα

$$\Lambda x\,\{\psi\,[\mathit{\Psi}, x]\}[\gamma] \downarrow r_{\mathit{\Psi}}\, \forall \mathrm{x}\, \mathrm{A(x)},$$

και, τελικά,

$$\Lambda\gamma\Lambda x\,\{\psi\,[\mathit{\Psi}, x]\}[\gamma] \downarrow r_{\mathit{\Psi}}\, \mathrm{C} \to \forall \mathrm{x}\, \mathrm{A(x)}.$$

9F. $\dfrac{\mathrm{C} \to \mathrm{A}(\mathrm{\alpha})}{\mathrm{C} \to \forall\mathrm{\alpha}\ \mathrm{A}(\mathrm{\alpha})}$, α όχι ελεύθερη στον C.

Ανάλογα με το **9N**, δείχνουμε ότι

$$\Lambda\gamma\Lambda\alpha\,\{\psi\,[\Psi,\alpha]\}[\gamma]\,{\downarrow}r_{\Psi}\ \mathrm{C} \to \forall\mathrm{\alpha}\,\mathrm{A}(\mathrm{\alpha}).$$

12N. $\dfrac{\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{C}}{\exists\mathrm{x}\ \mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{C}}$, x όχι ελεύθερη στον C.

Εστω ότι, για κάθε Ψ, x, έχουμε

$$\psi\,[\Psi,\,x]\ \ r_{\Psi,\,x}\,\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{C} \quad \text{και} \quad \pi\ \ r_{\Psi}\,\exists\mathrm{x}\,\mathrm{A}(\mathrm{x}).$$

Τότε, από το $\exists N\mathcal{R}$, έχουμε ότι

$$(\pi)_1\ \ r_{\Psi,\,(\pi(0))_0}\,\mathrm{A}(\mathrm{x}),$$

άρα, από το $\to\mathcal{R}$ και, εφόσον η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον C, έχουμε ότι

$$\{\psi\,[\Psi,\,(\pi(0))_0\,]\}\,[(\pi)_1]\,{\downarrow}r_{\Psi}\,\mathrm{C},$$

οπότε

$$\Lambda\pi\,\{\psi\,[\Psi,\,(\pi(0))_0\,]\}\,[(\pi)_1]\ \ r_{\Psi}\ \ \exists\mathrm{x}\,\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{C}.$$

12F. $\dfrac{\mathrm{A}(\mathrm{\alpha}) \to \mathrm{C}}{\exists\mathrm{\alpha}\,\mathrm{A}(\mathrm{\alpha}) \to \mathrm{C}}$, α όχι ελεύθερη στον C.

Εστω ότι, για κάθε Ψ, α, έχουμε

$$\psi\,[\Psi,\alpha]\ \ r_{\Psi,\,\alpha}\ \ \mathrm{A}(\mathrm{\alpha}) \to \mathrm{C}\ \ \text{και}\ \ \pi\ r_{\Psi}\ \ \exists\mathrm{\alpha}\,\mathrm{A}(\mathrm{\alpha}).$$

Τότε από το $\exists F\mathcal{R}$ έχουμε

$$\{(\pi)_0\}{\downarrow}\quad \text{και}\quad (\pi)_1\ r_{\Psi,\,\{(\pi)_0\}}\ \ \mathrm{A}(\mathrm{\alpha}),$$

άρα από το $\to\mathcal{R}$,

$$\{\psi\,[\Psi,\{(\pi)_0\}]\}\,[(\pi)_1]\,{\downarrow}r_{\Psi}\ \ \mathrm{C},$$

οπότε, τελικά,

$$\Lambda\pi\,\{\psi\,[\Psi,\{(\pi)_0\}]\}\,[(\pi)_1]\ \ r_{\Psi}\ \ \exists\mathrm{\alpha}\,\mathrm{A}(\mathrm{\alpha}) \to \mathrm{C}.$$

$\mathcal{BI}$, το Αξίωμα της Ανάστροφης Επαγωγής.

Θεωρούμε το σχήμα

$$\begin{aligned} \mathrm{E} \ \equiv \ & \forall\alpha\, \exists! \mathrm{x}\, \mathrm{R}(\overline{\alpha}(\mathrm{x})) \wedge \forall \mathrm{a}\, [\, \mathrm{Seq}(\mathrm{a}) \wedge \mathrm{R}(\mathrm{a}) \rightarrow \mathrm{A}(\mathrm{a})\,] \wedge \\ & \forall \mathrm{a}\, [\, \mathrm{Seq}(\mathrm{a}) \wedge \forall \mathrm{s}\, \mathrm{A}(\mathrm{a} * 2^{\mathrm{s}+1}) \rightarrow \mathrm{A}(\mathrm{a})\,] \ \rightarrow \mathrm{A}(1). \end{aligned}$$

Επειδή ισχύει ότι $\vdash \ \mathcal{BI} \leftrightarrow \mathrm{E}$ (FIM, σελ. 55), και σ'αυτή την τυπική απόδειξη χρησιμοποιούνται μόνο αξιώματα και κανόνες που ήδη έχουμε αποδείξει ότι είναι πραγματοποιήσιμα, αρκεί αντί για το $\mathcal{BI}$ να δείξουμε ότι το Ε είναι πραγματοποιήσιμο.
Για συντομία, θέτουμε $\mathrm{E} \ \equiv \ \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A}(1)$.

Επίσης, αν α είναι συνάρτηση, γράφουμε α_i αντί για $(\alpha)_i$.

Εστω λοιπόν ότι για κάποια π,

$$\pi \ \ r_{\Psi}\, \mathrm{B}.$$

Τότε, έχουμε:

$$\begin{array}{lll} & \text{(a)} & \pi_0 \ \ r_{\Psi}\ \forall\alpha\exists!\mathrm{x}\, \mathrm{R}(\overline{\alpha}(\mathrm{x})) \wedge \forall \mathrm{a}\, [(\mathrm{Seq}(\mathrm{a}) \wedge \mathrm{R}(\mathrm{a})) \rightarrow \mathrm{A}(\mathrm{a})] \\ \text{και} & \text{(b)} & \pi_1 \ \ r_{\Psi}\ \forall \mathrm{a}\, [\, \mathrm{Seq}(\mathrm{a}) \wedge \forall \mathrm{s}\, \mathrm{A}(\mathrm{a} * 2^{\mathrm{s}+1}) \rightarrow \mathrm{A}(\mathrm{a})\,]. \end{array}$$

Τώρα, από το (a), προκύπτουν τα

$$\begin{array}{lll} \text{(c)} & \pi_{0,0} \ \ r_{\Psi}\ \forall\alpha\exists!\mathrm{x}\, \mathrm{R}(\overline{\alpha}(\mathrm{x})), & \text{δηλ.} \\ & \pi_{0,0} \ \ r_{\Psi}\ \forall\alpha\exists \mathrm{x}\, [\, \mathrm{R}(\overline{\alpha}(\mathrm{x})) \wedge \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{R}(\overline{\alpha}(\mathrm{y})) \rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y})\,], & \text{και} \\ \text{(d)} & \pi_{0,1} \ \ r_{\Psi}\ \forall \mathrm{a}\, [\, (\mathrm{Seq}(\mathrm{a}) \wedge \mathrm{R}(\mathrm{a})) \rightarrow \mathrm{A}(\mathrm{a})\,], & \end{array}$$

οπότε, από το (c), έχουμε

$$\begin{array}{ll} \text{(e)} & (\{\pi_{0,0}\}\, [\alpha])_1 \ \ r_{\Psi,\,\alpha,\,x} \ \ \mathrm{R}(\overline{\alpha}(\mathrm{x})) \wedge \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{R}(\overline{\alpha}(\mathrm{y})) \rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y}), \\ & \text{για κάθε } \ \alpha \ \text{ και για } \ \ x = ((\{\pi_{0,0}\}\, [\alpha])(0))_0, \end{array}$$

από το (d) έχουμε

$$\begin{array}{llll} \text{(f)} & \text{για κάθε } \ a, & \text{αν} & \rho_0\, r_{\Psi,\,a}\, \mathrm{Seq}(\mathrm{a}) \ \text{ και } \ \rho_1\, r_{\Psi,\,a}\, \mathrm{R}(\mathrm{a}), \\ & & \text{τότε} & \{\{\pi_{0,1}\}\, [a]\}\, [\rho_0, \rho_1] \downarrow r_{\Psi,\,a}\, \mathrm{A}(\mathrm{a}), \end{array}$$

από το (b) έχουμε

$$\begin{array}{llll} \text{(g)} & \text{για κάθε } \ a, & \text{αν} & \rho_0\, r_{\Psi,\,a}\, \mathrm{Seq}(\mathrm{a}) \ \text{ και } \ \rho_1\, r_{\Psi,\,a}\, \forall \mathrm{s}\, \mathrm{A}(\mathrm{a} * 2^{\mathrm{s}+1}), \\ & & \text{τότε} & \{\{\pi_1\}\, [a]\}\, [\rho_0, \rho_1] \downarrow r_{\Psi,\,a}\, \mathrm{A}(\mathrm{a}). \end{array}$$

Από το (e) έχουμε ότι

(h) για κάθε σ, α, y, αν $\sigma\, r_{\Psi,\,\alpha,\,y}\, \mathrm{R}(\overline{\mathrm{\alpha}}(\mathrm{y}))$, τότε,
για $x = ((\{\pi_{0,0}\}\,[\alpha])(0))_0$, επειδή από το (e) έπεται ότι
$$(\{\pi_{0,0}\}\,[\alpha])_{1,1}\downarrow r_{\Psi,\,\alpha,\,x}\ \ \forall \mathrm{y}\,(\mathrm{R}(\overline{\mathrm{\alpha}}(\mathrm{y}))\rightarrow \mathrm{x}=\mathrm{y}),$$
έχουμε ότι
$$\{\{(\{\pi_{0,0}\}\,[\alpha])_{1,1}\}\,[y]\}[\sigma]\downarrow r_{\Psi,\,\alpha,\,x,\,y}\ \mathrm{x}=\mathrm{y},$$

οπότε, ο τύπος x=y είναι αληθής ως προς x, y.

Παρατηρούμε τώρα ότι, από το (e), προκύπτει ότι το $\{\pi_{0,0}\}\,[\alpha](0)$ ορίζεται για κάθε α.
Θέτουμε λοιπόν

$$R(\pi, a):\ (\exists\alpha)[\,a = \overline{\alpha}(x),\ \text{με}\ x = (\{\pi_{0,0}\}\,[\alpha](0))_0\,].$$

Αφού, για κάθε β και για κάθε x, προφανώς έχουμε $\overline{\beta}(x) = \overline{\beta}(x)$, για κάθε β ισχύει ότι

$$(\exists\alpha)[\,\overline{\beta}(x) = \overline{\alpha}(x),\ \text{με}\ x = (\{\pi_{0,0}\}\,[\alpha](0))_0\,],$$

οπότε προκύπτει το

(i) $(\forall\beta)(\exists x)\, R(\pi, \overline{\beta}(x))$.

Ορίζουμε τώρα το μερικό αναδρομικό κατηγόρημα

$$R_1(\pi, a):\ [\,a = \overline{\alpha}_1(x_1)\ \text{για}\ \alpha_1 = \lambda t\,(a)_t \dot{-} 1,\ x_1 = (\{\pi_{0,0}\}\,[\alpha_1](0))_0\,].$$

Δείχνουμε τώρα ότι

(j) $R(\pi, a) \Longleftrightarrow R_1(\pi, a)$.

Εστω $R(\pi, a)$. Τότε υπάρχει α με

$$a = \overline{\alpha}(x), \quad \text{για}\ x = (\{\pi_{0,0}\}\,[\alpha](0))_0.$$

Από το (e) έχουμε

$$(\{\pi_{0,0}\}\,[\alpha])_{1,0}\ \ r_{\Psi,\,\alpha,\,x}\ \ \mathrm{R}(\overline{\mathrm{\alpha}}(\mathrm{x})),$$

άρα, από το Λήμμα 4.2,

$$(\{\pi_{0,0}\}\,[\alpha])_{1,0}\ \ r_{\Psi,\,\overline{\alpha}(x)}\ \ \mathrm{R}(\mathrm{a}).$$

Θέτουμε

$$\alpha_1 = \lambda t\,(a)_t \dot{-} 1,$$

οπότε έχουμε

$$(*)\quad \overline{\alpha}_1(x) = \overline{\alpha}(x),$$

άρα, από το Λήμμα 4.2,

$$(\{\pi_{0,0}\}[\alpha])_{1,0}\ \ r_{\Psi,\,\alpha_1,\,x}\ \mathrm{R}(\overline{\alpha}(\mathrm{y})).$$

Από το (c), έχουμε

$$(\{\pi_{0,0}\}[\alpha_1])_{1,0}\ \ r_{\Psi,\,\alpha_1,\,x_1}\ \mathrm{R}(\overline{\alpha}(\mathrm{x}))$$

για

$$x_1 = (\{\pi_{0,0}\}[\alpha_1](0))_0,$$

οπότε, από το (h), παίρνουμε

$$(**)\qquad x = x_1,$$

άρα, από τα $(*)$, $(**)$, έχουμε τελικά

$$a = \overline{\alpha}_1(x_1), \quad \text{δηλαδή}\ \ R_1(\pi, a).$$

Αποδεικνύεται επίσης και το αντίστροφο:

$$R_1(\pi, a) \Rightarrow R(\pi, a).$$

Στη συνέχεια της απόδειξης, χρησιμοποιώντας τα κατηγορήματα R και R_1, καθώς και την διαισθητική αρχή της ανάστροφης επαγωγής σε ένα κατάλληλο σύνολο αριθμών ακολουθιών, θα προσδιορίσουμε μία συνάρτηση, μέσω της οποίας θα οδηγηθούμε στην, κατάλληλη για το $\mathcal{BI}$, ϵ.

Ορισμος. Ενας αριθμός ακολουθίας w είναι *barred* ως προς ένα κατηγόρημα $R(a)$ ανν ο 1 είναι εξασφαλίσιμος ως προς το κατηγόρημα $\lambda a\, R(w * a)$, δηλαδή ανν $\forall \alpha\, \exists x R(w * \overline{\alpha}(x))$.

Εστω S_1^π το σύνολο των αριθμών ακολουθιών, οι οποίοι είναι barred για το κατηγόρημα $\lambda a\, R_1(\pi, a)$, δηλ. των w ώστε $\forall \alpha \exists x R_1(\pi, w * \overline{\alpha}(x))$.

Θα βρούμε μία μερική αναδρομική συνάρτηση η με την ιδιότητα

$$(\mathrm{k})\qquad a \in S_1^\pi \to \eta[\pi, a]\ \ r_{\Psi,\,a}\ \mathrm{A(a)}.$$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιηθεί η ανάστροφη επαγωγή στη μεταγλώσσα, στο σύνολο S_1^π και, συγκεκριμένα, το διαισθητικό ανάλογο μίας μορφής του $\mathcal{BI}$ (FIM, 26.8):

(1)	$\forall a\,[Seq(a) \to R(a) \vee \neg R(a)\,] \wedge$	[R αναδρομικό]
(2)	$\forall a\,[Seq(a) \wedge R(a) \to A(a)\,] \wedge$	[βάση επαγωγής]
(3)	$\forall a\,[Seq(a) \wedge \forall s\, A(a * 2^{s+1}) \to A(a)\,] \wedge$	[επαγωγικό βήμα]
(4)	$(Seq(w) \wedge \forall \alpha\, \exists x\, R(w * \overline{\alpha}(x)) \to A(w)).$	[συμπέρασμα]

Θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο σχήμα, παίρνοντας:

- σαν $R(a)$ το $R_1(\pi, a)$ και
- σαν $A(a)$ το $\eta[\pi, a]$ $r_{\Psi,\,a}$ A(a).

Δείχνουμε ότι τα $R_1(\pi, a)$ και $\eta[\pi, a]$ $r_{\Psi,\,a}$ A(a) ικανοποιούν τα (1), (2) και (3), δηλαδή την υπόθεση του σχήματος.

(1) Το $R_1(\pi, a)$ είναι, από τον ορισμό του, αναδρομικό.

(2) Εστω ότι για τα π, a ισχύει το $R_1(\pi, a)$. Τότε

$$(\diamond) \quad a = \overline{\alpha}_1(x_1),$$

άρα ισχύει $Seq(a)$, οπότε, αφού ο Seq(a) θεωρείται ατομικός (σαν ισοδύναμος με έναν standard τύπο), έχουμε

$$\lambda t\, 0 \;\; r_a \; \mathrm{Seq(a)}.$$

Επίσης, από την απόδειξη του (j),

$$(\{\pi_{0,0}\}[\alpha_1])_{1,0} \;\; r_{\Psi,\,\alpha_1,\,x_1} \; \mathrm{R}(\overline{\alpha}(\mathrm{x}))$$

άρα, από το $(\diamond)$,

$$(\{\pi_{0,0}\}[\alpha_1])_{1,0} \;\; r_{\Psi,\,a} \; \mathrm{R(a)},$$

οπότε, από το (f),

$$\{\{\pi_{0,1}\}[a]\}\,[\lambda t\, 0, (\{\pi_{0,0}\}\,[\alpha_1])_{1,0}] \;\; r_{\Psi,\,a} \; \mathrm{A(a)}.$$

Θέτουμε

$$(\star) \quad \eta\,[\pi, a] \simeq \{\{\pi_{0,1}\}[a]\}\,[\lambda t\, 0, (\{\pi_{0,0}\}\,[\alpha_1])_{1,0}].$$

(3) Υποθέτουμε ότι ισχύει το κατηγόρημα

$$Seq(a) \wedge (\forall s)\,[a * 2^{s+1}] \in S_1^{\pi}.$$

Κάνουμε την εξής επαγωγική υπόθεση:

$$\text{για κάθε } s, \quad \eta\,[\pi, a * 2^{s+1}] \;\; r_{\Psi,\,a*2^{s+1}} \; \mathrm{A(a)},$$

οπότε, από το Λήμμα 4.2, παίρνουμε ότι

$$\text{για κάθε } s, \quad \eta\,[\pi, a * 2^{s+1}] \;\; r_{\Psi,\,a,\,s} \; \mathrm{A(a * 2^{s+1})},$$

άρα έχουμε, από το (g),

$$\{\{\pi_1\}\,[a]\}\,[\lambda t\,0, \Lambda s\,\eta\,[\pi, a * 2^{s+1}]\,]\ \ r_{\Psi,\,a}\ \mathrm{A(a)}.$$

Θέτουμε

$$(\star\star)\quad \eta\,[\pi, a] \simeq \{\{\pi_1\}\,[a]\}\,[\lambda t\,0, \Lambda s\,\eta\,[\pi, a * 2^{s+1}]\,].$$

Ορισμος της η. Παίρνοντας υπόψιν τα (2) και (3), ορίζουμε την η ως εξής:

$$\eta\,[\pi, a] \simeq \lambda u\,\eta\,(\pi, a, u),$$

όπου

$$\eta\,(\pi, a, u) \simeq \begin{cases} \{\{\pi_{0,1}\}\,[a]\}\,[\lambda t\,0,\ (\{\pi_{0,0}\}[\lambda t\,(a)_t \dot{-} 1])_{1,0}](u), & \text{αν } R_1(\pi, a), \\ \{\{\pi_1\}\,[a]\}\,[\lambda t\,0, \Lambda s\,\lambda t\,\eta\,(\pi, a * 2^{s+1}, t)](u), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Αν στην εξίσωση αυτή αντικαταστήσουμε το η με $\{z\}$, τότε αυτή παίρνει τη μορφή

$$\{z\}(\pi, a, u) \simeq \psi(z, \pi, a, u),$$

όπου η ψ είναι μερική αναδρομική.
Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα αναδρομής (IM, σελ.353), προκύπτει μία λύση e για το z. Θέτουμε

$$\eta(\pi, a, u) \simeq \{e\}(\pi, a, u),$$

η οποία είναι μερική αναδρομική ομοιόμορφα ως προς π.
Ετσι, η $\eta\,[\pi, a]$ που προκύπτει, ικανοποιεί τα $(\star)$, $(\star\star)$, οπότε έπεται η συνθήκη (k) για την η.

Από το (i) $[(\forall\beta)(\exists x)\,R(\pi, \overline{\beta}(x))\,]$ και το (j) $[R(\pi, a) \Longleftrightarrow R_1(\pi, a)\,]$, έχουμε ότι το 1 είναι barred ως προς το $\lambda a\,R_1(\pi, a)$,
άρα

$$(\dagger)\quad 1 \in S_1^{\pi}.$$

Αφού ισχύει το (k), έχουμε από το $(\dagger)$ ότι

$$\eta\,[\pi, 1]\ \ r_{\Psi,\,1}\ \mathrm{A(a)},$$

οπότε, λόγω του Λήμματος 4.2,

$$\eta\,[\pi, 1]\ \ r_{\Psi}\ \mathrm{A(1)}.$$

Τέλος, έχουμε ότι

$$\Lambda\pi\,\eta\,[\pi, 1]\ \ r_{\Psi}\ \mathrm{E}.$$

$\mathcal{BP}$, η αρχή του Brouwer (για συναρτήσεις).

$$\begin{aligned} \mathrm{E} \;\equiv\;\; & \forall\alpha\,\exists\beta\,\mathrm{A}(\alpha,\beta) \to \exists\tau\forall\alpha\,[\,\forall \mathrm{t}\,\exists! \mathrm{y}\,\tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) > 0 \,\wedge \\ & \forall\beta\,[\,\forall \mathrm{t}\,\exists \mathrm{y}\,\tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) = \beta(\mathrm{t}) + 1 \to\; \mathrm{A}(\alpha,\beta)\,]\,]. \end{aligned}$$

Εστω ότι

$$\pi \;\; r_{\Psi}\; \forall\alpha\,\exists\beta\,\mathrm{A}(\alpha,\beta).$$

Τότε έχουμε τα εξής:

Για κάθε α, από τα $\forall F\mathcal{R}$ και $\exists F\mathcal{R}$,

$$\text{(a)}\quad \{\pi\}\,[\alpha]\!\downarrow \;\text{ και }\; \{(\{\pi\}\,[\alpha])_0\}\!\downarrow \;\text{ και }\; (\{\pi\}[\alpha])_1 \;\; r_{\Psi,\,\alpha,\beta_1}\, \mathrm{A}(\alpha,\beta),$$

$$\text{με }\; \beta_1 = \{(\{\pi\}\,[\alpha])_0\}.$$

Θέτουμε $\tau = \Lambda\alpha\,\beta_1$.

Από το Λήμμα 2.3, για κάθε α, το $\{\tau\}\,[\alpha]$ είναι κατάλληλα ορισμένο, δηλαδή ισχύουν τα

$$\text{(b)}\qquad \forall t \exists! y\, \tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) > 0 \quad \text{και}$$

$$\text{(c)}\qquad \forall t\, \tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y_t)) = \beta_1(t) + 1,$$

$$\text{όπου}\quad y_t = \mu y\, \tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) > 0.$$

Ορισμος της ρ_0. Θα βρούμε τώρα μία συνάρτηση ρ_0 ώστε

$$\rho_0 \;\; r_{\Psi,\,\tau,\,\alpha}\; \forall \mathrm{t}\exists! \mathrm{y}\, \tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) > 0,$$

δηλαδή

$$\rho_0 \;\; r_{\Psi,\,\tau,\,\alpha}\; \forall \mathrm{t}\exists \mathrm{y}\,(\tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) > 0 \wedge \forall \mathrm{z}(\tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{z})) > 0 \to \mathrm{y} = \mathrm{z})).$$

Λόγω του (c), έχουμε ότι, για τυχόν t,

ο τύπος $\tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) > 0$ είναι αληθής ως προς τ, α, t, y_t,

άρα προκύπτει ότι

$$\text{(d)}\qquad \lambda s\, 0 \;\; r_{\tau,\alpha,t,\,y_t}\; \tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) > 0.$$

Εστω ότι

$$\sigma \;\; r_{\tau,\alpha,t,\,z}\;\; \tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{z})) > 0.$$

Τότε

ο τύπος $\tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{z})) > 0$ είναι αληθής ως προς τ, α, t, z, οπότε, από το (b), έχουμε ότι

$$z = y_t,$$

επομένως

$$\text{(e)} \quad \lambda s\, 0 \;\; r_{z,\,y_t}\; \mathrm{z = y}.$$

Από το (e), παίρνουμε τώρα

$$\Lambda z\, \Lambda\sigma\, \lambda s\, 0 \;\; r_{\tau,\alpha,t,\,y_t}\; \forall \mathrm{z}\, (\tau(2^{\mathrm{t+1}} * \overline{\alpha}(\mathrm{z})) > 0 \to \mathrm{y = z}),$$

οπότε, από το (d), έχουμε

$$< \lambda s\, 0,\, \Lambda z\, \Lambda\sigma\, \lambda s\, 0 > \;\; r_{\tau,\alpha,t,\,y_t} \;\; \begin{array}{l} \tau(2^{\mathrm{t+1}} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) > 0 \wedge \\ \forall \mathrm{z}\, (\tau(2^{\mathrm{t+1}} * \overline{\alpha}(\mathrm{z})) > 0 \to \mathrm{y = z}), \end{array}$$

και από τους $\exists N\mathcal{R}$, $\forall N\mathcal{R}$,

$$\rho_0 \;\; r_{\tau,\alpha}\; \forall \mathrm{t}\, \exists! \mathrm{y}\, \tau(2^{\mathrm{t+1}} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) > 0,$$

όπου

$$\rho_0 \simeq \Lambda t < \mu y \tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) > 0\, ; < \lambda s\, 0,\, \Lambda z\, \Lambda\sigma\, \lambda s\, 0 >> .$$

Ορισμος της ρ_1. Θα βρούμε τώρα και μία συνάρτηση ρ_1 ώστε

$$\rho_1 \;\; r_{\Psi,\,\tau,\,\alpha}\; \forall \upbeta\, [\, \forall \mathrm{t}\, \exists \mathrm{y}\, \tau(2^{\mathrm{t+1}} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) = \upbeta(\mathrm{t}) + 1 \to \mathrm{A}(\alpha,\upbeta)\,].$$

Εστω τυχούσα συνάρτηση β και έστω ότι

$$\sigma \;\; r_{\tau,\,\alpha,\,\beta}\; \forall \mathrm{t}\, \exists \mathrm{y}\, \tau(2^{\mathrm{t+1}} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) = \upbeta(\mathrm{t}) + 1.$$

Τότε, από τα $\forall N\mathcal{R}$ και $\exists N\mathcal{R}$, έχουμε, για κάθε t ότι

$$\{\sigma\}\, [t] \downarrow \;\text{ και }\; (\{\sigma\}[t])_1 \;\; r_{\tau,\,\alpha,\,\beta,\,y_0}\; \tau(2^{\mathrm{t+1}} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) = \upbeta(\mathrm{t}) + 1,$$
$$\text{όπου } y_0 = (\{\sigma\}\, [t](0))_0.$$

Οπότε θα έχουμε

$$\forall t\, \tau\, (2^{t+1} * \overline{\alpha}(y_0)) = \beta(t) + 1,$$

και, από τα (b) και (c)

$$\beta = \beta_1$$

και λόγω του (a),

$$(\{\pi\}\, [\alpha])_1 \;\; r_{\Psi,\,\alpha,\,\beta}\; \mathrm{A}(\alpha,\upbeta).$$

Αρκεί λοιπόν να πάρουμε

$$\rho_1 \simeq \Lambda\beta\, \Lambda\sigma\, (\{\pi\}\, [\alpha])_1.$$

Ετσι για τις $\rho_0,\ \rho_1$ έχουμε ότι

$$< \Lambda\tau, \Lambda\alpha < \rho_0, \rho_1 >> \ \ r_\Psi\ \exists\tau\forall\alpha\ [\forall t\ \exists! y\ \tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) > 0 \wedge \forall\beta\ [\forall t\ \exists y\ \tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) = \beta(t) + 1 \to\ A(\alpha,\beta)\ ]\ ],$$

και, τελικά,

$$\Lambda\pi < \Lambda\tau,\ \Lambda\alpha < \rho_0, \rho_1 >>\ r_\Psi\ E.$$

⊣

4.5. Πορισμα. Το τυπικό σύστημα της Ενορατικής Ανάλυσης είναι συνεπές, δηλαδή, για κανέναν τύπο Α δεν μπορούν να αποδειχθούν και ο Α και ο $\neg$A.

Αποδειξη. Αν οι Α, $\neg$A αποδεικνύονται, τότε είναι πραγματοποιήσιμοι. Αλλά, ισχύει ότι

$$A, \neg A\ \vdash_{\mathcal{B}}\ 1 = 0,$$

οπότε και το $1 = 0$ είναι πραγματοποιήσιμος, δηλαδή, εφόσον είναι ατομικός, αληθής τύπος. Υποθέτοντας λοιπόν ότι το $1 = 0$ δεν αληθεύει ή αλλιώς, ότι η (διαισθητική) αριθμητική είναι συνεπής, προκύπτει η συνέπεια του τυπικού συστήματος της Ενορατικής Ανάλυσης $\mathcal{I}$. ⊣

Σχολιο. Στην απόδειξη της πραγματοποίησης του Αξιώματος της Επαγωγής της Αριθμητικής (13), χρησιμοποιήθηκε η αντίστοιχη διαισθητική αρχή επαγωγής, στη μεταγλώσσα. Στην περίπτωση της ανάστροφης επαγωγής $\mathcal{BI}$, επίσης χρησιμοποιήθηκε ανάστροφη επαγωγή στη μεταγλώσσα.
Για την αρχή του Brouwer $\mathcal{BP}$, δεν χρειάστηκε άμεσα η αντίστοιχη διαισθητική αρχή· χρησιμοποιήθηκε όμως το συναρτησοειδές $\{\tau\}\,[\alpha]$, το οποίο, όταν είναι κατάλληλα ορισμένο (ιδιότητα η οποία εδώ εξασφαλίστηκε από τον ορισμό της πραγματοποίησης του $\forall\alpha\,\exists\beta\,A(\alpha,\beta)$), υπολογίζει για κάθε συνάρτηση α μία συνάρτηση β με συνεχή (ως προς την τοπολογία του Baire) τρόπο, δηλαδή, για κάθε φυσικό αριθμό t, υπολογίζει την τιμή $\beta(t)$ χρησιμοποιώντας μόνο πεπερασμένο πλήθος τιμών της συνάρτησης α, δηλαδή από το $\overline{\alpha}(y)$ για κάποιο y, όμοια με την αρχή του Brouwer (για συναρτήσεις, όπως αυτή διατυπώθηκε εδώ).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Τυποποίηση των μερικών αναδρομικών συναρτησοειδών τύπου 2 και της συναρτησιακής πραγματοποίησης

1. Αναδρομικά συναρτησοειδή τύπου 2

Η κλάση των μερικών αναδρομικών συναρτήσεων με μεταβλητές αριθμούς και συναρτήσεις από το ω στο ω (συναρτησοειδών) παράγεται από τα ακόλουθα σχήματα, όπου $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ είναι λίστες μεταβλητών και των δύο ειδών, $\mathfrak{b}$ πιθανόν κενή.

$$\textbf{(S0)} \qquad \begin{cases} \varphi(a,\mathfrak{b}) \simeq a, & \text{αν} \quad \psi(a,\mathfrak{b}) \simeq 0, \\ \varphi(a,\mathfrak{b}) \simeq \varphi(a',\mathfrak{b}), & \text{αν} \quad \psi(a,\mathfrak{b}) \simeq c'. \end{cases} \qquad <0, g>$$

[Εχουμε τότε ότι $\varphi(a,\mathfrak{b}) \simeq \mu w_{w \geq a}\, [\psi(w,\mathfrak{b}) = 0]$, οπότε
$\mu w\, [\psi(w,\mathfrak{b}) = 0] \simeq \varphi(0,\mathfrak{b})$]

$$\textbf{(S1)} \qquad \varphi(a,\mathfrak{b}) = a' = a + 1. \qquad <1>$$

$$\textbf{(S2)} \qquad \varphi(\mathfrak{b}) = g. \qquad <2, g>$$

$$\textbf{(S3)} \qquad \varphi(a,\mathfrak{b}) = a. \qquad <3>$$

$$\textbf{(S4)} \qquad \varphi(\mathfrak{b}) \simeq \psi(\chi(\mathfrak{b}),\mathfrak{b}). \qquad <4, g, h>$$

$$\textbf{(S5)} \qquad \begin{cases} \varphi(0,\mathfrak{b}) \simeq \psi(\mathfrak{b}), \\ \varphi(a',\mathfrak{b}) \simeq \chi(a, \varphi(a,\mathfrak{b}), \mathfrak{b}). \end{cases} \qquad <5, g, h>$$

$$\textbf{(S6)} \qquad \varphi(\mathfrak{a}) \simeq \psi(\mathfrak{a}_1), \qquad <6, g, h>$$

όπου η $\mathfrak{a}_1$ περιέχει τουλάχιστον $h+1$ αριθμητικές μεταβλητές και από την οποία προέρχεται η $\mathfrak{a}$, αν η $(h+1)$-στή αριθμητική μεταβλητή μετατεθεί στην αρχή της λίστας.

(S7) $\varphi(a, \alpha, \mathfrak{b}) \simeq \alpha(a)$. $\quad < 7 >$

(S8) $\varphi(\mathfrak{a}) \simeq \psi(\mathfrak{a}_1)$, $\quad < 8, g, h >$

όπου η $\mathfrak{a}_1$ είναι λίστα που περιέχει τουλάχιστον $h+1$ συναρτησιακές μεταβλητές και από την οποία η $\mathfrak{a}$ προέρχεται αν η $(h+1)$-στή συναρτησιακή μεταβλητή μετατεθεί στην αρχή της λίστας.

Παρατηρηση. Στη διατύπωση των σχημάτων ακολουθούμε την εξής σύμβαση: οι μεταβλητές κάθε τύπου είναι στη σωστή σειρά μεταξύ τους, όχι όμως κατ' ανάγκη και σε σχέση με τις μεταβλητές του άλλου τύπου, ώστε ο συμβολισμός να είναι συντομότερος. Αργότερα, θα βάζουμε πρώτα τις αριθμητικές και στη συνέχεια τις συναρτησιακές μεταβλητές, έτσι κάθε συνάρτηση με τις ανεξάρτητες μεταβλητές της θα γράφεται π.χ.

$$\varphi(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l).$$

Η σημασία των αριθμών της δεξιάς στήλης θα εξηγηθεί στη συνέχεια.

Για τον υπολογισμό μίας συγκεκριμένης τιμής ενός μερικού αναδρομικού συναρτησοειδούς, δηλ. για συγκεκριμένα $a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$, χρησιμοποιείται μόνο πεπερασμένος αριθμός τιμών των $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Αρκεί λοιπόν να έχουμε σαν δεδομένο εισόδου για κάθε συνάρτηση–όρισμα α, ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών της α, που περιλαμβάνει όσες θα χρειαστούν στον υπολογισμό. Αυτό, μέσω της κωδικοποίησης αρχικών τμημάτων μίας α από την

$$\overline{\alpha}(x) = \prod_{i<x} {p_i}^{\alpha(i)+1},$$

αφενός μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιούμε αριθμούς στη θέση των συναρτήσεων, δείχνει όμως και ότι έχει νόημα να θεωρήσουμε και υπολογισμούς για μερικά ορισμένες συναρτήσεις-ορίσματα. Ετσι, είναι αποδεκτοί σαν δεδομένα εισόδου και αριθμοί που κωδικοποιούν τιμές όχι διαδοχικές, όπως π.χ. ο ${p_0}^{\alpha(0)+1} \cdot {p_3}^{\alpha(3)+1} \cdot {p_8}^{\alpha(8)+1}$, όπου η α μπορεί κάλλιστα να μην ορίζεται ας πούμε στο 2.

1.1. Ορισμος. Ορίζουμε το κατηγόρημα $b \mid \alpha$, όπου b αριθμός και $\alpha : \omega \rightharpoonup \omega$, που εκφράζει ότι ο b κωδικοποιεί k τιμές της α (το k

καθορίζεται από το b), ως εξής:

$$b \mid \alpha \iff_{\text{ορ}} (\forall i)_{i<b}\ [(b)_i > 0 \rightarrow (b)_i = \alpha(i) + 1]\,.$$

Ορίζουμε τώρα έναν τύπο $\mathrm{b} \mid \upalpha$, που εκφράζει το $b \mid \alpha$:

$$\mathrm{b} \mid \upalpha\ \equiv\ (\forall \mathrm{i})_{\mathrm{i}<\mathrm{b}}\ [(\mathrm{b})_{\mathrm{i}} > 0 \rightarrow (\mathrm{b})_{\mathrm{i}} = \upalpha(\mathrm{i}) + 1]\,.$$

Επίσης ορίζουμε:

$$b_1, \ldots, b_l \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_l \iff_{\text{ορ}} b_1 | \alpha_1 \wedge \ldots \wedge b_l \,|\, \alpha_l$$

και αντίστοιχα

$$\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_l \,|\, \upalpha_1, \ldots, \upalpha_l\ \equiv\ \mathrm{b}_1 \,|\, \upalpha_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{b}_l \,|\, \upalpha_l\,.$$

1.2. Λημμα: $\quad \vdash\ \mathrm{a} < \mathrm{b}\ \leftrightarrow\ \mathrm{sg}\,(\mathrm{a}' \dot{-} \mathrm{b}) = 0\,.$

Αποδειξη. Από τους ορισμούς των sg, $\dot{-}$ και τις ιδιότητες των $<, \leq$, έχουμε:

$$\vdash\ \mathrm{sg}\,(\mathrm{a}' \dot{-} \mathrm{b}) = 0\ \leftrightarrow\ \mathrm{a}' \dot{-} \mathrm{b} = 0\ \leftrightarrow\ \mathrm{a}' \leq \mathrm{b}\ \leftrightarrow\ \mathrm{a} < \mathrm{b}.$$

$\dashv$

Με βάση το προηγούμενο Λήμμα, έχουμε:

$$\vdash\ \mathrm{b} \,|\, \upalpha\ \leftrightarrow\ \forall\, \mathrm{i}_{\,\mathrm{i}<\mathrm{b}}\,[\,(\mathrm{sg}(1 \dot{-} (\mathrm{b})_{\mathrm{i}}) = 0) \rightarrow (\mathrm{sg}(\,|(\mathrm{b})_{\mathrm{i}} - (\upalpha(\mathrm{i}) + 1)|\,) = 0)\,].$$

Από το $\vdash\ \mathrm{a} = \mathrm{b}\ \vee\ \neg\, \mathrm{a} = \mathrm{b}$ (που αποδεικνύεται με τα αξιώματα της αριθμητικής), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \vdash\ \ \mathrm{b} \mid \upalpha\ \ &\leftrightarrow\ \ (\forall\, \mathrm{i})_{\mathrm{i}<\mathrm{b}}\,[\overline{\mathrm{sg}}\,(1 \dot{-} (\mathrm{b})_{\mathrm{i}})\ \cdot\ \mathrm{sg}(|(\mathrm{b})_{\mathrm{i}}\ -\ (\upalpha(\mathrm{i}) + 1)|) = 0] \\ &\leftrightarrow\ \ \mathrm{sg}\,\left[\sum_{\mathrm{i}<\mathrm{b}} [\overline{\mathrm{sg}}\,(1 \dot{-} (\mathrm{b})_{i})\ \cdot\ \mathrm{sg}(|(\mathrm{b})_{\mathrm{i}}\ -\ (\upalpha(\mathrm{i}) + 1)|)]\right] = 0, \end{aligned}$$

δηλαδή $\vdash\ \mathrm{b} \mid \upalpha\ \leftrightarrow\ \mathrm{t} = 0$, όπου t είναι όρος, για τον οποίο $\vdash\ \mathrm{t} = 0 \vee \mathrm{t} = 1$.

1.3. Ορισμος. Ενας ατομικός τύπος της μορφής $\mathrm{t} = 0$, όπου t όρος και $\vdash\ \mathrm{t} = 0 \vee \mathrm{t} = 1$, λέγεται standard τύπος.

Παρατηρηση. Με διαδικασία ανάλογη μ' αυτήν που μόλις περιγράψαμε, αν για τους τύπους $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{\mathrm{n}}$ έχουμε βρει ισοδύναμους standard τύπους και ο E προέρχεται από τους $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{\mathrm{n}}$ μόνο με συνδέσμους και

φραγμένους ποσοδείκτες, τότε μπορούμε να βρούμε έναν standard τύπο ισοδύναμο με τον E.
Σημειώνουμε ότι κάθε ατομικός τύπος είναι ισοδύναμος με έναν standard τύπο, αφού $\vdash \mathrm{a}=\mathrm{b} \leftrightarrow \mathrm{sg}(|\mathrm{a}-\mathrm{b}|)=0$.

1.4. Ορισμος. Αν a, b είναι αριθμοί, τότε ορίζουμε το κατηγόρημα

$$a \parallel b \Longleftrightarrow_{\mathsf{op}} (\forall i)_{i<a}\,[\,(a)_i > 0 \;\rightarrow\; (a)_i = (b)_i\,],$$

που εκφράζει ότι ο b επεκτείνει το a σαν κωδικοποίηση τιμών κάποιας συνάρτησης α.

Ορίζουμε τον αντίστοιχο τύπο

$$\mathrm{a} \parallel \mathrm{b} \equiv \forall \mathrm{i}_{\,\mathrm{i}<\mathrm{a}}[\,(\mathrm{a})_\mathrm{i} > 0 \;\rightarrow\; (\mathrm{a})_\mathrm{i} = (\mathrm{b})_\mathrm{i}\,]$$

που ανάλογα με τα προηγούμενα, είναι ισοδύναμος με έναν standard τύπο.

Ορίζουμε επίσης:

$$a_1, \ldots, a_l \parallel b_1, \ldots, b_l \Longleftrightarrow_{\mathsf{op}} a_1 \parallel b_1 \wedge \ldots \wedge a_l \parallel b_l$$

και $$\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_l \parallel \mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_l \equiv \mathrm{a}_1 \parallel \mathrm{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{a}_l \parallel \mathrm{b}_l\,.$$

Βασικη Παρατηρηση. Ολη η διαδικασία τυποποίησης των μερικών αναδρομικών συναρτησοειδών θα γίνει στο βασικό σύστημα $\mathcal{B}$ χωρίς το σχήμα της ανάστροφης επαγωγής $\mathcal{BI}$ και παίρνοντας αντί για το σχήμα αριθμήσιμης επιλογής ${}^{\mathbf{x}}\mathbf{2.1}$, το ασθενέστερο

$$\forall \mathrm{x}\, \exists! \mathrm{y}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \rightarrow \exists \upalpha \forall \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \upalpha(\mathrm{x})).$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε και τη "συνάρτηση" f_{25} :

$$\mathrm{f}_{25}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \;=\; \mathrm{a} \circ \mathrm{b} \;=\; \prod_{\mathrm{i}<\max(\mathrm{a},\mathrm{b})} \mathrm{p}_\mathrm{i}^{\max((\mathrm{a})_\mathrm{i}, (\mathrm{b})_\mathrm{i})},$$

που μας δίνει την πλουσιότερη από τις δύο κωδικοποιήσεις a, b με σωστό τρόπο, ώστε :

$\vdash \;\; \mathrm{a} \mid \upalpha \;\wedge\; \mathrm{b} \mid \upalpha \;\rightarrow\; \mathrm{a} \circ \mathrm{b} \mid \upalpha \;\wedge\; \mathrm{a} \parallel \mathrm{a} \circ \mathrm{b} \;\wedge\; \mathrm{b} \parallel \mathrm{a} \circ \mathrm{b},$

$\vdash \;\; \forall\, \mathrm{i}_{\mathrm{i}<\mathrm{a},\mathrm{b}}\,[\,(\mathrm{a})_\mathrm{i}, (\mathrm{b})_\mathrm{i} > 0 \;\rightarrow\; (\mathrm{a})_\mathrm{i} = (\mathrm{b})_\mathrm{i}\,] \;\rightarrow\; \mathrm{a} \parallel \mathrm{a} \circ \mathrm{b} \;\wedge\; \mathrm{b} \parallel \mathrm{a} \circ \mathrm{b},$

$\vdash \;\; \mathrm{a} \circ \mathrm{b} = \mathrm{b} \circ \mathrm{a}.$

1.5. Ορισμος. Αν η φ δίνεται από κάποιο σχήμα από τα (S0) – (S8), ο αριθμός που βρίσκεται στα δεξιά του σχήματος είναι *κατάλληλος δείκτης* της φ, με την (επαγωγική) υπόθεση ότι ο g στα (S0), (S4), (S5), (S6), (S8) είναι κατάλληλος δείκτης της ψ, ο h στα (S4), (S5) της χ, και οι g στο (S2) και h στα (S6), (S8) είναι φυσικοί αριθμοί.

Αν για την παραγωγή της φ χρησιμοποιούνται μόνο τα (S1) – (S8), τότε ο κατάλληλος δείκτης είναι ένας *πρωτογενής αναδρομικός δείκτης*.

1.6. Ορισμος. Μία παραγωγή της φ είναι *χωρίς πλεονασμούς* (irredundant), ανν κάθε συνάρτηση που ορίζεται σε κάποιο βήμα εκτός από το τελευταίο, χρησιμοποιείται σε κάποιο επόμενο.

Στην περίπτωση αυτή, από έναν κατάλληλο δείκτη f της φ μπορούμε να βρούμε ποιές συγκεκριμένες εφαρμογές σχημάτων δίνουν την φ.

Στον f δεν έχουν κωδικοποιηθεί οι αριθμοί k, l που δίνουν το πλήθος των ορισμάτων της φ. Ομως, επιχειρώντας έναν υπολογισμό, αν πάρουμε μεγαλύτερα k, l, θα προκύψει μία συνάρτηση σταθερή ως προς τις επιπλέον μεταβλητές. Αν πάρουμε μικρότερα, θα προκύψει μία συνάρτηση που δεν θα ορίζεται σε κάποιες τιμές, αν σε κάποιο βήμα χρειαστεί μία τιμή που λείπει.

1.7. Ορισμος. Ορίζονται συναρτήσεις $\mathrm{mn}(f)$ [minimum number variables] και $\mathrm{mf}(f)$ [minimum function variables], έτσι ώστε, αν ο f είναι κατάλληλος δείκτης για την φ, να μας δίνουν τον ελάχιστο (απαραίτητο) αριθμό μεταβλητών. Αυτό γίνεται ευκολότερα σε κάποιο επόμενο στάδιο.

2. Δέντρα υπολογισμού και κωδικοποίησή τους

Θεωρούμε τώρα τη διαδικασία υπολογισμού μίας τιμής (αν τελικά ορίζεται) μίας συνάρτησης φ, για την οποία μας δίνονται τα f, k, l και συγκεκριμένα $a_1, \ldots, a_k,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Για την τιμή της φ που υπολογίζεται από αυτά, γράφουμε

$$\varphi(a_1, \ldots, a_k,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_l) \quad \text{ή} \quad \{f\}(a_1, \ldots, a_k,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_l).$$

Βλέπουμε έναν τέτοιο υπολογισμό με αποτέλεσμα w σαν απόδειξη της πρότασης

$$\text{“}\{f\}(a_1, \ldots, a_k,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_l) \simeq w\text{”}.$$

Εφόσον στον υπολογισμό χρησιμοποιούνται μόνο πεπερασμένες τιμές των $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, η προηγούμενη πρόταση μπορεί να αντικατασταθεί από μία για 4 αριθμούς, και μάλιστα κωδικοποιημένους από έναν κωδικό τετράδας, τον

$$< f, < k, a_1, \ldots, a_k >, < l, b_1, \ldots, b_l >, w >,$$

$$\text{όπου } b_1, \ldots, b_l \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_l.$$

Θα παραστήσουμε τον υπολογισμό σαν μία απόδειξη σε μορφή δέντρου, με τις τετράδες αυτές στη θέση των τύπων, ή αλλιώς, με ένα *δέντρο υπολογισμού*, ως εξής:

(a) Στη ρίζα του δέντρου βάζουμε τον αριθμό

$$< f, < k, a_1, \ldots, a_k >, < l, b_1, \ldots, b_l >, w >,$$

που εκφράζει το τελικό αποτέλεσμα.

(b) Γιά τους υπόλοιπους κόμβους, θεωρούμε τα σχήματα σαν κανόνες με δύο (S0b, S4, S5b), μία (S0a, S5a, S6, S8), ή καμία (S1, S2, S3, S7) υποθέσεις.

Γιά παράδειγμα, μία εφαρμογή του S4 αντιστοιχεί σε μία απόδειξη του $\varphi(\mathfrak{b}) \simeq w$ από τα $\psi(u, \mathfrak{b}) \simeq w$ και $\chi(\mathfrak{b}) \simeq u$, για κάποιο u. Αυτό στο δέντρο θα παρασταθεί ως εξής:

Αν $\mathfrak{b} = a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l,\ b_i \,|\, \alpha_i, 1 \leq i \leq l$ και f, g, h οι κατάλληλοι δείκτες των φ, ψ, χ αντίστοιχα, (άρα $f = < 4,\ g,\ h >$), τότε :

$$\frac{<g,<k{+}1,u,a_1,\ldots,a_k>,<l,b_1,\ldots,b_l>,w> \qquad <h,<k,a_1,\ldots,a_k>,<l,b_1,\ldots,b_l>,u>}{<<4,g,h>,<k,a_1,\ldots,a_k>,<l,b_1,\ldots,b_l>,w>}$$

Κωδικοποιούμε τώρα με ένα μόνο αριθμό, τον *κωδικό του δέντρου υπολογισμού*, ολόκληρο το δέντρο, έστω Y.
Το Y έχει, σύμφωνα με τον τελευταίο κανόνα που εφαρμόστηκε, μία από τις μορφές :

$$\frac{\mathrm{Y}_1 \qquad \mathrm{Y}_2}{q}\ , \qquad \frac{\mathrm{Y}_1}{q}\ , \qquad q\ ,$$

όπου q η τελική τετράδα. Επαγωγικά, αν τα Y_1, Y_2 κωδικοποιούνται από τους y_1, y_2 αντίστοιχα, τότε θέτουμε $y =< q, y_1, y_2 >$ ή $< q, y_1 >$ ή $< q >$ αντίστοιχα, και ορίζουμε το y σαν τον κωδικό του δέντρου υπολογισμού Y.

Γενικεύουμε την έννοια των δέντρων υπολογισμού, θεωρώντας κάθε αριθμό f σαν δείκτη, παρατηρώντας ότι, μαζί με κάποιες εισόδους

$$a_1, \ldots, a_k, \, \alpha_1, \ldots, \alpha_l,$$

μπορούμε πάντα να επιχειρήσουμε έναν υπολογισμό. Αν ο f έχει κάποια από τις μορφές που δίνονται για τα S0 – S8, συνεχίζουμε τον υπολογισμό, αλλιώς ο υπολογισμός δεν δίνει αποτέλεσμα.

Ετσι δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

2.1. Ορισμος. Για κάθε $k, l,$ ο f είναι δείκτης μίας μερικής συνάρτησης $k + l$ μεταβλητών

$$\varphi \simeq \lambda \, a_1 \ldots a_k \, \alpha_1 \ldots \alpha_l \, \varphi(a_1, \ldots, a_k, \, \alpha_1, \ldots, \alpha_l),$$

η οποία στα $a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ παίρνει την τιμή w, ακριβώς αν υπάρχει ένα δέντρο υπολογισμού με ρίζα

$$< f, < k, a_1, \ldots, a_k >, < l, b_1, \ldots, b_l >, w >,$$

για κάποια $b_1, \ldots, b_l$ με $b_1, \ldots, b_l \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_l$.
Αν το w υπάρχει, είναι μοναδικό, όπως μπορεί να δειχτεί.

Ενα δέντρο υπολογισμού *δεν είναι καλά ορισμένο*, δηλαδή

$$\text{η τιμή } \{f\}(a_1, \ldots, a_k, \, \alpha_1, \ldots, \alpha_l) \text{ δεν ορίζεται,}$$

ανν για όλα τα $b_1, \ldots, b_l$ με $b_1, \ldots, b_l \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_l,$

(a) σε κάποιο βήμα χρειάζονται περισσότερες τιμές από όσες υπάρχουν ή
(b) σε κάποιο βήμα προκύπτει κάποιος δείκτης που δεν είναι κατάλληλος για κανένα σχήμα ή
(c) προκύπτει μία άπειρη σειρά υπολογισμών εξαιτίας του S0, στην περίπτωση που η $\psi(a, \mathfrak{b})$ που δίνεται, είναι πάντοτε ορισμένη και διαφορετική από το 0.

Οι περιπτώσεις (a), (b) οφείλονται σε ελλιπή ή ακατάλληλα δεδομένα.
Η (c) είναι ουσιαστική περίπτωση αδύνατου υπολογισμού.

Ορισμός του τύπου Cp(y).

Γιά να εκφράσουμε τυπικά το κατηγόρημα $Cp(y) \Longleftrightarrow_{\mathsf{op}}$ ο y είναι κωδικός δέντρου υπολογισμού, παρατηρούμε ότι :

$$Cp(y) \Longleftrightarrow Cp_{0a}(y) \ \vee \ Cp_{0b}(y), \dots, \ \vee Cp_8(y),$$

όπου οι όροι της διάζευξης αντιστοιχούν στα S0 – S8, όπως δείχνουν οι υποδείκτες, και εκφράζουν ότι το y είναι κωδικός δέντρου υπολογισμού, που τελειώνει με εφαρμογή του σχήματος που αντιστοιχεί στον υποδείκτη.

Για τον ορισμό του Cp(y), ορίζουμε πρώτα τους $\mathrm{Cp}_{0a}, \dots, \mathrm{Cp}_8$ κατάλληλα, για παράδειγμα:

$$\mathrm{Cp_1(y)} \ \equiv \ \mathrm{y} =<\mathrm{(y)_0}> \ \wedge \ \mathrm{(y)_{0,1,0}} \ > \ 0 \ \wedge \ \mathrm{(y)_0} =<<1>, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{(y)'_{0,1,1}}>,$$

όπου $\quad \mathrm{A} \equiv \prod_{\mathrm{i} \le \mathrm{(y)_{0,1,0}}} \mathrm{p_i^{(y)_{0,1,i}}} \qquad , \qquad \mathrm{B} \equiv \prod_{\mathrm{i} \le \mathrm{(y)_{0,2,0}}} \mathrm{p_i^{(y)_{0,2,i}}}$.

Το $\mathrm{y} = < \mathrm{(y)_0} >$ επιλέγεται έτσι, γιατί το S1, που δίνει τον τελευταίο υπολογισμό, έχει 0 υποθέσεις. Το $\mathrm{(y)_{0,1,0}} > 0$ γιατί πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα αριθμητικό όρισμα και το $\mathrm{(y)_0} =<<1>, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{(y)'_{0,1,1}}>$ για να έχουμε το αποτέλεσμα της συνάρτησης του επομένου, που αντιστοιχεί στο S1, όπου το A μας δίνει τα αριθμητικά ορίσματα και το B τα συναρτησιακά που ήταν είσοδοι στο τελευταίο βήμα.

$$\begin{array}{rrcl}
\mathrm{Cp_4(y)} \equiv & \mathrm{y} & = & <\mathrm{(y)_0}, \mathrm{(y)_1}, \mathrm{(y)_2}> \ \wedge \ \mathrm{Cp((y)_1)} \ \wedge \ \mathrm{Cp((y)_2)} \ \wedge \\
& \mathrm{(y)_0} & = & <<4, \mathrm{(y)_{0,0,1}}, \mathrm{(y)_{0,0,2}}>, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{(y)_{0,3}}> \ \ \wedge \\
& \mathrm{(y)_{1,0}} & = & <\mathrm{(y)_{0,0,2}}, \mathrm{(y)_{0,1}}, \mathrm{(y)_{0,2}}, \mathrm{(y)_{1,0,3}}> \ \wedge \\
& \mathrm{(y)_{2,0}} & = & <\mathrm{(y)_{0,0,1}}, 2^{\mathrm{(y)'_{0,1,0}}} \cdot 3^{\mathrm{(y)_{1,0,3}}} \cdot \prod_{2 \le \mathrm{i} \le \mathrm{(y)'_{0,1,0}}} \mathrm{p_i^{(y)_{0,1,i} \dot{-} 1}}, \\
& & & \hfill \mathrm{(y)_{0,2}}, \ \mathrm{(y)_{0,3}}>
\end{array}$$

όπου A, B όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ένα σχήμα με δύο υποθέσεις. Αυτό έχει σαν συνέπεια να εμφανίζονται στον ορισμό του τύπου $\mathrm{Cp_4(y)}$, οι $\mathrm{Cp((y)_1)}$, $\mathrm{Cp((y)_2)}$, ενώ ακόμη ο Cp(y) δεν έχει οριστεί.

Αυτό που γίνεται είναι ότι θα βρεθεί ένας (standard) τύπος Cp(y) με ελεύθερη μεταβλητή μόνο την y, ώστε να ισχύει

$$\vdash \mathrm{Cp(y)} \ \leftrightarrow \ \mathrm{Cp}_{0a}\mathrm{(y)} \ \vee \ \dots \ \vee \ \mathrm{Cp_8(y)},$$

με τους ορισμούς των $\mathrm{Cp}_{0a}, \dots, \mathrm{Cp}_8$ που δόθηκαν.

Θέτουμε $\mathrm{D(y)} = \mathrm{Cp}_{0a}(\mathrm{y}) \vee \ldots \vee \mathrm{Cp}_8(\mathrm{y})$.

Συμβολίζουμε με $\mathrm{D(y,z)}$ τον τύπο που προκύπτει από τον D(y) αν αντικαταστήσουμε κάθε υποτύπο του της μορφής Cp(s), για κάποιο όρο s, με τον $(\mathrm{z})_\mathrm{s} = 0$. Ο D(y,z) είναι τώρα ένας συγκεκριμένος τύπος και από τη μορφή του, έπεται ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν όρο r(y,z) ώστε

$$\vdash \mathrm{r(y,z)} \leq 1 \text{ και } \vdash \mathrm{D(y,z)} \leftrightarrow \mathrm{r(y,z)} = 0.$$

Εισάγουμε τώρα το σύμβολο $\mathrm{f}_{26} \equiv \mathrm{ccp}$, για να εκφράσουμε τη συνάρτηση $\widetilde{cp}(y)$ της ιστορίας των τιμών [1] της χαρακτηριστικής $cp(y)$ του κατηγορήματος $Cp(y)$ με αξιώματα τα:

$$\mathrm{ccp}(0) = 1, \qquad \mathrm{ccp}(\mathrm{y}') = \mathrm{ccp}(\mathrm{y}) \cdot \mathrm{p}_\mathrm{y}^{\mathrm{r(y,ccp(y))}}.$$

Θέτουμε $\quad \mathrm{Cp(y)} \equiv (\mathrm{ccp}(\mathrm{y}'))_\mathrm{y} = 0.$

Ο Cp(y) είναι standard, γιατί ισχύει $\vdash (\mathrm{ccp}(\mathrm{y}'))_\mathrm{y} \leq 1$, έχει ελεύθερη μεταβλητή μόνο την y και $\vdash \mathrm{D(y)} \leftrightarrow \mathrm{Cp(y)}$.

Από τα αξιώματα για την ccp, η ερμηνεία της είναι πρωτογενής αναδρομική, αφού r(y, ccp(y)) είναι όρος και ορίζεται για κάθε y, ακόμη και όταν αυτό κωδικοποιεί έναν υπολογισμό μερικής συνάρτησης.

3. Ορισμός του $\mathbf{r} \simeq \mathbf{s}$ και βασικές ιδιότητες

Για να ορίσουμε την ισότητα μεταξύ p-όρων και p-συναρτητών, για την οποία θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $\simeq$, δίνουμε μία χρωματική διάσταση στην κατασκευή τους, αποδίδοντας σε κάθε εμφάνιση συμβόλου σ' έναν p-όρο ή p-συναρτητή ένα χρώμα, κόκκινο ή μαύρο, ως εξής:

- Οσο χρησιμοποιούνται οι κανόνες για όρους και συναρτητές, όλα τα σύμβολα είναι μαύρα.
- Τα σύμβολα που εισάγονται σύμφωνα με τους κανόνες 4, 5, 6 ή 7 για τη δημιουργία P-όρων ή P-συναρτητών, καθώς και όσα εισάγονται μετά από αυτά (ή έξω από αυτά) είναι κόκκινα.

Συγκεκριμένα, λέγοντας "έξω από " εννοούμε ότι τα $\mathrm{f_i}(\,,\ldots,\,)$, $(\,)(\,)$, $\lambda\mathrm{x}(\,), \{\,\}(\,,\ldots,\,)$ είναι έξω από τα σύμβολα που υπάρχουν στις κενές θέσεις.

[1]Για μία συνάρτηση π.χ. $\varphi : \omega \to \omega$, η συνάρτηση $\widetilde{\varphi}(\mathrm{x})$ της ιστορίας των τιμών της είναι η $\widetilde{\varphi}(x) = \prod_{i<x} p_i^{\varphi(i)}$.

3.1. Ορισμος. Ο τύπος $\mathrm{r} \simeq \mathrm{s}$, όπου r, s είναι p-όροι, ορίζεται ως εξής:

A. r, s είναι όροι. Τότε $\mathrm{r} \simeq \mathrm{s} \equiv \mathrm{r} = \mathrm{s}$.

B. r είναι P-όρος, s είναι όρος.
Θα χρησιμοποιήσουμε (πλήρη) επαγωγή στο h, όπου h ο μέγιστος υποδείκτης κόκκινου συμβόλου f_i στον r, δηλ. στο $h = max(i)$ (για τα κόκκινα f_i του r), ή 0, αν δεν υπάρχει κόκκινο f_i στον r (προφανώς το f_0 είναι μαύρο). Σε ορισμένες περιπτώσεις, θα χρησιμοποιήσουμε (πλήρη) επαγωγή μέσα στην προηγούμενη επαγωγή, στον αριθμό g των κόκκινων τελεστών του r.

Οταν ορίζουμε το $\mathrm{r} \simeq \mathrm{s}$, η επαγωγική υπόθεση για τα h, g θα είναι ότι το $\mathrm{r}_1 \simeq \mathrm{s}_1$ έχει οριστεί για όλους τους όρους s_1, όταν ο r_1 έχει μικρότερο h ή το ίδιο h και μικρότερο g από τον r.

Για $h = 0$, το **A** μας δίνει τη βάση της επαγωγής, δηλ. για το $g = 0$.

B1. $\mathrm{r} \equiv \mathrm{f}_i(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_{k_i}\,; \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{l_i})$ με κόκκινα μόνο τα $\mathrm{f}_i(\,)$, άρα είναι κόκκινα επειδή υπάρχει κάποιος όρος σε θέση συναρτητή, άρα $i \geq 15$ (οι προηγούμενες f_i δεν έχουν συναρτησιακά ορίσματα).
Επίσης, αφού δεν υπάρχουν άλλα κόκκινα σύμβολα, $i = h$.
Πρέπει, αφού $i \geq 15$, να πάρουμε πρώτα την περίπτωση ο f_i να είναι της μορφής (2), με ελεύθερες μεταβλητές έστω τις y,a,α, οπότε ο r είναι ο $\mathrm{f}_i(\mathrm{u}, \mathrm{v}; \mathrm{w})$, όπου u, v, w όροι.

Ορίζουμε το $\mathrm{f}_i(\mathrm{u}, \mathrm{v}; \mathrm{w}) \simeq \mathrm{s}$ να είναι ο τύπος

$$\exists \mathrm{c}\,[\,\mathrm{q}(\mathrm{v}; \mathrm{w}) \simeq (\mathrm{c})_0 \wedge \forall \mathrm{i}_{\mathrm{i}<\mathrm{u}}\, \mathrm{r}(\mathrm{i}, (\mathrm{c})_\mathrm{i}, \mathrm{v}; \mathrm{w}) \simeq (\mathrm{c})_{\mathrm{i}'} \wedge (\mathrm{c})_\mathrm{u} = \mathrm{s}\,],$$

όπου c, i διαφορετικές μεταβλητές όχι ελεύθερες στους u, v, w και c δεν εμφανίζεται στον s και οι δεσμευμένες μεταβλητές των $\mathrm{q}(\mathrm{a}; \alpha)$, $\mathrm{r}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{a}; \alpha)$ έχουν αλλαχτεί κατάλληλα.

Ο ορισμός είναι σωστός, γιατί : από τον ορισμό του συμβόλου f_i, στους $\mathrm{q}(\mathrm{a}; \alpha)$, $\mathrm{r}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{a}; \alpha)$ εμφανίζονται μόνο f_j με $j < i$ και τα f_j που (πιθανόν) υπάρχουν στους v, w δεν είναι κόκκινα, αφού αυτοί είναι υποόροι του r. Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση για το h, οι $\mathrm{q}(\mathrm{v}; \mathrm{w}) \simeq (\mathrm{c})_0$, $\mathrm{r}(\mathrm{i}, (\mathrm{c})_\mathrm{i}, \mathrm{v}; \mathrm{w}) \simeq (\mathrm{c})_{\mathrm{i}'}$ είναι ήδη ορισμένοι και ο $(\mathrm{c})_\mathrm{u} = \mathrm{s}$ είναι τύπος (οι u, s δεν περιέχουν κόκκινα σύμβολα).

B2. Ο r είναι της μορφής της περίπτωσης **B1** με τη διαφορά ότι είναι της μορφής (1), οπότε $i \geq 23$. Ανάλογα με το **B1**, έστω ότι ο r είναι ο

$\mathrm{f}_i(\mathrm{u},\mathrm{v};\mathrm{w})$ και θέτουμε $\mathrm{f}_i(\mathrm{u},\mathrm{v};\mathrm{w}) \simeq s$ να είναι ο

$$\mathrm{p}(\mathrm{u},\mathrm{v};\mathrm{w}) \simeq \mathrm{s}.$$

Ο ορισμός είναι με ανάλογα επιχειρήματα σωστός.

B3. $\mathrm{r} \equiv (\mathrm{u})(\mathrm{t})$ με κόκκινα μόνο τα $(\ )(\ )$, οπότε ο u είναι όρος αντί για συναρτητής. Ορίζουμε $(\mathrm{u})(\mathrm{t}) \simeq \mathrm{s}$ να είναι ο

$$(\mathrm{u})_{\mathrm{t}} = \mathrm{s}+1.$$

Αφού στους $\mathrm{u},\mathrm{t},\mathrm{s}$ δεν υπάρχουν κόκκινα σύμβολα, αυτός είναι πράγματι τύπος.

B4. $\mathrm{r} \equiv \{\mathrm{t}_0\}(\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k;\mathrm{u}_1,\ldots,\mathrm{u}_l)$ με κόκκινα μόνο τα $\{\ \}\,(\ )$.
Τώρα ή κανένας ή κάποιοι από τους $\mathrm{u}_1,\ldots,\mathrm{u}_l$ μπορεί να είναι όροι. Ορίζουμε

$$\{\mathrm{t}_0\}(\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k;\mathrm{u}_1,\ldots,\mathrm{u}_l) \simeq \mathrm{s}$$

να είναι ο τύπος[2]

$$\begin{aligned}\exists \mathrm{b}_{i_1} \ldots \exists \mathrm{b}_{i_{l'}}\, \exists \mathrm{y}\,[\,\mathrm{Cp}(\mathrm{y}) \wedge \\ (\mathrm{y})_0 = <\mathrm{t}_0, <\mathbf{k},\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k>, <\mathbf{l},\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_l>, \mathrm{s}> \wedge \\ \mathrm{b}_{i_1},\ldots,\mathrm{b}_{i_{l'}} \mid \mathrm{u}_{i_1},\ldots,\mathrm{u}_{i_{l'}}],\end{aligned}$$

όπου $\mathrm{u}_{i_1},\ldots,\mathrm{u}_{i_{l'}}$ οι συναρτητές που υπάρχουν ανάμεσα στους $\mathrm{u}_1,\ldots,\mathrm{u}_l$ και $\mathrm{v}_j \equiv \mathrm{u}_j$ για u_j όρους, $\mathrm{v}_{i_n} \equiv \mathrm{b}_{i_n}, 1 \le n \le l'$.
Ο ορισμός αυτός δίνεται με βάση όσα αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα.

Στις επόμενες περιπτώσεις, τα σύμβολα που εισάγονται τελευταία δεν είναι τα μόνα κόκκινα.

B5. Ο r έχει κόκκινα τα εξωτερικά σύμβολα και κόκκινα σύμβολα σε κάποια ορίσματα. Εστω ότι το πρώτο όρισμα με κόκκινο είναι ο P-όρος t. Εστω c μία μεταβλητή όχι ελεύθερη στον r ή τον s και $\mathrm{r}(\mathrm{c})$ το αποτέλεσμα της αντικατάστασης στον r του t από την c (οπότε $\mathrm{r} \equiv \mathrm{r}(\mathrm{t})$. Ορίζουμε $\mathrm{r} \simeq \mathrm{s}$ να είναι ο

$$\exists \mathrm{c}\,[\mathrm{t} \simeq \mathrm{c} \wedge \mathrm{r}(\mathrm{c}) \simeq \mathrm{s}].$$

Ο t έχει ή μικρότερο ή ίδιο h με τον r, αφού είναι μέρος του. Αν έχει ίδιο h, τότε προφανώς έχει μικρότερο g. Στον $\mathrm{r}(\mathrm{c})$ υπάρχουν κόκκινα

[2] Τα ψηφία συμβολίζονται με παχείς χαρακτήρες, π.χ. το ψηφίο του αριθμού n με $\mathbf{n}$.

σύμβολα που ήδη υπήρχαν στον $\mathrm{r(t)}$ και δεν υπάρχουν τα κόκκινα σύμβολα που βρίσκονταν μέσα στον t, άρα, αν το h δεν είναι μικρότερο, τότε είναι το g. Αρα οι $\mathrm{t} \simeq \mathrm{c}$ και $\mathrm{r(c)} \simeq \mathrm{s}$ είναι ορισμένοι τύποι.

Β6. Ο r όπως στο **Β5**, αλλά το πρώτο όρισμα μέ κόκκινα σύμβολα είναι ένας P-συναρτητής u. Οι μόνοι p-συναρτητές που δεν αποτελούνται από ένα μόνο σύμβολο (αυτοί που αποτελούνται από ένα σύμβολο δεν μπορούν να είναι P-συναρτητές) είναι της μορφής $\lambda \mathrm{i}\, \mathrm{u(i)}$. Αν ο $\mathrm{u(i)}$ είναι όρος, τότε ο $\lambda \mathrm{i}\, \mathrm{u(i)}$ είναι συναρτητής, άρα στον P-συναρτητή u της περίπτωσής μας, ο $\mathrm{u(i)}$ είναι P-όρος .

Εστω b μεταβλητή διαφορετική από την i και τις ελεύθερες μεταβλητές των r και s. Εστω $\mathrm{r(b)}$ το αποτέλεσμα της αντικατάστασης του u στον r από την b, οπότε $\mathrm{r} \equiv \mathrm{r(u)}$.

Ορίζουμε το $\mathrm{r} \simeq \mathrm{s}$ να είναι:

$$\exists \mathrm{b}\, [\forall \mathrm{i}\, ((\mathrm{b})_{\mathrm{i}} > 0 \to \mathrm{u(i)} \simeq (\mathrm{b})_{\mathrm{i}} \dot{-} 1) \,\wedge\, \mathrm{r(b)} \simeq \mathrm{s}].$$

Και πάλι οι $\mathrm{u(i)}, \mathrm{r(b)}$, έχουν μικρότερο h ή g από τον r.

Παράδειγμα, αν $h > 0$ (για τον r) τότε ή ο $\mathrm{u(i)}$ έχει μικρότερο h ή αλλιώς, αντικαθιστώντας τον με την b στον r, λιγοστεύουν τα κόκκινα σύμβολα f_h του r, οπότε ο $\mathrm{r(b)}$ έχει μικρότερο h.

Με ανάλογα επιχειρήματα, βλέπουμε ότι ο τύπος ορίζεται σωστά.

Γ. Ο r είναι όρος και ο s P-όρος. Ορίζουμε $\mathrm{r} \simeq \mathrm{s}$ να είναι ο $\mathrm{s} \simeq \mathrm{r}$.

Δ. Οι r, s είναι P-όροι. Τότε ορίζουμε $\mathrm{r} \simeq \mathrm{s}$ να είναι ο

$$\forall \mathrm{w}\, [\, \mathrm{r} \simeq \mathrm{w} \leftrightarrow \mathrm{s} \simeq \mathrm{w}\,]$$

όπου w μεταβλητή που δεν εμφανίζεται ελεύθερη στους r, s.

Για p-συναρτητές u, v, ορίζουμε:

$$\mathrm{u} \simeq \mathrm{v} \;\equiv\; \forall \mathrm{x}\, (\mathrm{u})(\mathrm{x}) \simeq (\mathrm{v})(\mathrm{x}),$$

όπου x όχι ελεύθερη στους u, v.

Αν οι u, v είναι συναρτητές, προκύπτει από το **A**, σε συμφωνία με τον ορισμό που έχουμε ήδη δώσει, ότι $\mathrm{u} \simeq \mathrm{v} \equiv \mathrm{u} = \mathrm{v}$.

Για την αντικατάσταση αριθμητικών ή συναρτησιακών μεταβλητών από p-όρους και p-συναρτητές έχουμε τα παρακάτω συμπεράσματα.

3.2. Λήμμα. Εστω x αριθμητική μεταβλητή, R(x) και S(x) p-όροι (p-συναρτητές) και q όρος ελεύθερος για την x στους R(x), S(x). Τότε, με αλλαγή ίσως κάποιων δεσμευμένων μεταβλητών, ο q είναι ελεύθερος για τον τύπο $R(x) \simeq S(x)$ και το αποτέλεσμα της αντικατάστασης της x από τον q είναι το $R(q) \simeq S(q)$.
Ανάλογα για R(α), S(α) p-όρους (p-συναρτητές), α συναρτησιακή μεταβλητή, q συναρτητή.

Αυτό το Λήμμα επιτρέπει τη χρήση των αξιωμάτων και κανόνων για τους ποσοδείκτες, τα οποία διατυπώνονται για όρους και συναρτητές, στις περιπτώσεις τύπων που περιέχουν $\simeq$.

3.3. Λήμμα. Αν U, V είναι όροι (συναρτητές) και R_V p-όρος (p-συναρτητής) που προκύπτει αντικαθιστώντας μία ελεύθερη εμφάνιση του U στον R_U (που πρέπει να περιέχει μία τέτοια) με μία ελεύθερη εμφάνιση του V και S ένας p-όρος (p-συναρτητής), τότε

$$U = V \;\vdash\; R_U \simeq S \;\leftrightarrow\; R_v \simeq S,$$
$$U = V \;\vdash\; S \simeq R_U \;\leftrightarrow\; S \simeq R_V.$$

3.4. Λήμμα. Αν r, s είναι p-όροι και w αριθμητική μεταβλητή που δεν εμφανίζεται ελεύθερη σ' αυτούς, τότε

$$\vdash r \simeq s \leftrightarrow \forall w\,[r \simeq w \leftrightarrow s \simeq w].$$

Μόνο τώρα, μπορούμε να αποδείξουμε το επόμενο για το $\simeq$, αφού οι ορισμοί που δόθηκαν δεν είναι “συμμετρικοί” .

3.5. Λήμμα. Για p-όρους (p-συναρτητές) R, S, T

- $\vdash\; R \simeq R,$
- $\vdash\; R \simeq S \to S \simeq R,$
- $\vdash\; R \simeq S \wedge S \simeq T \to R \simeq T.$

Μετά από μία σειρά πολλών τεχνικών λημμάτων καταλήγουμε στο εξής λήμμα αντικατάστασης :

3.6. Λημμα. Εστω R, S p-όροι (p-συναρτητές), $\mathrm{E_R}$ p-όρος ή p-συναρτητής που περιέχει μία εμφάνιση του R όχι σαν μεταβλητή κάποιου λ. Τότε

$$\mathrm{R} \simeq \mathrm{S} \vdash^{\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_n} \mathrm{E_R} \simeq \mathrm{E_S},$$

όπου οι $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ είναι οι ελεύθερες μεταβλητές του R ή του S που δεσμεύονται από κάποιο λ στον $\mathrm{E_R}$ με τη συγκεκριμένη εμφάνιση του R στο πεδίο του.

3.7. Λημμα. Εστω x αριθμητική μεταβλητή, $\mathrm{r(x)}, \mathrm{s(x)}$ p-όροι που περιέχουν μία εμφάνιση της x που δεν δεσμεύεται από κάποιο λ και q p-όρος ελεύθερος για την x στους $\mathrm{r(x)}, \mathrm{s(x)}$.
Τότε:

$$\mathrm{r(x)} \simeq \mathrm{s(x)} \vdash^{\mathrm{x}} \mathrm{r(q)} \simeq \mathrm{s(q)}.$$

Από το Λήμμα αυτό έχουμε έναν κανόνα αντικατάστασης για P-όρους, υπό ειδικές συνθήκες. Γενικά, είναι απαραίτητο η x να εμφανίζεται ελεύθερη και στους δύο όρους $\mathrm{r(x)}, \mathrm{s(x)}$. Διαφορετικά, έχουμε περιπτώσεις όπως: ενώ $\mathrm{x} \cdot 0 \simeq 0$ και $\{<2,0>\}(\mathrm{x}) \simeq 0$ ($<2,0>$ είναι κατάλληλος δείκτης της σταθερής συνάρτησης 0) έχουμε αντικαθιστώντας $\{0\}(0) \cdot 0 \simeq 0$ και $\{<2,0>\}(\{0\}(0)) \simeq 0$, που ερμηνευόμενοι είναι ψευδείς (το 0 είναι δείκτης της πουθενά οριζόμενης συνάρτησης).

Μία ανάλογη αρχή αντικατάστασης για P-συναρτητές δεν ισχύει.

Παράδειγμα, το

$$\{<2,0>\}(\alpha(0)) \simeq \{<2,0>\}(\{<2,0>\}(\alpha))$$

είναι αληθινό για κάθε τιμή του α, ενώ το

$$\{<2,0>\}((\lambda \mathrm{i}\{0\}(0))(0)) \simeq \{<2,0>\}(\{<2,0>\}(\lambda \mathrm{i}\{0\}(0)))$$

είναι ψευδές, αφού το αριστερό μέλος δεν ορίζεται, καθώς πρέπει πρώτα να υπολογιστεί το $\{0\}(0)$ που δεν γίνεται, ενώ το δεξί μέλος κάνει 0.

Τα παραδείγματα αυτά είναι του Kleene και δείχνουν πως η θεωρία που αναπτύσσει αποτυπώνει τις πραγματικές καταστάσεις που προκύπτουν κατά τους μηχανικούς – αλγοριθμικούς υπολογισμούς.

3.8. Ορισμος. Για κάθε p-όρο r, ορίζουμε τον τύπο $!\mathrm{r} \equiv \exists \mathrm{w}\, \mathrm{r} \simeq \mathrm{w}$ όπου w είναι αριθμητική μεταβλητή όχι ελεύθερη στον r. Ο $!\mathrm{r}$ εκφράζει ότι ο r ειναι ορισμένος.

Ανάλογα, για u p-συναρτητή, $!\mathrm{u} \equiv \exists \beta\, \mathrm{u} \simeq \beta$, β συναρτησιακή μεταβλητή όχι ελεύθερη στον u και ο $!\mathrm{u}$ εκφράζει ότι ο u είναι ολικά ορισμένος.

3.9.ΛΗΜΜΑ. Εστω x αριθμητική μεταβλητή, $\mathrm{r(x)}$ p-όρος που περιέχει μία εμφάνιση της x που δεν δεσμεύεται από κάποιο λ, και q p-όρος ελεύθερος για την x στον $\mathrm{r(x)}$, που δεν περιέχει ελεύθερη την x. Τότε

$$\vdash !\mathrm{r(q)} \to !\mathrm{q}.$$

Το Λήμμα αυτό δικαιολογεί πιο άμεσα τα προηγούμενα παραδείγματα του Kleene και αποτελεί μία αρχή αυστηρότητας (strictness) που ισχύει εδώ.

3.10.ΛΗΜΜΑ. Ιδιότητες του !

(α) $\vdash \quad !\mathrm{r} \leftrightarrow \exists \mathrm{w}\, \mathrm{r} \simeq \mathrm{w} \leftrightarrow \exists ! \mathrm{w}\, \mathrm{r} \simeq \mathrm{w}$.
(β) $\vdash \quad !\mathrm{u} \leftrightarrow \forall \mathrm{x}\, !(\mathrm{u})(\mathrm{x})$.
(γ) $\vdash \quad !\mathrm{R}$, αν R όρος ή συναρτητής.
(δ) $\quad \mathrm{R} \simeq \mathrm{S} \vdash !\mathrm{R} \leftrightarrow !\mathrm{S}$.
(ε) $\vdash \quad !\mathrm{u} \leftrightarrow \exists \beta\, \mathrm{u} \simeq \beta \leftrightarrow \exists ! \beta\, \mathrm{u} \simeq \beta$.
(ζ) $\vdash \quad !\lambda \mathrm{x}\, \mathrm{r} \leftrightarrow \forall \mathrm{x}\, !\mathrm{r}$.

3.11.ΛΗΜΜΑ. Εστω x αριθμητική μεταβλητή, $\mathrm{r(x), s(x)}$ p-όροι και q p-όρος ελεύθερος για τη x στους $\mathrm{r(x), s(x)}$. Τότε:

$$!\mathrm{q},\ \mathrm{r(x)} \simeq \mathrm{s(x)} \vdash^{\mathrm{x}} \mathrm{r(q)} \simeq \mathrm{s(q)}\,.$$

Ανάλογα, για συναρτησιακή μεταβλητή α και p-συναρτητή u,

$$!\mathrm{u},\ \mathrm{r}(\alpha) \simeq \mathrm{s}(\alpha) \vdash^{\alpha} \mathrm{t(u)} \simeq \mathrm{s(u)}.$$

3.12.ΛΗΜΜΑ. Για κάθε p-όρο r που περιέχει ελεύθερες μεταβλητές μόνο από τη λίστα Ψ και για κάθε x, w μεταβλητές που δεν ανήκουν στην Ψ, υπάρχει ένας standard τύπος $\mathrm{R(x,w,}\Psi)$ με ελεύθερες μεταβλητές μόνο ανάμεσα στις $\mathrm{x,w,}\Psi$ ώστε

$$\vdash \mathrm{r} \simeq \mathrm{w} \leftrightarrow \exists \mathrm{x}\, \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{w}, \Psi).$$

4. Αναπαράσταση των p-όρων από κατάλληλους δείκτες και συνέπειες

Εχοντας αυτά τα αποτελέσματα, τυποποιούμε όλη τη διαδικασία κωδικοποίησης των δέντρων υπολογισμού με εντελώς παράλληλο τρόπο, ξεκινώντας από την τυπική απόδειξη των (αντίστοιχων τυπικών) σχημάτων S0–S8, για παράδειγμα, για το S3,

$$\vdash \{< 3 >\}(\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_k; \alpha_1, \dots, \alpha_l) \simeq \mathrm{a}_1.$$

Ενας P-όρος της μορφής $\{\mathbf{f}\}(\mathrm{t}_1, \dots, \mathrm{t}_k, \mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_l)$ όπου $\mathbf{f}$ είναι το ψηφίο ενός κατάλληλου δείκτη f και $\mathrm{t}_1, \dots, \mathrm{t}_k$ p-όροι, $\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_l$ p-συναρτητές, θα λέγεται όρος κατάλληλου δείκτη (με δείκτη f). Το $\mathbf{f}$ μπορεί να αντικαθίσταται από εκφράσεις όπως $< 5, \mathbf{g}, \mathbf{h} >$ που δίνονται στα σχήματα και είναι αποδείξιμα ίσες με το $\mathbf{f}$.

Ορίζουμε επίσης τις mn, mf.

Καταλήγουμε στο εξής λήμμα, τυπικό αντίστοιχο του θεωρήματος απαρίθμησης: [IM σελ.341]

4.1. Λημμα. Για κάθε p-όρο r που περιέχει ελεύθερες μόνο τις (διαφορετικές) μεταβλητές $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l$, υπάρχει κατάλληλος δείκτης f με $k \geq \mathrm{mn}(f)$ και $l \geq \mathrm{mf}(f)$, ώστε

$$\vdash \{\mathbf{f}\}(\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l) \simeq \mathrm{r}.$$

Σαν συνέπεια του Λήμματος 4.1, έχουμε το

4.2.Λημμα. (Θεώρημα Αναδρομής)

Για κάθε αριθμό g, υπάρχει κατάλληλος δείκτης e με $k \geq \mathrm{mn}(e)$ και $l \geq \mathrm{mf}(e)$ ώστε

$$\vdash \{\mathbf{e}\}(\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l) \simeq \{\mathbf{g}\}(\mathbf{e}, \mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l).$$

4.3.Λημμα. (Ισχυρός ορισμός με περιπτώσεις)

Για κάθε τριάδα p-όρων u, v, r που περιέχουν ελεύθερες μόνο τις $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l$, υπάρχει κατάλληλος δείκτης f με $k \geq \mathrm{mn}(f)$, $l \geq \mathrm{mf}(f)$ ώστε:

$$\vdash \mathrm{r} \simeq 0 \quad \rightarrow \quad \{\mathbf{f}\}(\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l) \simeq \mathrm{u},$$
$$\vdash \mathrm{r} \simeq \mathrm{c}' \quad \rightarrow \quad \{\mathbf{f}\}(\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l) \simeq \mathrm{v}.$$

Ορισμός του τυπικού κατηγορήματος T.

Εστω r p-όρος. Για απλότητα, έστω ότι οι ελεύθερες μεταβλητές του είναι οι a, b, α, β. Από το Λήμμα 4.1, μπορούμε να βρούμε αριθμό f, ώστε $\vdash \{\mathbf{f}\}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \upalpha, \upbeta) \simeq \mathrm{r}$.

Θα κατασκευάσουμε έναν ατομικό τύπο T(f,a,b,s,t), που θα εκφράζει ένα κατηγόρημα $T(f,a,b,s,t)$ έτσι ώστε, αν θέσουμε $U(y) = (y)_{0,3}$, να έχουμε

$$\{f\}(a,b,\alpha,\beta) \simeq U(\mu y\, T(f,a,b,\overline{\alpha}(y),\overline{\beta}(y))),$$
$$(\exists y)\, T(f,a,b,\overline{\alpha}(y),\overline{\beta}(y)) \Longleftrightarrow \exists! y\, T(a,b,\overline{\alpha}(y),\overline{\beta}(y)).$$

Πρώτα παίρνουμε έναν standard τύπο S(f,a,b,s,t) που περιέχει ελεύθερες μόνο τις πέντε μεταβλητές που φαίνονται, ώστε

$$\vdash \mathrm{S}(\mathrm{f},\mathrm{a},\mathrm{b},\overline{\upalpha}(\mathrm{y}),\overline{\upbeta}(\mathrm{y})) \leftrightarrow \exists \mathrm{x}\, \exists \mathrm{w}\, [\mathrm{Cp}(\mathrm{y}) \wedge (\mathrm{y})_0 = <\mathrm{f}, <2,\mathrm{a},\mathrm{b}>, <2, \overline{\upalpha}(\mathrm{x}), \overline{\upbeta}(\mathrm{x})>, \mathrm{w}>].$$

Αυτό γίνεται παίρνοντας S(f,a,b,s,t) ισοδύναμο με τον

$$\mathrm{Cp}(\mathrm{lh}(\mathrm{s})) \wedge (\mathrm{lh}(\mathrm{s}))_0 = <\mathrm{f}, <2,\mathrm{a},\mathrm{b}>, <2, \textstyle\prod_{\mathrm{i}<\mathrm{lh}((\mathrm{lh}(\mathrm{s}))_{0,2,1})} \mathrm{p}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{s})_{\mathrm{i}}}, \textstyle\prod_{\mathrm{i}<\mathrm{lh}((\mathrm{lh}(\mathrm{s}))_{0,2,1})} \mathrm{p}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{t})_{\mathrm{i}}}>, (\mathrm{lh}(\mathrm{s}))_{0,3}> .$$

Τώρα παίρνουμε ένα standard τύπο T(f,a,b,s,t) με τις ίδιες ελεύθερες μεταβλητές, ώστε:

$$\vdash \mathrm{T}(\mathrm{f},\mathrm{a},\mathrm{b},\overline{\upalpha}(\mathrm{y}),\overline{\upbeta}(\mathrm{y})) \leftrightarrow \mathrm{S}(\mathrm{f},\mathrm{a},\mathrm{b},\overline{\upalpha}(\mathrm{y}),\overline{\upbeta}(\mathrm{y})) \wedge \forall \mathrm{z}_{\mathrm{z}<\mathrm{y}} \neg \mathrm{S}(\mathrm{f},\mathrm{a},\mathrm{b},\overline{\upalpha}(\mathrm{z}),\overline{\upbeta}(\mathrm{z})).$$

Εχουμε τώρα ότι:

- $\vdash \exists \mathrm{y}\, [\mathrm{T}(\mathrm{f},\mathrm{a},\mathrm{b},\overline{\upalpha}(\mathrm{y}),\overline{\upbeta}(\mathrm{y})) \wedge (\mathrm{y})_{0,3} = \mathrm{w}] \leftrightarrow \{\mathrm{f}\}(\mathrm{a},\mathrm{b},\upalpha,\upbeta) \simeq \mathrm{w}$
- $\vdash \mathrm{T}(\mathrm{f},\mathrm{a},\mathrm{b},\overline{\upalpha}(\mathrm{y}),\overline{\upbeta}(\mathrm{y})) \wedge \mathrm{T}(\mathrm{f},\mathrm{a},\mathrm{b},\overline{\upalpha}(\mathrm{z}),\overline{\upbeta}(\mathrm{z})) \rightarrow \mathrm{y} = \mathrm{z}.$

Ανάλογα, για $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k, \upalpha_1, \ldots, \upalpha_l$, για κάθε $k \geq 0$ και $l \geq 0$.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τυπικά ένα κατηγόρημα που θα εκφράζει ότι μία συνάρτηση α είναι γενική αναδρομική.

Ορίζουμε: $\mathrm{GR}(\alpha) \equiv \exists \mathrm{f} \lambda \mathrm{x}\, \{\mathrm{f}\}(\mathrm{x}) \simeq \alpha$
$$\equiv \exists \mathrm{f} \forall \mathrm{x}\, \{\mathrm{f}\}(\mathrm{x}) \simeq \alpha(\mathrm{x}).$$

Τυποποίηση του $\{\tau\}[\alpha]$.

Το $\{\tau\}[\alpha]$ έχει οριστεί να είναι το $\lambda t\, \tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y_t)) \dot{-} 1$, όπου
$$y_t \simeq \mu y\, \tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) > 0.$$

Υπάρχει, από τα γνωστά για standard τύπους, ένας όρος $\mathrm{g}(\mathrm{y},\mathrm{t},\tau,\alpha)$ ώστε
$$\vdash \mathrm{g}(\mathrm{y}, \mathrm{t}, \tau,\alpha) = 0 \leftrightarrow \tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) > 0,$$
οπότε, πάλι από το Λήμμα 4.1, μπορούμε να βρούμε κατάλληλο δείκτη g ώστε
$$\{\mathbf{g}\}(\mathrm{y}, \mathrm{t}, \tau,\alpha) \simeq \mathrm{g}(\mathrm{y}, \mathrm{t}, \tau,\alpha).$$

Ο P-όρος $\{< 0, \mathbf{g} >\}(0, \mathrm{t}, \tau,\ \alpha)$ εκφράζει το $\mu y\, \tau(2^{t+1} * \overline{\alpha}(y)) > 0$. Θέτουμε
$$\{\tau\}[\alpha] \equiv \lambda \mathrm{t}\, \tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\{< 0, \mathbf{g} >\}(0, \mathrm{t}, \tau,\ \alpha))) \dot{-} 1.$$

Αυτός εκφράζει το $\{\tau\}[\alpha]$.

Τυποποίηση του $\Lambda\alpha\, \varphi[\Theta, \alpha]$.

Τυποποιούμε τώρα το $\Lambda\alpha\, \varphi[\Theta, \alpha]$, όπου $\varphi[\Theta, \alpha]$ μερική αναδρομική με τιμές συναρτήσεις, δηλ. $\varphi[\Theta, \alpha] = \lambda t\, \varphi(\Theta, \alpha, t)$, όπου $\varphi(\Theta, \alpha, t)$ μερική αναδρομική συνάρτηση με τιμές αριθμούς.

Η $\varphi[\Theta, \alpha]$ θα εκφράζεται από κάποιον p-συναρτητή $\mathrm{u}[\alpha]$ που θα είναι ή της μορφής $\lambda \mathrm{t}\, \mathrm{u}(\mathrm{t}, \alpha)$ ή ένα σύμβολο. Τότε
$$\vdash \lambda \mathrm{t}\, \mathrm{u}(\mathrm{t}, \alpha) \simeq \mathrm{u}[\alpha].$$

Οπως στα προηγούμενα,
$$(**) \qquad \{\mathbf{f}\}(\mathrm{t}, \mathrm{c}, \alpha,\gamma) \simeq \mathrm{u}(\mathrm{t}, \alpha), \ \text{ για κάποιο αριθμό } f.$$

Παίρνουμε έναν standard τύπο $\mathrm{R}(\mathrm{f}, \mathrm{s}, \mathrm{c}, \gamma)$ με ελεύθερες μόνο τις μεταβλητές που φαίνονται ώστε,
$$\mathrm{R}(\mathrm{f}, 2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{y}), \mathrm{c}, \gamma) \leftrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{f}, \mathrm{t}, \mathrm{c}, \overline{\alpha}(\mathrm{y}), \overline{\gamma}(\mathrm{y})).$$

Γι' αυτό αρκεί ο $\mathrm{R}(\mathrm{f}, \mathrm{s}, \mathrm{c}, \gamma)$ να είναι ο

$$\mathrm{T}(\mathrm{f}, (\mathrm{s})_0 \dot{-} 1, \prod_{\mathrm{i}<\mathrm{lh}(\mathrm{s})\dot{-}1} \mathrm{p}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{s})_{\mathrm{i}'}}, \overline{\gamma}(\mathrm{lh}(\mathrm{s})\dot{-}1)).$$

Στη συνέχεια παίρνουμε έναν όρο $\mathrm{q}(\mathrm{f},\mathrm{s},\mathrm{c},\gamma)$ με τις ίδιες ελεύθερες μεταβλητές, ώστε:

$$\vdash \mathrm{q}(\mathrm{f}, 2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{y}), \mathrm{c}, \gamma) = \begin{cases} (\mathrm{y})_{0,3}+1, & \text{αν } \mathrm{T}(\mathrm{f},\mathrm{t},\mathrm{c},\overline{\alpha}(\mathrm{y}),\overline{\gamma}(\mathrm{y})), \\ 0 \quad , & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Γι αυτό αρκεί να πάρουμε

$$\mathrm{q}(\mathrm{f},\mathrm{s},\mathrm{c},\gamma) = \begin{cases} (\mathrm{lh}(\mathrm{s})\dot{-}1)_{0,3}+1, & \text{αν } \mathrm{R}(\mathrm{f},\mathrm{s},\mathrm{c},\gamma), \\ 0 \quad , & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Θέτουμε $\Lambda\alpha\,\mathrm{u}[\alpha] \equiv \lambda\mathrm{s}\,\mathrm{q}(\mathbf{f},\mathrm{s},\mathrm{c},\gamma)$, για f όπως στην $(**)$.
Ετσι, το $\Lambda\alpha\,\mathrm{u}[\alpha]$ είναι συναρτητής.

4.4. Λημμα.

(α) $\vdash \ \{\Lambda\alpha\,\mathrm{u}[\alpha]\}[\alpha] \simeq \mathrm{u}[\alpha]$

(β) $\vdash \ !\mathrm{u}(\mathrm{t},\alpha) \to \exists!\mathrm{y}\,(\Lambda\alpha\,\mathrm{u}[\alpha])(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) > 0$

(γ) $\vdash \ !\mathrm{u}[\alpha] \to !!\{\Lambda\alpha\,\mathrm{u}[\alpha]\}[\alpha]$

(όπου $!!\{\mathrm{t}\}[\alpha] \equiv \forall\mathrm{t}\exists!\mathrm{y}\,\tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) > 0$ που εκφράζει το "κατάλληλα ορισμένο").

4.5. Ορισμος. Για κάθε συναρτησιακή μεταβλητή β, τύπο $\mathrm{A}(\beta)$ και p-συναρτητή u ελεύθερο για τη β στον $\mathrm{A}(\beta)$,

$$!\mathrm{u} \wedge [\mathrm{A}(\mathrm{u})] \ \equiv \ \exists\beta\,(\mathrm{u}\simeq\beta \wedge \mathrm{A}(\beta)).$$

Ανάλογα, για αριθμητική μεταβλητή w και όρο r με τις ίδιες συνθήκες,

$$!\mathrm{r} \wedge [\mathrm{A}(\mathrm{r})] \ \equiv \ \exists\mathrm{w}\,(\mathrm{r}\simeq\mathrm{w} \wedge \mathrm{A}(\mathrm{w})).$$

4.6. Λημμα. (α) Αν ο R είναι όρος ή συναρτητής, τότε

$$\vdash\ !\mathrm{R} \wedge [\mathrm{A}(\mathrm{R})] \leftrightarrow \mathrm{A}(\mathrm{R}).$$

(β) $\vdash \ \mathrm{R} \simeq \mathrm{S} \to (!\mathrm{R} \wedge [\mathrm{A}(\mathrm{R})] \leftrightarrow !\mathrm{S} \wedge [\mathrm{A}(\mathrm{S})]\,).$

5. Τυποποιημένη πραγματοποίηση

Στα πλαίσια του τυπικού συστήματος που έχουμε παρουσιάσει, και χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα του προηγούμενου Κεφαλαίου, δίνουμε τον μεταμαθηματικό ορισμό του τύπου $\varepsilon \textcircled{r} \mathrm{E}$, που τυποποιεί την έννοια $\epsilon\, r_\Psi\, \mathrm{E}$ στο σύστημα $\mathcal{B}$ (και στο $\mathcal{I}$).

5.1. Ορισμος. Ορίζουμε τον τύπο $\varepsilon \textcircled{r} \mathrm{E}$, όπου ε συναρτησιακή μεταβλητή και E τύπος, με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του E.
Επίσης, θεωρούμε ότι ορίζονται και όλοι οι τύποι, οι οποίοι προκύπτουν από τον $\varepsilon \textcircled{r} \mathrm{E}$, με αντικατάσταση της ε από συναρτητές (αυτό είναι απαραίτητο για την επαγωγική υπόθεση, η οποία υπονοείται σε πολλές περιπτώσεις του ορισμού, αφού στη θέση της ε εμφανίζονται σύνθετες εκφράσεις).

$$
\begin{array}{lll}
1.\ \varepsilon \textcircled{r} \mathrm{P} & \equiv & \mathrm{P},\ \text{αν P ατομικός.} \\
2.\ \varepsilon \textcircled{r} \mathrm{A} \wedge \mathrm{B} & \equiv & (\varepsilon)_0 \textcircled{r} \mathrm{A}\ \wedge\ (\varepsilon)_1 \textcircled{r} \mathrm{B}. \\
3.\ \varepsilon \textcircled{r} \mathrm{A} \vee \mathrm{B} & \equiv & ((\varepsilon(0))_0 = 0 \to (\varepsilon)_1 \textcircled{r} \mathrm{A}) \wedge \\
 & & \qquad\qquad ((\varepsilon(0))_0 \neq 0 \to (\varepsilon)_1 \textcircled{r} \mathrm{B}). \\
4.\ \varepsilon \textcircled{r} \mathrm{A} \to \mathrm{B} & \equiv & \forall\alpha\,(\alpha \textcircled{r} \mathrm{A} \to !\{\varepsilon\}[\alpha] \wedge [\{\varepsilon\}[\alpha] \textcircled{r} \mathrm{B}\,]\,). \\
5.\ \varepsilon \textcircled{r} \neg\mathrm{A} & \equiv & \forall\alpha\,\neg\alpha \textcircled{r} \mathrm{A}. \\
6.\ \varepsilon \textcircled{r} \forall\mathrm{x}\,\mathrm{A}(\mathrm{x}) & \equiv & \forall\mathrm{x}\,(\,!\{\varepsilon\}\,[\mathrm{x}] \wedge [\{\varepsilon\}[\mathrm{x}] \textcircled{r} \mathrm{A}(\mathrm{x})\,]\,). \\
7.\ \varepsilon \textcircled{r} \exists\mathrm{x}\,\mathrm{A}(\mathrm{x}) & \equiv & (\varepsilon)_1 \textcircled{r} \mathrm{A}((\varepsilon(0))_0). \\
8.\ \varepsilon \textcircled{r} \forall\alpha\,\mathrm{A}(\alpha) & \equiv & \forall\alpha\,(\,!\{\varepsilon\}[\alpha] \wedge [\{\varepsilon\}[\alpha] \textcircled{r} \mathrm{A}(\alpha)\,]\,). \\
9.\ \varepsilon \textcircled{r} \exists\alpha\,\mathrm{A}(\alpha) & \equiv & !\{(\varepsilon)_0\} \wedge [(\varepsilon)_1 \textcircled{r} \mathrm{A}(\{(\varepsilon)_0\})\,].
\end{array}
$$

Οι συνθήκες που επιβάλλονται για τις μεταβλητές, είναι οι:

- οι ε και α είναι δύο διαφορετικές μεταξύ τους συναρτησιακές μεταβλητές και η ε δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο E.
- στον κανόνα 4, η α δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$.
- στον κανόνα 5, η α δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον A.
- στον κανόνα 7, η ε είναι ελεύθερη για την x στον $\mathrm{A}(\mathrm{x})$.
- στον κανόνα 9, η ε είναι ελεύθερη για την α στον $\mathrm{A}(\alpha)$.

Παρατηρηση. Ο ορισμός που δίνεται με τον κανόνα 3 είναι ισοδύναμος στο $\mathcal{B}$ με τον

3′. $\varepsilon \, ⓡ \, \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \;\equiv\; ((\varepsilon(0))_0 = 0 \wedge (\varepsilon)_1 \, ⓡ \, \mathrm{A}) \;\vee\; ((\varepsilon(0))_0 \neq 0 \wedge (\varepsilon)_1 \, ⓡ \, \mathrm{B})$.

5.2. Ορισμος του $\varepsilon \, ⓠ \, \mathrm{E}$. Ορίζουμε επίσης μία τροποποίηση $\varepsilon \, ⓠ \, \mathrm{E}$ του $\varepsilon \, ⓡ \, \mathrm{E}$, ως εξής:

· Οι κανόνες $1, 2, 6$ και 8 παραμένουν οι ίδιοι, εκτός από το ότι αντικαθιστούμε το ⓡ με το ⓠ .
· Οι υπόλοιποι κανόνες τροποποιούνται με την προσθήκη κάποιων τμημάτων, εκτός από την αντικατάσταση του ⓡ από το ⓠ . Για να είναι ευδιάκριτο το ποια είναι τα τμήματα των τύπων που προστίθενται, τα περικλείουμε σε γωνίες, $\ulcorner, \urcorner$.
Ετσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
3.\ \varepsilon \, ⓠ \, \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \quad &\equiv \quad ((\varepsilon(0))_0 = 0 \to (\varepsilon)_1 \, ⓠ \, \mathrm{A} \ulcorner\wedge \mathrm{A}\urcorner) \wedge \\
&\qquad\qquad ((\varepsilon(0))_0 \neq 0 \to (\varepsilon)_1 \, ⓠ \, \mathrm{B} \ulcorner\wedge \mathrm{B}\urcorner). \\
4.\ \varepsilon \, ⓠ \, \mathrm{A} \to \mathrm{B} \quad &\equiv \quad \forall\alpha\, (\alpha \, ⓠ \, \mathrm{A} \ulcorner\wedge \mathrm{A}\urcorner \to !\{\varepsilon\}[\alpha] \wedge [\{\varepsilon\}[\alpha] \, ⓠ \, \mathrm{B}\,]\,). \\
5.\ \varepsilon \, ⓠ \, \neg\mathrm{A} \quad &\equiv \quad \forall\alpha \,\neg(\alpha \, ⓠ \, \mathrm{A} \ulcorner\wedge \mathrm{A}\urcorner\,). \\
7.\ \varepsilon \, ⓠ \, \exists \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}) \quad &\equiv \quad (\varepsilon)_1 \, ⓠ \, \mathrm{A}((\varepsilon(0))_0) \ulcorner\wedge \mathrm{A}((\varepsilon(0))_0)\urcorner\,). \\
9.\ \varepsilon \, ⓠ \, \exists\alpha\, \mathrm{A}(\alpha) \quad &\equiv \quad !\{(\varepsilon)_0\} \wedge [\,(\varepsilon)_1 \, ⓠ \, \mathrm{A}(\{(\varepsilon)_0\}) \ulcorner\wedge \mathrm{A}(\{(\varepsilon)_0\})\urcorner].
\end{aligned}$$

Παρατηρηση. Ο $\varepsilon \, ⓠ \, \mathrm{E}$ τυποποιεί μία έννοια διαφορετική από την $\epsilon \; r_\Psi \; \mathrm{E}$, την οποία τυποποιεί ο $\varepsilon \, ⓡ \, \mathrm{E}$. Οπως φαίνεται, για παράδειγμα, στην περίπτωση $\mathrm{E} \equiv \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, αν $\alpha \; r_\Psi \; \mathrm{A}$, τότε $\{\epsilon\}[\alpha]\downarrow$ και $\{\epsilon\}[\alpha] \; r_\Psi \; \mathrm{B}$. Για την περίπτωση του ⓠ , αν αυτό τυποποιεί μία έννοια έστω q_Ψ, τότε:
αν $\epsilon \; q_\Psi \; \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ και ισχύει ότι $\alpha \; q_\Psi \; \mathrm{A}$, τότε, για να συμπεράνουμε ότι $\{\epsilon\}[\alpha] \; q_\Psi \; \mathrm{B}$, εκτός από το $\{\epsilon\}[\alpha]\downarrow$, είναι αναγκαία και κάποια απαίτηση, όπως το A να είναι αληθές ως προς Ψ, θεωρώντας κάποια έννοια ενορατικής αλήθειας.

5.3. Λημμα. Εστω E' ο τύπος που προκύπτει από τον E, αν αντικατασταθούν οι υποτύποι του E της μορφής $\neg\mathrm{A}$ από τους αντίστοιχους $\mathrm{A} \to 1 = 0$. Τότε

$$\vdash_{\mathcal{B}} \; \varepsilon \, ⓡ \, \mathrm{E} \leftrightarrow \varepsilon \, ⓡ \, \mathrm{E}' \quad \text{και} \quad \vdash_{\mathcal{B}} \; (\mathrm{E} \leftrightarrow \mathrm{E}') \wedge (\varepsilon \, ⓠ \, \mathrm{E} \leftrightarrow \varepsilon \, ⓠ \, \mathrm{E}').$$

Αποδειξη. Με επαγωγή, σύμφωνα με τον ορισμό των ⓡ, ⓠ. $\dashv$

5.4. Θεωρημα. (Kleene, 1969) (Α) Αν $\vdash_{\mathcal{I}}$ E, τότε υπάρχει p-συναρτητής u, ο οποίος περιέχει ελεύθερες μόνο μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στον E, τέτοιος ώστε

$$\vdash_{\mathcal{B}} !\mathrm{u} \wedge [\mathrm{u} \text{ ⓡ } \mathrm{E}] \quad \text{και} \quad \vdash_{\mathcal{I}} !\mathrm{u} \wedge [\mathrm{u} \text{ ⓠ } \mathrm{E}].$$

(β) Εστω ότι $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_s \vdash_{\mathcal{I}}$ E και Θ μία λίστα μεταβλητών (πιθανόν κενή), οι οποίες δεν εμφανίζονται κατ' ανάγκην ελεύθερες στους $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_s$, και παραμένουν αμετάβλητες[3] κατά την απόδειξη του E. Για $j = 1, \ldots, s$, έστω u_j ένας p-συναρτητής, ο οποίος περιέχει ελεύθερες μόνο μεταβλητές από τη Θ ή από αυτές που εμφανίζονται ελεύθερες στον D_j. Τότε υπάρχει p-συναρτητής u, με ελεύθερες μεταβλητές από τη Θ ή αυτές του E, τέτοιος ώστε, με αμετάβλητες τις μεταβλητές της Θ, να ισχύουν τα:

$$!\mathrm{u}_1 \wedge [\mathrm{u}_1 \text{ ⓡ } \mathrm{D}_1], \ldots, !\mathrm{u}_s \wedge [\mathrm{u}_s \text{ ⓡ } \mathrm{D}_s] \ \vdash_{\mathcal{B}} \ !\mathrm{u} \wedge [\mathrm{u} \text{ ⓡ } \mathrm{E}],$$

$$\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_s, \ \ !\mathrm{u}_1 \wedge [\mathrm{u}_1 \text{ ⓠ } \mathrm{D}_1], \ldots, !\mathrm{u}_s \wedge [\mathrm{u}_s \text{ ⓠ } \mathrm{D}_s] \ \vdash_{\mathcal{I}} \ !\mathrm{u} \wedge [\mathrm{u} \text{ ⓠ } \mathrm{E}].$$

Αποδειξη. (Α) Γίνεται με επαγωγή στο μήκος της απόδειξης του τύπου E στα συστήματα $\mathcal{B}$ και $\mathcal{I}$, για τα αντίστοιχα συμπεράσματα. Η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν που δόθηκε για την έννοια $\epsilon\, r_{\Psi}$ E στο 3° κεφάλαιο.
Παρουσιάζουμε μερικές περιπτώσεις, ώστε να δείξουμε πως γίνονται οι αντίστοιχοι χειρισμοί στο τυπικό πλαίσιο, και μάλιστα, για την ⓠ, καθώς η απόδειξη για την ⓡ προκύπτει από αυτήν, παραλείποντας τα επιπρόσθετα τμήματα των τύπων που απαιτούνται από τους ορισμούς για την ⓠ.
Οι p-συναρτητές που θα προκύψουν, είναι ακριβώς αυτοί που εκφράζουν τις γενικές αναδρομικές συναρτήσεις, τις οποίες βρήκαμε και στην προηγούμενη απόδειξη και είναι, όπως θα δούμε, οι ίδιοι για την ⓡ και την ⓠ.

[3]Δηλαδή, δεν εφαρμόζεται κάποιος κανόνας με ποσοδείκτη (δηλ. κάποιος από τους 9N, 9F, 12N, 12F) για τις μεταβλητές αυτές.

Ι.Αξιωματα.

1a. $A \to (B \to A)$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει το

$$(a) \quad \alpha \,@\, A \wedge A.$$

Από το Λήμμα 4.4(α) έχουμε ότι

$$(b) \quad \vdash \{\Lambda\beta\,\alpha\}[\beta] \simeq \alpha.$$

Από τα (a), (b), προκύπτει το

$$(c) \quad \vdash \{\Lambda\beta\,\alpha\}[\beta] \simeq \alpha \wedge \alpha \,@\, A\,,$$

δηλαδή, με χρήση του 11F, αφού α είναι συναρτητής,

$$\vdash \exists\alpha\,(\{\Lambda\beta\,\alpha\}[\beta] \simeq \alpha \wedge \alpha \,@\, A\,),$$

ή αλλιώς, σύμφωνα με τον ορισμό 4.5,

$$(d) \quad \vdash !\{\Lambda\beta\,\alpha\}[\beta] \wedge [\{\Lambda\beta\,\alpha\}[\beta] \,@\, A\,].$$

Από το Λήμμα 4.4(α) έχουμε

$$\vdash \{\Lambda\alpha\,\Lambda\beta\,\alpha\}\,[\alpha\,] \simeq \Lambda\beta\,\alpha,$$

οπότε, από το Λήμμα 3.10(δ) έχουμε

$$(e) \quad \vdash !\{\Lambda\alpha\,\Lambda\beta\,\alpha\}\,[\alpha\,],$$

οπότε, από τα (d), (e) και τα ίδια Λήμματα,

$$\vdash !\{\{\Lambda\alpha\,\Lambda\beta\,\alpha\}\,[\alpha]\}[\beta\,] \wedge [\,\{\{\Lambda\alpha\,\Lambda\beta\,\alpha\}\,[\alpha]\}\,[\beta\,] \,@\, A\,],$$

οπότε παίρνουμε ότι

$$\vdash \forall\beta\,[\,\beta \,@\, B \wedge B \to !\{\{\Lambda\alpha\,\Lambda\beta\,\alpha\}\,[\alpha]\}\,[\beta\,] \wedge [\,\{\{\Lambda\alpha\,\Lambda\beta\,\alpha\}\,[\alpha]\}\,[\beta\,] \,@\, A\,],$$

δηλαδή, σύμφωνα με τον ορισμό,

$$(i) \quad \vdash \{\Lambda\alpha\,\Lambda\beta\,\alpha\}\,[\alpha\,] \,@\, B \to A.$$

Κλείνοντας την υπόθεση (a) και γενικεύοντας, λόγω των (e), (i), προκύπτει ότι

$$\vdash \forall\alpha\,(\alpha \,@\, A \wedge A \to !\{\Lambda\alpha\,\Lambda\beta\,\alpha\}\,[\alpha\,] \wedge [\{\Lambda\alpha\,\Lambda\beta\,\alpha\}\,[\alpha\,] \,@\, B \to A\,]\,),$$

άρα

$$\vdash \Lambda\alpha\,\Lambda\beta\,\alpha \,@\, A \to (B \to A),$$

δηλαδή, βρήκαμε έναν p-συναρτητή, τον $\Lambda\alpha\,\Lambda\beta\,\alpha$, με την επιθυμητή ιδιότητα.

1b. $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to ((\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C})) \to (\mathrm{A} \to \mathrm{C}))$.

Για την κατανόηση του τρόπου που γίνεται η ακόλουθη απόδειξη, είναι αναγκαία η εξής
Βασικη Παρατηρηση για μία τεχνική που χρησιμοποιείται στις αποδείξεις. Ο τύπος $!\mathrm{u} \wedge [\mathrm{A(u)}]$, όπου ο u είναι p-συναρτητής, είναι, όπως είδαμε, συντόμευση του τύπου $\exists \beta\,(\mathrm{u} \simeq \beta \wedge \mathrm{A}(\beta))$. Στην περίπτωση που ο u είναι P-συναρτητής, η έκφραση $\mathrm{A(u)}$ *δεν* είναι τύπος της γλώσσας μας, αφού, όπως είδαμε, δεν μπορεί στην περίπτωση αυτή να γίνει αντικατάσταση. Ομως, ένας P-συναρτητής *μπορεί να είναι ολικά ορισμένος*, και θα θέλαμε σε πολλές περιπτώσεις να τον χρησιμοποιήσουμε, παρά τους περιορισμούς των κανόνων. Ετσι λοιπόν, εργαζόμαστε υποκαθιστώντας τον με μία συναρτησιακή μεταβλητή, για την οποία υποθέτουμε ότι είναι ίση (με την έννοια του "$\simeq$") με αυτόν, και, για την οποία αίρονται οι περιορισμοί. Αυτοί είναι οι λόγοι που κάνουν απαραίτητη τη χρήση αυτής της συντόμευσης.

Δίνουμε τώρα την απόδειξη για την περίπτωση του αξιώματος 1b.
Εστω ότι

(a) $\pi\,@\,(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \to \mathrm{B})$,

δηλαδή $\forall \alpha\,(\alpha\,@\,\mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \to !\{\pi\}\,[\alpha] \wedge [\,\{\pi\}\,[\alpha]\,@\,\mathrm{B}\,]) \wedge (\mathrm{A} \to \mathrm{B})$,

(b) $\rho\,@\,(\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C})) \wedge (\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C}))$,

δηλαδή $\forall \alpha\,(\alpha\,@\,\mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \to !\{\rho\}\,[\alpha] \wedge [\,\{\rho\}\,[\alpha]\,@\,(\mathrm{B} \to \mathrm{C})\,]) \wedge$
$(\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C}))$,

(c) $\alpha\,@\,\mathrm{A} \wedge \mathrm{A}$.

Από τα (a) και (c) προκύπτει το

(1) $!\{\pi\}\,[\alpha] \wedge [\,\{\pi\}\,[\alpha]\,@\,\mathrm{B}\,] \wedge \mathrm{B}$,

και από τα (b) και (c) το

(2) $!\{\rho\}\,[\alpha] \wedge [\,\{\rho\}\,[\alpha]\,@\,(\mathrm{B} \to \mathrm{C})\,]$.

Αξιοποιώντας τώρα την μέθοδο της Παρατήρησης, υποθέτουμε ότι

$$\text{(d)}\quad \{\pi\}\,[\,\alpha\,] \simeq \beta \;\wedge\; \beta \,@\, \mathrm{B},$$
$$\text{(e)}\quad \{\rho\}\,[\,\alpha\,] \simeq \gamma \;\wedge\; \gamma \,@\, (\mathrm{B} \to \mathrm{C}).$$

Από το (e) έχουμε το

$$(3)\quad \forall\sigma\,(\sigma \,@\, \mathrm{B} \wedge \mathrm{B} \to !\{\gamma\}\,[\sigma] \wedge [\{\gamma\}\,[\sigma] \,@\, \mathrm{C}\,]\,),$$

οπότε, εξειδικεύοντας για β, πράγμα που επιτρέπεται, εφόσον η συναρτησιακή μεταβλητή β είναι συναρτητής, από το (d) και το (1) προκύπτει το

$$(4)\quad !\{\gamma\}\,[\,\beta\,] \wedge [\{\gamma\}\,[\,\beta\,] \,@\, \mathrm{C}\,]\,.$$

Τώρα από τα (d), (e) και το Λήμμα 3.6, έχουμε το

$$(5)\quad !\{\{\rho\}\,[\,\alpha\,]\}\,[\{\pi\}\,[\,\alpha\,]\,] \wedge [\,\{\{\rho\}\,[\,\alpha\,]\}\,[\{\pi\}\,[\,\alpha\,]\,] \,@\, \mathrm{C}].$$

Από τα Λήμματα 4.4(α), 4.6, έχουμε το

$$(6)\quad !\{\Lambda\alpha\{\{\rho\}\,[\,\alpha\,]\}\,[\{\pi\}\,[\,\alpha\,]\,]\}\,[\,\alpha\,] \wedge [\,\{\Lambda\alpha\{\{\rho\}\,[\,\alpha\,]\}\,[\{\pi\}\,[\,\alpha\,]\,]\}\,[\,\alpha\,] \,@\, \mathrm{C}\,].$$

Από το (c), κλείνοντας την υπόθεση (c), προκύπτει το

$$(7)\quad \Lambda\alpha\{\{\rho\}\,[\,\alpha\,]\}\,[\{\pi\}\,[\,\alpha\,]\,] \,@\, \mathrm{A} \to \mathrm{C},$$

οπότε από τα Λήμματα 4.4(α), 4.6 έχουμε το

$$(8)\quad !\{\Lambda\rho\,\Lambda\alpha\{\{\rho\}\,[\,\alpha\,]\}\,[\{\pi\}\,[\,\alpha\,]\,]\}\,[\rho] \wedge$$
$$[\,\{\Lambda\rho\,\Lambda\alpha\{\{\rho\}\,[\,\alpha\,]\}\,[\{\pi\}\,[\,\alpha\,]\,]\}\,[\rho] \,@\, (\mathrm{A} \to \mathrm{C})\,].$$

Τώρα, κλείνοντας την υπόθεση (b), έχουμε ότι

$$(9)\quad \Lambda\rho\,\Lambda\alpha\{\{\rho\}\,[\,\alpha\,]\}\,[\{\pi\}\,[\,\alpha\,]\,] \,@\, (\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C})) \to (\mathrm{A} \to \mathrm{C}).$$

Τελικά, με ανάλογα βήματα, παίρνουμε το

$$(10)\quad \Lambda\pi\,\Lambda\rho\,\Lambda\alpha\{\{\rho\}\,[\,\alpha\,]\}\,[\{\pi\}\,[\,\alpha\,]\,] \,@$$
$$((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to ((\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C})) \to (\mathrm{A} \to \mathrm{C})).$$

$\dashv$

Σχολια. 1) Οι p-συναρτητές που δίνονται για κάθε αξίωμα σ' αυτήν εδώ την απόδειξη, είναι οι ίδιοι για την ⓡ και την ⓠ, και αντιστοιχούν ακριβώς στις πρωτογενείς αναδρομικές συναρτήσεις, οι οποίες δίνονται στην αντίστοιχη απόδειξη του Κεφαλαίου 3.

2) Για τα αξιώματα 13 (αρχή της επαγωγής της Αριθμητικής Peano) και $\mathcal{BI}$ χρησιμοποιούνται κάποια (άλλα) στιγμιότυπα των ίδιων σχημάτων, σε αναλογία με τη χρήση των αντίστοιχων διαισθητικών αρχών στην απόδειξη του Κεφαλαίου 3· ειδικά για την ⓠ, χρησιμοποιούνται και τα ίδια ακριβώς, με αυτά για τα οποία γίνεται η απόδειξη, στιγμιότυπα.

Δίνουμε τώρα μερικούς ορισμούς, απαραίτητους για τη διατύπωση βασικών Πορισμάτων του Θεωρήματος.

5.5. Ορισμοι.

1) Αν E είναι κλειστός τύπος, τότε θέτουμε:

$$\begin{aligned} &\text{ⓡ}\ \mathrm{E} \ \equiv\ \exists \mathrm{f}\, \exists \varepsilon\, (\lambda \mathrm{x}\, \{\mathrm{f}\}(\mathrm{x}) \simeq \varepsilon \wedge \varepsilon\, \text{ⓡ}\ \mathrm{E}), \\ \text{και}\quad &\text{ⓠ}\ \mathrm{E} \ \equiv\ \exists \mathrm{f}\, \exists \varepsilon\, (\lambda \mathrm{x}\, \{\mathrm{f}\}(\mathrm{x}) \simeq \varepsilon \wedge \varepsilon\, \text{ⓠ}\ \mathrm{E}). \end{aligned}$$

2) Αν E είναι τύπος με ελεύθερες μεταβλητές αυτές της λίστας Φ, τότε θέτουμε:

$$\begin{aligned} &\text{ⓡ}\ \mathrm{E} \ \equiv\ \exists \mathrm{f}\, \forall \Phi\, \exists \varepsilon\, (\lambda \mathrm{x}\, \{\mathrm{f}\}(\mathrm{x}, \Phi) \simeq \varepsilon \wedge \varepsilon\, \text{ⓡ}\ \mathrm{E}), \\ \text{και}\quad &\text{ⓠ}\ \mathrm{E} \ \equiv\ \exists \mathrm{f}\, \forall \Phi\, \exists \varepsilon\, (\lambda \mathrm{x}\, \{\mathrm{f}\}(\mathrm{x}, \Phi) \simeq \varepsilon \wedge \varepsilon\, \text{ⓠ}\ \mathrm{E}). \end{aligned}$$

Στους ορισμούς 1) και 2), ο τύπος E είναι "r-*πραγματοποιήσιμος*" και "q-*πραγματοποιήσιμος*", ανάλογα.
Θα ταυτίζουμε το "*πραγματοποιήσιμος*" με το "r-*πραγματοποιήσιμος*".

3) Αν E είναι τύπος και Θ λίστα μεταβλητών, τότε θέτουμε:

$$\text{ⓡ-}\Theta\ \ \mathrm{E} \ \equiv\ \exists \mathrm{f}\, \forall \Phi\, \exists \varepsilon\, (\lambda \mathrm{x}\, \{\mathrm{f}\}(\mathrm{x}, \Phi, \Theta) \simeq \varepsilon \wedge \varepsilon\, \text{ⓡ}\ \mathrm{E}),$$

όπου η Φ (η οποία απαιτείται να είναι ξένη προς την Θ), περιέχει όλες τις ελεύθερες μεταβλητές του E, οι οποίες δεν περιλαμβάνονται στη Θ. Ο τύπος E είναι τότε "*πραγματοποιήσιμος-Θ*".

4) Ανάλογα με το 3), ορίζεται ο τύπος "ⓠ-Θ E", για κάθε τύπο E.

5.6. Πορισμα. (A) Αν $\vdash_{\mathcal{I}}$ E, τότε $\vdash_{\mathcal{B}}$ ⓡ E, και $\vdash_{\mathcal{I}}$ ⓠ E.

(B) Αν $D_1, \ldots, D_s \vdash_{\mathcal{I}} E$, με τις μεταβλητές της λίστας Θ αμετάβλητες, τότε, με τις Θ επίσης αμετάβλητες,

$$\text{ⓡ-}\Theta\ D_1, \ldots, \text{ⓡ-}\Theta\ D_s \vdash_{\mathcal{B}} \text{ⓡ-}\Theta\ E,$$

$$D_1, \ldots, D_s,\quad \text{ⓠ-}\Theta\ D_1, \ldots, \text{ⓠ-}\Theta\ D_s \vdash_{\mathcal{I}} \text{ⓠ-}\Theta\ E.$$

5.7. Πορισμα.

$$\vdash_{\mathcal{I}} E \;\Rightarrow\; \vdash_{\mathcal{B}} \exists \varepsilon\ \varepsilon \text{ⓡ} E,$$

$$\vdash_{\mathcal{I}} E \;\Rightarrow\; \vdash_{\mathcal{B}} \text{ⓡ} \forall E,$$

$$\vdash_{\mathcal{I}} E \;\Rightarrow\; \vdash_{\mathcal{I}} \text{ⓠ} \forall E.$$

5.8. Πορισμα. Το σύστημα $\mathcal{I}$ είναι συνεπές σχετικά με το (υποσύστημά του) $\mathcal{B}$.

Αποδειξη. Αν το $\mathcal{I}$ δεν είναι συνεπές, τότε $\vdash_{\mathcal{I}} 1 = 0$. Ομως τότε, σύμφωνα με το Πόρισμα 5.6(A), θα έχουμε

$$\vdash_{\mathcal{B}} \text{ⓡ}\, 1 = 0$$

και, τελικά, από τον κανόνα 1 (του ορισμού του ⓡ), αφού ο 1=0 είναι ατομικός,

$$\vdash_{\mathcal{B}} 1 = 0.$$

⊣

Παρατηρηση. Αυτή η απόδειξη συνέπειας είναι περατοκρατική, εφόσον όλα γίνονται μέσα στο τυπικό σύστημα που ορίσαμε, σε αντίθεση με αυτήν του Κεφαλαίου 3, η οποία χρησιμοποιεί την έννοια της όχι τυπικής πραγματοποίησης, η οποία δεν είναι περατοκρατική, αφού στον ορισμό της, στις περιπτώσεις $\rightarrow, \forall, \exists$, χρησιμοποιούνται "άπειρα" αντικείμενα, τα πεδία ερμηνείας των ποσοδεικτών.

5.9. Πορισμα. (i) Αν $\vdash_{\mathcal{I}} A \vee B$, $A \vee B$ κλειστός,

τότε $\vdash_{\mathcal{I}} A$ ή $\vdash_{\mathcal{I}} B$.

(ii) Αν $\vdash_{\mathcal{I}} \exists x\, A(x)$, $\exists x\, A(x)$ κλειστός, τότε, για κάποιο αριθμό x,

$$\vdash_{\mathcal{I}} \ \mathrm{A}(\mathbf{x}), \quad \text{όπου } \mathbf{x} \text{ το ψηφίο του } x.$$

(iii) Αν $\vdash_{\mathcal{I}} \ \exists\alpha\, \mathrm{A}(\alpha)$, $\exists\alpha\, \mathrm{A}(\alpha)$ κλειστός,

$$\text{τότε} \quad \vdash_{\mathcal{I}} \ \exists\alpha_{\mathrm{GR}(\alpha)}\mathrm{A}(\alpha)$$

και, για κατάλληλο αριθμό e,

$$\vdash_{\mathcal{I}} \ \exists\alpha\, (\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, [\, \mathrm{T}(\, \mathbf{e}, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \wedge (\mathrm{y})_{0,3} = \alpha(\mathrm{x})\,] \wedge \mathrm{A}(\alpha)\,)$$

και

$$\vdash_{\mathcal{I}} \ \forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, [\, \mathrm{T}(\, \mathbf{e}, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \wedge \forall\alpha\, (\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, [\, \mathrm{T}(\, \mathbf{e}, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \wedge (\mathrm{y})_{0,3} = \alpha(\mathrm{x})\,] \rightarrow \mathrm{A}(\alpha)).$$

Επιπλέον, ο e είναι κατάλληλος δείκτης μίας γενικής αναδρομικής συνάρτησης α, την οποία εκφράζει στο $\mathcal{B}$ ο τύπος

$$\exists \mathrm{y}\, [\, \mathrm{T}\, (\mathbf{e}, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \wedge (\mathrm{y})_{0,3} = \mathrm{w}\,].$$

(iv) Αν $\vdash_{\mathcal{I}} \ \forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, όπου $\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ είναι κλειστός, τότε

$$\vdash_{\mathcal{I}} \ \exists\alpha_{\mathrm{GR}(\alpha)}\forall \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \alpha(\mathrm{x}))$$

και, για κάποιο αριθμό e,

$$\vdash_{\mathcal{I}} \ \forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, [\, \mathrm{T}(\, \mathbf{e}, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \wedge \mathrm{A}(\mathrm{x}, (\mathrm{y})_{0,3})\,].$$

Επιπλέον, ο e είναι κατάλληλος δείκτης μίας γενικής αναδρομικής συνάρτησης α, που εκφράζεται στο $\mathcal{B}$ από τον τύπο

$$\vdash_{\mathcal{I}} \ \exists \mathrm{y}\, [\, \mathrm{T}(\, \mathbf{e}, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \wedge (\mathrm{y})_{0,3} = \mathrm{w}\,],$$

τέτοια ώστε

$$\forall x\, (\, \vdash_{\mathcal{I}} \ \mathrm{A}(\mathbf{x}, \mathbf{w}), \ \text{ για } \ w = \alpha(x)\,).$$

Βιβλιογραφία

[Brouwer 1907] L.E.J. Brouwer. *Brouwer's PhD Thesis: On the foundations of mathematics.* Univ. of Amsterdam 1907, in Collected Works, ed. A. Heyting, North–Holland. 1975.

[Brouwer 1908] L.E.J. Brouwer. *The unreliability of the logical principles.* Tijdschrift voorwijsbegeerte 2 1908. 152-158, in Collected Works, ed. A. Heyting, North–Holland. 1975.

[Brouwer 1918] L.E.J. Brouwer. *Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil: Allgemeine Mengenlehre.* KNAW Verhandelingen 1e sectie 12 no. 5 1918. 43 p., in Collected Works, ed. A. Heyting, North–Holland. 1975.

[Brouwer 1981] Dirk van Dalen. (editor). *Brouwer's Cambridge lectures on intuitionism.* Cambridge University Press, 1981.

[Gauss' Werke] K.F. Gauss. *Briefwechsel Gauss-Schumacher*, vol. II; *Gauss' Werke*, vol. VIII (1900), p. 216.

[Hilbert–Bernays I] D. Hilbert and P. Bernays. *(1934). Grundlagen der Mathematik. Vol. I.* (Reprinted) J. W. Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1944. xii+471 pp.

[Hilbert–Bernays II] D. Hilbert and P. Bernays. *(1939). Grundlagen der Mathematik. Vol. II.* (Reprinted) J. W. Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1944. xii+498 pp.

[Kleene 1952] S.C. Kleene. *Introduction to Metamathematics.* D. Van Nostrand Co., Inc., New York, N. Y., 1952. x+550 pp.

[Kleene–Vesley '65] S.C. Kleene and R.E. Vesley. *The foundations of intuitionistic mathematics, especially in relation to recursive functions.* North–Holland Publishing Co., Amsterdam 1965 viii+206 pp.

[Kleene 1969] S.C. Kleene. *Formalized recursive functionals and formalized realizability.* Memoirs of the American Mathematical Society, No. 89 American Mathematical Society, Providence, R.I. 1969 106 pp.

[Mosch-Rand '67] Joan Rand Moschovakis. *Disjunction and existense in formalized intuitionistic analysis.*(Proc. Summer School Math. Logic and Tenth Logic Colloq., Leicester, 1965)) pp. 309–331 North-Holland, Amsterdam.

[Mosch-Rand '71] Joan Rand Moschovakis. *Can there be no non-recursive functions.* J. Symbolic Logic 36 1971. 309-315.

[Mosch-Rand '80] Joan Rand Moschovakis. *Kleene's realizability and "divides" notions for formalized intuitionistic mathematics.* The Kleene Symposium (Proc. Sympos., Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1978), pp. 167–179, Stud. Logic Foundations Math., 101, North-Holland, Amsterdam-New York, 1980.

[Oosten 2000] Jaap van Oosten. *Realizability: An Historical Essay.* (web–published: January 20, 2000; Revised October, 2000). To appear in Mathematical Structures in Computer Science.

[Troelstra 1973] A.S. Troelstra. *Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 344, Springer, Berlin, 1973.

[Troel–Dalen 1988] A.S. Troelstra and D. van Dalen. *Constructivism in mathematics. Vol. I. An introduction.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 121. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. xx+342+XIV pp.

[Troelstra 1991] A.S. Troelstra. *History of constructivism in the 20th century.* University of Amsterdam, ITLI Prepublication Series ML-91-05.

[Troelstra 1998] A. S. Troelstra. *Realizability.* Handbook of proof theory, 407–473, Stud. Logic Found. Math., 137, North-Holland, Amsterdam, 1998.

Δείκτης