Υπερφίλτρα, δυναμικά συστήματα και εργοδική θεωρία στη θεωρία Ramsey

Χρυσοβαλάντης Βερύκιος
Υπότροφος ΙΚΥ
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα
Λογικής και Αλγορίθμων
(ΜΠΛΑ)

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Η θεωρία Ramsey είναι κλάδος της συνδυαστικής. Πήρε το όνομά της προς τιμή του F.Ramsey (1903-1930), που απέδειξε το ομώνυμο θεώρημα σε ένα άρθρο του που αφορούσε τη μαθηματική λογική. [1]
Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε αποδείξεις, στοιχειώδεις και μη, κλασικών θεωρημάτων της περιοχής.
Πιο συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με τα επόμενα θεωρήματα.

1. **van der Waerden** (1927)
   Για κάθε $k, l \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N(k,l) \in \mathbb{N}$ με την ακόλουθη ιδιότητα:
   Αν χ χρωματισμός με k χρώματα του $\{1, 2, \ldots, N(k,l)\}$ τότε υπάρχουν $a, d \in \{1, 2, \ldots, N(k,l)\}$ ώστε $\chi(a) = \chi(a+d) = \cdots = \chi(a+(l-1)d)$.

2. **Ramsey** (1930)
   Για κάθε $k, n, p \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N(k,n,p) \in \mathbb{N}$ με την ακόλουθη ιδιότητα:
   Αν A σύνολο με $|A| \geq N(k,n,p)$ και χ τυχών χρωματισμός με k χρώματα του $[A]^p$ τότε υπάρχει $B \subseteq A$ με $|B| \geq n$ ώστε το $[B]^p$ να είναι μονοχρωματικό.
   Παρατήρηση: $[A]^p = \{X \subseteq A : |X| = p\}$.

3. **Hindman** (1974)
   Αν χ πεπερασμένος χρωματισμός του $\mathbb{N}$ τότε υπάρχει A άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ ώστε το $FS(A)$ να είναι μονοχρωματικό.
   Παρατήρηση: $FS(A) = \{m \in \mathbb{N} : m = \sum_{i \in F} i \ \ : \ \ F \in [A]^{<\omega}\}$.

4. **Szemeredi** (1975)
   Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ ώστε $limsup_n \frac{|A \cap \{1,2,\ldots,n\}|}{n} > 0$ και $l \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχουν $a, d \in \mathbb{N}$ ώστε $a, a+d, \ldots, a+(l-1)d \in A$.

Στην παράγραφο 2 δίνουμε στοιχειώδεις αποδείξεις.
Ξεκινάμε με την άπειρη μορφή του θεωρήματος Ramsey. Με τη βοήθεια του λήμματος Konig λαμβάνουμε ως πόρισμα τη μορφή του θεωρήματος που περιγράψαμε στην αρχή. Επιχειρήματα του είδους βασίζονται στη συμπάγεια και παίζουν βασικό ρόλο στην περιοχή.

[1]Πιο συγκεκριμένα, έδειξε ότι υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει σε κάθε πεπερασμένη δομή την αλήθεια ενός τύπου της μορφής $\exists x_1 \cdots \exists x_n \forall x_1 \cdots \forall x_k \phi$ όπου ο ϕ δεν έχει ποσοδείκτες. Η προσπάθεια εύρεσης αλγορίθμου που αποφαίνεται για την αλήθεια ενός τυχαίου τύπου της πρωτοβάθμιας λογικής, ήταν βέβαια καταδικασμένη σε αποτυχία όπως έδειξαν τα μετέπειτα αποτελέσματα των Turing, Church κ.α.

Στη συνέχεια δείχνουμε το θεώρημα van der Waerden με μια διπλή επαγωγή που ουσιαστικά αποτελεί αναδιατύπωση, πιο εύκολη στη γραφή, της κλασικής απόδειξης του θεωρήματος. Η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται γίνεται περισσότερο φανερή στην απόδειξη του επόμενου αποτελέσματος (θεώρημα Hales-Jewett). Το θεώρημα αυτό (από το οποίο εύκολα προκύπτει το θεώρημα van der Waerden) παίζει σπουδαίο ρόλο στη θεωρία Ramsey αφού αποτελεί βασικό εργαλείο σε πολλές συνδυαστικές αποδείξεις.
Κλείνουμε την παράγραφο παρουσιάζοντας την απόδειξη του Baumgartner για το θεώρημα του Hindman. Η απόδειξη αυτή είναι σημαντικά πιο σύντομη από την αρχική απόδειξη του ίδιου του Hindman

Στην παράγραφο 3 δίνουμε μια εντυπωσιακή εφαρμογή στη μαθηματική λογική. Το αποτέλεσμα που παρουσιάζουμε είναι μικρή τροποποίηση του παραδείγματος των Paris-Harrington, μιας πρότασης που διατυπώνεται στην πρωτοβάθμια αριθμητική, είναι αληθής, αλλά δεν αποδεικνύεται από τα αξιώματα του Peano. Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε συνθήκη $Q(s,t)$, χρησιμοποιώντας μια παραλλαγή του θεωρήματος Ramsey, για την οποία, με βάση ένα επιχείρημα συμπάγειας, ισχύει $\forall s \exists t Q(s,t)$. Μετά, ορίζοντας συγκεκριμένους χρωματισμούς, δείχνουμε $\forall s \forall t \leq f_{\epsilon_0}(s) \neg Q(s,t)$ όπου η f_{ϵ_0} βρίσκεται στην κορυφή της ιεραρχίας Wainer. Η f_{ϵ_0} υπερβαίνει κάθε αποδείξιμα στο σύστημα Peano αναδρομική συνάρτηση. Άρα δεν είναι δυνατόν να προκύπτει το $\forall s \exists t Q(s,t)$ από τα αξιώματα του Peano αφού τότε η αποδείξιμα στο σύστημα Peano αναδρομική συνάρτηση $\mu t Q(s,t)$ θα υπερέβαινε την f_{ϵ_0}.

Στην παράγραφο 4 ορίζουμε την έννοια του υπερφίλτρου.
Ξεκινώντας από ένα διακριτό τοπολογικό χώρο S θεωρούμε τον χώρο βS των υπερφίλτρων πάνω στον S, που εφοδιαζόμενος με κατάλληλη τοπολογία καθίσταται ομοιομορφικός με την Stone-Cech συμπαγοποίηση του S
Η συμπαγοποίηση Stone-Cech έχει την ιδιότητα να επεκτείνει τυχούσες συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τον S και πεδίο τιμών συμπαγή και Hausdorff χώρο σε συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το βS. Με βάση την ιδιότητα αυτή ορίζουμε πρόσθεση στον χώρο $\beta \mathbb{N}$, που καθίσταται έτσι συμπαγής, Hausdorff δεξιά συνεχής ημιομάδα.
Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την ύπαρξη ταυτοδυνάμων στοιχείων για την πρόσθεση και ορίζουμε την ιδιαίτερα χρήσιμη έννοια του ελαχιστικού αριστερού ιδεώδους για την οποία δίνουμε έναν χαρακτηρισμό.

Στην παράγραφο 5 κάνουμε χρήση αποτελεσμάτων από την παράγραφο 4 για να δώσουμε μη στοιχειώδεις αποδείξεις.

Ξεκινάμε με το θεώρημα Ramsey όπου απλά χρησιμοποιείται ο ορισμός του υπερφίλτρου.
Στη συνέχεια δίνουμε μια εντυπωσιακά σύντομη απόδειξη του θεωρήματος Hindman που βασίζεται στην ύπαρξη ταυτοδυνάμου για την πρόσθεση. Η συντομία και η απλότητα της απόδειξης αυτής, σε σύγκριση με τη δυσκολία των στοιχειωδών αποδείξεων του θεωρήματος έδωσε ιδιαίτερη ώθηση στη χρήση των αλγεβροτοπολογικών ιδιοτήτων του χώρου $\beta\mathbb{N}$ και γενικότερα των συμπαγών Hausdorff δεξιά συνεχών ημιομάδων στη θεωρία Ramsey.
Τελειώνουμε την παράγραφο αυτή με μια απόδειξη του θεωρήματος van der Waerden που χρησιμοποιεί την έννοια του ελαχιστικού αριστερού ιδεώδους.

Στην παράγραφο 6 κάνουμε χρήση μεθόδων της τοπολογικής δυναμικής.
Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα (X,T) όπου $X=\{1,2,\dots,c\}^{\mathbb{Z}}$, $c\in\mathbb{N}$ και T είναι η μετατόπιση κατά ένα αριστερά.
Δείχνουμε το θεώρημα van der Waerden μεταφράζοντάς το πρώτα σε κατάλληλη ορολογία της τοπολογικής δυναμικής και χρησιμοποιώντας ένα χαρακτηρισμό (για τη συγκεκριμένη περίπτωση δυναμικού συστήματος) της έννοιας του ελαχιστικού δυναμικού συστήματος
Στη συνέχεια κάνοντας χρήση της έννοιας της συνάφειας δύο σημείων και της περιβάλλουσας ημιομάδας που παράγει ο T, δείχνουμε το θεώρημα Hindman.

Στην παράγραφο 7 με τη βοήθεια του θεωρήματος του Furstenberg, από την εργοδική θεωρία, δίνουμε σύντομη απόδειξη μιας τροποποιημένης μορφής του θεωρήματος Szemeredi.

Οι μη στοιχειώδεις μέθοδοι (ιδιαίτερα αυτές που χρησιμοποιούν στοιχεία από την εργοδική θεωρία) αποτελούν πλέον βασικό εργαλείο στη θεωρία Ramsey, αφού εκτός από το γεγονός ότι δίνουν πολλές φορές πιό απλές αποδείξεις, καταφέρνουν να ενοποιούν κομμάτια της θεωρίας και να δινουν γενικεύσεις που δεν έχουν ακόμη στοιχειώδεις αποδείξεις.

2 Στοιχειώδεις αποδείξεις

Θα ξεκινήσουμε με το κλασικό αποτέλεσμα του Ramsey. Η πρώτη απόδειξη του βρίσκεται στο [13]. Αποδεικνύουμε αρχικά την άπειρη έκδοχή του.

Θεώρημα 2.1 *(Ramsey) Έστω $l \in \mathbb{N}$, $\chi : [\mathbb{N}]^2 \to \{1, 2, \dots, l\}$.*
Τότε υπάρχει $M \subseteq \mathbb{N}$ ώστε M άπειρο και $[M]^2$ μονοχρωματικό.

Απόδειξη:Ορίζουμε αναδρομικά ακολουθίες m_i φυσικών, A_i υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, c_i στοιχείων του $\{1, 2, \dots, l\}$.
$m_1 = 1$
Θέτουμε $B_{1,j} = \{x : x > m_1 \wedge \chi(\{m_1, x\}) = j\}$ για $j \in \{1, 2, \dots, l\}$
Υπάρχει j_1 ώστε B_{1,j_1} να είναι άπειρο.
Θέτουμε
$A_1 = B_{1,j_1}$
$c_1 = j_1$
Δοθέντων των $m_{i-1}, A_{i-1}, c_{i-1}$
$m_i = min A_{i-1}$
Θέτουμε $B_{i,j} = \{x : x > m_i \wedge \chi(\{m_i, x\}) = j\} \cap A_{i-1}$ για $j \in \{1, 2, \dots, l\}$
Υπάρχει j_i ώστε B_{i,j_i} να είναι άπειρο.
Θέτουμε $A_i = B_{i,j_i}$
$c_i = j_i$

Υπάρχει c_{i_n}, σταθερή υπακολουθία της c_i.
Έστω $c_{i_n} = c$
Θέτουμε $M = \{m_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}$
Αν $m_1, m_2 \in M$ με $m_1 < m_2$ και n ο ελάχιστος φυσικός ώστε $m_1 \in A_{i_n}$ τότε $m_2 \in A_{i_{n+1}}$ άρα $\chi(\{m_1, m_2\}) = c$ •

Μιά εύκολη επαγωγή γενικεύει το συμπέρασμα για πεπερασμένους χρωματισμούς του $[\mathbb{N}]^p$ για $p \in \mathbb{N}$.
Δείχνουμε την πεπερασμένη μορφή του θεωρήματος χρησιμοποιώντας ένα *επιχείρημα συμπάγειας.*

Θεώρημα 2.2 *Για κάθε $l, m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $R \in \mathbb{N}$ ώστε αν $\chi : [\{1, 2, \dots, R\}]^2 \to \{1, 2, \dots, l\}$ να υπάρχει $M \subseteq \{1, 2, \dots, R\}$ ώστε $|M| \geq m$ και $[M]^2$ να είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη: Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω $l, m \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπάρχει χρωματισμός για τον οποίον δεν ισχύει το συμπέρασμα του

θεωρήματος.
Έστω $\mathcal{F}$ η οικογένεια που περιέχει τους χρωματισμούς αυτούς.
Παρατηρούμε ότι $(\mathcal{F}, \subseteq)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο δέντρο. Η υπόθεσή που κάναμε εξασφαλίζει ότι είναι και άπειρο.
Εφαρμόζοντας το λήμμα Konig το $(\mathcal{F}, \subseteq)$ έχει άπειρο κλαδί, έστω $\mathcal{K}$.
Για το $\cup\mathcal{K} : [\mathbb{N}]^2 \to \{1, 2, \dots, l\}$ υπάρχει (βλέπε θεώρημα 2.1) άπειρο $A \subseteq \mathbb{N}$ ώστε $[A]^2$ μονοχρωματικό ως προς $\cup\mathcal{K}$.
Αν $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ τα m πρώτα στοιχεία του A τότε
$\cup\mathcal{K} \restriction \{1, 2, \dots, a_m\} \in \mathcal{F}$ ως περιορισμός του $\cup\mathcal{K}$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την επιλογή του A. •

Η πρώτη απόδειξη του επόμενου θεωρήματος βρίσκεται στο [18]. Η απόδειξη που δίνουμε εδώ[2] βασίζεται στην ίδια ιδέα και είναι πιο εύκολη στην γραφή.

Ορισμός 2.1 *Για $l, m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τα S-σύνολα του $\{0, 1, \dots, l\}^m$*
$S_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : (j \leq m - i \to 0 \leq x_j < l) \wedge (j > m - i \to x_j = l)\} \quad i = 0, 1, \dots, m$

Θεώρημα 2.3 *(van der Waerden) Έστω $l, r \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $W \in \mathbb{N}$ ώστε αν $\chi : \{1, 2, \dots, W\} \to \{1, 2, \dots, r\}$ να υπάρχουν $a, d \in \mathbb{N}$ ώστε*
$\chi(a) = \chi(a + d) = \cdots = \chi(a + (l - 1)d)$.

Απόδειξη: Ορίζουμε $S(l, m) \Leftrightarrow$ για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N(l, m, r)$ ώστε για κάθε $\chi : \{1, 2, \dots, N(l, m, r)\} \to \{1, 2, \dots, r\}$ να υπάρχουν $a, d_1, d_2, \dots, d_m$ ώστε το $\chi(a + \sum_{j=1}^{m} x_j d_j)$ να είναι σταθερό πάνω στα S-σύνολα του $\{0, 1, \dots, l\}^m$.
Παρατηρούμε ότι το θεώρημα που θέλουμε να δείξουμε είναι ισοδύναμο με $\forall l S(l, 1)$.
Αποδεικνύουμε το $S(l, m)$ επαγωγικά.
Προφανώς ισχύει το $S(1, 1)$.

Ισχυρισμός: $S(l, 1) \wedge S(l, 2) \wedge \cdots \wedge S(l, m) \to S(l, m + 1)$

Έστω $r \in \mathbb{N}$.
Θέτουμε $M = N(l, m, r)$, $M' = N(l, 1, r^M)$.
Θα δείξουμε ότι $N(l, m + 1, r) = MM'$ [3].
Έστω $\chi : \{1, 2, \dots, MM'\} \to \{1, 2, \dots, r\}$.

[2] για την απόδειξη αυτή και για πολλές από τις επόμενες χρησιμοποιήθηκε το [8]
[3] Η ισότητα αυτή σημαίνει ότι το MM' έχει τις απαιτούμενες για το $N(l, m + 1, r)$ ιδιότητες

Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στο $\{1, 2, \dots, M'\}$
$k \sim k' \Leftrightarrow \chi(kM - i) = \chi(k'M - i)$ για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$
Η $\sim$ δίνει ένα χρωματισμό $\chi' : \{1, 2, \dots, M'\} \to \{1, 2, \dots, r^M\}$
με την ιδιότητα $\chi'(k) = \chi'(k')$ ανν $k \sim k'$.
Υπάρχουν λοιπόν a', d_1 ώστε
$\chi'(a') = \chi'(a' + d_1) = \cdots = \chi'(a' + (l - 1)d_1)$.
$|\{a'M - M + 1, a'M - M + 2, \dots, a'M\}| = M$ άρα υπάρχουν $a, d_2, d_3, \dots, d_{m+1}$ ώστε $\chi(a + \sum_{i=1}^{m} x_i d_{i+1})$ να είναι σταθερό σε κάθε ένα από τα S-σύνολα του $\{0, 1, \dots, l\}^m$.
Έτσι το $\chi(a + \sum_{i=1}^{m+1} x_i d_i)$ είναι σταθερό στα S-σύνολα του $\{0, 1, \dots, l\}^{m+1}$.

Ισχυρισμός: $\forall m S(l, m) \to S(l + 1, 1)$

Έστω $r \in \mathbb{N}$.
Θα δείξουμε ότι $N(l + 1, 1, r) = N(l, r, r)$
Έστω $\chi : \{1, 2, \dots, N(l, r, r)\} \to \{1, 2, \dots, r\}$
Υπάρχουν $a', d'_1, d'_2, \dots, d'_r$ ώστε $\chi(a' + \sum_{i=1}^{r} x_i d'_i)$ να είναι σταθερό σε κάθε ένα από τα S-σύνολα του $\{0, 1, \dots, l\}^r$.
$|\{a' + \sum_{i=u}^{r} l d'_i : 1 \leq u \leq r + 1\}| = r + 1$
άρα υπάρχουν $u, v \in \mathbb{N}$ ώστε $1 \leq u < v \leq r + 1$ και $\chi(a' + \sum_{i=u}^{r} l d'_i) = \chi(a' + \sum_{i=v}^{r} l d'_i)$
Θέτουμε $a = a' + \sum_{i=v}^{r} l d'_i$, $d = \sum_{i=u}^{v-1} d'_i$
και παρατηρούμε ότι $\chi(a + id)$ είναι σταθερό για $i \in \{0, 1, \dots, l\}$.

Από τους δύο ισχυρισμούς και το $S(1, 1)$ έχουμε $\forall l \forall m S(l, m)$ $\bullet$

Μια ενδιαφέρουσα γενίκευση του Θεωρήματος 2.3 στην οποία η μέθοδος που χρησιμοποιείται γίνεται περισσότερο φανερή είναι το θεώρημα Hales-Jewett [9]

Ορισμός 2.2 *Έστω* $B_0 \subsetneq \{1, 2, \dots, n\}$, $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ *διαμέριση του* $\{1, 2, \dots, n\} \setminus B_0$ *και* $\mathbf{x} \in \{0, 1, \dots, t - 1\}^n$
$S \subseteq \{0, 1, \dots, t - 1\}^n$ *καλείται* k*-διάστατος συνδυαστικός χώρος αν*
$\mathbf{y} \in S \Leftrightarrow (i \in B_0 \to \mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i) \wedge (\exists l(\{i, j\} \subseteq B_l) \to \mathbf{y}_i = \mathbf{y}_j)$

Ένας μονοδιάστατος συνδυαστικός χώρος καλείται συνδυαστική γραμμή.

Ο $\chi : \{0, 1, \dots, t - 1\}^n \to \{1, 2, \dots, r\}$ καλείται συμβατός αν τα S-σύνολα του $\{0, 1, \dots, t - 1\}^n$ είναι μονοχρωματικά.
Η προφανής αντιστοίχιση του τυχόντα k-διάστατου συνδυαστικού χώρου με το $\{0, 1, \dots, t - 1\}^k$ μας επιτρέπει να μεταφέρουμε χρωματισμούς.

Ορισμός 2.3 *Αν χ πεπερασμένος χρωματισμός του $\{0,1,\ldots,t-1\}^n$, τότε ένας k-διάστατος χώρος, έστω S, καλείται συμβατός με τον χ, αν ο επαγόμενος, μέσω του S, χρωματισμός του $\{0,1,\ldots,t-1\}^k$ είναι συμβατός.*

Θεώρημα 2.4 *(Hales-Jewett) Για κάθε $r,t \in \mathbb{N}$ υπάρχει N ώστε αν $\chi : \{0,1,\ldots,t-1\}^N \to \{1,2,\ldots,r\}$ τότε υπάρχει μονοχρωματική συνδυαστική γραμμή.*

Απόδειξη: Ορίζουμε $HJ(t) \Leftrightarrow$ για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N(t,r)$ ώστε αν $\chi : \{0,1,\ldots,t-1\}^{N(t,r)} \to \{1,2,\ldots,r\}$ να υπάρχει μονοχρωματική συνδυαστική γραμμή.
$LHJ(T) \Leftrightarrow$ για κάθε $r,k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N'(t,r,k)$ ώστε αν $\chi : \{0,1,\ldots,t\}^{N'(t,r,k)} \to \{1,2,\ldots,r\}$ να υπάρχει συμβατός με τον χ k-διάστατος χώρος.

$HJ(1)$ ισχύει τετριμμένα.

Ισχυρισμός: $HJ(t) \to LHJ(t)$

Με επαγωγή στο k για όλα τα r κάθε φορά
$k=1$ θέτουμε $N'(t,r,1) = N(t,r)$
Αν $\chi : \{0,1,\ldots,t\}^{N(t,r)} \to \{1,2,\ldots,r\}$ τότε υπάρχει μονοχρωματική συνδυαστική γραμμή του $\{0,1,\ldots,t-1\}^{N(t,r)}$, έστω L, που με την προσθήκη ενός σημείου, αυτού που στις σταθερές συντεταγμένες συμφωνεί με τα σημεία της L και στις μεταβαλλόμενες συντεταγμένες έχει τιμή t, γίνεται συμβατός με τον χ 1-διάστατος χώρος.
$k \to k+1$ θέτουμε $m = N'(t,r,k)$, $s = r^{(t+1)^m}$, $m' = N'(t,s,1)$
Θα δείξουμε $N'(t,r,k+1) = m + m'$
Υπάρχει προφανής αντιστοίχιση των $\{0,1,\ldots,t\}^{m'+m}$, $\{0,1,\ldots,t\}^{m'} \times \{0,1,\ldots,t\}^m$.
Αν $\mathbf{x} \in \{0,1,\ldots,t\}^{m'}$, $\mathbf{y} \in \{0,1,\ldots,t\}^m$ τότε γράφουμε $\mathbf{xy}$ για το αντίστοιχο στοιχείο του $\{0,1,\ldots,t\}^{m'+m}$.
Έστω $\chi : \{0,1,\ldots,t\}^{m'+m} \to \{1,2,\ldots,r\}$
Ορίζουμε $\chi' : \{0,1,\ldots,t\}^{m'} \to \{1,2,\ldots,s\}$ χρησιμοποιώντας την σχέση $\sim$
$\mathbf{x} \sim \mathbf{x'} \Leftrightarrow \forall \mathbf{y} \in \{0,1,\ldots,t\}^m \chi(\mathbf{xy}) = \chi(\mathbf{x'y})$
Υπάρχει συμβατή με τον χ' συνδυαστική γραμμή $L = \{\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_t}\} \subseteq \{0,1,\ldots,t\}^{m'}$
Ορίζουμε $\chi'' : \{0,1,\ldots,t\}^m \to \{1,2,\ldots,r\}$ ώστε
$\chi''(\mathbf{y}) = \chi(\mathbf{x_0 y}) = \chi(\mathbf{x_1 y}) = \cdots = \chi(\mathbf{x_{t-1} y})$
Υπάρχει k-διάστατος συνδυαστικός χώρος συμβατός με τον χ'' έστω S.
θέτουμε $T = \{\mathbf{x_i y} : 0 \leq i \leq t \wedge y \in S\}$
Τότε ο T είναι $k+1$-διάστατος χώρος συμβατός με τον χ

Ισχυρισμός: Αν $\chi : \{0,1,\dots,t\}^k \to \{1,2,\dots,k\}$ είναι συμβατός τότε υπάρχει μονοχρωματική συνδυαστική γραμμή.

Θεωρώντας τα $\mathbf{x_i} = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})$ για $i \in \{0,1,\dots,k\}$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{αν } j \leq i \\ t & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

έχουμε ότι υπάρχουν $u, v \in \mathbb{N}$, $0 \leq u < v \leq k$ ώστε $\chi(\mathbf{x_u}) = \chi(\mathbf{x_v})$.
Ορίζεται λοιπόν η συνδυαστική γραμμή $L = \{\mathbf{y_0}, \mathbf{y_1}, \dots, \mathbf{y_t}\}$ με

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{αν } j \leq u \\ i & \text{αν } u < j \leq v \\ t & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η L είναι μονοχρωματική.

Χρησιμοποιώντας την αντιστοίχιση του $\{0,1,\dots,t\}^k$ με έναν οποιοδήποτε k-διάστατο συνδυαστικό χώρο ο παραπάνω ισχυρισμός δίνει ότι αν $\chi : \{0,1,\dots,t\}^{k'} \to \{1,2,\dots,k\}$ και $S \subseteq \{0,1,\dots,t\}^{k'}$ k-διάστατος συνδυαστικός χώρος συμβατός με τον χ τότε υπάρχει $L \subseteq S$ μονοχρωματική συνδυαστική γραμμή.

Ισχυρισμός: $LHJ(t) \to HJ(t+1)$

Θέτουμε $N(t+1,r) = N'(t,r,r)$
Αν $\chi : \{0,1,\dots,t\}^{N'(t,r,r)} \to \{1,2,\dots,r\}$ τότε υπάρχει S r-διάστατος συνδυαστικός χώρος συμβατός με τον χ.
Άρα υπάρχει $L \subseteq S$ μονοχρωματική συνδυαστική γραμμή.

Από τους ισχυρισμούς προκύπτει $\forall t HJ(t)$. •

Το Θεώρημα 2.3 προκύπτει από το Θεώρημα 2.4 ως εξής.
Αν $l, r \in \mathbb{N}$ θεωρώντας το l-αδικό ανάπτυγμα, το $\mathbb{N}$ αντιστοιχίζεται με τις λέξεις με γράμματα από το $\{0,1,\dots,l-1\}$.
Θα δείξουμε ότι $W(l,r) = l^{N(l,r)} - 1$
Αν $\chi : \{0,1,\dots,l^{N(l,r)} - 1\} \to \{1,2,\dots,r\}$ τότε επάγεται
$\chi' : \{0,1,\dots,l-1\}^{N(l,r)} \to \{1,2,\dots,r\}$ οπότε υπάρχει μονοχρωματική συνδυαστική γραμμή για τον χ' που μέσω της αντιστοιχίας δίνει την ζητούμενη αριθμητική πρόοδο για τον χ.

Στις παραπάνω αποδείξεις γίνεται χρήση διπλής επαγωγής. Αποτέλεσμα αυτού είναι οι αριθμοί που ικανοποιούν τα συμπεράσματα των θεωρημάτων να είναι άπειρης τάξης στην ιεραρχία Ackermann, άρα οι αντίστοιχες συναρτήσεις να

μην είναι πρωτογενώς αναδρομικές. (Για τον ορισμό της ιεραρχίας Ackermann βλέπε παράγραφο 3)
Πρόσφατα μια νέα απόδειξη του θεωρήματος Hales-Jewett από τον S. Shelah [15] κατάφερε να αποφύγει τη διπλή επαγωγή. (Για την ακρίβεια δίνει συναρτήσεις τάξης Ackermann 4).

Το επόμενο θεώρημα αποδείχθηκε αρχικά από τον N. Hindmann [11] .
Εδώ θα δώσουμε την πιο προσιτή απόδειξη του J.E. Baumgartner [1]

Συμβολισμός: $[\mathbb{N}]^{<w} = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| < w\}$

Ορισμός 2.4 *Έστω $\mathcal{D} \subseteq [\mathbb{N}]^{<w}$. Η $\mathcal{D}$ λέγεται ξένη συλλογή αν $|\mathcal{D}| = w$ και $\mathcal{D} \cup \{\mathbb{N} \setminus \cup\mathcal{D}\}$ είναι διαμέριση του $\mathbb{N}$.*

Έστω $\mathcal{D}$ ξένη συλλογή.
$FU(\mathcal{D}) = \{\cup_{i\in I} D_i : I \in [\mathbb{N}]^{<w} \wedge D_i \in \mathcal{D}$ για $i \in I\}$
Έστω $\mathcal{D}'$ ξένη συλλογή.
$\mathcal{D}' < \mathcal{D}$ αν $\mathcal{D}' \subseteq FU(\mathcal{D})$.

Ορισμός 2.5 *Έστω $\mathcal{C} \subseteq [\mathbb{N}]^{<w}$, $\mathcal{D}$ ξένη συλλογή.*
$M(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \Leftrightarrow \forall \mathcal{D}' < \mathcal{D}(\mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D}') \neq \emptyset)$.

Παρατηρήσεις

- $\mathcal{D}' < \mathcal{D} \to FU(\mathcal{D}') \subseteq FU(\mathcal{D})$
- $M(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \wedge \mathcal{D}' < \mathcal{D} \to M(\mathcal{C}, \mathcal{D}')$
- $M([\mathbb{N}]^{<w}, [\mathbb{N}]^1)$

Αν $A \in [\mathbb{N}]^{<w}$ τότε θέτουμε $\mathcal{D} - A = \{B \in \mathcal{D} : B \cap A = \emptyset\}$
Το $\mathcal{D} - A$ είναι ξένη συλλογή.
Αν $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_k\}$ είναι διαμέριση της $\mathcal{C}$ τότε γράφουμε $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \cdots + \mathcal{C}_k$

Θεώρημα 2.5 *Έστω $[\mathbb{N}]^{<w} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \cdots + \mathcal{C}_k$.*
Τότε υπάρχουν $\mathcal{A}$ ξένη συλλογή, $i_0 \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ώστε $FU(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}_{i_0}$.

Απόδειξη:
Ισχυρισμός: Αν $M(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ και $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \cdots + \mathcal{C}_k$ τότε υπάρχει $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ και $\mathcal{D}' < \mathcal{D}$ ώστε $M(\mathcal{C}_i, \mathcal{D}')$

$k = 1$ θέτουμε $i = 1$, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$
$k \to k + 1$ Αν $M(\mathcal{C}_{k+1}, \mathcal{D})$ τότε θέτουμε $i = k + 1$, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$

Αν $\neg M(\mathcal{C}_{k+1}, \mathcal{D})$ τότε υπάρχει $\mathcal{D}'' < \mathcal{D}$ ώστε $\mathcal{C}_{k+1} \cap FU(\mathcal{D}'') = \emptyset$.
Όμως $M(\mathcal{C}, \mathcal{D}'')$ άρα αν $\mathcal{D}''' < \mathcal{D}''$ τότε $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \cdots + \mathcal{C}_k) \cap FU(\mathcal{D}''') \neq \emptyset$, δηλαδή $M(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \cdots + \mathcal{C}_k, \mathcal{D}''')$ άρα, από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ και $\mathcal{D}' < \mathcal{D}''$ ώστε $M(\mathcal{C}_i, \mathcal{D}')$. Αφού $\mathcal{D}' < \mathcal{D}$ έπεται το συμπέρασμα.

Ισχυρισμός: $M(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \wedge S \in [\mathbb{N}]^{<w} \to M(\mathcal{C} - S, \mathcal{D})$

Προς άτοπο, έστω $\mathcal{D}' < \mathcal{D}$ με $(\mathcal{C} - S) \cap FU(\mathcal{D}') = \emptyset$
Άρα $(\mathcal{C} - S) \cap FU(\mathcal{D}' - S) = \emptyset$, άτοπο αφού προφανώς $M(\mathcal{C} - S, \mathcal{D}' - S)$

Ισχυρισμός: Έστω $M(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Τότε υπάρχουν $D \in FU(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}' < \mathcal{D} - D$ έτσι ώστε αν $\mathcal{C}' = \{C \in \mathcal{C} : C \cap D = \emptyset \wedge C \cup D \in \mathcal{C}\}$ τότε $M(\mathcal{C}', \mathcal{D}')$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν $D_1, D_2, \ldots, D_k \in \mathcal{D}$ ώστε αν $D' \in FU(\mathcal{D})$ και $D' \cap \cup_{i=1}^{k} D_i = \emptyset$ τότε να υπάρχει $I(D') \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ ώστε
$D' \cup \cup_{i \in I(D')} D_i \in \mathcal{C}$. (Ειδάλλως θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ξένη συλλογή $\{D_1, D_2, \ldots\}$ ώστε $FU(\{D_1, D_2, \ldots\}) \cap \mathcal{C} = \emptyset$)
Γιά $\emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ θέτουμε $\mathcal{C}_I = \{C \in \mathcal{C} : C \cap \cup_{i=1}^{k} D_i = \emptyset \wedge C \cup \cup_{i \in I} D_i \in \mathcal{C}\}$
Έτσι $\mathcal{C} - \cup_{i=1}^{k} D_i = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,k\}} \mathcal{C}_I$
Από τον πρώτο ισχυρισμό υπάρχουν I_0, $\mathcal{D}'$ ώστε $\mathcal{D}' < \mathcal{D} - \cup_{i=1}^{k} D_i < \mathcal{D} - \cup_{i \in I_0} D_i$ και $M(\mathcal{C}_{I_0}, \mathcal{D}')$.
Αρκεί λοιπόν να θέσουμε $D = \cup_{i \in I_0} D_i$

Ισχυρισμός: Αν $M(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ τότε υπάρχουν $D \in FU(\mathcal{D}) \cap \mathcal{C}$ και $\mathcal{D}' < \mathcal{D}$ ώστε αν $\mathcal{C}' = \{C \in \mathcal{C} : C \cap D = \emptyset \wedge C \cup D \in \mathcal{C}\}$ τότε $M(\mathcal{C}', \mathcal{D}')$

Χρησιμοποιούμε τον προηγούμενο ισχυρισμό για να ορίσουμε αναδρομικά ακολουθίες $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{D}_n$, D_n με τις ακόλουθες ιδιότητες
$D_1 \in FU(\mathcal{D})$
$\mathcal{D}_1 < \mathcal{D} - D_1$
$\mathcal{C}_1 = \{C \in \mathcal{C} : C \cap D_1 = \emptyset \wedge C \cup D_1 \in \mathcal{C}\}$
$M(\mathcal{C}_1, \mathcal{D}_1)$
και γενικότερα
$D_{n+1} \in FU(\mathcal{D}_n)$
$\mathcal{D}_{n+1} < \mathcal{D}_n - D_{n+1}$
$\mathcal{C}_{n+1} = \{C \in \mathcal{C}_n : C \cap D_{n+1} = \emptyset \wedge C \cup D_{n+1} \in \mathcal{C}_n\}$
$M(\mathcal{C}_{n+1}, \mathcal{D}_{n+1})$
Θα υπάρχουν $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ ώστε $\cup_{j=1}^{k} D_{i_j} \in \mathcal{C}$

Θέτουμε $D = \cup_{j=1}^{k} D_{i_j}$ και $\mathcal{D}' = \mathcal{D}_{i_k}$

Ισχυρισμός: Αν $M(\mathcal{C},\mathcal{D})$ τότε υπάρχει $\mathcal{D}' < \mathcal{D}$ ώστε $FU(\mathcal{D}') \subseteq \mathcal{C}$

Χρησιμοποιούμε τον προηγούμενο ισχυρισμό για να ορίσουμε αναδρομικά ακολουθίες $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{D}_n$, D_n με τις ακόλουθες ιδιότητες
$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$
$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$
$D_0 = \emptyset$
και γενικότερα
$D_{n+1} \in FU(\mathcal{D}_n) \cap \mathcal{C}_n$
$\mathcal{D}_{n+1} < \mathcal{D}_n - D_{n+1}$
$\mathcal{C}_{n+1} = \{C \in \mathcal{C}_n : C \cap D_{n+1} = \emptyset \wedge C \cup D_{n+1} \in \mathcal{C}_n\}$
$M(\mathcal{C}_{n+1}, \mathcal{D}_{n+1})$
Θέτουμε $\mathcal{D}' = \{D_1, D_2 \dots\}$

Χρησιμοποιώντας τον πρώτο ισχυρισμό υπάρχει $i_0 \in \{1, 2, \dots, k\}$ και $\mathcal{D}' < [\mathbb{N}]^1$ ώστε $M(\mathcal{C}_{i_0}, \mathcal{D}')$.
Χρησιμοποιώντας τον τελευταίο ισχυρισμό υπάρχει $\mathcal{D} < \mathcal{D}'$ ώστε $FU(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{C}_{i_0}$. •

Με τη βοήθεια της επόμενης παρατήρησης λαμβάνουμε το θεώρημα Hindman.

Παρατήρηση 2.1 *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μοναδική δυαδική αναπαράσταση, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $F(n) \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ ώστε $n = \sum_{i \in F(n)} 2^i$*

Θεώρημα 2.6 *(Hindman) Έστω $k \in \mathbb{N}$, $\chi : \mathbb{N} \to \{1, 2, \dots, k\}$. Τότε υπάρχει $B \subseteq \mathbb{N}$ ώστε B άπειρο και $FS(B)$ να είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη: Μέσω της δυαδικής αναπαράστασης αντιστοιχούμε τα $\mathbb{N}$, $[\mathbb{N}]^{<w}$ και έτσι ο χ επάγει $\chi' : [\mathbb{N}]^{<\omega} \to \{1, 2, \dots, k\}$.
Υπάρχει λοιπόν (από το Θεώρημα 2.5) $\mathcal{D}$ ξένη συλλογή ώστε $\chi'(FU(\mathcal{D}))$ να είναι σταθερός.
Θέτουμε $B = \{m \in \mathbb{N} : F(m) \in \mathcal{D}\}$
Παρατηρούμε ότι αφού αν $m, m' \in B$ τότε $F(m + m') = F(m) \cup F(m')$ το $FS(B)$ αντιστοιχίζεται στο $FU(\mathcal{D})$ οπότε $\chi(FS(B))$ είναι σταθερός. •

3 Μια εφαρμογή στη λογική

Το θεώρημα μη πληρότητας του Godel λέει ότι υπάρχουν αληθείς προτάσεις της θεωρίας αριθμών που δεν αποδεικνύονται στο σύστημα αξιωμάτων του Peano. Τα παραδείγματα του Godel είναι στενά συνδεδεμένα με τη μαθηματική λογική (π.χ. μια πρόταση της θεωρίας αριθμών που κωδικοποιεί την συνέπεια του συστήματος αξιωμάτων Peano.)

Θα δώσουμε παρακάτω μια τροποποίηση του θεωρήματος του Ramsey που αποτελεί την πρώτη πρόταση στη θεωρία αριθμών η οποία δεν αποδεικνύεται στο συστημα αξιωμάτων του Peano, είναι αληθής και προκύπτει από ένα κλάδο των μαθηματικών εκτός της μαθηματικής λογικής.
Το πρώτο τέτοιο παράδειγμα δόθηκε από τους Paris, Harrington [10].

Ξεκινάμε με τον ορισμό της ιεραρχίας συναρτήσεων του Ackerman.

Ορισμός 3.1
$f_1(x) = 2x$
$f_{n+1}(x) = f_n^{(x)}(x)$
$f_\omega(x) = f_x(x)$

Γενίκευση της ιεραρχίας Ackerman είναι η ιεραρχία Wainer που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα.

Ορισμός 3.2 *Ορίζουμε αναδρομικά*
$e_1(n) = n,\ e_{s+1}(n) = n^{e_s(n)}$
$\gamma_1 = \omega,\ \gamma_{s+1} = \omega^{\gamma_s}$
$\epsilon_0 = \lim_{s\to\infty} \gamma_s$

Παρατηρούμε ότι $\omega^{\epsilon_0} = \epsilon_0$.
Ο ϵ_0 είναι ο ελάχιστος διατακτικός με την ιδιότητα αυτή.

Θεώρημα 3.1 *(Cantor)*
Κάθε διατακτικός αριθμός a γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $a = \omega^{a_1} n_1 + \omega^{a_2} n_2 + \cdots + \omega^{a_t} n_t$ όπου $a \geq a_1 > a_2 > \cdots > a_t \geq 0$ και $n_1, n_2, \cdots, n_t \in \mathbb{N}$

Η παραπάνω αναπαράσταση του a καλείται αναπαράσταση Cantor. Για την απόδειξη του θεωρήματος βλέπε [16]
Παρατηρούμε ότι :

- Αν $a < \epsilon_0$ τότε $a > a_1 > a_2 > \cdots > a_t \geq 0$

- Αν $a < \gamma_{s+1}$ τότε $a_1 < \gamma_s$

Ορισμός 3.3 *$T(a)$ = το πλήθος των όρων της αναπαράστασης Cantor του a.*
$N(a) = \max\{n_1+1, n_2+1, \dots, n_t+1, N(a_1), N(a_2), \dots, N(a_t)\}$

Ο $N(a)$ είναι ο μεγαλύτερος φυσικός που εμφανίζεται στην αναπαράσταση Cantor του a αυξημένος κατά ένα.

Παρατήρηση 3.1 $a < \gamma_{s+1} \to T(a) < e_s(N(a))$

Για κάθε $a < \epsilon_0$ θα ορίσουμε μια ακολουθία διατακτικών $a(n)$ που συγκλίνει στον a.

Ορισμός 3.4 *Αν a είναι επόμενος τότε $a(n) = a$*
Αν a είναι οριακός τότε
Αν $a_t = \beta + 1 \quad a(n) = \omega^{a_1}n_1 + \omega^{a_2}n_2 + \cdots + \omega^{a_t}(n_t - 1) + \omega^{\beta}n$
Αν a_t είναι οριακός τότε $a(n) = \omega^{a_1}n_1 + \omega^{a_2}n_2 + \cdots + \omega^{a_t}(n_t - 1) + \omega^{a_t(n)}$

Παρατήρηση 3.2 $N(a(n)) \leq \max\{N(a), n\}$

Ξεκινώντας από $a < \epsilon_0$, $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ακολουθία $a_0 = a$, $a_{i+1} = a_i(n)$.
Παρατηρούμε ότι αφού αυτή είναι φθίνουσα θα σταθεροποιηθεί σε έναν επόμενο διατακτικό.
Γράφουμε $a((n))$ για τον αριθμό αυτό.
Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 3.2 έχουμε $N(a((n))) \leq \max\{N(a), n\}$

Θα επεκτείνουμε την ιεραρχία συναρτήσεων του Ackermann

Ορισμός 3.5 *Ορίζουμε αναδρομικά*
$f_1(x) = 2x$
$f_{a+1}(x) = f_a^{(x)}(x)$
$f_a(x) = f_{a(x)}(x) \quad$ *αν a είναι οριακός, $a < \epsilon_0$*
$f_{\epsilon_0}(x) = f_{\gamma_x}(x)$

Διαγωνοποιούμε λοιπόν στους οριακούς διατακτικούς κατά τα πρότυπα της f_ω
Η παραπάνω ιεραρχία συναρτήσεων καλείται ιεραρχία Wainer
Είναι γνωστό [12] ότι

- $a < \beta \to f_a(x) = o(f_\beta(x))$

- Αν f είναι αποδείξιμα αναδρομική [4] τότε υπάρχει $a < \epsilon_0$ ώστε $f(n) = o(f_a(n))$

Παρατήρηση 3.3 *Αυτό λοιπόν που θα κάνουμε είναι να ορίσουμε συνθήκη $Q(s,t)$ εκφράσιμη στη γλώσσα του συστήματος Peano και να δείξουμε*
$\forall s \exists t Q(s,t) \quad \forall s \forall t \leq f_{\epsilon_0}(s) \neg Q(s,t)$
Αυτό σημαίνει $P \nvdash \forall s \exists t Q(s,t)$ (ειδάλλως θα οριζόταν η αποδείξιμα αναδρομική $f(s) = \mu t Q(s,t)$ με $f(s) > f_{\epsilon_0}(s)$)

Ορίζουμε $\overline{a\beta}$ να είναι ο μεγαλύτερος διατακτικός δ ώστε ω^δ να εμφανίζεται στην αναπαράσταση Cantor των a, β με διαφορετικούς συντελεστές.

Παρατήρηση 3.4 *Αν $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$ τότε $\overline{a_1 a_n} = \max\{\overline{a_i a_{i+1}} : 1 \leq i \leq n\}$*

Συμβολισμός: Όταν γράφουμε $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ για ένα σύνολο διατακτικών εννοούμε $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$.

Ορίζουμε χρωματισμό τριών χρωμάτων στο $[\epsilon_0]^3$

$$\chi(\{a_1, a_2, a_3\}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \overline{a_1 a_2} > \overline{a_2 a_3} \\ 1 & \text{αν } \overline{a_1 a_2} = \overline{a_2 a_3} \\ 2 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Λήμμα 3.1 *Αν $\chi\{a_1, a_2, \ldots, a_r\} = 1$ [5] τότε $r \leq N(a_1)$*

Απόδειξη: Ο συντελεστής του $\omega^{\overline{a_1 a_2}}$ στο ανάπτυγμα του a_1 είναι τουλάχιστον $r-1$. Άρα $N(a_1) \geq r$ •

Λήμμα 3.2 *Αν $\chi\{a_1, a_2, \ldots, a_r\} = 2$ τότε $r \leq T(a_1) + 1$*

Απόδειξη: Θεωρώντας τα $\overline{a_i a_{i+1}}$ $\ 1 \leq i \leq r-1$ και χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 3.4 $\quad \overline{a_1 a_{i+1}} = \overline{a_i a_{i+1}}$.
Αφού η ακολουθία $\overline{a_i a_{i+1}}$ είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $r-1$ διαφορετικούς συντελεστές στο ανάπτυγμα του a_1 άρα $T(a_1) \geq r-1$ •

Παρατήρηση 3.5 *Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 3.1 λαμβάνουμε*
$a_1 < \gamma_{s+1} \rightarrow r \leq e_s(N(a_1)) + 1$

[4] Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $e \in \mathbb{N}$, T πρωτογενές αναδρομικό κατηγόρημα, ώστε $P \vdash \forall m \exists n T(e,m,n)$ και $f(m) = n \Leftrightarrow n = \mu y T(e,m,y)$

[5] Εννοούμε ότι ο χ λαμβάνει τιμή 1 σε κάθε τριάδα στοιχείων του συνόλου αυτού

Λήμμα 3.3 *Αν* $\chi\{a_1, a_2, \ldots, a_r\} = 0$ *και* $a_1 < \omega^\omega$ *τότε* $r \leq N(a_1) + 1$

Απόδειξη: Υπάρχει $s \in \omega$ ώστε $\omega^s \leq a_1 < \omega^{s+1}$. Άρα $s \geq \overline{a_1 a_2} > \overline{a_2 a_3} > \cdots > \overline{a_{r-1} a_r}$ δηλαδή $r \leq s + 2 \leq N(a_1) + 1$ •

Με βάση τον χ, θα ορίσουμε μια ακολουθία χρωματισμών $\chi_s : [\gamma_s]^{s+1} \to \{0, 1, \ldots, 2s-2\}$ και μια ακολουθία αυξουσών συναρτήσεων $h_s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με την ιδιότητα αν $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ είναι μονοχρωματικό ως προς χ_s τότε $r \leq h_s(N(a_1))$.
$\chi_2 = \chi \restriction \omega^\omega \quad h_2(x) = x + 1$
Δοθέντων των χ_{s-1}, h_{s-1}
Έστω $\{a_1, a_2, \ldots, a_{s+1}\} \in [\gamma_s]^{s+1}$
Αν $\chi(\{a_1, a_2, a_3\}) = 1$ τότε $\chi_s(\{a_1, a_2, \ldots, a_{s+1}\} = 2s - 3$
Αν $\chi(\{a_1, a_2, a_3\}) = 2$ τότε $\chi_s(\{a_1, a_2, \ldots, a_{s+1}\} = 2s - 2$
Αν $\chi(\{a_1, a_2, a_3\}) = 0$ τότε
αν $\overline{a_1 a_2} > \overline{a_2 a_3} > \cdots > \overline{a_s a_{s+1}}$ τότε
$\chi_s(\{a_1, a_2, \ldots, a_{s+1}\}) = \chi_{s-1}(\{\overline{a_1 a_2}, \overline{a_2 a_3}, \ldots, \overline{a_s a_{s+1}}\})$
αλλιώς $\chi_s(\{a_1, a_2, \ldots, a_{s+1}\}) = 0$
Αν $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ είναι μονοχρωματικό ως προς χ_s τότε
αν $\chi_s(\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}) = 2s - 3$ έχουμε $\chi(\{a_1, a_2, \ldots, a_{r-s+2}\}) = 1$ (αφού έχουμε αφαιρέσει τα τελευταία $s - 2$ στοιχεία, οπότε οποιοδήποτε υποσύνολο του $\{a_1, a_2, \ldots, a_{r-s+2}\}$ με τρία στοιχεία σχηματίζει με τα αφαιρεθέντα ένα σύνολο με $s + 1$ στοιχεία) άρα από Λήμμα 3.1 $r - s + 2 \leq N(a_1)$
αν $\chi_s(\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}) = 2s - 2$ τότε, ανάλογα, $\chi(\{a_1, a_2, \ldots, a_{r-s+2}\}) = 2$, άρα $r - s + 2 \leq e_{s-1}(N(a_1)) + 1$ (Παρατήρηση 3.5)
αν $\chi_s(\{a_1, a_2, \ldots, a_r\})$ είναι κάποιο άλλο χρώμα τότε παρατηρούμε ότι για $i \leq r - s$ ισχύει $\chi(\{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}\}) = 0$ άρα $\overline{a_i a_{i+1}} > \overline{a_{i+1} a_{i+2}}$
αυτό όμως σημαίνει ότι αν $i_1 < i_2 < \cdots < i_{s+1} \leq r - s + 2$ τότε
$\chi_{s-1}(\{\overline{a_{i_1} a_{i_2}}, \overline{a_{i_2} a_{i_3}}, \ldots, \overline{a_{i_s} a_{i_{s+1}}}\}) = \chi_s(\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{s+1}}\})$
άρα το $\{\overline{a_1 a_2}, \overline{a_2 a_3}, \ldots, \overline{a_{r-s+1} a_{r-s}}\}$ είναι μονοχρωματικό ως προς χ_{s-1} άρα $r - s + 1 \leq h_{s-1}(N(\overline{a_1 a_2})) \leq h_{s-1}(N(a_1))$.
Θέτουμε $h_s(x) = \max\{x + s - 2, e_{s-1}(x) + s - 1, h_{s-1}(x) + s - 1\}$

Ορίζουμε τώρα συνάρτηση $U(n, a)$ ως εξής :
Ξεκινούμε με το ζεύγος (n, a).
Αν έχουμε φτάσει στο ζεύγος (m, β) τότε
αν $\beta = 0$ τότε $U(n, a) = m$
αλλιώς λαμβάνουμε το ζεύγος $(m + 1, \beta((m)) - 1)$

Παρατήρηση 3.6 *Αν* (m, β) *είναι ζεύγος που εμφανίζεται έχοντας ξεκινήσει από το* (n, a) *τότε* $N(\beta) \leq \max(N(a), m)$ *(Παρατήρηση 3.2)*
Έτσι αν $a = \gamma_s$ *τότε* $N(\beta) \leq m$

Λήμμα 3.4 *Αν* $1 \leq a < \epsilon_0$, $n \in \mathbb{N}$ *τότε* $U(n, \omega^a) = f_a(n)$

Απόδειξη: Με επαγωγή στο a
$a = 1 \quad U(n, \omega) = 2n = f_1(n)$
Αν ο a είναι οριακός, τότε παρατηρούμε ότι τα ζεύγη (n, ω^a), $(n, \omega^{a(n)})$ δίνουν την ίδια ακολουθία ζευγών άρα
$U(n, \omega^a) = U(n, \omega^{a(n)}) = f_{a(n)}(n) = f_a(n)$
Αν $a = \beta+1$ τότε παρατηρούμε ότι αν ξεκινήσουμε από το ζεύγος $(t, \omega^\beta(s+1))$ τότε καθόσον $i \leq U(t, \omega^\beta) = f_\beta(t)$ θα έχουμε ζεύγη της μορφής $(i, \omega^\beta s + \gamma)$ όπου το (i, γ) θα έχει προκύψει ξεκινώντας από το ζεύγος (t, ω^β)
Έτσι λοιπόν ξεκινώντας από το $(t, \omega^\beta t)$ θα έχουμε
$U(t, \omega^\beta t) = f_\beta^{(t)}(t) = f_{\beta+1}(t)$.
Επίσης, από τον ορισμό, $U(t, \omega^{\beta+1}) = U(t, \omega^\beta t)$
άρα $U(t, \omega^{\beta+1}) = f_{\beta+1}(t)$ $\bullet$

Ορισμός 3.6 *Έστω* $S \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *αύξουσα συνάρτηση. Το* S *καλείται* h*-μεγάλο αν* $|S| > h(\min S)$

Ορισμός 3.7 *Ορίζουμε*
$P(s, m, n) \Leftrightarrow n > m$ *και αν το* $[\{m, m+1, \ldots, n\}]^{s+1}$ *χρωματιστεί με* $2s-1$ *χρώματα τότε υπάρχει* h_s*-μεγάλο μονοχρωματικό σύνολο.*

Παρατήρηση 3.7 *Το* $P(s, m, n)$ *είναι εκφράσιμο στη γλώσσα του συστήματος Peano.*

Παρατήρηση 3.8 *Η απόδειξη που δώσαμε στο κεφάλαιο 2 για το θεώρημα Ramsey (πρώτα η άπειρη έκδοση, μετά επιχειρήματα συμπάγειας) μπορεί να εφαρμοστεί κι εδώ για να δώσει* $\forall s \forall m \exists n P(s, m, n)$

Λήμμα 3.5 $\forall s \forall m (\forall n \leq f_{\gamma_{s-1}}(m))[\neg P(s, m, n)]$

Απόδειξη: Έστω $s, m \in \mathbb{N}$, $n \leq f_{\gamma_{s-1}}(m)$
Θα κατασκευάσουμε χρωματισμό που να δείχνει ότι $\neg P(s, m, n)$
Ξεκινώντας από το ζεύγος $(m, \gamma_s(m))$ βρίσκουμε ζεύγη $(t, R(t))$ για $t \leq U(m, \gamma_s(m)) = U(m, \omega^{\gamma_{s-1}(m)}) = U(m, \omega^{\gamma_{s-1}}) = f_{\gamma_{s-1}}(m)$

Αν $i < j$ τότε $R(i) > R(j)$.
Από την Παρατήρηση 3.6 προκύπτει $N(R(t)) \leq t$
Ορίζουμε $\chi^* : [\{m, m+1, \ldots, n\}]^{s+1} \rightarrow \{0, 1, \ldots, 2s-2\}$
με $\chi^*(\{x_1, x_2, \ldots, x_{s+1}\}) = \chi_s(\{R(x_1), R(x_2), \ldots, R(x_{s+1})\})$
Αν $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ [6] είναι μονοχρωματικό ως προς τον χ^* τότε το $\{R(x_1), R(x_2), \ldots, R(x_{s+1})\}$ είναι μονοχρωματικό ως προς τον χ_s άρα $r \leq h_s(N(R(x_1))) \leq h_s(x_1)$ •

Ορισμός 3.8 $Q(s,t) \Leftrightarrow P(s+1, s, t)$

Θεώρημα 3.2 *Η πρόταση $\forall s \exists t Q(s,t)$ εκφράζεται στη γλώσσα του συστήματος Peano, είναι αληθής, αλλά δεν αποδεικνύεται στο συστημα αυτό.*

Απόδειξη: Όπως προκύπτει από το Λήμμα 3.5, αν $s \in \mathbb{N}$ τότε το ελάχιστο $t \in \mathbb{N}$ για το οποίο $Q(s,t)$ θα πρέπει να υπερβαίνει το $f_{\gamma_s}(s)$ δηλαδή το $f_{\epsilon_0}(s)$. Από τις Παρατηρήσεις 3.3,3.7,3.8 προκύπτει ο ισχυρισμός του θεωρήματος. •

[6] εννοείται ότι $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$

4 Ο χώρος $\beta\mathbb{N}$

Εξετάζουμε εδώ σύντομα ορισμένες ιδιότητες των υπερφίλτρων. Για περαιτέρω μελέτη παραπέμπουμε στο κλασικό βιβλίο των Comfort και Νεγρεπόντη [3]

Έστω S σύνολο με $|S| \geq \omega$.

Ορισμός 4.1 *Έστω $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$. Η $\mathcal{F}$ καλείται φίλτρο αν ικανοποιούνται οι επόμενες ιδιότητες*

- $A \in \mathcal{F} \land B \in \mathcal{F} \to A \cap B \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \land A \subseteq B \to B \in \mathcal{F}$
- $\emptyset \subsetneqq \mathcal{F} \subsetneqq \mathcal{P}(S)$

Ένα μεγιστικό ως προς τη σχέση $\subseteq$ φίλτρο καλείται υπερφίλτρο.

Μια οικογένεια υποσυνόλων του S, έστω $\mathcal{A}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής αν για κάθε $F \subseteq [\mathcal{A}]^{<\omega}$ ισχύει $\cap F \neq \emptyset$
Ένα φίλτρο λοιπόν έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.
Ο χώρος $\{\mathcal{A} \subsetneqq \mathcal{P}(S) : \mathcal{A}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής$\}$ εφοδιασμένος με τη σχέση $\subseteq$ είναι επαγωγικός χώρος, άρα με βάση το λήμμα Zorn έχει μεγιστικά στοιχεία.
Τα στοιχεία αυτά είναι υπερφίλτρα (άμεσο από τον Ορισμό 4.1) άρα

Παρατήρηση 4.1 *Για κάθε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ ώστε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$*

Αν $s \in S$ ορίζουμε $\hat{s} = \{A \subseteq S : s \in A\}$
Το $\hat{s}$ είναι υπερφίλτρο.
Υπερφίλτρα της μορφής αυτής καλούνται τετριμμένα.
Η οικογένεια $\{A \subseteq S : S \setminus A \in [S]^{<\omega}\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, άρα υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ που την περιέχει.
Το $\mathcal{U}$ δεν είναι τετριμμένο.

Πρόταση 4.1 *Αν $\mathcal{U}$ είναι φίλτρο πάνω στο S τότε τα κάτωθι είναι ισοδύναμα*

1. *Το $\mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο.*
2. $A \subseteq S \to (A \in \mathcal{U} \lor S \setminus A \in \mathcal{U})$
3. $A \cup B \in \mathcal{U} \to (A \in \mathcal{U} \lor B \in \mathcal{U})$

Απόδειξη: $1 \to 2$ αν $A \notin \mathcal{U}$ τότε το $\mathcal{U} \cup \{A\}$ δεν έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, άρα υπάρχει $B \in \mathcal{U}$ ώστε $B \cap A = \emptyset$ δηλαδή $B \subseteq S \setminus A$ που σημαίνει $S \setminus A \in \mathcal{U}$
$2 \to 3$ αν $A, B \notin \mathcal{U}$ τότε $S \setminus A, S \setminus B \in \mathcal{U}$ (από το 2)
άρα $(S \setminus A) \cap (S \setminus B) = S \setminus (A \cup B) \in \mathcal{U}$.
Όμως τότε $\emptyset = (A \cup B) \cap (S \setminus (A \cup B)) \in \mathcal{U}$ άτοπο.
$3 \to 2$ προφανές, θέτοντας $B = S \setminus A$
$2 \to 1$ αν $A \notin \mathcal{U}$ τότε $(S \setminus A) \in \mathcal{U}$ άρα αν $\mathcal{V}$ φίλτρο με $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ και $A \in \mathcal{V}$ τότε $\emptyset = A \cap (S \setminus A) \in \mathcal{V}$ άτοπο. •

Ένα υπερφίλτρο διαχωρίζει τα υποσύνολα του S σε μικρά και μεγάλα.
Αυτό φαίνεται καλύτερα αν θεωρήσουμε το πεπερασμένα προσθετικό 0,1-μέτρο

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{αν } A \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Σχόλιο: Προκύπτει το ερώτημα αν υπάρχουν σύνολο S και υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ ώστε το μέτρο να είναι αριθμήσιμα προσθετικό.
Η απάντηση είναι ότι δεν μπορούμε να βρούμε κάτι τέτοιο στη **ZFC** αφού τότε ο πληθάριθμος του S θα καθίστατο Ulam μετρήσιμος. (Ο ελάχιστος Ulam μετρήσιμος πληθάριθμος είναι μετρήσιμος. Η ύπαρξη μετρήσιμων πληθαρίθμων δεν μπορεί να δειχθεί στη **ZFC** βλέπε [14])

Ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ καθορίζει ένα ποσοδείκτη $\forall_{\mathcal{U}}$ ως εξής
$\forall_{\mathcal{U}} s \phi(s) \Leftrightarrow \{s \in S : \phi(s)\} \in \mathcal{U}$
Από τον ορισμό του υπερφίλτρου προκύπτει ότι ο ποσοδείκτης αυτός σέβεται τους συνδέσμους της λογικής δηλαδή

- $\forall_{\mathcal{U}} \phi(s) \wedge \forall_{\mathcal{U}} \psi(s) \leftrightarrow \forall_{\mathcal{U}} (\phi(s) \wedge \psi(s))$
- $\forall_{\mathcal{U}} \phi(s) \vee \forall_{\mathcal{U}} \psi(s) \leftrightarrow \forall_{\mathcal{U}} (\phi(s) \vee \psi(s))$
- $\neg \forall_{\mathcal{U}} s \phi(s) \leftrightarrow \forall_{\mathcal{U}} s \neg \phi(s)$

Έχοντας ένα ποσοδείκτη $\forall^*$ με τις παραπάνω ιδιότητες μπορούμε να ορίσουμε ένα υπερφίλτρο $\mathcal{V}$ ως εξής
$A \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \forall^* s (s \in A)$

Θεωρούμε τώρα τη διακριτή τοπολογία πάνω στο S.

Ορισμός 4.2 *βS είναι το σύνολο $\{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S) : \mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο πάνω στο $S\}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{B} = \{\{\mathcal{U} : A \in \mathcal{U}\} : A \in \mathcal{P}(S) \setminus \emptyset\}$*

Η οικογένεια $\mathcal{B}$ είναι βάση τοπολογίας αφού
$\cup\mathcal{B} = \beta S$
αν $\mathcal{V} \in \{\mathcal{U} : A \in \mathcal{U}\} \cap \{\mathcal{U} : B \in \mathcal{U}\}$ τότε $A \cap B \in \mathcal{V}$ άρα $\mathcal{V} \in \{\mathcal{U} : A \cap B \in \mathcal{U}\} \subseteq \{\mathcal{U} : A \in \mathcal{U}\} \cap \{\mathcal{U} : B \in \mathcal{U}\}$

Παρατήρηση 4.2 *Αν $|S| = |T|$ τότε ο βS είναι ομοιομορφικός με τον βT. Πολλές φορές αναφερόμαστε απλά στον βa όπου a είναι πληθάριθμος.*

Ο χώρος $\beta\mathbb{N}$ είναι ο χώρος που ορίστηκε παραπάνω θέτοντας $S = \mathbb{N}$

Πρόταση 4.2 *Ο χώρος βS είναι Hausdorff και συμπαγής.*

Απόδειξη:
Hausdorff : έστω $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in \beta S$, $\mathcal{V} \neq \mathcal{W}$.
Υπάρχει $A \subseteq S$, ώστε $A \in \mathcal{V}$ και $S \setminus A \in \mathcal{W}$.
Τότε $\mathcal{V} \in \{\mathcal{U} : A \in \mathcal{U}\}$, $\mathcal{W} \in \{\mathcal{U} : S \setminus A \in \mathcal{U}\}$ και
$\{\mathcal{U} : A \in \mathcal{U}\} \cap \{\mathcal{U} : S \setminus A \in \mathcal{U}\} = \emptyset$
Συμπάγεια : παρατηρούμε ότι

- $\{\mathcal{U} : S \setminus A \in \mathcal{U}\} = \beta S \setminus \{\mathcal{U} : A \in \mathcal{U}\}$.
- $\{\mathcal{U} : A \in \mathcal{U}\} \cap \{\mathcal{U} : B \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} : A \cap B \in \mathcal{U}\}$.

Θεωρούμε οικογένεια βασικών συνόλων $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ ώστε $\cup\mathcal{B}' = \beta S$.
Αν για κάθε $F \in [\mathcal{B}']^{<\omega}$, ισχύει $\cup F \neq \beta S$ τότε η οικογένεια
$\mathcal{B}'' = \{A \subseteq \beta S : \beta S \setminus A \in \mathcal{B}'\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.
Αν $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}(S)$ είναι η οικογένεια των συνόλων που καθορίζει την $\mathcal{B}'$
η $\mathcal{A}'' = \{A \subseteq S : S \setminus A \in \mathcal{A}'\}$ καθορίζει την $\mathcal{B}''$ άρα έχει και αυτή την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.
Υπάρχει λοιπόν υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ που περιέχει την οικογένεια $\mathcal{A}''$, άρα περιέχεται στο $\cap\mathcal{B}''$.
Όμως $\cap\mathcal{B}'' = \beta S \setminus \cup\mathcal{B}' = \emptyset$ άτοπο •

Θεωρώντας την απεικόνιση $e : S \to \beta S$
με $e(s) = \hat{s}$, παρατηρούμε ότι αφού
$\{\hat{s}\} = \{\mathcal{U} : \{s\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{B}$
η e αποτελεί εμφύτευση του διακριτού χώρου S στον βS
Παρακάτω ταυτίζουμε το S με το $e(S)$.

Πρόταση 4.3 $\overline{S} = \beta S$

Απόδειξη: Αν $\mathcal{W} \in \{\mathcal{U} : A \in \mathcal{U}\}$ τότε θεωρώντας $s \in A$ έχουμε $\hat{s} \in \{\mathcal{U} : A \in \mathcal{U}\}$ •

Έστω X χώρος συμπαγής, Hausdorff, $(x_s)_{s\in S}$ οικογένεια στοιχείων του X και $\mathcal{U} \in \beta S$.

Ορισμός 4.3 $x = \mathcal{U} - \lim_{s\in S} x_s \Leftrightarrow$ *για κάθε περιοχή* V *του* x $\{s \in S : x_s \in V\} \in \mathcal{U}$.

Για παράδειγμα, $x = \hat{s} - \lim_{t\in S} x_t \leftrightarrow x = x_s$
Αφού ο X είναι συμπαγής το $\mathcal{U}-\lim_{s\in S} x_s$ υπάρχει πάντα (αν $(x_s)_{s\in S}$ οικογένεια τέτοια ώστε να μην υπάρχει το $\mathcal{U} - \lim_{s\in S} x_s$ τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει περιοχή Y_x ώστε $\{s \in S : x_s \in Y_x\} \notin \mathcal{U}$. Θεωρώντας τον X ως ένωση των περιοχών αυτών, υπάρχουν $Y_{x_1}, Y_{x_2}, \ldots, Y_{x_n}$ ώστε $X = \cup_{i=1}^{n} Y_{x_i}$ άρα $S = \cup_{i=1}^{n}\{s \in S : x_s \in Y_{x_n}\}$, άτοπο).
Αφού X είναι Hausdorff το $\mathcal{U} - \lim_{s\in S} x_s$ είναι μοναδικό.
Αν το $\mathcal{U}$ είναι μη τετριμμένο τότε το $\mathcal{U} - \lim_{s\in S} x_s$ είναι σημείο συσσώρευσης της $(x_s)_{s\in S}$

Πρόταση 4.4 *Έστω* $f : S \to X$. *Τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση* $\hat{f} : \beta S \to X$ *ώστε* $\hat{f} \upharpoonright S = f$ *(Η* $\hat{f}$ *καλείται επέκταση Stone της* f*)*

Απόδειξη: Θέτουμε $\hat{f}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} - \lim_{s\in S} f(s)$.
Έστω $\mathcal{W} \in \beta S$ και Y περιοχή του $\hat{f}(\mathcal{W})$.
Τότε $A = \{s \in S : f(s) \in Y\} \in \mathcal{W}$.
Άρα το $\{\mathcal{U} : A \in \mathcal{U}\}$ είναι περιοχή του $\mathcal{W}$.
Παρατηρούμε ότι αν $\mathcal{V} \in \{\mathcal{U} : A \in \mathcal{U}\}$ τότε αφού $A \in \mathcal{V}$ έχουμε ότι $\hat{f}(\mathcal{V}) \in Y$.
Άρα η $\hat{f}$ είναι συνεχής στο τυχόν $\mathcal{W}$. •

Τα παραπάνω, υποδεικνύουν ότι ο βS είναι ομοιομορφικός με την Stone-Cech συμπαγοποίηση του S. (Η συμπαγοποίηση αυτή θα μπορούσε να γίνει με άλλο τρόπο, για παράδειγμα θεωρώντας τον χώρο $X = [0,1]^{(S\to[0,1])}$ με την τοπολογία γινόμενο. Ο X είναι συμπαγής (θεώρημα Tychonoff) και Hausdorff και θεωρώντας την εμφύτευση $s \mapsto g_s$ με $g_s(f) = f(s)$ η $\overline{S}$ είναι η συμπαγοποίηση που θέλαμε)
Αντίστροφα θα μπορούσαμε να ορίσουμε τον χώρο βS, δοθείσης συμπαγοποίησης Stone-Cech.

Σχόλια

- Αφού το $\mathbb{N}$ είναι πυκνό στο $\beta\mathbb{N}$ ισχύει $|\beta\mathbb{N}| \leq 2^{2^{\omega}}$.
  Μπορεί να δειχθεί ότι $|\beta\mathbb{N}| = 2^{2^{\omega}}$
- Ο χώρος $\beta\mathbb{N}$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος (αν ήταν αφού είναι διαχωρίσιμος θα είχαμε $|\beta\mathbb{N}| = 2^{\omega}$)
- Αν $\chi(\mathcal{U})$ είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος ώστε το $\mathcal{U}$ να έχει βάση περιοχών με αυτό το μέγεθος τότε υπάρχει $\mathcal{W} \in \beta\mathbb{N}$ ώστε $\omega < \chi(\mathcal{W})$ (ένας ακόμη λόγος για τον οποίο ο $\beta\mathbb{N}$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος).

Μια συλλογή από παρόμοιες ιδιότητες του χώρου $\beta\mathbb{N}$ υπάρχει στο κλασικό άρθρο του W.Comfort [4]

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι ο S έχει μια πράξη, έστω $*$ που τον καθιστά ημιομάδα. (για παράδειγμα $S = \mathbb{N}$, $*$: πρόσθεση ή $*$: πολλαπλασιασμός)
Χωρίς βλάβη της γενικότητας παρακάτω θα ασχοληθούμε με την περίπτωση $(\mathbb{N}, +)$.

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε
$f_m : \mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ με $f_m(n) = m + n$
Υπάρχει $\hat{f}_m : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ συνεχής επέκταση της f_m
Έχουμε λοιπόν ορίσει το $m + \mathcal{U}$ για τυχόντα $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$.
Για κάθε $\mathcal{W} \in \beta\mathbb{N}$ ορίζουμε
$f_{\mathcal{W}} : \mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ με $f_{\mathcal{W}}(n) = n + \mathcal{W}$
Υπάρχει $\hat{f}_{\mathcal{W}} : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ συνεχής επέκταση της $f_{\mathcal{W}}$

Ορισμός 4.4 *Επεκτείνουμε την πρόσθεση στο $\beta\mathbb{N}$ με $\mathcal{U} + \mathcal{W} = \hat{f}_{\mathcal{W}}(\mathcal{U})$*

Παρατήρηση 4.3 *Βλέποντας την απόδειξη της Πρότασης 4.4 η πρόσθεση ορίστηκε ως εξής*
$m + \mathcal{U} = \mathcal{U} - lim_{n\in\mathbb{N}} m + n$
$\mathcal{V} + \mathcal{U} = \mathcal{V} - lim_{m\in\mathbb{N}} m + \mathcal{U} = \mathcal{V} - lim_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{U} - lim_{n\in\mathbb{N}} m + n$

Παρατήρηση 4.4 *Η πρόσθεση στον $\beta\mathbb{N}$ είναι δεξιά συνεχής.*

Πρόταση 4.5 $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \{m : \{n : m + n \in A\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}\}$

Απόδειξη: $A \in \mathcal{U} + \mathcal{V} \leftrightarrow$
$A \in \mathcal{U} - \lim_{m \in \mathbb{N}} m + \mathcal{V} \leftrightarrow$
$\{\mathcal{W} : A \in \mathcal{W}\}$ είναι περιοχή του $\mathcal{U} - \lim_{m \in \mathbb{N}} m + \mathcal{V} \leftrightarrow$
$\{m \in \mathbb{N} : A \in m + \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \leftrightarrow$
$\{m \in \mathbb{N} : A \in \mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}} m + n\} \in \mathcal{U} \leftrightarrow$
$\{m \in \mathbb{N} : \{\mathcal{W} : A \in \mathcal{W}\}$ είναι περιοχή του $\mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}} m + n\} \in \mathcal{U} \leftrightarrow$
$\{m : \{n : m + n \in A\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ •

Για τους ποσοδείκτες ισχύει
$\forall_{\mathcal{U}+\mathcal{V}} s \phi(s) \leftrightarrow \forall_{\mathcal{U}} m \forall_{\mathcal{V}} n \phi(m+n)$
Πράγματι, $\forall_{\mathcal{U}+\mathcal{V}} s \phi(s) \leftrightarrow$
$\{s \in \mathbb{N} : \phi(s)\} \in \mathcal{U} + \mathcal{V} \leftrightarrow$
$\{m \in \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : \phi(m+n)\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \leftrightarrow$
$\{m \in \mathbb{N} : \forall_{\mathcal{V}} n \phi(m+n)\} \in \mathcal{U} \leftrightarrow$
$\forall_{\mathcal{U}} m \forall_{\mathcal{V}} n \phi(m+n)$

Ανάλογα

$$\mu_{\mathcal{U}+\mathcal{V}}(A) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \forall_{\mathcal{U}} m \forall_{\mathcal{V}} n (m+n) \in A \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Πρόταση 4.6 *Η πρόσθεση που ορίσαμε στο $\beta\mathbb{N}$ είναι προσεταιριστική*

Απόδειξη: $(\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \mathcal{W} =$
$(\mathcal{U} + \mathcal{V}) - \lim_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{W} - \lim_{n \in \mathbb{N}} m + n =$
$\mathcal{U} - \lim_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{V} - \lim_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{W} - \lim_{n \in \mathbb{N}} (l + k) + n =$
$\mathcal{U} - \lim_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{V} - \lim_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{W} - \lim_{n \in \mathbb{N}} l + (k + n) =$
$\mathcal{U} - \lim_{l \in \mathbb{N}} (\mathcal{V} + \mathcal{W}) - \lim_{m \in \mathbb{N}} l + m =$
$\mathcal{U} + (\mathcal{V} + \mathcal{W})$ •

Έπεται λοιπόν το επόμενο

Θεώρημα 4.1 *Αν $(S, *)$ ημιομάδα εφοδιασμένη με την διακριτή τοπολογία, τότε ο βS εφοδιασμένος με την επέκταση της $*$ αποτελεί συμπαγή και Hausdorff δεξιά συνεχή ημιομάδα.*

Το Θεώρημα 4.1 μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε στοιχεία της πλούσιας θεωρίας των ημιομάδων του αναφερόμενου τύπου.

Πρόταση 4.7 *(Θεώρημα Ellis) βλέπε και [5]*
Έστω $(T, +)$ συμπαγής και Hausdorff δεξιά συνεχής ημιομάδα. Τότε η T περιέχει ταυτοδύναμα στοιχεία, δηλαδή υπάρχει $x \in T$ ώστε $x + x = x$

Απόδειξη: Θέτουμε $\mathcal{A} = \{A \subseteq T : A \neq \emptyset \wedge A$ κλειστό $\wedge\, A + A \subseteq A\}$
$\mathcal{A} \neq \emptyset$ αφού $T \in \mathcal{A}$
Αν θεωρήσουμε τη διάταξη $\leq$ στο $\mathcal{A}$ με $A \leq B \Leftrightarrow A \supseteqq B$ παρατηρούμε ότι ο $(\mathcal{A}, \leq)$ είναι επαγωγικός χώρος. (το ελάχιστο άνω φράγμα μιας αλυσίδας C είναι το $\cap C$, αφού $\cap C \neq \emptyset$ λόγω συμπάγειας, $\cap C$ είναι κλειστό ως τομή κλειστών και προφανώς $\cap C + \cap C \subseteq \cap C$)
Με βάση το λήμμα Zorn, ο $(\mathcal{A}, \leq)$ έχει μεγιστικά στοιχεία (άρα ο $(\mathcal{A}, \leq)$ έχει ελαχιστικά στοιχεία)
Έστω A ένα τέτοιο στοιχείο και $x \in A$.
Παρατηρούμε ότι $A + x \in \mathcal{A}$ ($A + x \neq \emptyset$, $A + x$ είναι κλειστό ως συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου, $(A + x + (A + x) = (A + x + A) + x \subseteq A + x)$.
Άρα $A + x = A$.
Υπάρχει λοιπόν $y \in A$ ώστε $y + x = x$
Θέτουμε $B = \{z \in A : z + x = x\}$
Τότε $B \in \mathcal{A}$ αφού $B \neq \emptyset$, το B είναι κλειστό (αφού $B = f_x^{-1}(\{x\})$ και f_x είναι συνεχής) και $B + B \subseteq B$ (αφού αν $y, z \in B$ τότε $(y + z) + x = y + (z + x) = y + x = x$)
Άρα $B = A$
Συνεπώς $x + x = x$

Πόρισμα 4.1 *Ο $\beta\mathbb{N}$ έχει ταυτοδύναμα στοιχεία ως προς την πρόσθεση.*

Σχόλιο: Μπορεί να δειχθεί ότι τα ταυτοδύναμα στοιχεία του $(\beta\mathbb{N}, +)$ είναι ισοπληθικά με τον ίδιο τον χώρο $\beta\mathbb{N}$ βλέπε [2].

Ορίζουμε μια σχέση διάταξης πάνω στο σύνολο των ταυτοδυνάμων στοιχείων του $\beta\mathbb{N}$ ως εξής
$\mathcal{U} \leq \mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{V} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$
Ένα σύνολο $I \subseteq \beta\mathbb{N}$ θα λέγεται αριστερό ιδεώδες αν $\beta\mathbb{N} + I \subseteq I$.
Θεωρώντας την οικογένεια των αριστερών ιδεωδών εφοδιασμένη με τη σχέση $\subseteq$ ορίζεται η έννοια του ελαχιστικού αριστερού ιδεώδους.

Παρατήρηση 4.5 *Ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες I είναι απαραίτητα της μορφής $\beta\mathbb{N} + \mathcal{U}$ όπου $\mathcal{U} \in I$. Άρα είναι κλειστό σύνολο.*

Με χρήση του λήμματος Zorn προκύπτει ότι κάθε αριστερό ιδεώδες περιέχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες.
Αφού το $\beta\mathbb{N}+\mathcal{U}$ είναι συμπαγής Hausdorff δεξιά συνεχής ημιομάδα (αφού είναι κλειστό αλγεβρικά και τοπολογικά μέσα στον $\beta\mathbb{N}$) θα περιέχει ταυτοδύναμα στοιχεία.

Πρόταση 4.8 *Έστω $\mathcal{U}$ ταυτοδύναμο στοιχείο. Το $\mathcal{U}$ είναι ελαχιστικό ως προς $\leq$ αν και μονον αν το $\beta\mathbb{N}+\mathcal{U}$ είναι ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες.*

Απόδειξη: $(\leftarrow)$ Έστω $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$.
Αφού $\mathcal{V} = \mathcal{V}+\mathcal{U}$ έχουμε ότι $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}+\mathcal{U}$, και αφού το $\beta\mathbb{N}+\mathcal{U}$ είναι ελαχιστικό ισχύει $\beta\mathbb{N}+\mathcal{U} = \beta\mathbb{N}+\mathcal{V}$
άρα υπάρχει $\mathcal{W}$ ώστε $\mathcal{U} = \mathcal{W}+\mathcal{V}$
Έτσι $\mathcal{V} = \mathcal{U}+\mathcal{V} = \mathcal{W}+\mathcal{V}+\mathcal{V} = \mathcal{W}+\mathcal{V} = \mathcal{U}$
δηλαδή το $\mathcal{U}$ είναι ελαχιστικό.
$(\rightarrow)$ Αρκεί να δείξουμε ότι αν $I \subseteq \beta\mathbb{N}+\mathcal{U}$ ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες, τότε υπάρχει $\mathcal{V} \in I$ ώστε $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$
Έστω $\mathcal{W}$ ταυτοδύναμο στοιχείο του I.
Υπάρχει $\mathcal{W}'$ ώστε $\mathcal{W} = \mathcal{W}'+\mathcal{U}$ (αφού $\mathcal{W} \in \beta\mathbb{N}+\mathcal{U}$)
$\mathcal{U}+\mathcal{W} \in I$ (αφού το I είναι αριστερό ιδεώδες)
$(\mathcal{U}+\mathcal{W})+\mathcal{U} = \mathcal{U}+\mathcal{W}'+\mathcal{U}+\mathcal{U} = \mathcal{U}+\mathcal{W}'+\mathcal{U} = \mathcal{U}+\mathcal{W}$
$\mathcal{U}+(\mathcal{U}+\mathcal{W}) = \mathcal{U}+\mathcal{W}$
$(\mathcal{U}+\mathcal{W})+(\mathcal{U}+\mathcal{W}) = (\mathcal{U}+\mathcal{W})+\mathcal{U}+\mathcal{W} = \mathcal{U}+\mathcal{W}+\mathcal{W} = \mathcal{U}+\mathcal{W}$
άρα $\mathcal{U}+\mathcal{W} \leq \mathcal{U}$ •

5 Εφαρμογές των υπερφίλτρων

Θα ξεκινήσουμε κάνοντας μια απλή εφαρμογή της έννοιας του υπερφίλτρου.

Θεώρημα 5.1 *Έστω $l \in \mathbb{N}$, $\chi : [\mathbb{N}]^2 \to \{1, 2, \dots, l\}$.*
Τότε υπάρχει $M \subseteq \mathbb{N}$ ώστε M άπειρο και $[M]^2$ μονοχρωματικό.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$
Ορίζουμε $\psi : \mathbb{N} \to \{1, 2, \dots, l\}$
$\psi(n) = c \leftrightarrow \{x : \chi(\{x, n\}) = c\} \in \mathcal{U}$
Αφού $\{\psi^{-1}(c) : c \in \{1, 2, \dots, l\}\}$ είναι διαμέριση του $\mathbb{N}$ υπάρχει M' μονοχρωματικό ως προς ψ ώστε $M' \in \mathcal{U}$.
Έστω c_0 το χρώμα του M'
Ορίζουμε αναδρομικά
$x_1 = \min M'$
$x_{n+1} = \min((M' \cap \cap_{i=1}^{n} \{x : \chi(\{x_i, x\}) = c_0\}) \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\})$
Ο ορισμός είναι καλός αφού το $M' \cap \cap_{i=0}^{n} \{x : \chi(\{x_i, x\}) = c_0\}$ είναι άπειρο ως μέλος του $\mathcal{U}$
Θέτουμε $M = \{x_1, x_2, \dots\}$ •

Στο επόμενο θεώρημα θα χρησιμοποιήσουμε την ύπαρξη ταυτοδυνάμου στο $\beta\mathbb{N}$ την οποία δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Συμβολισμός: Έστω $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{N}$, $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$
$-n + A = \{x : n + x \in A\}$
$A_{\mathcal{U}} = \{x : -x + A \in \mathcal{U}\}$

Παρατήρηση 5.1 *Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς έχουμε :*

- $A \in \mathcal{U} + \mathcal{V} \leftrightarrow A_{\mathcal{V}} \in \mathcal{U}$
- $-n + A_{\mathcal{U}} = (-n + A)_{\mathcal{U}}$
- $-n + A \cap B = (-n + A) \cap (-n + B)$

Θεώρημα 5.2 *Έστω $k \in \mathbb{N}$, $\chi : \mathbb{N} \to \{1, 2, \dots, k\}$. Τότε υπάρχει $B \subseteq \mathbb{N}$ ώστε B άπειρο και $FS(B)$ να είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ ώστε $\mathcal{U} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$

Ισχυρισμός: Έστω $A \in \mathcal{U}$, $C = A \cap A_{\mathcal{U}}$, $m \in C$. Τότε $-m + C \in \mathcal{U}$

Πράγματι $-m + A \in \mathcal{U} = \mathcal{U} + \mathcal{U}$.
Άρα (βλέπε Παρατήρηση 5.1) $(-m + A)_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$.
$-m + C = (-m + A) \cap (-m + A_{\mathcal{U}}) = (-m + A) \cap (-m + A)_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$.

Υπάρχει $c \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ώστε $\chi^{-1}(c) \in \mathcal{U}$.
Θέτοντας $A = \chi^{-1}(c)$, $C = A \cap A_{\mathcal{U}}$ ορίζουμε αναδρομικά
$x_1 = \min C$
$x_{n+1} = \min(\cap\{-x + C : x \in FS(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})\})$
Θέτουμε $B = \{x_1, x_2, \ldots\}$ •

Στο τελευταίο θεώρημα που αποδεικνύουμε στην παράγραφο αυτή χρησιμοποιούμε την έννοια του ελαχιστικού αριστερού ιδεώδους. Η απόδειξη εμφανίστηκε για πρώτη φορά στο [2].

Συμβολισμός :

- Έστω $F, G \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, $d = \sum_{f \in F} d_f$, $d' = \sum_{g \in G} d'_g$.
  $d \lhd d' \Leftrightarrow \max_{f \in F} d_f < \min_{g \in G} d'_g$
- Έστω $\mathcal{A}$ διαμέριση του $\mathbb{N}$.
  $\mathcal{U} \sim_{\mathcal{A}} \mathcal{V} \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A}(A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V})$
- Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$
  $-n + \mathcal{U} = \{-n + A : A \in \mathcal{U}\}$
- Έστω $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$
  $m \sim_{\mathcal{A}'} n \Leftrightarrow$ οι m, n εμφανίζονται ακριβώς στα ίδια σύνολα της $\mathcal{A}'$
  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}'}$ είναι η διαμέριση που αντιστοιχεί στην $\sim_{\mathcal{A}'}$

Παρατήρηση 5.2 *Αν* $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ *τότε* $-n + \mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$

Θεώρημα 5.3 *Έστω* $l \in \mathbb{N}$, $B \in [\mathbb{N}]^{\omega}$, $\mathcal{A}$ *πεπερασμένη διαμέριση του* $\mathbb{N}$. *Υπάρχουν* $A \in \mathcal{A}$, $a \in \mathbb{N}$, $d \in FS(B)$ *ώστε* $\{a, a + d, \ldots, a + ld\} \subseteq A$

Απόδειξη : Έστω I ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες του $\beta\mathbb{N}$.

Ισχυρισμός : Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε
$\mathcal{V}, \mathcal{W} \in I \to \exists t \in \{1, 2, \ldots, k\}(t + \mathcal{V} \sim_{\mathcal{A}} \mathcal{W})$

Έστω ότι δεν υπάρχει τέτοιο k.
Υπάρχουν λοιπόν $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{W}_n \in I \quad n = 1, 2, \ldots$
ώστε $\forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}(t + \mathcal{V}_n \nsim_{\mathcal{A}} \mathcal{W}_n)$.

Έστω $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$
Το I είναι συμπαγές άρα υπάρχουν τα $\mathcal{V} = \mathcal{U} - \lim \mathcal{V}_n$, $\mathcal{W} = \mathcal{U} - \lim \mathcal{W}_n$
$\mathcal{V}, \mathcal{W} \in I$
Υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $A \in \mathcal{W}$
Αφού $\overline{\{t + \mathcal{V} : t \in \mathbb{N}\}} = \beta\mathbb{N}+\mathcal{V} = I$ υπάρχει $t_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $t_0+\mathcal{V} \in \{\mathcal{U} : \ A \in \mathcal{U}\}$.
Άρα $\{n : A \in \mathcal{W}_n \wedge -t_0 + A \in \mathcal{V}_n\} \in \mathcal{U}$.
Συνεπώς υπάρχει $n_0 > t_0$ ώστε $A \in \mathcal{W}_{n_0} \wedge A \in t_0 + \mathcal{V}_{n_0}$
άρα $t_0 + \mathcal{V}_{n_0} \sim_{\mathcal{A}} \mathcal{W}_{n_0}$ άτοπο.

Ισχυρισμός : Έστω $\mathcal{V} \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε $-n + \mathcal{V} \in I$

$\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ άρα $-n + \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$.
Υπάρχει $\mathcal{W} \in \beta\mathbb{N}$ ώστε $\mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathcal{V}$
$\mathcal{W} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ (αν $\mathcal{W} = \hat{r}$ θα ορίζαμε $m \sim n \Leftrightarrow m = n \mod r + 1$ και θα υπήρχε σύνολο της διαμέρισης αυτής που θα ανήκε στα $\mathcal{V}$, $r + \mathcal{V}$ άτοπο)
Έτσι $-n + \mathcal{W} \in \beta\mathbb{N}$.
Χρησιμοποιώντας τον ορισμό
$-n + \mathcal{V} = -n + (\mathcal{W} + \mathcal{V}) = (-n + \mathcal{W}) + \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} + \mathcal{V} = I$

Ορίζουμε

- $S(l) \Leftrightarrow$ για κάθε πεπερασμένη διαμέριση του $\mathbb{N}$, έστω $\mathcal{A}$, και κάθε $B \in [\mathbb{N}]^\omega$ υπάρχουν $\mathcal{V} \in I$ και $d \in FS(B)$ ώστε $\mathcal{V} \sim_{\mathcal{A}} id{+}\mathcal{V} \quad i \in \{0, 1, \ldots, l\}$
- $T(l) \Leftrightarrow$ για κάθε πεπερασμένη διαμέριση του $\mathbb{N}$, έστω $\mathcal{A}$, κάθε $B \in [\mathbb{N}]^\omega$ κάθε $\mathcal{W} \in I$ και κάθε $d' \in FS(B)$ υπάρχουν $\mathcal{V} \in I$, $d \in FS(B)$ ώστε $d' \lhd d$ και $\mathcal{W} = id + \mathcal{V} \quad i \in \{1, 2, \ldots, l\}$

Ισχυρισμός : $S(l - 1) \to T(l)$

Έστω $\mathcal{A}$ πεπερασμένη διαμέριση του $\mathbb{N}$, $B \in [\mathbb{N}]^\omega$, $\mathcal{W} \in I$ και $d' \in FS(B)$
Έστω k ο αριθμός που λαμβάνουμε από τον πρώτο ισχυρισμό για την $\mathcal{A}$.
Θέτουμε
$\mathcal{A}' = \{-i + A : i \in \{0, 1, \ldots, k\} \wedge A \in \mathcal{A}\}$
$B' = \{m \in B : m > d'\}$
Υπάρχουν $\mathcal{V}' \in I$, $d \in FS(B')$ ώστε
$\mathcal{V}' \sim_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}'}} id + \mathcal{V}' \quad i \in \{0, 1, \ldots, l - 1\}$
Υπάρχει $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ώστε $\mathcal{W} \sim_{\mathcal{A}} t + \mathcal{V}'$
Με βάση τον δεύτερο ισχυρισμό θέτουμε
$\mathcal{V} = t + (-d + \mathcal{V}')$
και αφού $\mathcal{U} \sim_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}'}} \mathcal{V} \to \mathcal{U} \sim_{\mathcal{A}} \mathcal{V}$

έχουμε
$\mathcal{W} \sim_{\mathcal{A}} t+\mathcal{V}' \sim_{\mathcal{A}} t+(i-1)d+\mathcal{V}' \sim_{\mathcal{A}} id+t+(-d+\mathcal{V}') \sim_{\mathcal{A}} id+\mathcal{V} \quad i \in \{1,2,\ldots,l\}$

Ισχυρισμός : $T(l) \to S(l)$

Έστω $\mathcal{A}$ πεπερασμένη διαμέριση του $\mathbb{N}$, $B \in [\mathbb{N}]^{\omega}$, $\mathcal{V}_0 \in I$.
Ορίζουμε αναδρομικά ακολουθίες $\mathcal{A}_j$ διαμερίσεων του $\mathbb{N}$, $\mathcal{V}_j \in I$, $d_j \in \mathbb{N} \quad j \in \{1,2,\ldots,|\mathcal{A}|+1\}$
$\mathcal{V}_1, d_1$ τέτοια ώστε $\mathcal{V}_0 \sim_{\mathcal{A}} id_1 + \mathcal{V}_1 \quad d_1 \in FS(B) \quad i \in \{1,2,\ldots,l\}$
$\mathcal{A}_1 = \mathcal{D}_{\mathcal{A}'}$ όπου $\mathcal{A}' = \{-id_1 + A : i \in \{0,1,\ldots,l\} \wedge A \in \mathcal{A}\}$
$\mathcal{V}_{j+1}, d_{j+1}$ τέτοια ώστε $\mathcal{V}_j \sim_{\mathcal{A}_j} id_{j+1} + \mathcal{V}_{j+1} \quad d_{j+1} \in FS(B), d_j \lhd d_{j+1} \quad i \in \{1,2,\ldots,l\}$
$\mathcal{A}_{j+1} = \mathcal{D}_{\mathcal{A}'_j}$ όπου $\mathcal{A}'_j = \{-id_{j+1} + A : i \in \{0,1,\ldots,l\} \wedge A \in \mathcal{A}_j\}$
Υπάρχουν λοιπόν $1 \leq m < n \leq |\mathcal{A}|+1$ ώστε $\mathcal{V}_m \sim_{\mathcal{A}} \mathcal{V}_n$
Θέτουμε $\mathcal{V} = \mathcal{V}_n$, $d = d_{m+1} + \cdots + d_n$
$d \in FS(B)$ (αφού $d_j \lhd d_{j+1} \quad j \in \{1,2,\ldots,|\mathcal{A}|\}$)
Θα δείξουμε ότι $\mathcal{V} \sim_{\mathcal{A}} id + \mathcal{V} \quad i \in \{0,1,\ldots,l\}$
$i = 0 \quad$ προφανές
Αν $i < j$ τότε η $\mathcal{A}_j$ είναι εκλέπτυνση της $\mathcal{A}_i$
Αν $n = m+1$ τότε $\mathcal{V} \sim_{\mathcal{A}} \mathcal{V}_m \sim_{\mathcal{A}_m} id_n + \mathcal{V}$
άρα $\mathcal{V} \sim_{\mathcal{A}} id_n + \mathcal{V} \quad i \in \{1,2,\ldots,l\}$
Αν $n > m+1$ τότε $\mathcal{V}_{n-2} \sim_{\mathcal{A}_{n-2}} id_{n-1} + \mathcal{V}_{n-1} \sim_{\mathcal{A}_{n-2}} i(d_{n-1} + d_n) + \mathcal{V}$
Συνεχίζοντας κατάυτόν τον τρόπο έχουμε τελικά
$\mathcal{V}_m \sim_{\mathcal{A}_m} id + \mathcal{V}_n$
άρα $\mathcal{V} \sim_{\mathcal{A}} id + \mathcal{V}$

Χρησιμοποιώντας τους δύο τελευταίους ισχυρισμούς έχουμε $\forall l S(l)$

Υπάρχουν λοιπόν $\mathcal{V} \in I$, $d \in FS(B)$ ώστε $\mathcal{V} \sim_{\mathcal{A}} id + \mathcal{V} \quad i \in \{0,1,\ldots,l\}$
Υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $A \in \mathcal{V}$
άρα $-id + A \in \mathcal{V} \quad i \in \{0,1,\ldots,l\}$
συνεπώς $\cap_{i=0}^{l}(-id + A) \neq \emptyset$.
Επιλέγουμε $a \in \cap_{i=0}^{l}(-id + A)$ •

Η συνήθης μορφή του θεωρήματος van der Waerden προκύπτει από το προηγούμενο με την εφαρμογή ενός επιχειρήματος συμπάγειας.

6 Δυναμικά συστήματα

Στα επόμενα θα χρησιμοποιήσουμε μεθόδους από την τοπολογική δυναμική.

Έστω $c \in \mathbb{N}$

Ορισμός 6.1 $X = \{1, 2, \ldots, c\}^{\mathbb{Z}}$ *(Ο X είναι το σύνολο όλων των χρωματισμών του $\mathbb{Z}$ με c χρώματα)*

Θεωρούμε την διακριτή τοπολογία πάνω στο $\{1, 2, \ldots, c\}$.
Εφοδιάζουμε τον X με την τοπολογία γινόμενο.
Με βάση το θεώρημα Tychonoff ο χώρος X είναι συμπαγής.

Ορισμός 6.2 $\rho(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & x \neq y \wedge n = \max m(x(i) = y(i) \quad |i| < m) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Παρατήρηση 6.1 $x_n \to_\rho x$ *ανν* $\forall i (x_n(i) \to x(i))$

Από την προηγούμενη παρατήρηση προκύπτει ότι η τοπολογία που επάγει η ρ πάνω στον X είναι η τοπολογία γινόμενο. Έτσι θεωρούμε τον X ως συμπαγή μετρικό χώρο.

Ορισμός 6.3 $T : X \to X \quad Tx(i) = x(i+1)$ *(Ο τελεστής T είναι η μεταφορά κατά ένα αριστερά)*

Παρατήρηση 6.2 *Ο T είναι $1-1$ και ομοιόμορφα συνεχής.*

Ορισμός 6.4 *Ένα ζεύγος (Y, T), όπου Y είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $T : Y \to Y$ είναι $1-1$ και ομοιόμορφα συνεχής καλείται δυναμικό σύστημα.*

Ορισμός 6.5 *Αν (Y, T) είναι δυναμικό σύστημα και $y \in Y$ τότε* $cl(y) = \overline{\{T^s y \ : \ s \in \mathbb{Z}\}}$

Το $cl(y)$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος και αφού $T[cl(y)] \subseteq cl(y)$ το $(cl(y), T)$ είναι δυναμικό σύστημα.

Έστω $x \in X$.
Μια διατεταγμένη r-αδα, έστω u, θα λέγεται τμήμα του x αν υπάρχει $s \in \mathbb{Z}$ ώστε $u_i = x(s+i) \quad i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$.
Το σύνολο των τμημάτων του x συμβολίζεται $seq(x)$.

Λήμμα 6.1 $y \in cl(x)$ *ανν* $seq(y) \subseteq seq(x)$

Απόδειξη : $(\rightarrow)$ Έστω $(y(s), y(s+1), \ldots, y(s+r-1))$ τμήμα του y.
Υπάρχει $t \in \mathbb{Z}$ ώστε $\rho(T^t x, y) < \frac{1}{1+\max(|s|,|s+r-1|)}$
Έτσι τα $T^t x, y$ συμφωνούν πάνω στο $\{s, s+1, \ldots, s+r-1\}$
δηλαδή $(y(s), y(s+1), \ldots, y(s+r-1)) = (x(t+s), x(t+s+1), \ldots, x(t+s+r-1))$.

$(\leftarrow)$ Έστω $n \in \mathbb{N}$
Τότε το $(y(-n), y(-n+1), \ldots, y(n)) \in seq(x)$ άρα υπάρχει ένα $t \in \mathbb{Z}$ ώστε $(y(-n), y(-n+1), \ldots, y(n)) = (x(t), x(t+1), \ldots, x(t+2n))$
δηλαδή $\rho(T^{t+n} x, y) < \frac{1}{n+1}$ •

Ορισμός 6.6 *Έστω $\mathcal{A} = \{cl(y) \ : \ y \in X\}$. Το x καλείται ελαχιστικό αν το $cl(x)$ είναι ελαχιστικό στοιχείο του $(\mathcal{A}, \subseteq)$*

Λήμμα 6.2 *Έστω $x \in X$. Υπάρχει $y \in cl(x)$, y ελαχιστικό.*

Απόδειξη : Έστω S αλυσίδα στον χώρο $(\mathcal{A}, \subseteq)$
Η S έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών και αφού όλα τα στοιχεία της είναι κλειστά υποσύνολα του X και ο X είναι συμπαγής έχουμε $\cap S \neq \emptyset$.
Υπάρχει λοιπόν $y \in \cap S$ άρα $cl(y)$ είναι κάτω φράγμα για την S.
Με βάση το λήμμα Zorn υπάρχει ελαχιστικό στοιχείο y με $cl(y) \subseteq cl(x)$ δηλαδή $y \in cl(x)$ •

Παρατήρηση 6.3 *Αν θεωρήσουμε $\mathcal{B} = \{seq(y) \ : \ y \in X\}$ τότε από το Λήμμα 6.1 αν x ελαχιστικό τότε $seq(y)$ είναι ελαχιστικό στη $(\mathcal{B}, \subseteq)$*

Ορισμός 6.7 *Έστω $Y \subseteq X$ ώστε (Y, T) να είναι δυναμικό σύστημα. Το (Y, T) θα λέγεται ελαχιστικό δυναμικό σύστημα αν για κάθε $y \in Y$ ισχύει $cl(y) = Y$*

Λήμμα 6.3 *Το x είναι ελαχιστικό ανν για κάθε τμήμα του έστω $(x(s), x(s+1), \ldots, x(s+r-1))$ υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $t \in \mathbb{Z}$ να υπάρχει $t' \in \{t, t+1, \ldots, t+M-r\}$ ώστε $(x(s), x(s+1), \ldots, x(s+r-1)) = (x(t'), x(t'+1), \ldots, x(t'+r-1))$*

Απόδειξη : $(\rightarrow)$ Έστω $u = (x(s), x(s+1), \ldots, x(s+r-1))$
Προς άτοπο έστω ότι για κάθε περιττό $M = 2N+1$ υπάρχει t_M ώστε το u να μην είναι υποτμήμα [7] του $(x(t_M), x(t_M+1), \ldots, x(t_M+M))$

[7] Δηλαδή να μην υπάρχει $t'_M \in \{t_M, t_M+1, \ldots, t_M+M-r\}$ ώστε $(x(s), x(s+1), \ldots, x(s+r-1)) = (x(t'_M), x(t'_M+1), \ldots, x(t'_M+r-1))$

Θέτοντας $x_M = T^{t_M+N}$ παρατηρούμε ότι το u δεν είναι υποτμήμα του $(x(-N), x(-N+1), \ldots, x(N))$
Υπάρχει υπακολουθία x_{M_i} που συγκλίνει.
Έστω $x^* = \lim_{i\to\infty} x_{M_i}$
Παρατηρούμε ότι $u \notin seq(x^*)$ ενώ $x^* \in cl(x)$ (άρα $x \in cl(x^*)$ αφού το x είναι ελαχιστικό, άτοπο)

$(\leftarrow)$ Έστω $y \in cl(x)$, $u = (x(s), x(s+1), \ldots, x(s+r-1))$, τμήμα του x.
Αρκεί να δείξουμε ότι $u \in seq(y)$
Έστω M να ικανοποιεί την δεύτερη συνθήκη του λήμματος.
Υπάρχει $t \in \mathbb{Z}$ ώστε $(y(1), y(2), \ldots, y(M)) = (x(t), x(t+1), \ldots, x(t+M))$.
Αφού το $(x(s), x(s+1), \ldots, x(s+r-1))$ είναι υποτμήμα του $(x(t), x(t+1), \ldots, x(t+M))$ είναι και υποτμήμα του $(y(1), y(2), \ldots, y(M))$
άρα $u \in seq(y)$. •

Λήμμα 6.4 *Έστω (Y,T) ελαχιστικό δυναμικό σύστημα, $\epsilon > 0$. Υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ ώστε $x, y \in Y \to \exists s(|s| \leq M \wedge \rho(T^s x, y) < \epsilon)$*

Απόδειξη : Προς απαγωγή σε άτοπο έστω x_m, y_m ακολουθίες στοιχείων του Y ώστε $\rho(T^s x_m, y_m) \geq \epsilon \quad |s| \leq m$
Βρίσκουμε m_n ακολουθία φυσικών ώστε να υπάρχουν τα όρια $\lim_{n\to\infty} x_{m_n}$, $\lim_{n\to\infty} y_{m_n}$ έστω x, y αντίστοιχα.
Τότε $\rho(T^s x, y) \geq \epsilon \quad s \in \mathbb{Z}$
Όμως $Y = seq(x)$ άρα υπάρχει $s \in \mathbb{Z}$ ώστε $\rho(T^s x, y) < \epsilon$ άτοπο. •

Θεώρημα 6.1 *Έστω $Y \subseteq X$, ώστε (Y,T) να είναι δυναμικό σύστημα, $r \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$.
Υπάρχουν $y \in Y$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(T^{in} y, y) < \epsilon \quad i \in \{1, 2, \ldots, r\}$*

Απόδειξη : Με βάση το Λήμμα 6.2 χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το (Y,T) ελαχιστικό.
Βοηθητικά ορίζουμε τους κάτωθι τύπους για $r \in \mathbb{N}$

- $A(r) \leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists x, y \in Y)(\exists n \in \mathbb{N})\rho(T^{in} x, y) < \epsilon \quad i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

- $B(r) \leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\forall z \in Y)(\exists x \in Y)(\exists n \in \mathbb{N})\rho(T^{in} x, z) < \epsilon \quad i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

- $C(r) \leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\forall z \in Y)(\exists x \in Y)(\exists n \in \mathbb{N})(\exists \epsilon' > 0)(\rho(x', x) < \epsilon' \to \rho(T^{in}x', z) < \ \epsilon) \quad i \in \ \{1, 2, \dots, r\}$

- $D(r) \leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists w \in Y)(\exists n \in \mathbb{N})\rho(T^{in}w, w) < \epsilon \quad i \in \{1, 2, \dots, r\}$

Αυτό που θέλουμε να δείξουμε είναι $\forall r D(r)$

$A(1)$ ισχύει προφανώς.

Ισχυρισμός : $A(r) \to B(r)$
Έστω M που ικανοποιεί το Λήμμα 6.4 για το $\frac{\epsilon}{2}$
Από την ομοιόμορφη συνέχεια υπάρχει $\epsilon' > 0$ ώστε
$\rho(x, y) < \epsilon' \to \rho(T^s x, T^s y) < \frac{\epsilon}{2} \quad |s| \leq M$
Από την $A(r)$ υπάρχουν x, y, n ώστε $\rho(T^{in}x, y) < \epsilon' \quad i \in \{1, 2, \dots, r\}$
Υπάρχει s, $|s| \leq M$ ώστε $\rho(T^s y, z) < \frac{\epsilon}{2}$
Άρα $\rho(T^{in+s}x, T^s y) < \frac{\epsilon}{2} \quad i \in \{1, 2, \dots, r\}$
συνεπώς $\rho(T^{in+s}x, z) < \epsilon \quad i \in \{1, 2, \dots, r\}$
Τα $T^s x, n$ ικανοποιούν την $B(r)$

Ισχυρισμός : $B(r) \to C(r)$
Από τη $B(r)$ υπάρχουν x, n ώστε $\rho(T^{in}x, z) < \frac{\epsilon}{2} \quad i \in \{1, 2, \dots, r\}$
Με βάση τη συνέχεια υπάρχει $0 < \epsilon' < \epsilon$ ώστε $\rho(x', x) < \epsilon' \to \rho(T^{in}x', T^{in}x) < \frac{\epsilon}{2} \quad i \in \{1, 2, \dots, r\}$
Έτσι $\rho(x', x) < \epsilon' \to \rho(T^{in}x', z) < \epsilon \quad i \in \{1, 2, \dots, r\}$
Άρα τα x, n, ϵ' ικανοποιούν τη $C(r)$.

Ισχυρισμός : $C(r) \to D(r)$
Ορίζουμε αναδρομικά ακολουθίες z_k στοιχείων του Y, n_k φυσικών, ϵ_k θετικών πραγματικών, ως εξής
z_0 τυχαίο, $\epsilon_0 < \frac{\epsilon}{2}$.
Τα z_{k+1}, n_{k+1}, ϵ_{k+1} ικανοποιούν την $C(r)$ για τα z_k, ϵ_k
Αφού Y συμπαγές υπάρχουν z_k, $z_{k'}$ ώστε $k < k'$ και $\rho(z_k, z_{k'}) < \frac{\epsilon}{2}$
Με βάση τη $C(r)$ έχουμε $\rho(x, z_{k'}) < \epsilon_{k'} \to \rho(T^{i(n_{k'}+n_{k'-1}+\cdots+n_{k+1})}x, z_k) < \epsilon_k$
Άρα $\rho(T^{i(n_{k'}+n_{k'-1}+\cdots+n_{k+1})}z_{k'}, z_{k'}) < \epsilon$
Θέτοντας $w = z_{k'}$, $n = n_{k'} + n_{k'-1} + \cdots + n_{k+1}$ ικανοποιείται η $D(r)$

Ισχυρισμός : $D(r) \to A(r+1)$
Αν τα w, n ικανοποιούν τη $D(r)$ θέτοντας $x = T^{-n}w$, $y = w$ έχουμε $\rho(T^{in}x, y) = \rho(T^{(i-1)n}w, w) < \epsilon \quad i \in \{1, 2, \dots, r+1\}$

Με βάση τους παραπάνω ισχυρισμούς λαμβάνουμε επαγωγικά το ζητούμενο. •

Θεώρημα 6.2 *Έστω x χρωματισμός με c χρώματα του $\mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ Υπάρχουν $s \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x(s) = x(s+n) = \cdots = x(s+rn)$*

Απόδειξη : Το x είναι στοιχείο του X.
Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 6.1 για $Y = cl(x)$ και $\epsilon = 1$
Υπάρχουν $y \in cl(x)$, $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(T^{in}y, y) < 1 \quad r \in \{1, 2, \ldots, r\}$
Αυτό σημαίνει ότι $y(0) = T^n y(0) = \cdots = T^{rn} y(0)$
δηλαδή $y(0) = y(n) = \cdots = y(rn)$
Υπάρχει $s \in \mathbb{Z}$ ώστε $\rho(y, T^s x) < \frac{1}{rn+1}$
άρα τα $y, T^s x$ συμφωνούν στο $\{-rn, -rn+1, \ldots, rn\}$.
Έτσι $x(s) = x(s+n) = \cdots = x(s+rn)$ •

Πόρισμα 6.1 *(θεώρημα van der Waerden) Έστω x χρωματισμός με c χρώματα του $\mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$. Υπάρχει μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος μεγέθους r*

Απόδειξη : Ορίζουμε χρωματισμό με c χρώματα του $\mathbb{Z}$, έστω x', με
$$x'(s) = \begin{cases} x(s+1) & s \geq 0 \\ x(-s) & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
Με βάση το προηγούμενο θεώρημα ο x' έχει μονοχρωματική πρόοδο μεγέθους $2r$.
Άρα από την κατασκευή του x' ο x έχει μονοχρωματική αριθμητική πρόοδο μεγέθους τουλάχιστον r •

Ορισμός 6.8 *Έστω $x, y \in X$. Τα x, y λέγονται συναφή αν $\inf_{s\in\mathbb{Z}} \rho(T^s x, T^s y) = 0$*

Παρατήρηση 6.4 *Τα x, y είναι συναφή ανν για κάθε $M \in \mathbb{N}$ υπάρχει $s \in \mathbb{Z}$ ώστε $(x(s), x(s+1), \ldots, x(s+M)) = (y(s), y(s+1), \ldots, y(s+M))$*

Θεωρούμε το X^X εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο.
Το X^X είναι συμπαγές.
Μια υποβάση της τοπολογίας γινόμενο είναι τα σύνολα της μορφής $\{h \in X^X : \rho(h(x), y) < \epsilon\} \quad x, y \in X \quad \epsilon > 0$

Η σύνθεση απεικονίσεων είναι πράξη προσεταιριστική άρα καθιστά το X^X ημιομάδα.
Η ημιομάδα αυτή είναι δεξιά συνεχής αφού για να έχουμε $\rho(fg(x), y) < \epsilon$ αρκεί $\rho(f(g(x)), y) < \epsilon$.

Ορισμός 6.9 $E = \overline{\{T^s \ : \ s \in \mathbb{Z}\}}$. *Η E καλείται περιβάλλουσα ημιομάδα του (X, T)*

Το E είναι συμπαγές.

Παρατήρηση 6.5 *$f \in E$ ανν για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, $\epsilon > 0$ υπάρχει $s \in \mathbb{Z}$ ώστε $\rho(f(x_i), T^s(x_i)) < \epsilon \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*

Λήμμα 6.5 *Η E είναι δεξιά συνεχής, συμπαγής και Hausdorff ημιομάδα.*

Απόδειξη : Αρκεί να δείξουμε ότι η E είναι κλειστή κάτω από τη σύνθεση (αφού τότε οι απαιτούμενες ιδιότητες θα προκύψουν από τις αντίστοιχες για τον X^X)
Έστω $f, g \in E$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, $\epsilon > 0$
Υπάρχει $s \in \mathbb{Z}$ ώστε $\rho(f(g(x_i)), T^s g(x_i)) < \frac{\epsilon}{2} \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
Υπάρχει $\epsilon' > 0$ ώστε $\rho(x, y) < \epsilon' \to \rho(T^s x, T^s y) < \frac{\epsilon}{2}$
Υπάρχει $t \in \mathbb{Z}$ ώστε $\rho(g(x_i), T^t x_i) < \epsilon' \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
Άρα $\rho(fg(x_i), T^{s+t}x_i) \leq \rho(fg(x_i), T^s g(x_i)) + \rho(T^s g(x_i), T^s T^t g(x_i)) < \epsilon \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
Με βάση την Παρατήρηση 6.5 $fg \in E$ $\bullet$

Θεώρημα 6.3 *Έστω $x \in X$, $Y \subseteq cl(x)$, (Y, T) ελαχιστικό δυναμικό σύστημα. Υπάρχει $y \in Y$ ώστε τα x, y να είναι συναφή.*

Απόδειξη : Θέτουμε $F = \{f \in E \ : \ f(x) \in Y\}$
$F \neq \emptyset$ αφού αν $y' \in Y$ τότε $y' \in cl(x)$ άρα υπάρχει ακολουθία $s_m \in \mathbb{Z}$ ώστε $T^{s_m}x \to y'$
Όμως αφού E συμπαγής, υπάρχει υπακολουθία της s_m έστω s'_m ώστε $T^{s'_m}$ συγκλίνει, έστω στο f.
Τότε $f(x) = \lim_{m \to \infty} T^{s'_m}x = y'$
F είναι κλειστό, άρα συμπαγές.
Αν $f \in E$, $z \in Y$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $s \in \mathbb{Z}$ ώστε $\rho(f(z), T^s z) < \epsilon$ και αφού $T^s z \in Y$ έχουμε $\rho(f(z), Y) = 0$, δηλαδή $f(z) \in Y$.
Άρα αν $f_1, f_2 \in F$ τότε $f_1 f_2(x) = f_1(f_2(x)) \in Y$
δηλαδή το F είναι κλειστό ως προς τη σύνθεση.
Συνεπώς το F είναι δεξιά συνεχής συμπαγής Hausdorff ημιομάδα.
Έστω $g \in F$ με $gg = g$
Θέτουμε $y = g(x)$
$y \in Y$
Υπάρχει $s \in \mathbb{Z}$ ώστε $\rho(g(x), T^s x) < \frac{\epsilon}{2}$ και $\rho(g(g(x)), T^s g(x)) < \frac{\epsilon}{2}$
άρα $\rho(T^s y, T^s x) < \epsilon$ $\bullet$

Πόρισμα 6.2 *(Θεώρημα Hindman)*
Αν χ χρωματισμός του $\mathbb{N}$ με c χρώματα τότε υπάρχει $B \in [\mathbb{N}]^\omega$ ώστε $\chi(FS(B))$ να είναι σταθερό.

Απόδειξη : Επεκτείνουμε το χ στο $\mathbb{Z}$ συμμετρικά.
Έστω $x \in X$ η επέκταση.
Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα και το Λήμμα 6.2 υπάρχει $y \in cl(x)$ ώστε το y είναι ελαχιστικό και τα x, y είναι συναφή.
Χωρίς βλάβη έστω $\inf_{n\in\mathbb{N}} \rho(T^n x, T^n y) = 0$
Ορίζουμε αναδρομικά ακολουθία a_m φυσικών, ως εξής
Αφού το y είναι ελαχιστικό, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.3 υπάρχει M ώστε σε κάθε τμήμα του y μεγέθους M να υπάρχει $s \in \mathbb{Z}$ ώστε $y(0) = y(s)$.
Με βάση την Παρατήρηση 6.4 υπάρχει a_1 ώστε $x(a_1) = y(a_1) = y(0)$
Αν έχουν οριστεί τα $a_1, a_2, \dots, a_m$ τότε υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ ώστε σε κάθε τμήμα του y μεγέθους M να υπάρχει $s \in \mathbb{Z}$ ώστε $(y(0), y(1), \dots, y(a_1 + a_2 + \dots + a_m)) = (y(s), y(s+1), \dots, y(s + a_1 + a_2 + \dots + a_m))$.
Υπάρχει a_{m+1} ώστε $(y(0), y(1), \dots, y(a_1+a_2+\dots+a_m)) = (y(a_{m+1}), y(a_{m+1}+1), \dots, y(a_{m+1} + a_1 + a_2 + \dots + a_m)) = (x(a_{m+1}), x(a_{m+1}+1), \dots, x(a_{m+1} + a_1 + a_2 + \dots + a_m))$
Θέτουμε $B = \{a_1, a_2, \dots\}$
Δείχνουμε επαγωγικά ότι το B ικανοποιεί τη ζητούμενη ιδιότητα.
$n = 1$, σαφές.
$n \to n+1$ Αν $k \in FS(\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\})$ τότε
είτε $k \in FS(\{a_1, a_2, \dots, a_n\})$ οπότε χρησιμοποιούμε την επαγωγική υπόθεση
είτε $k = a + a_{n+1}$ όπου $a \in FS(\{a_1, a_2, \dots, a_n\})$ οπότε $x(k) = x(a_{n+1} + a) = y(a_{n+1} + a) = y(a) = y(0)$
είτε $k = a_{n+1}$ οπότε ξανά $x(k) = x(a_{n+1}) = y(a_{n+1}) = y(0)$ •

7 Θεώρημα Szemeredi

Το θεώρημα Szemeredi απαντά σε μια εικασία των Erdos-Turan που έγινε το 1936. Η πρώτη απόδειξη δόθηκε από τον Szemeredi το 1974 (βλέπε [17]). Πρόσφατα δόθηκε μια νέα, απλούστερη, στοιχειώδης απόδειξη από τον W.T.Gowers (βλέπε [7]). Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε ένα θεώρημα από την εργοδική θεωρία (θεώρημα Furstenberg) για να συνάγουμε μια ελαφρά τροποποιημένη μορφή του θεωρήματος.

Ορισμός 7.1 *Έστω $S \subseteq \mathbb{Z}$. Το S έχει θετική ασυμπτωτική πυκνότητα, έστω $a > 0$, αν υπάρχουν ακολουθίες $m_i, n_i \in \mathbb{Z}$ ώστε $m_i > n_i$, $m_i - n_i \to \infty$ και $\lim_{i\to\infty} \frac{|S\cap\{n_i,n_i+1,\ldots,m_i-1\}|}{m_i-n_i} = a$*

Θέτουμε $Y = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.
Παρακάτω θα ταυτίζουμε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{Z}$ με το αντίστοιχο στοιχείο του Y.
Θέτουμε $\Omega = [0,1]^Y$
Το Ω είναι συμπαγές.

Ορισμός 7.2 *Ένα στοιχείο f του Ω καλείται κανονικό αν*
$f(\mathbb{Z}) = 1$
$A \cap B = \emptyset \to f(A \cup B) = f(A) + f(B)$
Το f καλείται αναλλοίωτο από μεταφορές αν $f(Tx) = f(x)$

Λήμμα 7.1 *Αν S έχει θετική ασυμπτωτική πυκνότητα a τότε υπάρχει f κανονικό και αναλλοίωτο από μεταθέσεις ώστε $f(S) = a$*

Απόδειξη : Παρατηρούμε ότι το σύνολο των κανονικών στοιχείων του Ω είναι κλειστό, άρα συμπαγές.
Πράγματι, έστω f ανήκει στην κλειστότητα και A, B ξένα υποσύνολα του $\mathbb{Z}$
Τότε υπάρχει f' κανονικό ώστε
$|f(A) - f'(A)| < \frac{\epsilon}{3}$
$|f(B) - f'(B)| < \frac{\epsilon}{3}$
$|f(A \cup B) - f'(A \cup B)| < \frac{\epsilon}{3}$
άρα $|f(A \cup B) - f(A) - f(B)| < \epsilon$
και αφού το ϵ είναι τυχαίο έχουμε
$f(A \cup B) = f(A) + f(B)$
Παρόμοια $f(\mathbb{Z}) = 1$
Ορίζουμε $f_i \quad i \in \mathbb{Z}$ κανονικά στοιχεία, ως εξής
$f_i(A) = \frac{|A\cap\{n_i,n_i+1,\ldots,m_i-1\}|}{m_i-n_i}$

Από τη συμπάγεια του συνόλου των κανονικών στοιχείων υπάρχει υπακολουθία f_{i_m} συγκλίνουσα.
Έστω f το όριό της.
$f(S) = \lim_{m\to\infty} f_{i_m}(S) = a$
Παρατηρούμε ότι
$|f_i(TA) - f_i(A)| = \frac{||(A-1)\cap\{n_i,n_i+1,\ldots,m_i-1\}|-|A\cap\{n_i,n_i+1,\ldots,m_i-1\}||}{m_i-n_i} \leq \frac{2}{m_i-n_i}$ όπου $A-1 = \{s \in \mathbb{Z} \ : \ s+1 \in A\}$
Έτσι $\lim_{m\to\infty}(f_{i_m}(TA) - f_{i_m}(A)) = 0$
δηλαδή $f(TA) = f(A)$ •

Θεώρημα 7.1 *(Furstenberg) Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος πιθανότητας και T $1-1$ τελεστής με την ιδιότητα $\mu(TA) = \mu(A)$ τότε για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $s \in \mathbb{Z}$ ώστε $\mu(A \cap T^sA \cap \cdots \cap T^{s(k-1)}A) > 0$*

Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στο [6].

Θεώρημα 7.2 *(Szemeredi)*
Έστω $S \subseteq \mathbb{Z}$ με θετική ασυμπτωτική πυκνότητα $a > 0$ και $k \in \mathbb{N}$. Υπάρχει αριθμητική πρόοδος μεγέθους k που περιέχεται στο S.

Απόδειξη : Με βάση το προηγούμενο λήμμα υπάρχει f κανονικό και αναλλοίωτο από μεταθέσεις, ώστε $f(S) = a$
Θέτουμε $Y_s = \{y \in Y \ : \ y(s) = 1\} \quad s \in \mathbb{Z}$
Ορίζουμε $\mu'(Y_{i_1} \cap Y_{i_2} \cap \cdots \cap Y_{i_n}) = f(T^{i_1}S \cap T^{i_2}S \cap \cdots \cap T^{i_n}S)$
Από τη θεωρία μέτρου προκύπτει ότι το μ' επεκτείνεται σε μέτρο πιθανότητας μ πάνω στη $\sigma-$άλγεβρα που παράγει η οικογένεια $\{Y_s \ : \ s \in \mathbb{Z}\}$
Παρατηρούμε ότι ο T είναι μια $1-1$ απεικόνιση που διατηρεί το μέτρο μ άρα (θεώρημα Furstenberg) υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε αφού $\mu(Y_0) = f(S) = a > 0$ τότε $\mu(Y_0 \cap T^sY_0 \cap \cdots \cap T^{s(k-1)}Y_0) > 0$
Άρα $f(S \cap (S-n) \cap \cdots \cap (S-n(k-1))) = \mu(Y_0 \cap Y_{-n} \cap \cdots \cap Y_{-n(k-1)}) > 0$
δηλαδή $S \cap (S-n) \cap \cdots \cap (S-n(k-1)) \neq \emptyset$
Υπάρχει λοιπόν $a \in \mathbb{Z}$ ώστε $a \in S \cap (S-n) \cap \cdots \cap (S-n(k-1))$
δηλαδή $a, a+n, \ldots, a+n(k-1) \in S$ •

Αναφορές

[1] Baumgartner J.E. (1974)
A short proof of Hindman's theorem
J.Comb.Th.(A) 17 pp 384-386

[2] Bergelson V. - Hindman N. (1990)
Nonmetrizable topological dynamics and Ramsey theory
Trans AMS 320 pp 293-320

[3] Comfort W. - Negrepontis S. (1974)
The theory of ultrafilters
Springer

[4] Comfort W. (1977)
Ultrafilters: Some old and some new results
Bull.AMS 83 pp 417-455

[5] Ellis R. (1969)
Lectures on topological dynamics
Benjamin

[6] Furstenberg H. (1981)
Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory
Princeton University Press

[7] Gowers W.T. (2001)
A new proof of Szemeredi's theorem
Geom.Funct.Anal. 11 pp 465-588

[8] Graham R. - Rothschild B. - Spencer J. (1990)
Ramsey Theory
Wiley

[9] Hales A.W.- Jewett R.I. (1963)
Regularity and positional games
Trans.Amer.Math.Soc. 106 pp 222-229

[10] Harrington L.- Paris J. (1977)
A mathematical incompleteness in Peano arithmetic
Handbook of mathematical logic (North Holland) pp 1133-1142

[11] Hindman N. (1974)
Finite sums from sequences within cells of a partition of $\mathbb{N}$
J.Combin.Theory A 17 pp 1-11

[12] Kreisel G. (1952)
On the interpretation of nonfinitist proofs II
J.S.L 17 pp 43-58

[13] Ramsey (1930)
On a problem for formal logic
Proc.London Math.Soc. 30 pp 264-286

[14] Scott D.S. (1961)
Measurable cardinals and constructible sets
Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences 9 pp 521-524

[15] Shelah S. (1988)
Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers
J.AMS 1 pp 683-697

[16] Sierpinski W. (1965)
Cardinal and ordinal numbers
Polish Scientific Publishers

[17] Szemeredi E. (1975)
On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression
Acta Arithm. 27 pp 199-245

[18] van der Waerden B.L. (1927)
Beweis einer Baudetschen Vermutung
Nieuw Arch.Wisk. 15 pp 212-216