ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ
ΣΤΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Γ.Ζήκος
(Α.Μ. 200207)
$\mu\Pi\lambda\forall$

Δεκέμβριος 2006

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Γενικά

Κάθε *Λογική* (στα πλαίσια της Μαθηματικής Λογικής) αποτελείται από τρία στοιχεία:

- από μία *γλώσσα* που είναι ένα σύνολο "λέξεων", στις οποίες μπορεί να αποδοθεί κάποιο νόημα.
  Για τον καθορισμό της γλώσσας απαιτείται καταρχάς ένα σύνολο συμβόλων που ονομαζεται *αλφάβητο*. Κάθε τυχαίος συνδυασμός συμβόλων του αλφάβητου ονομάζεται *έκφραση*. Δεν είναι όμως όλες οι εκφράσεις "λέξεις" της γλώσσας. Για να καθοριστεί ποιες είναι, υπάρχουν κάποιοι "κανόνες", βάσει των οποίων κατασκευάζονται. Οι κανόνες αυτοί, απαρτίζουν το λεγόμενο *συντακτικό* της γλώσσας.
  Από το αλφάβητο ξεχωρίζουμε κάποια σύμβολα, τα οποία ονομάζουμε *μεταβλητές*. Οι μεταβλητές αποτελούν τις απλούστερες λέξεις μιας γλώσσας. Οι άλλες λέξεις εξαρτώνται από τη Λογική, την οποία μελετούμε.
  Για παράδειγμα, στην Κλασική Προτασιακή Λογική υπάρχουν οι λέξεις που ονομάζονται *προτασιακοί τύποι*, ενώ στην Κλασική Πρωτοβάθμια Λογική υπάρχουν οι *όροι* και οι *τύποι*.
  Κάθε Λογική αποτελείται επίσης

- από μια *ερμηνεία* των λέξεων της γλώσσας.
  Πρόκειται δηλ. για μία αντιστοίχιση: σε κάθε λέξη της γλώσσας αντιστοιχίζουμε ένα "νόημα". Το "νόημα" αυτό μπορεί να είναι μία αληθοτιμή (δηλ. η τιμή "Αληθής" ή "Ψευδής"), ένα αντικείμενο ή μια σχέση μεταξύ αντικειμένων του κόσμου, τον οποίον θέλουμε να περιγράψει η γλώσσα. Η ερμηνεία των μεταβλητών είναι συνήθως αντικείμενα του κόσμου αυτού. Ενώ οι λέξεις που ερμηνεύονται με κάποια αληθοτιμή, είναι εκείνες που ονομάζονται συνήθως *τύποι*.
  Ο τρόπος απόδοσης ερμηνείας ονομάζεται *σημασιολογία* της γλώσσας.
  Τέλος δε, κάθε Λογική αποτελείται

- από ένα *αξιωματικό σύστημα*, με τη βοήθεια του οποίου μπορούν να παραχθούν "αυτομάτως" (δηλ. με μηχανιστικό τρόπο) - ή αλλιώς να *αποδειχθούν* - τύποι της γλώσσας, οι οποίοι αληθεύουν υπό οποιαδήποτε ερμηνεία των μεταβλητών της γλώσσας.
  Για να γίνει αυτό, απαιτείται ένα σύνολο *αξιωμάτων* (δηλ. τύπων της γλώσσας που θεωρούμε apriori ότι είναι αληθείς) καθώς και ένα σύνολο *αποδεικτικών κανόνων*, με τη βοήθεια των οποίων κατασκευάζονται - ή αλλιώς *αποδεικνύονται* - οι αληθείς τύποι.
  Για να επιτευχθεί ο σκοπός αυτός - δηλ. οι παραγόμενοι τύποι να περιγράφουν αληθείς ιδιότητες μεταξύ αντικειμένων του κόσμου, πάντα, υπό οποιαδήποτε ερμηνεία των μεταβλητών - πρέπει να έχουν την ιδιότητα αυτή τα ίδια τα αξιώματα και οι αποδεικτικοί κανόνες να την "κληρονομούν" στους παραγόμενους τύπους. Τότε έχει νόημα ύπαρξης το αξιωματικό σύστημα· για να παράγει ακριβώς "αληθείς" τύπους.

Από την Κλασική στη Δυναμική Λογική

Στην *Κλασική Προτασιακή Λογική* υπάρχουν *(προτασιακές) μεταβλητές* $p_0, p_1, p_2, \ldots$ καθώς και τύποι που παράγονται από αυτές με τη βοήθεια *λογικών τελεστών*. Για παράδειγμα, τέτοιοι παραγόμενοι τύποι είναι οι $\neg p_0$, $p_0 \wedge p_1$, $p_0 \to (p_1 \vee p_2)$. Κάθε λογικός τελεστής συμβολίζει μια *λογική πράξη*. Για παράδειγμα, ο "$\wedge$" συμβολίζει τη "Σύζευξη" ενώ ο "$\to$" τη συνεπαγωγή. Μία αποτίμηση δίνει από μια αληθοτιμή σε κάθε μεταβλητή κι έτσι αποκτά τιμή αλήθειας και κάθε τύπος, με βάση τον πίνακα αλήθειας της λογικής πράξης κάθε τελεστή. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια αποτίμηση περιγράφει έναν "κόσμο", στον οποίον ισχύει ο τάδε τύπος ή δεν ισχύει ο δείνα...

Στην *Τροπική Λογική (modal logic)* υπάρχουν και πάλι οι προτασιακές μεταβλητές και όλοι οι παραγόμενοι τύποι. Όμως εδώ, δεν θεωρούμε έναν μόνον τέτοιο "κόσμο" αλλά πολλούς, σε καθέναν από τους οποίους ισχύει κάποιος τύπος ή όχι. Θεωρούμε μάλιστα ότι οι "κόσμοι" αυτοί συνδέονται μεταξύ τους μέσω κάποιας σχέσης. Για παράδειγμα, ας ονομάσουμε u, v και t τρεις τέτοιους κόσμους κι ας θεωρήσουμε ότι μια αποτίμηση καθορίζει ότι η μεταβλητή p_0 ισχύει μόνο στον v και η p_1 ισχύει στους v και t. Τότε βλέπουμε αμέσως ότι ο τύπος $p_0 \wedge p_1$ ισχύει στον κόσμο v ενώ δεν ισχύει στον t.
Ας θεωρήσουμε επιπλέον ότι ο u "συνδέεται" με τον v και με τον t μέσω μιας σχέσης R (δηλ. θεωρούμε ότι $R = \{(u, v), (u, t)\}$). Τότε θα έχει νόημα να πούμε ότι στον u ισχύει το εξής: ότι «υπάρχει κόσμος που συνδέεται με αυτόν, στον οποίον ισχύει ο τύπος $p_0 \wedge p_1$». Η πρόταση αυτή μπορεί να περιγραφεί στην Τροπική Λογική, γράφοντας απλώς τον τύπο $\Diamond(p_0 \wedge p_1)$. Άρα, για την παραπάνω αποτίμηση, στον κόσμο u θα ισχύει ο τύπος $\Diamond(p_0 \wedge p_1)$. Παρατηρούμε όμως, ότι η ισχύς του τύπου αυτού δεν εξαρτάται μόνο από την αποτίμηση αλλά και από τη "διασύνδεση" των κόσμων μέσω της σχέσης R. Γι'αυτό το λόγο, στην Τροπική Λογική θα αποτιμάται μεν κάθε μεταβλητή με μια αληθοτιμή, θα ερμηνεύεται δε ο τελεστής $\Diamond$ με κάποια σχέση R. Έτσι, αν στο προηγούμενο παράδειγμα ερμηνευόταν ο τελεστής $\Diamond$ με κάποιαν άλλη σχέση R', τότε ίσως και να μην ίσχυε πια ο τύπος $\Diamond(p_0 \wedge p_1)$.

Ο *τροπικός τελεστής* $\Diamond$ έχει τον δυϊκό του. Συμβολίζεται με $\Box$ και θεωρούμε ότι ο τύπος $\Box\varphi$ αποτελεί συντομογραφία του $\neg\Diamond\neg\varphi$. Άρα, αν πούμε ότι σε κάποιον κόσμο w ισχύει ο τύπος $\Box\varphi$, θα εννοούμε ότι «για κάθε κόσμο που συνδέεται με αυτόν, ισχύει ο τύπος φ». Στη γενικότερη περίπτωση της Τροπικής Λογικής μπορούμε να θεωρήσουμε πολλούς τροπικούς τελεστές $\Diamond_0, \Diamond_1, \ldots$ (και τους αντίστοιχους δυϊκούς τους $\Box_0$, $\Box_1, \ldots$). Επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι αντίστοιχες ερμηνείες τους είναι σχέσεις, όχι μόνο μεταξύ δύο αλλά ακόμα και περισσότερων κόσμων.
Για παράδειγμα μπορεί ο τελεστής $\Diamond_1$ να έχει arity 2, δηλ. να ερμηνεύεται με μια σχέση R_1, η οποία να περιλαμβάνει τριάδες. Τότε θα ισχύει σε έναν κόσμο s ο τύπος $\Diamond_1(\varphi_0, \varphi_1)$ ανν υπάρχουν κόσμοι t, u τ.π. να ισχύει $(s, t, u) \in R_1$ (δηλ. να "συνδέεται" ο s με το ζεύγος κόσμων (t, u)) και στον t να ισχύει ο φ_0 και στον u ο φ_1.

Η *Δυναμική Λογική* είναι μια Τροπική Λογική. Χρησιμοποιείται για την περιγραφή της συμπεριφοράς των προγραμμάτων και των ιδιοτήτων τους. Αναπτύχθηκε αρχικώς για τον έλεγχο ορθότητας των προγραμμάτων, για αποδείξεις ισοδυναμίας προγραμμάτων, για τη σύγκριση της εκφραστικής ισχύος διαφόρων προγραμματιστικών δομών, κ.τ.λ. Χρησιμοποιείται όμως πια και για την περιγραφή πολύπλοκων συμπεριφορών και σε άλλους τομείς όπως η επιστημολογία ή η τεχνητή νοημοσύνη. Για ποιο λόγο όμως επιλέχθηκε μια Τροπική Λογική για την περιγραφή ιδιοτήτων προγραμμάτων;

Καταρχάς η επιλογή μιας Μαθηματικής Λογικής έχει να κάνει με την αυστηρότητα που τη διέπει όπως και με τα θεωρητικά εργαλεία που διαθέτει, όπως είναι η αξιωματικοποίηση και η έννοια της τυπικής απόδειξης. Το ότι χρησιμοποιήθηκε ειδικά μια Τροπική Λογική έχει σχέση με το γεγονός ότι κάθε πρόγραμμα μετατρέπει την είσοδό του σε αυτό, σε μια έξοδο, δηλ. ότι "συνδέει" τον "κόσμο εισόδου" σε αυτό, με έναν "κόσμο εξόδου" · πράγμα που θυμίζει έντονα την ερμηνεία των τροπικών τελεστών. Αυτό ακριβώς θα γίνει στα πλαίσια της Δυναμικής Λογικής: θα θεωρηθούν τα προγράμματα ως τροπικοί τελεστές. Έτσι για παράδειγμα, θα έχει νόημα να πούμε ότι στον κόσμο τάδε ισχύει ότι "μετά από κάθε εκτέλεση του προγράμματος α, στον κόσμο εξόδου του, ισχύει ο τύπος φ". Η πρόταση αυτή θα περιγράφεται από τον τύπο $[\alpha]\varphi$.

Αν επικεντρωθούμε μόνο σε προτασιακούς τύπους και μελετήσουμε πώς τα προγράμματα αλλάζουν την αληθοτιμή τους, τότε έχουμε την *Προτασιακή Δυναμική Λογική (ΠΔΛ)*. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι οι τύποι της περιγράφουν ιδιότητες των προγραμμάτων ανεξάρτητες των δεδομένων, στα οποία εφαρμόζονται. Το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι πώς συνδέονται οι κόσμοι μεταξύ τους, και όχι "τι κόσμοι" είναι αυτοί.
Απ'την άλλη πλευρά, αν περιέχει η γλώσσα της Δυναμικής Λογικής μεταβλητές, κατηγορηματικά και συναρτησιακά σύμβολα και μελετήσουμε πώς τα προγράμματα αλλάζουν την τιμή των μεταβλητών - άρα και την αληθοτιμή τύπων που τις περιέχουν - από κόσμο σε κόσμο, τότε έχουμε την *Πρωτοβάθμια Δυναμική Λογική* ή απλώς *Δυναμική Λογική (ΔΛ)*. Εδώ δεν μας ενδιαφέρει μόνο πώς συνδέονται οι κόσμοι μεταξύ τους, αλλά και το σύνολο, από το οποίο παίρνουν τις τιμές τους οι μεταβλητές.

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιαστεί καταρχάς η ΠΔΛ. Μετά τους ορισμούς περί σύνταξης της γλώσσας $\Gamma_{\Delta 0}$ της ΠΔΛ και της σημασιολογίας, θα αποδειχθεί μια σημαντική ιδιότητά της, η ιδιότητα μικρού μοντέλου, από την οποία θα προκύψει ότι το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας ενός τύπου της ΠΔΛ είναι αποκρίσιμο. Κατόπιν θα δοθεί μια αξιωματικοποίηση της ΠΔΛ και θα αποδειχθούν θεωρήματα εγκυρότητας και πληρότητας.
Στο δεύτερο μέρος της εργασίας θα παρουσιαστεί η σύνταξη και η σημασιολογία της ΔΛ και θα αποδειχθεί η μη ισχύς κάποιων βασικών θεωρημάτων. Η εξέταση υποσυστημάτων της ΔΛ που παρουσιάζουν καλύτερες ιδιότητες - όπως πλήρη αξιωματικοποίηση - θα αφεθούν προς μελέτη για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη.

Μικρό ιστορικό
Η ΔΛ ήταν μια ιδέα του Vaughan Pratt του 1974 αλλά δημοσιεύτηκε το 1976. Αν και αποτελεί γενίκευση της ΠΔΛ, παρουσιάστηκε πριν από αυτήν. Η ΠΔΛ ήταν μια ιδέα των Michael Fischer και Richard Ladner του 1977. Την ίδια χρονιά αποδείχθηκε από αυτούς η ιδιότητα μικρού μοντέλου που οδήγησε στην αποκρισιμότητα του προβλήματος της ικανοποιησιμότητας ενός τύπου. Επίσης το ίδιο έτος προτάθηκε από τον Krister Segerberg μια αξιωματικοποίηση της ΠΔΛ

- την οποία και αναφέρω στην παρούσα εργασία. Αποδείξεις πληρότητας για το αξιωματικό σύστημα του Segerberg έγιναν από τους Gabbay (1977), Parikh (1978), Berman (1979), Nishimura (1979), Pratt(1980) και Kozen (1981). Η απόδειξη που παραθέτω στην παρούσα εργασία είναι του Kozen.
Με επεκτάσεις της ΠΔΛ ασχολήθηκαν μεταξύ άλλων και οι Koren και Pnueli (1983), Harel και Raz (1993), Harel και Singerman (1996), Ferman και Harel (2000), Alur και Madhusudan (2004), Serre (2006).

2 Η Προτασιακή Δυναμική Λογική (ΠΔΛ)

2.1 Η γλώσσα $\Gamma_{\Delta 0}$ (Συντακτικό)

Στον ορισμό της $\Gamma_{\Delta 0}$ θα χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθοι συμβολισμοί, όπου A είναι τυχαίο σύνολο, $n \in \mathbb{N}$ και $a_0, \ldots, a_n \in A$:
$A^{(n)} =_{o\rho.} \{u \subseteq \mathbb{N} \times A \mid Function(u) \quad \& \quad Domain(u) = [0, n)\}$
$A^* =_{o\rho.} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}$
$<>=_{o\rho.} \varnothing$ και $< a_0, \ldots, a_n >=_{o\rho.} \{(0, a_0), \ldots, (n, a_n)\} \in A^{(n+1)}$
$< a_0, \ldots, a_n > \star < b_0, \ldots, b_m >=_{o\rho.} < a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m >$

Ορισμός 2.1.1
Το σύνολο των *συμβόλων* της $\Gamma_{\Delta 0}$ είναι το:

$$\Sigma(\Gamma_{\Delta 0}) =_{o\rho.} \Phi_0 \cup \Pi_0 \cup \{\bot, \rightarrow, ;, \cup, *, [,], ?, (,)\}$$

όπου

$$\Phi_0 =_{o\rho.} \{p_0, p_1, \ldots\}$$

είναι το αριθμήσιμο σύνολο των *προτασιακών μεταβλητών* της και

$$\Pi_0 =_{o\rho.} \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$$

είναι το αριθμήσιμο σύνολο των *ατομικών προγραμμάτων* της.
Το σύνολο των *εκφράσεων* της $\Gamma_{\Delta 0}$ είναι το: $\Sigma(\Gamma_{\Delta 0})^*$.

Δ

Θα χρησιμοποιηθούν τα σύμβολα $p, q, r, \ldots$ ως συντακτικές μεταβλητές που παίρνουν τιμές στο Φ_0 και τα $a, b, c, \ldots$ ως συντακτικές μεταβλητές που παίρνουν τιμές στο Π_0.
Εκτός των προτασιακών μεταβλητών και των ατομικών προγραμμάτων, τα υπόλοιπα σύμβολα της $\Gamma_{\Delta 0}$ ονομάζονται ως εξής:

- $\bot$ *αντίφαση*
- *προτασιακός τελεστής*

  $\rightarrow$ *συνεπαγωγή*
- *τελεστές προγραμμάτων*

  $;$ *σύνθεση*

  $\cup$ *επιλογή*

  $*$ *επανάληψη*
- *μικτοί τελεστές*

  $[\ ]$ *αναγκαιότητα*

  $?$ *test*
- $(\ )$ *παρενθέσεις*

Οι εκφράσεις της $\mathit{\Gamma}_{\Delta 0}$ είναι σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό πεπερασμένες ακολουθίες συμβόλων της. Από αυτές διακρίνονται οι τύποι της, οι οποίοι θα ερμηνευθούν κατόπιν μέσω της σημασιολογίας και οι οποίοι είναι δύο ειδών: οι *προτασιακοί τύποι* και τα *προγράμματα*.

Ορισμός 2.1.2
α)
Μία έκφραση φ είναι προτασιακός τύπος ανν

- $\varphi \in \mathit{\Phi}_0 \cup \{\bot\}$ ή
- είναι της μορφής:
  $(\chi \to \psi)$ ή
  $([\alpha]\chi)$

  όπου χ, ψ είναι ήδη κατασκευασμένοι προτασιακοί τύποι και α ήδη κατασκευασμένο πρόγραμμα.

Το σύνολο των προτασιακών τύπων της $\mathit{\Gamma}_{\Delta 0}$ συμβολίζεται με $\mathit{\Phi}$.

β)
Μία έκφραση α είναι πρόγραμμα ανν

- $\alpha \in \mathit{\Pi}_0$ ή
- είναι της μορφής:
  $(\beta;\gamma)$ ή
  $(\beta \cup \gamma)$ ή
  (β^*) ή
  $(\varphi?)$

  όπου β, γ είναι ήδη κατασκευασμένα προγράμματα και φ ήδη κατασκευασμένος προτασιακός τύπος.

Το σύνολο των προγραμμάτων της $\mathit{\Gamma}_{\Delta 0}$ συμβολίζεται με $\mathit{\Pi}$.

Δ

Θα χρησιμοποιηθούν τα σύμβολα $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ ως συντακτικές μεταβλητές που παίρνουν τιμές στο $\mathit{\Phi}$ και τα $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ως συντακτικές μεταβλητές που παίρνουν τιμές στο $\mathit{\Pi}$.
Ο παραπάνω ορισμός έχει καλώς λόγω του ακόλουθου λήμματος.

Λήμμα 2.1.3
Τα σύνολα $\mathit{\Phi}$ και $\mathit{\Pi}$ υπάρχουν.
Απόδειξη
Λόγω του ορισμού 2.1.2 αρκεί να αποδειχθεί ότι υπάρχουν σύνολα $\mathit{\Phi}$ και $\mathit{\Pi}$ τ.π. $\forall \varphi, \alpha \in \mathit{\Sigma}(\mathit{\Gamma}_{\Delta 0})^*$ να ισχύει:

$$\begin{array}{rcl} \varphi \in \mathit{\Phi} & \Longleftrightarrow & \varphi \in \{0\} \times (\mathit{\Phi}_0 \cup \{\bot\}) \quad \vee \\ & & \exists \chi, \psi \in \mathit{\Phi}, \alpha \in \mathit{\Pi} : \\ & & (\varphi = < (> \star\chi\star <\to> \star\psi\star <) > \quad \vee \\ & & \varphi = < (, [> \star\alpha\star <] > \star\chi\star <) >) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \alpha \in \Pi \iff & \alpha \in \{0\} \times \Pi_0 \quad \vee \\ & \exists \varphi \in \Phi, \beta, \gamma \in \Pi : \\ & (\alpha =< (> \star\beta\star <;> \star\gamma\star <) > \quad \vee \\ & \alpha =< (> \star\beta\star < \cup > \star\gamma\star <) > \quad \vee \\ & \alpha =< (> \star\beta\star <^*> \star <) > \quad \vee \\ & \alpha =< (> \star\varphi\star <?> \star <) >) \end{aligned}$$

Για την πρώτη ισοδυναμία, έστω $E =_{o\rho.} \mathcal{P}(\Sigma(\Gamma_{\Delta 0})^*)$ και τα στοιχεία του E $\{0\} \times (\Phi_0 \cup \{\perp\})$ και $\{0\} \times \Pi_0$.
Έστω επίσης οι συναρτήσεις $h_1, h_2 : E \times E \to E$, οι οποίες είναι ορισμένες $\forall X, Y \in E$ ως εξής:

$$\begin{aligned} h_1(X,Y) =_{o\rho.} X \cup \{\varphi \in \Sigma(\Gamma_{\Delta 0})^* \mid & \exists \chi, \psi \in X, \alpha \in Y : \\ & \varphi =< (> \star\chi\star <\to> \star\psi\star <) > \quad \vee \\ & \varphi =< (,[> \star\alpha\star <] > \star\chi\star <) >\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(X,Y) =_{o\rho.} Y \cup \{\alpha \in \Sigma(\Gamma_{\Delta 0})^* \mid & \exists \varphi \in X, \beta, \gamma \in Y : \\ & \alpha =< (> \star\beta\star <;> \star\gamma\star <) > \quad \vee \\ & \alpha =< (> \star\beta\star < \cup > \star\gamma\star <) > \quad \vee \\ & \alpha =< (> \star\beta\star <^*> \star <) > \quad \vee \\ & \alpha =< (> \star\varphi\star <?> \star <) >\} \end{aligned}$$

Τότε, από το Θεώρημα Ταυτόχρονης Αναδρομής, υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to E$ τ.π.

$$\begin{aligned} f_1(0) &= \{0\} \times (\Phi_0 \cup \{\perp\}), & f_2(0) &= \{0\} \times \Pi_0, \\ f_1(n+1) &= h_1(f_1(n), f_2(n)) & f_2(n+1) &= h_2(f_1(n), f_2(n)) \end{aligned}$$

Τότε ισχύει από τον ορισμό των h_1, h_2:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_1(n+1) = h_1(f_1(n), f_2(n)) \supseteq f_1(n) \qquad (1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_2(n+1) = h_2(f_1(n), f_2(n)) \supseteq f_2(n) \qquad (2)$$

Έστω τώρα $\Phi =_{o\rho.} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_1(n)$ και $\Pi =_{o\rho.} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_2(n)$.
Για την απόδειξη της πρώτης ιδιότητας, ας θεωρηθεί κάποιο $\varphi \in \Sigma(\Gamma_{\Delta 0})^*$.
$(\Rightarrow)$
Έστω $\varphi \in \Phi$ και $A =_{o\rho.} \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi \in f_1(n)\}$. Επειδή $\varphi \in \Phi$, δηλ. $\varphi \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_1(n)$, θα ισχύει $A \neq \varnothing$. Έστω λοιπόν $m =_{o\rho.} minA$. Τότε, έπεται:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (\varphi \in f_1(n) \Rightarrow m \leq n) \qquad (3)$$

- Αν $m = 0$, τότε $\varphi \in f_1(0)$, δηλ. $\varphi \in \{0\} \times (\Phi_0 \cup \{\perp\})$, άρα ισχύει το ζητούμενο.
- Αν $m > 0$, τότε $\varphi \in f_1(m)$, δηλ. $\varphi \in h_1(f_1(m-1), f_2(m-1))$, άρα εξ'ορισμού της h_1:

$$\begin{aligned} \varphi \in f_1(m-1) \vee \ & \exists \chi, \psi \in f_1(m-1), \alpha \in f_2(m-1) : \\ & \varphi =< (> \star\chi\star <\to> \star\psi\star <) > \quad \vee \\ & \varphi =< (,[> \star\alpha\star <] > \star\chi\star <) > \end{aligned}$$

  Αν ίσχυε $\varphi \in f_1(m-1)$, τότε λόγω (3): $m \leq m-1$. Άτοπο.
  Άρα δεν ισχύει το πρώτο σκέλος της παραπάνω διάζευξης.

Επίσης: $f_1(m-1) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_1(n) = \Phi$ και
$f_2(m-1) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_2(n) = \Pi$. Έτσι έχουμε:

$$\exists \chi, \psi \in \Phi, \alpha \in \Pi :$$
$$\varphi =<(>\star\chi\star<\to>\star\psi\star<)> \quad \vee \quad \varphi =<(,[>\star\alpha\star<]>\star\chi\star<)>$$

δηλ. το ζητούμενο.

$(\Leftarrow)$
Έστω ότι:

$$\varphi \in \{0\} \times (\Phi_0 \cup \{\bot\}) \quad \vee \quad \exists \chi, \psi \in \Phi, \alpha \in \Pi : (\varphi =<(>\star\chi\star<\to>\star\psi\star<)> \quad \vee \quad \varphi =<(,[>\star\alpha\star<]>\star\chi\star<)>)$$

- Αν ισχύει το πρώτο σκέλος της διάζευξης, τότε $\varphi \in f_1(0) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_1(n) = \Phi$ που είναι το ζητούμενο.

- Αν ισχύει το δεύτερο σκέλος της διάζευξης, τότε για τα συγκεκριμένα χ, ψ, α ας οριστούν τα σύνολα
  $A_1 =_{o\rho.} \{n \in \mathbb{N} \mid \chi \in f_1(n)\}$, $A_2 =_{o\rho.} \{n \in \mathbb{N} \mid \psi \in f_1(n)\}$ και $A_3 =_{o\rho.} \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha \in f_2(n)\}$.
  Επειδή $\chi, \psi \in \Phi, \alpha \in \Pi$ θα ισχύει $A_1 \neq \varnothing$, $A_2 \neq \varnothing$ και $A_3 \neq \varnothing$.
  Έστω λοιπόν $p = minA_1$, $q = minA_2$, $r = minA_3$ και $n = max\{p, q, r\}$.
  Τότε, λόγω (1) και (2) (με δύο τετριμμένες επαγωγές) προκύπτει:
  $f_1(p) \subseteq f_1(n)$, $f_1(q) \subseteq f_1(n)$ και $f_2(r) \subseteq f_2(n)$. Άρα:
  $\chi \in f_1(n)$, $\psi \in f_1(n)$ και $\alpha \in f_2(n)$. Κι έτσι, εξ'ορισμού της h_1:
  $\varphi \in h_1(f_1(n), f_2(n))$ δηλ. εξ'ορισμού της f_1:
  $\varphi \in f_1(n+1)) \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_1(i) = \Phi$ που είναι το ζητούμενο.

Η δεύτερη ιδιότητα αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο.

$\square$

Παρατήρηση
Προς διευκόλυνση χρησιμοποιούνται συχνά οι ακόλουθες συντομογραφίες τύπων και προγραμμάτων
Τύποι:
$\neg\varphi =_{o\rho.} \varphi \to \bot$
$\varphi \vee \psi =_{o\rho.} (\neg\varphi) \to \psi$
$\varphi \wedge \psi =_{o\rho.} \neg(\varphi \to (\neg\psi))$
$\varphi \leftrightarrow \psi =_{o\rho.} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$
$\top =_{o\rho.} \neg\bot$
$<\alpha>\psi =_{o\rho.} \neg([\alpha](\neg\psi))$

Προγράμματα:
fail $=_{o\rho.} \bot?$
skip $=_{o\rho.} \top?$
if φ **then** α **else** β $=_{o\rho.} (\varphi?;\alpha) \cup ((\neg\varphi)?;\beta)$
while φ **do** α $=_{o\rho.} (\varphi?;\alpha)^*;(\neg\varphi)?$

2.2 Ερμηνεία της $\Gamma_{\Delta 0}$ (Σημασιολογία)

Ως γνωστόν η ερμηνεία που δίνεται σε μια τροπική γλώσσα στηρίζεται σε μοντέλα Kripke. Κατ'ανάλογο τρόπο ερμηνεύεται και η $\Gamma_{\Delta 0}$ κάνοντας μόνο μικρές τροποποιήσεις στο συμβολισμό και στις ονομασίες των μοντέλων. Έτσι, μια ερμηνεία της $\Gamma_{\Delta 0}$ θα προσδιορίζει καταρχάς ένα σύνολο «*κόσμων*» (ή αλλιώς *καταστάσεων*) W και θα καθορίζει

- για κάθε προτασιακό τύπο, σε ποιους κόσμους ισχύει
- για κάθε πρόγραμμα, ποια είναι η σχέση εισόδου/εξόδου του. Δηλ. ποιοι κόσμοι αποτελούν έξοδο του προγράμματος για συγκεκριμένο κόσμο εισόδου στο πρόγραμμα.

Μια ερμηνεία θα καθορίζει a priori τα παραπάνω για τις προτασιακές μεταβλητές και τα ατομικά προγράμματα. Για τους κατασκευασμένους τύπους και προγράμματα θα ακολουθούνται πάντοτε κάποιοι κανόνες ερμηνείας, έτσι ώστε να έχουν διαισθητικώς αυτοί οι τύποι και τα προγράμματα τις ακόλουθες ερμηνείες:

- $[\alpha]\varphi$ είναι ο τύπος που σημαίνει
  «όποτε τερματίζει το πρόγραμμα α, ισχύει ο τύπος φ»
- $\alpha;\beta$ είναι το πρόγραμμα
  «εκτέλεσε το πρόγραμμα α και μετά το πρόγραμμα β»
- $\alpha \cup \beta$ είναι το πρόγραμμα
  «επίλεξε - αναιτιοκρατικώς - το πρόγραμμα α ή το β και εκτέλεσέ το»
- α^* είναι το πρόγραμμα
  «εκτέλεσε το πρόγραμμα α αναιτιοκρατικώς επιλεγμένο πλήθος φορών (καμία ή περισσότερες)»
- $\varphi?$ είναι το πρόγραμμα
  «έλεγξε αν ισχύει ο τύπος φ. Αν ναι, τερμάτισε. Αν όχι, απόκλινε.»

Τυπικώς λοιπόν, έχουμε

Ορισμός 2.2.1
Ένα *τροπικό πλαίσιο Kripke* $\mathfrak{F} = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi_0\})$ για τη $\Gamma_{\Delta 0}$ αποτελείται από:

- ένα μη κενό σύνολο W, τα στοιχεία του οποίου καλούνται *κόσμοι* (ή *καταστάσεις*).
- μία σχέση $R_\alpha \subseteq W \times W$, για κάθε ατομικό πρόγραμμα $\alpha \in \Pi_0$, η οποία ονομάζεται *σχέση εισόδου/εξόδου* του προγράμματος α.

Ένα *τροπικό μοντέλο Kripke* $\mathfrak{M} = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi_0\}, V)$ για τη $\Gamma_{\Delta 0}$ αποτελείται επιπλέον από τη συνάρτηση

$$V : \Phi_0 \to \mathcal{P}(W)$$

η οποία καθορίζει σε ποιους κόσμους αληθεύει κάθε προτασιακή μεταβλητή.

Δ

Τώρα θα οριστούν τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται στη ΠΔΛ, τα οποία προκύπτουν από επεκτάσεις τροπικών μοντέλων.

Ορισμός 2.2.2
Έστω τροπικό μοντέλο Kripke $\mathfrak{M}' = (W, \{R'_\alpha | \alpha \in \Pi_0\}, V')$ για τη $\Gamma_{\Delta 0}$. Τότε ορίζεται η συνάρτηση $\overline{V} : \Phi \to \mathcal{P}(W)$ και οι σχέσεις $R_\alpha \subseteq W \times W, \forall \alpha \in \Pi$ με ταυτόχρονη αναδρομή ως εξής
(για τους προτασιακούς τύπους)

- $\overline{V}(\bot) =_{o\rho.} \varnothing$
- αν $p \in \Phi_0$, τότε
  $\overline{V}(p) =_{o\rho.} V'(p)$
- αν $\psi, \chi \in \Phi$, τότε
  $$\begin{aligned} \overline{V}(\psi \to \chi) &=_{o\rho.} (W \setminus \overline{V}(\psi)) \cup \overline{V}(\chi) = \\ &= \{u \in W | u \in \overline{V}(\psi) \Rightarrow u \in \overline{V}(\chi)\} \end{aligned}$$
- αν $\alpha \in \Pi$ και $\psi \in \Phi$, τότε
  $$\begin{aligned} \overline{V}([\alpha]\psi) &=_{o\rho.} W \setminus (R_\alpha \circ (W \setminus \overline{V}(\psi))) = \\ &= \{u \in W | \forall v \in W : ((u,v) \in R_\alpha \Rightarrow v \in \overline{V}(\psi))\} \end{aligned}$$

(για τα προγράμματα)

- αν $\alpha \in \Pi_0$, τότε
  $R_\alpha =_{o\rho.} R'_\alpha$
- αν $\beta, \gamma \in \Pi$, τότε
  $$\begin{aligned} R_{\beta;\gamma} &=_{o\rho.} R_\beta \circ R_\gamma = \\ &= \{(u,v) \in W \times W | \exists w \in W : (u,w) \in R_\beta \wedge (w,v) \in R_\gamma\} \end{aligned}$$
- αν $\beta, \gamma \in \Pi$, τότε
  $R_{\beta \cup \gamma} =_{o\rho.} R_\beta \cup R_\gamma$
- αν $\beta \in \Pi$, τότε
  $$\begin{aligned} R_{\beta^*} &=_{o\rho.} \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_\beta^n = \\ &= \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{R_\beta \circ \cdots \circ R_\beta}_{n\ \varphi o \rho \varepsilon \varsigma} = \\ &= \{(u,v) \in W \times W | \quad \begin{aligned}[t] &\exists n \in \mathbb{N}, \exists v_0, \ldots, v_n \in W : \\ &u = v_0 \wedge v = v_n \wedge \\ &\forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i < n \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \in R_\beta)\} \end{aligned} \end{aligned}$$
- αν $\varphi \in \Phi$, τότε
  $R_{\varphi?} =_{o\rho.} \{(u,u) \in W \times W | u \in R_\varphi\}$

(a) Το μοντέλο Kripke $\mathfrak{M} = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi\}, \overline{V})$ για τη γλώσσα $\Gamma_{\Delta 0}$ καλείται *standard μοντέλο Kripke* για τη $\Gamma_{\Delta 0}$.

(b) Αν αντικατασταθεί ο παραπάνω ορισμός της R_{β^*} με το ότι η R_{β^*} είναι δυαδική σχέση από το W στο W τ.π. να ισχύουν όλες οι παρακάτω απαιτήσεις

$$R_\beta \subseteq R_{\beta^*}$$

R_{β^*}: ανακλαστική

R_{β^*}: μεταβατική

$\forall\varphi \in \Phi : \overline{V}([\beta^*]\varphi) = \overline{V}(\varphi \wedge [\beta][\beta^*]\varphi) \qquad (2.2.2 - i)$

$\forall\varphi \in \Phi : \overline{V}([\beta^*]\varphi) = \overline{V}(\varphi \wedge [\beta^*](\varphi \to [\beta]\varphi)) \qquad (2.2.2. - ii)$

τότε το μοντέλο Kripke $\mathfrak{N} = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi\}, \overline{V})$ για τη γλώσσα $\Gamma_{\Delta 0}$ καλείται *nonstandard μοντέλο Kripke* για τη $\Gamma_{\Delta 0}$.

Δ

<u>Παρατηρήσεις</u>:

΄Οποτε αναφερόμαστε απλώς σε μοντέλο Kripke εννοούμε standard μοντέλο Kripke.

Προκειμένου να έχουμε κοινό συμβολισμό για τις ερμηνείες τύπων και προγραμμάτων, χρησιμοποιούμε συνήθως τους ακόλουθους συμβολισμούς:

$\varphi^{\mathfrak{M}} =_{o\rho.} \overline{V}(\varphi) \quad$ όπου $\varphi \in \Phi$

$\alpha^{\mathfrak{M}} =_{o\rho.} R_\alpha \quad$ όπου $\alpha \in \Pi$

Η σχέση εισόδου/εξόδου R_{β^*} στα standard μοντέλα Kripke είναι ουσιαστικώς η ανακλαστική και μεταβατική κλειστότητα της σχέσης εισόδου/εξόδου του β. Δηλ. η $(\beta^*)^{\mathfrak{M}}$ είναι η ελάχιστη διμελής σχέση από το W στο W που είναι ανακλαστική, μεταβατική και περιέχει τη σχέση $\beta^{\mathfrak{M}}$.
Επειδή οι R_{β^*} των standard μοντέλων Kripke ικανοποιούν (όπως θα αποδειχθεί αργότερα) τις σχέσεις 2.2.2-i,-ii, κάθε standard μοντέλο Kripke είναι και non-standard. ΄Ετσι, οι απαιτήσεις για τις σχέσεις R_{β^*} στα nonstandard μοντέλα είναι λιγότερες από ότι στα standard και γενικότερα ισχύει (για nonstandard μοντέλο $\mathfrak{N}$)

$$(\beta^*)^{\mathfrak{N}} \supseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\beta^{\mathfrak{N}})^n$$

Ικανοποιησιμότητα και Εγκυρότητα

Στον ακόλουθο ορισμό, όπου $\mathfrak{M}$ είναι ένα standard μοντέλο Kripke για τη $\Gamma_{\Delta 0}$, όπου u είναι κόσμος του W και φ είναι τύπος της $\Gamma_{\Delta 0}$.

Ορισμός 2.2.3

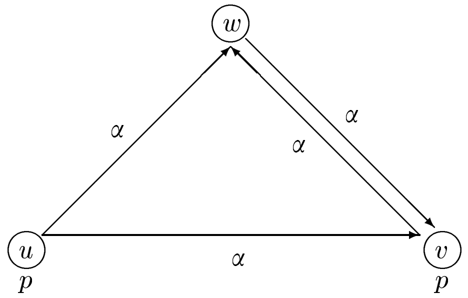
- $\mathfrak{M}, u \vDash \varphi \iff_{o\rho.} u \in \varphi^{\mathfrak{M}}$
  και λέμε ότι ο φ αληθεύει στον u του $\mathfrak{M}$
- λέμε ότι ο φ είναι ικανοποιήσιμος στο $\mathfrak{M} \iff_{o\rho.} (\exists u \in W : \mathfrak{M}, u \vDash \varphi)$
- $\mathfrak{M} \vDash \varphi \iff_{o\rho.} (\forall u \in W : \mathfrak{M}, u \vDash \varphi)$
  και λέμε ότι ο φ είναι έγκυρος στο $\mathfrak{M}$
- λέμε ότι ο φ είναι ικανοποιήσιμος $\iff_{o\rho.} (\exists \mathfrak{M}, \exists u \in W : \mathfrak{M}, u \vDash \varphi)$
- $\vDash \varphi \iff_{o\rho.} (\forall \mathfrak{M} : \mathfrak{M} \vDash \varphi)$
  και λέμε ότι ο φ είναι έγκυρος

Έστω τώρα επιπλέον $\Sigma \subseteq \Phi$.

- $\mathfrak{M} \models \Sigma \iff_{ορ.} (\forall \varphi \in \Sigma : \mathfrak{M} \models \varphi)$
- $\Sigma \models \varphi \iff_{ορ.} (\forall \mathfrak{M} : (\mathfrak{M} \models \Sigma \Longrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi))$
  και λέμε ότι ο φ είναι λογική συνέπεια του Σ

Δ

Παράδειγμα 2.2.4
Έστω το ακόλουθο μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi\}, \overline{V})$ με
$W = \{u, v, w\}$, $R_\alpha = \{(u,v), (u,w), (v,w), (w,v)\}$, $R_\beta = \varnothing, \forall \beta \in \Pi_0 \setminus \{\alpha\}$ και
$V = \{(p, \{u,v\})\} \cup \{(q, \varnothing) | q \in \Phi_0 \setminus \{p\}\}$ ή απλούστερα σε σχήμα



Στο μοντέλο αυτό ισχύει

$$\mathfrak{M}, u \models <\alpha> p \wedge <\alpha> \neg p \qquad \mathfrak{M}, w \models [\alpha]p \qquad \mathfrak{M}, v \models [\alpha]\neg p$$

Επίσης, μπορεί να αποδειχθεί ότι ο παρακάτω τύπος είναι έγκυρος στο $\mathfrak{M}$, δηλ. ότι ισχύει

$$\mathfrak{M} \models <\alpha^*> [(\alpha;\alpha)^*]p \wedge <\alpha^*> [(\alpha;\alpha)^*]\neg p$$

Λήμμα 2.2.5

(i) $\models [\alpha \cup \beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha]\varphi \wedge [\beta]\varphi$

(ii) $\models [\alpha;\beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha][\beta]\varphi$

(iii) $\models [\alpha^*]\varphi \leftrightarrow \varphi \wedge [\alpha][\alpha^*]\varphi$

(iv) $\models [\varphi?]\psi \leftrightarrow (\varphi \to \psi)$

Απόδειξη
Έστω τυχαίο μοντέλο Kripke $\mathfrak{M} = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi\}, \overline{V})$ και κόσμος του $u \in W$. Σε καθεμιά από τις περιπτώσεις (i)-(iv) πρέπει να αποδειχθεί ότι ο αντίστοιχος τύπος αληθεύει στον κόσμο u του $\mathfrak{M}$.

(i)

$$\mathfrak{M}, u \models [\alpha \cup \beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha]\varphi \wedge [\beta]\varphi \iff$$

$$u \in ([\alpha \cup \beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha]\varphi \wedge [\beta]\varphi)^{\mathfrak{M}} \iff$$
$$(u \in ([\alpha \cup \beta]\varphi)^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow u \in ([\alpha]\varphi \wedge [\beta]\varphi)^{\mathfrak{M}}) \iff$$
$$\begin{array}{l}(\forall v \in W : ((u,v) \in (\alpha \cup \beta)^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}})) \Leftrightarrow \\ (\forall v \in W : ((u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}})) \wedge (\forall v \in W : ((u,v) \in \beta^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}}))\end{array} \iff$$
$$\begin{array}{l}(\forall v \in W : ((u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \vee (u,v) \in \beta^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}})) \Leftrightarrow \\ (\forall v \in W : ((u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}})) \wedge (\forall v \in W : ((u,v) \in \beta^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}}))\end{array}$$

πράγμα που ισχύει.

(ii)

$$\mathfrak{M}, u \models [\alpha;\beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha][\beta]\varphi \iff$$
$$u \in ([\alpha;\beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha][\beta]\varphi)^{\mathfrak{M}} \iff$$
$$(u \in ([\alpha;\beta]\varphi)^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow u \in ([\alpha][\beta]\varphi)^{\mathfrak{M}}) \iff$$
$$\begin{array}{l}(\forall v \in W : ((u,v) \in (\alpha;\beta)^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}})) \Leftrightarrow \\ (\forall w \in W : ((u,w) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow w \in ([\beta]\varphi)^{\mathfrak{M}}))\end{array} \iff$$
$$\begin{array}{l}(\forall v \in W : ((\exists w \in W : (u,w) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \wedge (w,v) \in \beta^{\mathfrak{M}}) \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}})) \Leftrightarrow \\ (\forall w \in W : ((u,w) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow \forall v \in W : ((w,v) \in \beta^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}}))\end{array} \iff$$

(με μετακίνηση ποσοδεικτών και νόμο εξαγωγής στο 1. σκέλος της ισοδυναμίας)

$$\begin{array}{l}(\forall v \in W \forall w \in W : ((u,w) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow ((w,v) \in \beta^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}})) \Leftrightarrow \\ (\forall w \in W : ((u,w) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow \forall v \in W : ((w,v) \in \beta^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}}))\end{array} \iff$$

(με μετακίνηση ποσοδεικτών στο 2. σκέλος της ισοδυναμίας)

$$\begin{array}{l}(\forall v \in W \forall w \in W : ((u,w) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow ((w,v) \in \beta^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}})) \Leftrightarrow \\ (\forall v \in W \forall w \in W : ((u,w) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow ((w,v) \in \beta^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}}))\end{array}$$

πράγμα που είναι προφανώς αληθές.

(iii)
Έχουμε καταρχάς την ακόλουθη ισοδυναμία

$$u \in ([\alpha^*]\varphi)^{\mathfrak{M}} \iff$$
$$\forall v \in W : ((u,v) \in (\alpha^*)^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}}) \iff$$
$$\forall v \in W : (\exists n \in \mathbb{N}, \exists v_0, \dots, v_n \in W : u = v_0 \wedge v = v_n \wedge$$
$$\forall i \in \mathbb{N} : (0 \le i < n \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \in \alpha^{\mathfrak{M}}) \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}}) \iff$$
$$u \in \varphi^{\mathfrak{M}} \wedge \forall v \in W : (\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \exists v_0, \dots, v_n \in W : u = v_0 \wedge v = v_n \wedge$$
$$\forall i \in \mathbb{N} : (0 \le i < n \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \in \alpha^{\mathfrak{M}}) \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}}) \overset{\star}{\iff}$$
$$u \in \varphi^{\mathfrak{M}} \wedge \forall v \in W : ((u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in ([\alpha^*]\varphi)^{\mathfrak{M}}) \iff$$
$$u \in (\varphi \wedge [\alpha][\alpha^*]\varphi)^{\mathfrak{M}})$$

(Το σημείο κλειδί για την απόδειξη της ισοδυναμίας $\star$ είναι το γεγονός ότι $v \in ([\alpha^*]\varphi)^{\mathfrak{M}}$ σημαίνει ότι ο φ ισχύει σε όλους του κόσμους μιας αλυσίδας $v = v_0 \overset{\alpha}{\to} v_1 \overset{\alpha}{\to} \dots \overset{\alpha}{\to} v_n$ πράγμα που μπορεί να αποδειχθεί εύκολα με μια

επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$)
Άρα αποδείχθηκε ότι

$$(u \in ([\alpha^*]\varphi)^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow u \in (\varphi \wedge [\alpha][\alpha^*]\varphi)^{\mathfrak{M}}) \iff$$
$$u \in ([\alpha^*]\varphi \leftrightarrow \varphi \wedge [\alpha][\alpha^*]\varphi)^{\mathfrak{M}} \iff$$
$$\mathfrak{M}, u \vDash [\alpha^*]\varphi \leftrightarrow \varphi \wedge [\alpha][\alpha^*]\varphi$$

(iv)

$$\mathfrak{M}, u \vDash [\varphi?]\psi \leftrightarrow (\varphi \to \psi) \iff$$
$$u \in ([\varphi?]\psi \leftrightarrow (\varphi \to \psi))^{\mathfrak{M}} \iff$$
$$(u \in ([\varphi?]\psi)^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow u \in (\varphi \to \psi)^{\mathfrak{M}}) \iff$$
$$(\forall v \in W : ((u,v) \in (\varphi?)^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \psi^{\mathfrak{M}}) \Leftrightarrow (u \in \varphi^{\mathfrak{M}} \Rightarrow u \in \psi^{\mathfrak{M}})) \iff$$
$$(\forall v \in W : (u = v \in \varphi^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \psi^{\mathfrak{M}}) \Leftrightarrow (u \in \varphi^{\mathfrak{M}} \Rightarrow u \in \psi^{\mathfrak{M}}))$$

πράγμα που προφανώς ισχύει.

□

Συμπάγεια

Αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι το σύνολο τύπων

$$\{ <\alpha^*> \varphi, \neg\varphi, \neg <\alpha> \varphi, \neg <\alpha;\alpha> \varphi, \neg <\alpha;\alpha;\alpha> \varphi, \ldots \}$$

είναι πεπερασμένως ικανοποιήσιμο αλλά μη ικανοποιήσιμο.
Άρα η συμπάγεια δεν ισχύει στη ΠΔΛ.

Ακολουθίες υπολογισμού

Έστω κάποιο πρόγραμμα α. Μια *ακολουθία υπολογισμού* του α θα είναι μια πεπερασμένη ακολουθία ατομικών προγραμμάτων και tests που αντιστοιχούν στα βήματα κατά τη διάρκεια μιας εκτέλεσης του α που τερματίζει.
Για παράδειγμα, μια ακολουθία υπολογισμού του προγράμματος

$$\textbf{while } \varphi \textbf{ do } \beta = (\varphi?;\beta)^*;(\neg\varphi)?$$

(όπου β είναι κάποιο ατομικό πρόγραμμα) μπορεί να είναι η

$$\varphi?;\beta;\varphi?;\beta;\varphi?;\beta;(\neg\varphi)?$$

Έχουμε λοιπόν, τυπικώς, τον παρακάτω ορισμό για το σύνολο όλων των δυνατών ακολουθιών υπολογισμού ενός προγράμματος[1].

Ορισμός 2.2.6
Έστω πρόγραμμα α. Το σύνολο $CS(\alpha)$ των *ακολουθιών υπολογισμού* του ορίζεται αναδρομικώς ως εξής:

- αν $\alpha \in \Pi_0$ ή $\alpha = \varphi?$, τότε $CS(\alpha) = \{\alpha\}$

[1] Επειδή το σύνολο αυτό καθορίζεται αποκλειστικώς από τη σύνταξη του προγράμματος, μπορεί να περιέχει ακολουθίες που δεν εκτελούνται ποτέ, όποια κι αν είναι η ερμηνεία!

- αν $\alpha = \beta;\gamma$, τότε $CS(\alpha) = \{\sigma;\tau | \sigma \in CS(\beta), \tau \in CS(\gamma)\}$
- αν $\alpha = \beta \cup \gamma$, τότε $CS(\alpha) = CS(\beta) \cup CS(\gamma)$
- αν $\alpha = \beta^*$, τότε $CS(\alpha) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} CS(\beta^n) = \{\mathbf{skip}\} \cup \bigcup_{n>0} CS(\underbrace{\beta;\ldots;\beta}_{n \text{ φορές}})$

Δ

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι κάθε ακολουθία υπολογισμού ενός προγράμματος α είναι πρόγραμμα και μάλιστα ισχύει

$$CS(\sigma) = \{\sigma\}, \forall \sigma \in CS(\alpha)$$

Επίσης ισχύει η ακόλουθη

Πρόταση 2.2.7
Έστω μοντέλο Kripke $\mathfrak{M}$ και πρόγραμμα α. Τότε ισχύει

$$\alpha^{\mathfrak{M}} = \bigcup_{\sigma \in CS(\alpha)} \sigma^{\mathfrak{M}}$$

Απόδειξη
Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του α.
<u>Επ.Βάση:</u>
Αν $\alpha \in \Pi_0$ ή $\alpha = \varphi?$, τότε

$$\bigcup_{\sigma \in CS(\alpha)} \sigma^{\mathfrak{M}} = \bigcup_{\sigma \in \{\alpha\}} \sigma^{\mathfrak{M}} = \alpha^{\mathfrak{M}}$$

<u>Επ.Υπόθεση:</u>
Ισχύει το ζητούμενο για $\beta, \gamma \in \Pi$.
<u>Επ.Βήμα:</u>

- Αν $\alpha = \beta;\gamma$, τότε

$$\alpha^{\mathfrak{M}} = \beta^{\mathfrak{M}} \circ \gamma^{\mathfrak{M}} \overset{(E\pi.Y\pi.)}{=} \bigcup_{\sigma \in CS(\beta)} \sigma^{\mathfrak{M}} \circ \bigcup_{\sigma \in CS(\gamma)} \sigma^{\mathfrak{M}} =$$

$$\{(u,v) \in W \times W | \exists w \in W : (u,w) \in \bigcup_{\sigma \in CS(\beta)} \sigma^{\mathfrak{M}} \wedge (w,v) \in \bigcup_{\sigma \in CS(\gamma)} \sigma^{\mathfrak{M}}\} =_{o\rho.} A$$

Επίσης ισχύει

$$\bigcup_{\rho \in CS(\alpha)} \rho^{\mathfrak{M}} = \bigcup_{\rho \in \{\sigma;\tau | \sigma \in CS(\beta), \tau \in CS(\gamma)\}} \rho^{\mathfrak{M}} =_{o\rho.} B$$

Έτσι, αρκεί να αποδειχθεί ότι $A = B$. Αυτό προκύπτει από την ακόλουθη ισοδυναμία

$$(u,v) \in A \iff \exists w \in W : (u,w) \in \bigcup_{\sigma \in CS(\beta)} \sigma^{\mathfrak{M}} \wedge (w,v) \in \bigcup_{\sigma \in CS(\gamma)} \sigma^{\mathfrak{M}} \iff$$

$$\exists \sigma \in CS(\beta), \exists \tau \in CS(\gamma), \exists w \in W : (u,w) \in \sigma^{\mathfrak{M}} \wedge (w,v) \in \tau^{\mathfrak{M}} \iff$$
$$\exists \sigma \in CS(\beta), \exists \tau \in CS(\gamma) : (u,v) \in (\sigma;\tau)^{\mathfrak{M}} \iff (u,v) \in B$$

- Αν $\alpha = \beta \cup \gamma$, τότε

$$\alpha^{\mathfrak{M}} = \beta^{\mathfrak{M}} \cup \gamma^{\mathfrak{M}} \overset{(E\pi.Y\pi.)}{=} \bigcup_{\sigma \in CS(\beta)} \sigma^{\mathfrak{M}} \cup \bigcup_{\sigma \in CS(\gamma)} \sigma^{\mathfrak{M}} = \bigcup_{\sigma \in CS(\beta) \cup CS(\gamma)} \sigma^{\mathfrak{M}} = \bigcup_{\sigma \in CS(\alpha)} \sigma^{\mathfrak{M}}$$

- Αν $\alpha = \beta^*$, τότε

$$\alpha^{\mathfrak{M}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\beta^{\mathfrak{M}} \circ \cdots \circ \beta^{\mathfrak{M}}}_{n \ \varphi o \rho \varepsilon \varsigma} \overset{(E\pi.Y\pi.)}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{\sigma \in CS(\beta)} \sigma^{\mathfrak{M}} \circ \cdots \circ \bigcup_{\sigma \in CS(\beta)} \sigma^{\mathfrak{M}}}_{n \ \varphi o \rho \varepsilon \varsigma} =$$

$$\{(u,v) \in W \times W | \exists n \in \mathbb{N}, \exists v_0, \ldots, v_n \in W : u = v_0 \wedge v = v_n \wedge$$
$$\forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i < n \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \in \bigcup_{\sigma \in CS(\beta)} \sigma^{\mathfrak{M}})\} =_{o\rho.} C$$

Επίσης ισχύει

$$\bigcup_{\rho \in CS(\alpha)} \rho^{\mathfrak{M}} = \bigcup_{\rho \in \{\mathbf{skip}\} \cup \bigcup_{n>0} CS(\underbrace{\beta; \ldots; \beta}_{n \ \varphi o \rho \varepsilon \varsigma})} \rho^{\mathfrak{M}} =_{o\rho.} D$$

Έτσι, αρκεί να αποδειχθεί ότι $C = D$. Αυτό προκύπτει από την ακόλουθη ισοδυναμία

$$(u,v) \in C \iff \exists n \in \mathbb{N}, \exists v_0, \ldots, v_n \in W : u = v_0 \wedge v = v_n \wedge$$
$$\forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i < n \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \in \bigcup_{\sigma \in CS(\beta)} \sigma^{\mathfrak{M}})\} \iff$$
$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in CS(\beta), \exists v_0, \ldots, v_n \in W : u = v_0 \wedge v = v_n \wedge$$
$$\forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i < n \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \in \sigma_{i+1}^{\mathfrak{M}})\} \iff$$
$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in CS(\beta) : (u,v) \in (\sigma_1; \ldots; \sigma_n)^{\mathfrak{M}} \iff$$
$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists \sigma_1; \ldots; \sigma_n \in CS(\underbrace{\beta; \ldots; \beta}_{n \ \varphi o \rho \varepsilon \varsigma}) : (u,v) \in (\sigma_1; \ldots; \sigma_n)^{\mathfrak{M}} \iff (u,v) \in D$$

□

Ισοδυναμία προγραμμάτων

Για να καθοριστεί πότε δύο προγράμματα θα θεωρούνται *ισοδύναμα*, με την έννοια ότι συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο σχετικά με οποιαδήποτε ιδιότητα εκφράσιμη στην ΠΔΛ, δίνεται ο ακόλουθος

Ορισμός 2.2.8
Δύο προγράμματα α και β ονομάζονται *ισοδύναμα* ανν για κάθε μοντέλο Kripke $\mathfrak{M}$ ισχύει $\alpha^{\mathfrak{M}} = \beta^{\mathfrak{M}}$, έχουν δηλ. σε κάθε μοντέλο την ίδια σχέση εισόδου/εξόδου.

Δ

Παράδειγμα 2.2.9
Έστω ατομικά προγράμματα α, β καθώς και τα ακόλουθα

γ= **while** φ **do**
(α;
while ψ **do** β)
δ= **if** φ **then**
(α;
while φ∨ψ **do**
if ψ **then** β **else** α)

Τότε τα γ και δ είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη
Με εφαρμογή των ορισμών προκύπτει

$$\gamma = (\varphi?;\alpha;(\psi?;\beta)^*;(\neg\psi)?)^*;(\neg\varphi)?$$

$$\delta = (\varphi?;\alpha;((\varphi\vee\psi)?;((\psi?;\beta)\cup((\neg\psi)?;\alpha)))^*;(\neg(\varphi\vee\psi))?)\cup(\neg\varphi)?$$

Αρκεί τώρα για τυχαίο μοντέλο Kripke $\mathfrak{M}$ να αποδειχθεί ότι $\gamma^{\mathfrak{M}} = \delta^{\mathfrak{M}}$ ή αλλιώς - χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Πρόταση - ότι

$$\bigcup_{\sigma\in CS(\gamma)} \sigma^{\mathfrak{M}} = \bigcup_{\tau\in CS(\delta)} \tau^{\mathfrak{M}} \quad (1)$$

Ισχύει λοιπόν

$$CS(\gamma) = \{\sigma;(\neg\varphi)?|\sigma\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} CS((\varphi?;\alpha;(\psi?;\beta)^*;(\neg\varphi)?)^n)\} =$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\varphi?;\alpha;\sigma_1;(\neg\psi)?;\ldots;\varphi?;\alpha;\sigma_n;(\neg\psi)?;(\neg\varphi)?|\sigma_1,\ldots,\sigma_n\in CS((\psi?;\beta)^*)\} =$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\varphi?;\alpha;\sigma_1;(\neg\psi)?;\ldots;\varphi?;\alpha;\sigma_n;(\neg\psi)?;(\neg\varphi)?|\sigma_1,\ldots,\sigma_n\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\underbrace{\psi?;\beta;\ldots;\psi?;\beta}_{n\ \varphi o\rho\varepsilon\varsigma}\}\}$$

Επίσης έχουμε

$$CS(\delta) = \{\varphi?;\alpha;\sigma;(\neg(\varphi\vee\psi))?|\sigma\in CS(((\varphi\vee\psi)?;((\psi?;\beta)\cup((\neg\psi)?;\alpha)))^*)\}\cup\{(\neg\varphi)?\} =$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\varphi?;\alpha;((\varphi\vee\psi)?;\psi?;\beta)^{i_1};((\varphi\vee\psi)?;(\neg\psi)?;\alpha)^{j_1};\ldots;$$

$$((\varphi\vee\psi)?;\psi?;\beta)^{i_n};((\varphi\vee\psi)?;(\neg\psi)?;\alpha)^{j_n};(\neg(\varphi\vee\psi))?|i_1,j_1,\ldots,j_{n-1},i_n>0,j_n\geq 0\}\cup\{(\neg\varphi)?\}$$

Τώρα θα αντιστοιχιστεί κάθε ακολουθία υπολογισμού του $CS(\gamma)$ σε μια ακολουθία του $CS(\delta)$ έτσι ώστε να έχουν την ίδια ερμηνεία στο $\mathfrak{M}$. Αυτό θα γίνει μέσω της συνάρτησης $f: CS(\gamma)\to CS(\delta)$ με

$$f\Big(\varphi?;\alpha;\sigma_1;(\neg\psi)?;\ldots;\varphi?;\alpha;\sigma_n;(\neg\psi)?;(\neg\varphi)?\Big) =$$

$$\varphi?;\alpha;((\varphi\vee\psi)?;\psi?;\beta)^{m_1};((\varphi\vee\psi)?;(\neg\psi)?;\alpha)^1;\ldots;$$

$$((\varphi\vee\psi)?;\psi?;\beta)^{m_n};((\varphi\vee\psi)?;(\neg\psi)?;\alpha)^0;(\neg(\varphi\vee\psi))?$$

(αν θεωρήσουμε ότι $\sigma_i = \underbrace{\psi?;\beta;\ldots;\psi?;\beta}_{m_i \ \varphi o\rho \varepsilon \varsigma}$)
Επειδή προφανώς ισχύουν

$$((\varphi\vee\psi)?;\psi?)^{\mathfrak{M}} = (\psi?)^{\mathfrak{M}} \qquad ((\varphi\vee\psi)?;(\neg\psi)?)^{\mathfrak{M}} = (\varphi?)^{\mathfrak{M}}$$

$$((\neg(\varphi\vee\psi))?)^{\mathfrak{M}} = ((\neg\psi)?;(\neg\varphi)?)^{\mathfrak{M}} \qquad (2)$$

έχουμε

$$f(\sigma)^{\mathfrak{M}} = \sigma^{\mathfrak{M}}, \forall \sigma \in CS(\gamma)$$

άρα

$$\bigcup_{\sigma\in CS(\gamma)} \sigma^{\mathfrak{M}} = \bigcup_{\sigma\in CS(\gamma)} f(\sigma)^{\mathfrak{M}} \subseteq \bigcup_{\tau\in CS(\delta)} \tau^{\mathfrak{M}}$$

Έστω τώρα η συνάρτηση $g : CS(\delta) \to CS(\gamma)$ με

$$g\Big(\varphi?;\alpha;((\varphi\vee\psi)?;\psi?;\beta)^{i_1};((\varphi\vee\psi)?;(\neg\psi)?;\alpha)^{j_1};\ldots;$$

$$((\varphi\vee\psi)?;\psi?;\beta)^{i_n};((\varphi\vee\psi)?;(\neg\psi)?;\alpha)^{j_n};(\neg(\varphi\vee\psi))?\Big) =$$

$$\varphi?;\alpha;\sigma_1;(\neg\psi)?;\varphi?;\alpha;\tau_1^1;(\neg\psi)?;\ldots;\varphi?;\alpha;\tau_{j_1-1}^1;(\neg\psi)?;$$

$$\varphi?;\alpha;\sigma_2;(\neg\psi)?;\varphi?;\alpha;\tau_1^2;(\neg\psi)?;\ldots;\varphi?;\alpha;\tau_{j_2-1}^2;(\neg\psi)?;$$

$$\ldots$$

$$\varphi?;\alpha;\sigma_n;(\neg\psi)?;\varphi?;\alpha;\tau_1^n;(\neg\psi)?;\ldots;\varphi?;\alpha;\tau_{j_n}^n;(\neg\psi)?;(\neg\varphi)?$$

(όπου $\sigma_k = \underbrace{\psi?;\beta;\ldots;\psi?;\beta}_{i_k \ \varphi o\rho \varepsilon \varsigma}$ και $\tau_1^k = \cdots = \tau_{j_k-1}^k = \tau_{j_n}^n = \mathbf{skip}$)
Λαμβάνοντας και πάλι υπόψη τις (2) καθώς και ότι
$(\alpha;\mathbf{skip};\beta)^{\mathfrak{M}} = (\alpha;\beta)^{\mathfrak{M}}, \forall\alpha,\beta\in\Pi$ προκύπτει με λίγη προσοχή

$$g(\sigma)^{\mathfrak{M}} = \sigma^{\mathfrak{M}}, \forall \sigma \in CS(\delta)$$

Έτσι, έχουμε όπως προηγουμένως

$$\bigcup_{\sigma\in CS(\delta)} \sigma^{\mathfrak{M}} \subseteq \bigcup_{\tau\in CS(\gamma)} \tau^{\mathfrak{M}}$$

Άρα ισχύει η (1).

□

Για την απόδειξη της ισοδυναμίας δύο προγραμμάτων μπορεί να εφαρμοστεί απ' ευθείας ο ορισμός - όπως έγινε στο προηγούμενο παράδειγμα - ή να χρησιμοποιηθεί η ακόλουθη πρόταση (κυρίως όταν θέλουμε να δώσουμε τυπική απόδειξη και να μη δουλέψουμε σημασιολογικά)

Πρόταση 2.2.10
Έστω $\alpha,\beta\in\Pi$ και $p\in\Phi_0$ που δεν εμφανίζεται στα α και β. Τότε

$$\alpha,\beta: \text{ ισοδύναμα} \iff \models <\alpha> p \leftrightarrow <\beta> p$$

Απόδειξη
(⇒)
Έστω ότι τα α και β είναι ισοδύναμα. Έστω επίσης τυχαίο μοντέλο Kripke $\mathfrak{M} = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi\}, \overline{V})$ και κόσμος του $u \in W$. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\mathfrak{M}, u \vDash <\alpha> p \leftrightarrow <\beta> p \iff u \in (<\alpha> p \leftrightarrow <\beta> p)^{\mathfrak{M}} \iff$$

$$(u \in (<\alpha> p)^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow u \in (<\beta> p)^{\mathfrak{M}}) \iff$$

$$(u \in (\neg[\alpha]\neg p)^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow u \in (\neg[\beta]\neg p)^{\mathfrak{M}}) \iff$$

$$(u \notin ([\alpha]\neg p)^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow u \notin (\neg[\beta]\neg p)^{\mathfrak{M}}) \iff$$

$$(u \in ([\alpha]\neg p)^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow u \in (\neg[\beta]\neg p)^{\mathfrak{M}}) \iff$$

$$(\forall v \in W : ((u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in (\neg p)^{\mathfrak{M}})) \Leftrightarrow (\forall v \in W : ((u,v) \in \beta^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in (\neg p)^{\mathfrak{M}}))$$

πράγμα που είναι προφανώς αληθές, αφού $\alpha^{\mathfrak{M}} = \beta^{\mathfrak{M}}$.
(⇐)
Έστω ότι $\vDash <\alpha> p \leftrightarrow <\beta> p$. Έστω επίσης τυχαίο μοντέλο Kripke $\mathfrak{M} = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi\}, \overline{V})$ και $u \in W$. Ας οριστεί τώρα μοντέλο $\mathfrak{M}_u = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi\}, \overline{V_u})$ που διαφέρει από το $\mathfrak{M}$ μόνο στην αποτίμηση V_u και μάλιστα $V_u(q) = V(q), \forall q \in \Phi_0 \setminus \{p\}$ και $V_u(p) = W \setminus \{v \in W | (u,v) \in R_\alpha\}$. Τότε ισχύει
$\mathfrak{M}_u, u \vDash <\alpha> p \leftrightarrow <\beta> p$ ή αλλιώς (όπως φάνηκε προηγουμένως)

$$(\forall v \in W : ((u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}_u} \Rightarrow v \in (\neg p)^{\mathfrak{M}_u})) \Leftrightarrow (\forall v \in W : ((u,v) \in \beta^{\mathfrak{M}_u} \Rightarrow v \in (\neg p)^{\mathfrak{M}_u}))$$

Όμως, εξ'ορισμού της $V_u(p)$, ισχύει το αριστερό σκέλος αυτής της ισοδυναμίας, άρα $\forall v \in W : (u,v) \in \beta^{\mathfrak{M}_u} \Rightarrow v \in (\neg p)^{\mathfrak{M}_u}$
Όμως $\{(u,v) \in W \times W | v \in (\neg p)^{\mathfrak{M}_u}\} \subseteq \alpha^{\mathfrak{M}_u}$
Έτσι φάνηκε ότι $\forall v \in W : (u,v) \in \beta^{\mathfrak{M}_u} \Rightarrow (u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}_u}$ (1)
Επίσης, επειδή τα μοντέλα $\mathfrak{M}$ και $\mathfrak{M}_u$ έχουν τις ίδιες σχέσεις εισόδου/εξόδου για τα προγράμματα του Π_0 και επειδή το πρόγραμμα α δεν περιέχει την προτασιακή μεταβλητή p, αποδεικνύεται με μια τετριμμένη επαγωγή ότι $\alpha^{\mathfrak{M}_u} = \alpha^{\mathfrak{M}}$
Το ίδιο ισχύει και για το β. Άρα η (1) δίνει $\forall v \in W : (u,v) \in \beta^{\mathfrak{M}} \Rightarrow (u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}}$
Αφού δε, ό,τι αποδείχθηκε ισχύει για τυχαίο $u \in W$, προκύπτει τελικώς

$$\beta^{\mathfrak{M}} \subseteq \alpha^{\mathfrak{M}}$$

Με όμοιο τρόπο (ορίζοντας απλώς το μοντέλο $\mathfrak{M}'_u = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi\}, \overline{V'_u})$ με $V'_u(q) = V(q), \forall q \in \Phi_0 \setminus \{p\}$ και $V'_u(p) = W \setminus \{v \in W | (u,v) \in R_\beta\})$ αποδεικνύεται και ότι $\alpha^{\mathfrak{M}} \subseteq \beta^{\mathfrak{M}}$ κι έτσι προκύπτει το ζητούμενο.

□

2.3 Ιδιότητα μικρού μοντέλου-Αποκρισιμότητα

Στην ενότητα αυτή θα αποδειχθεί η ιδιότητα της ΠΔΛ που είναι γνωστή ως *ιδιότητα μικρού μοντέλου* χρησιμοποιώντας στην απόδειξη μια μέθοδο που είναι γνωστή ως *φιλτράρισμα*. Από τη μια, η ιδιότητα μικρού μοντέλου θα οδηγήσει αμέσως στην αποκρισιμότητα της ΠΔΛ κι από την άλλη, η μέθοδος του φιλτραρίσματος θα χρησιμοποιηθεί στην επόμενη ενότητα στην απόδειξη της πληρότητας ενός αποδεικτικού συστήματος της ΠΔΛ.

Για να προχωρήσουμε όμως στην ιδιότητα μικρού μοντέλου, χρειαζόμαστε την ακόλουθη έννοια.

Κλειστότητα Fischer–Ladner

Θα οριστούν με ταυτόχρονη αναδρομή οι συναρτήσεις $FL : \Phi \to \mathcal{P}(\Phi)$ και $FL^{\Box} : \{[\alpha]\varphi \in \Phi | \alpha \in \Pi, \varphi \in \Phi\} \to \mathcal{P}(\Phi)$ ως εξής:

Ορισμός 2.3.1
α)

- Αν $\varphi \in \Phi_0 \cup \{\bot\}$, τότε $FL(\varphi) = \{\varphi\}$
- Αν $\varphi = \chi \to \psi$, τότε $FL(\varphi) = \{\varphi\} \cup FL(\chi) \cup FL(\psi)$
  Αν $\varphi = [\alpha]\psi$, τότε $FL(\varphi) = FL^{\Box}(\varphi) \cup FL(\psi)$

β)

- Αν $\alpha \in \Pi_0$, τότε $FL^{\Box}([\alpha]\varphi) = \{[\alpha]\varphi\}$
- Αν $\alpha = \beta \cup \gamma$, τότε $FL^{\Box}([\alpha]\varphi) = \{[\alpha]\varphi\} \cup FL^{\Box}([\beta]\varphi) \cup FL^{\Box}([\gamma]\varphi)$
  Αν $\alpha = \beta; \gamma$, τότε $FL^{\Box}([\alpha]\varphi) = \{[\alpha]\varphi\} \cup FL^{\Box}([\beta][\gamma]\varphi) \cup FL^{\Box}([\gamma]\varphi)$
  Αν $\alpha = \beta^*$, τότε $FL^{\Box}([\alpha]\varphi) = \{[\alpha]\varphi\} \cup FL^{\Box}([\beta][\alpha]\varphi)$
  Αν $\alpha = \psi?$, τότε $FL^{\Box}([\alpha]\varphi) = \{[\alpha]\varphi\} \cup FL(\psi)$

Δ

Η ύπαρξη των συναρτήσεων $FL, FL^{\Box}$ μπορεί να αποδειχθεί με όμοιο τρόπο όπως το Λήμμα 2.1.3.
Με την πρώτη ματιά φαίνεται ότι το σύνολο $FL(\varphi)$ περιέχει όλους τους υποτύπους του φ, πράγμα που ισχύει εν μέρει. Διαισθητικώς μπορούμε να πούμε ότι αν ο φ έχει ως υποτύπο κάποιον $[\alpha]\psi$, τότε το σύνολο $FL(\varphi)$ θα περιέχει υποτύπους που προκύπτουν «κόβοντας» το πρόγραμμα α στα συστατικά του μέρη και αγνοώντας τον τύπο ψ.

Παράδειγμα

$$FL([(p?)^*; q]\neg r) = FL^{\Box}([(p?)^*; q]\neg r) \cup FL(\neg r) =$$

$$\{[(p?)^*; q]\neg r\} \cup FL^{\Box}([(p?)^*][q]\neg r) \cup FL^{\Box}([q]\neg r) \cup \{\neg r, r, \bot\} =$$

$$\{[(p?)^*; q]\neg r, [(p?)^*][q]\neg r\} \cup FL^{\Box}([p?][(p?)^*][q]\neg r) \cup \{[q]\neg r, \neg r, r, \bot\} =$$

$$\{[p?][(p?)^*][q]\neg r, [(p?)^*; q]\neg r, [(p?)^*][q]\neg r, p, [q]\neg r, \neg r, r, \bot\}$$

Το επόμενα τρία λήμματα είναι απαραίτητα για την απόδειξη της ιδιότητας μικρού μοντέλου.

Λήμμα 2.3.2
$\forall \varphi \in \Phi, \forall \alpha \in \Pi :$

(i) $\forall \sigma \in \Phi : (\sigma \in FL(\varphi) \Rightarrow FL(\sigma) \subseteq FL(\varphi))$

(ii) $\forall \psi, \sigma \in \Phi : (\sigma \in FL^{\Box}([\alpha]\psi) \Rightarrow FL(\sigma) \subseteq FL^{\Box}([\alpha]\psi) \cup FL(\psi))$

Απόδειξη
Θα αποδειχθούν οι (i) και (ii) ταυτοχρόνως με επαγωγή στην πολυπλοκότητα των $\varphi \in \Phi$ και $\alpha \in \Pi$.
Επ.Βάση:
Αν $\varphi \in \Phi_0 \cup \{\bot\}$ και $\alpha \in \Pi_0$, τότε
Έστω $\sigma \in FL(\varphi) = \{\varphi\}$. Τότε $\sigma = \varphi$, δηλ. $FL(\sigma) = FL(\varphi)$, άρα ισχύει η (i).
Έστω $\sigma \in FL^{\Box}([\alpha]\varphi) = \{[\alpha]\varphi\}$. Τότε $\sigma = [\alpha]\varphi$, δηλ. $FL(\sigma) = FL([\alpha]\varphi) = FL^{\Box}([\alpha]\varphi) \cup FL(\varphi)$ κι έτσι ισχύει η (ii).
Επ.Υπόθεση:
Για κάποιο $\varphi \in \Phi$ και για κάποιο $\alpha \in \Pi$, έστω ότι ισχύει η (i) για όλους τους υποτύπους τους και η (ii) για όλα τα υποπρογράμματά τους.
Επ.Βήμα:
(i)

- Αν $\varphi = \psi \to \chi$, τότε για $\sigma \in FL(\varphi) = FL(\psi \to \chi) = \{\psi \to \chi\} \cup FL(\psi) \cup FL(\chi)$ θα ισχύει κάποιο από τα ακόλουθα:
  - $\sigma = \psi \to \chi$, οπότε $FL(\sigma) = FL(\psi \to \chi)$, άρα ισχύει η (i).
  - $\sigma \in FL(\psi)$, οπότε από Επ.Υπόθεση (ιδιότητα (i) για τον ψ, ως υποτύπο του φ) προκύπτει $FL(\sigma) \subseteq FL(\psi) \subseteq FL(\psi \to \chi)$, άρα ισχύει η (i).
  - $\sigma \in FL(\chi)$, οπότε προκύπτει η (i) ακριβώς όπως προηγουμένως.
- Αν $\varphi = [\beta]\chi$, τότε για $\sigma \in FL(\varphi) = FL([\beta]\chi) = FL^{\Box}([\beta]\chi) \cup FL(\chi)$ θα ισχύει κάποιο από τα ακόλουθα:
  - $\sigma \in FL^{\Box}([\beta]\chi)$, οπότε από Επ.Υπόθεση (ιδιότητα (ii) για το β, ως υποπρόγραμμα του φ και για τύπο χ) έχουμε $FL(\sigma) \subseteq FL^{\Box}([\beta]\chi) \cup FL(\chi) = FL([\beta]\chi)$, άρα ισχύει η (i).
  - $\sigma \in FL(\chi)$, οπότε από Επ.Υπόθεση (ιδιότητα (i) για τον χ, ως υποτύπο του φ) προκύπτει $FL(\sigma) \subseteq FL(\chi) \subseteq FL([\beta]\chi)$, άρα ισχύει η (i).

(ii)
Για όλα τα παρακάτω έστω τυχαίος $\psi \in \Phi$.

- Αν $\alpha = \beta \cup \gamma$, τότε για $\sigma \in FL^{\Box}([\alpha]\psi) = FL^{\Box}([\beta \cup \gamma]\psi) = \{[\beta \cup \gamma]\psi\} \cup FL^{\Box}([\beta]\psi) \cup FL^{\Box}([\gamma]\psi)$ θα ισχύει κάποιο από τα ακόλουθα:
  - $\sigma = [\beta \cup \gamma]\psi$, οπότε $FL(\sigma) = FL([\beta \cup \gamma]\psi) = FL^{\Box}([\beta \cup \gamma]\psi) \cup FL(\psi)$, άρα ισχύει η (ii).
  - $\sigma \in FL^{\Box}([\beta]\psi)$, οπότε από Επ.Υπόθεση (ιδιότητα (ii) για το β, ως υποπρόγραμμα του α) προκύπτει $FL(\sigma) \subseteq FL^{\Box}([\beta]\psi) \cup FL(\psi) \subseteq FL^{\Box}([\beta \cup \gamma]\psi) \cup FL(\psi)$, άρα ισχύει η (ii).
  - $\sigma \in FL^{\Box}([\gamma]\psi)$, οπότε προκύπτει η (ii) ακριβώς όπως προηγουμένως.
- Αν $\alpha = \beta; \gamma$, τότε για $\sigma \in FL^{\Box}([\alpha]\psi) = FL^{\Box}([\beta; \gamma]\psi) = \{[\beta; \gamma]\psi\} \cup FL^{\Box}([\beta][\gamma]\psi) \cup FL^{\Box}([\gamma]\psi)$ θα ισχύει κάποιο από τα ακόλουθα:
  - $\sigma = [\beta; \gamma]\psi$, οπότε $FL(\sigma) = FL([\beta; \gamma]\psi) = FL^{\Box}([\beta; \gamma]\psi) \cup FL(\psi)$, άρα ισχύει η (ii).

- $\sigma \in FL^{\Box}([\beta][\gamma]\psi)$, οπότε από Επ.Υπόθεση (ιδιότητα (ii) για το β, ως υποπρόγραμμα του α και για τύπο $[\gamma]\psi$) έχουμε $FL(\sigma) \subseteq FL^{\Box}([\beta][\gamma]\psi) \cup FL([\gamma]\psi) = FL^{\Box}([\beta][\gamma]\psi) \cup FL^{\Box}([\gamma]\psi) \cup FL(\psi) \subseteq FL^{\Box}([\beta;\gamma]\psi) \cup FL(\psi)$, άρα ισχύει η (ii).
- $\sigma \in FL^{\Box}([\gamma]\psi)$, οπότε από Επ.Υπόθεση (ιδιότητα (ii) για το γ, ως υποπρόγραμμα του α) προκύπτει $FL(\sigma) \subseteq FL^{\Box}([\gamma]\psi) \cup FL(\psi) \subseteq FL^{\Box}([\beta;\gamma]\psi) \cup FL(\psi)$, άρα ισχύει η (ii).

- Αν $\alpha = \beta^*$, τότε για $\sigma \in FL^{\Box}([\alpha]\psi) = FL^{\Box}([\beta^*]\psi) = \{[\beta^*]\psi\} \cup FL^{\Box}([\beta][\beta^*]\psi)$ θα ισχύει κάποιο από τα ακόλουθα:
  - $\sigma = [\beta^*]\psi$, οπότε $FL(\sigma) = FL([\beta^*]\psi) = FL^{\Box}([\beta^*]\psi) \cup FL(\psi)$, άρα ισχύει η (ii).
  - $\sigma \in FL^{\Box}([\beta][\beta^*]\psi)$, οπότε από Επ.Υπόθεση (ιδιότητα (ii) για το β, ως υποπρόγραμμα του α και για τύπο $[\beta^*]\psi$) έχουμε $FL(\sigma) \subseteq FL^{\Box}([\beta][\beta^*]\psi) \cup FL([\beta^*]\psi) = FL^{\Box}([\beta][\beta^*]\psi) \cup FL^{\Box}([\beta^*]\psi) \cup FL(\psi) \subseteq FL^{\Box}([\beta^*]\psi) \cup FL^{\Box}([\beta^*]\psi) \cup FL(\psi) = FL^{\Box}([\beta^*]\psi) \cup FL(\psi)$, άρα ισχύει η (ii).

- Αν $\alpha = \chi?$, τότε για $\sigma \in FL^{\Box}([\alpha]\psi) = FL^{\Box}([\chi?]\psi) = \{[\chi?]\psi\} \cup FL(\chi)$ θα ισχύει κάποιο από τα ακόλουθα:
  - $\sigma = [\chi?]\psi$, οπότε $FL(\sigma) = FL([\chi?]\psi) = FL^{\Box}([\chi?]\psi) \cup FL(\psi)$, άρα ισχύει η (ii).
  - $\sigma \in FL(\chi)$, οπότε από Επ.Υπόθεση (ιδιότητα (i) για το χ, ως υποτύπο του α) έχουμε $FL(\sigma) \subseteq FL(\chi) \subseteq FL^{\Box}([\chi?]\psi) \cup FL^{\Box}([\chi?]\psi) \cup FL(\psi)$, άρα ισχύει η (ii).

$\Box$

Λήμμα 2.3.3
$\forall \alpha, \beta \in \Pi, \forall \chi, \psi, \varphi \in \Phi$:

(i) $[\alpha]\varphi \in FL^{\Box}([\alpha]\varphi)$

(ii) $\varphi \in FL(\varphi)$

(iii) $[\alpha]\psi \in FL(\varphi) \Rightarrow \psi \in FL(\varphi)$

(iv) $[\chi?]\psi \in FL(\varphi) \Rightarrow \chi \in FL(\varphi)$

(v) $[\alpha \cup \beta]\psi \in FL(\varphi) \Rightarrow ([\alpha]\psi \in FL(\varphi) \wedge [\beta]\psi \in FL(\varphi))$

(vi) $[\alpha;\beta]\psi \in FL(\varphi) \Rightarrow ([\alpha][\beta]\psi \in FL(\varphi) \wedge [\beta]\psi \in FL(\varphi))$

(vii) $[\alpha^*]\psi \in FL(\varphi) \Rightarrow [\alpha][\alpha^*]\psi \in FL(\varphi)$

Απόδειξη

(i) Ισχύει, διότι σε κάθε περίπτωση του ορισμού της $FL^{\Box}$ έχουμε $\{[\alpha]\varphi\} \subseteq FL^{\Box}([\alpha]\varphi)$

(ii) Στις τρεις πρώτες περιπτώσεις του ορισμού της FL έχουμε $\{\varphi\} \subseteq FL(\varphi)$ ενώ στην τέταρτη ισχύει $FL([\alpha]\varphi) = FL^{\Box}([\alpha]\varphi) \cup FL(\varphi)$ κι έτσι λόγω (i) προκύπτει $[\alpha]\varphi \in FL([\alpha]\varphi)$. Άρα ισχύει η (ii).

(iii) $[\alpha]\psi \in FL(\varphi) \overset{\Lambda\eta\mu\mu\alpha\ 2.3.2(i)}{\Longrightarrow} FL(\varphi) \supseteq FL([\alpha]\psi) = FL^{\Box}([\alpha]\psi) \cup FL(\psi) \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \psi \in FL(\varphi)$

(iv) $[\chi?]\psi \in FL(\varphi) \overset{\Lambda\eta\mu\mu\alpha\ 2.3.2(i)}{\Longrightarrow} FL(\varphi) \supseteq FL([\chi?]\psi) = FL^{\Box}([\chi?]\psi) \cup FL(\psi) = \{[\chi?]\psi\} \cup FL(\chi) \cup FL(\psi) \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \chi \in FL(\varphi)$

(v) $[\alpha \cup \beta]\psi \in FL(\varphi) \overset{\Lambda\eta\mu\mu\alpha\ 2.3.2(i)}{\Longrightarrow} FL(\varphi) \supseteq FL([\alpha \cup \beta]\psi) = FL^{\Box}([\alpha \cup \beta]\psi) \cup FL(\psi) = \{[\alpha \cup \beta]\psi\} \cup FL^{\Box}([\alpha]\psi) \cup FL^{\Box}([\beta]\psi) \cup FL(\psi) \overset{(i)}{\Longrightarrow} [\alpha]\psi \in FL(\varphi)$
Ομοίως και για το $[\beta]\psi$.

(vi) $[\alpha;\beta]\psi \in FL(\varphi) \overset{\Lambda\eta\mu\mu\alpha\ 2.3.2(i)}{\Longrightarrow} FL(\varphi) \supseteq FL([\alpha;\beta]\psi) = FL^{\Box}([\alpha;\beta]\psi) \cup FL(\psi) = \{[\alpha;\beta]\psi\} \cup FL^{\Box}([\alpha][\beta]\psi) \cup FL^{\Box}([\beta]\psi) \cup FL(\psi) \overset{(i)}{\Longrightarrow} [\alpha][\beta]\psi \in FL(\varphi)$
Ομοίως και για το $[\beta]\psi$.

(vii) $[\alpha^*]\psi \in FL(\varphi) \overset{\Lambda\eta\mu\mu\alpha\ 2.3.2(i)}{\Longrightarrow} FL(\varphi) \supseteq FL([\alpha^*]\psi) = FL^{\Box}([\alpha^*]\psi) \cup FL(\psi) = \{[\alpha^*]\psi\} \cup FL^{\Box}([\alpha][\alpha^*]\psi) \cup FL(\psi) \overset{(i)}{\Longrightarrow} [\alpha][\alpha^*]\psi \in FL(\varphi)$

$\Box$

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο (και τελευταίο λήμμα πριν την εφαρμογή της μεθόδου του φιλτραρίσματος που θα μας οδηγήσει στην ιδιότητα μικρού μοντέλου) ας αναφερθεί ότι με $\#A$ θα συμβολίζεται ο πληθάριθμος ενός (πεπερασμένου) συνόλου A και με $|\varphi|$ και $|\alpha|$ το μήκος της συμβολοακολουθίας (εξαιρουμένων των παρενθέσεων) του τύπου φ κι του προγράμματος α αντιστοίχως.

Λήμμα 2.3.4
$\forall \varphi \in \Phi, \forall \alpha \in \Pi$:

(i) $\#FL(\varphi) \leq |\varphi|$

(ii) $\forall \psi \in \Phi : \#FL^{\Box}([\alpha]\psi) \leq |\alpha|$

Απόδειξη
Θα αποδειχθούν οι (i) και (ii) ταυτοχρόνως με επαγωγή στην πολυπλοκότητα των $\varphi \in \Phi$ και $\alpha \in \Pi$.
Επ.Βάση:
Αν $\varphi \in \Phi_0 \cup \{\perp\}$ και $\alpha \in \Pi_0$, τότε $\#FL(\varphi) = \#\{\varphi\} = 1 = |\varphi|$, άρα ισχύει η (i).
Για τυχαίο $\psi \in \Phi$ ισχύει $\#FL^{\Box}([\alpha]\psi) = \#\{[\alpha]\psi\} = 1 = |\alpha|$, δηλ. ισχύει η (ii).
Επ.Υπόθεση:
Για κάποιο $\varphi \in \Phi$ και για κάποιο $\alpha \in \Pi$, έστω ότι ισχύει η (i) για όλους τους υποτύπους τους και η (ii) για όλα τα υποπρογράμματά τους.
Επ.Βήμα:
(i)

- Αν $\varphi = \psi \to \chi$, τότε $\#FL(\varphi) = \#FL(\psi \to \chi) \leq 1 + \#FL(\psi) + \#FL(\chi) \overset{(E\pi.Y\pi.(i))}{\leq} 1 + |\psi| + |\chi| = |\psi \to \chi|$
- Αν $\varphi = [\beta]\chi$, τότε $\#FL(\varphi) = \#FL([\beta]\chi) \leq \#FL^{\Box}([\beta]\chi) + \#FL(\chi) \overset{(E\pi.Y\pi.(ii),(i))}{\leq} |\beta| + |\chi| \leq |[\beta]\chi|$

(ii)
Για όλα τα παρακάτω έστω τυχαίος $\psi \in \Phi$.

- Αν $\alpha = \beta \cup \gamma$, τότε $\#FL^{\Box}([\alpha]\psi) = \#FL^{\Box}([\beta \cup \gamma]\psi) \leq 1 + \#FL^{\Box}([\beta]\psi) + \#FL^{\Box}([\gamma]\psi) \overset{(E\pi.Y\pi.(ii))}{\leq} 1 + |\beta| + |\gamma| = |\beta \cup \gamma|$
- Αν $\alpha = \beta;\gamma$, τότε $\#FL^{\Box}([\alpha]\psi) = \#FL^{\Box}([\beta;\gamma]\psi) \leq 1 + \#FL^{\Box}([\beta][\gamma]\psi) + \#FL^{\Box}([\gamma]\psi) \overset{(E\pi.Y\pi.(ii))}{\leq} 1 + |\beta| + |\gamma| = |\beta;\gamma|$
- Αν $\alpha = \beta^*$, τότε $\#FL^{\Box}([\alpha]\psi) = \#FL^{\Box}([\beta^*]\psi) \leq 1 + \#FL^{\Box}([\beta][\beta^*]\psi) \overset{(E\pi.Y\pi.(ii))}{\leq} 1 + |\beta| = |\beta^*|$
- Αν $\alpha = \chi?$, τότε $\#FL^{\Box}([\alpha]\psi) = \#FL^{\Box}([\chi?]\psi) \leq 1 + \#FL(\chi) \overset{(E\pi.Y\pi.(i))}{\leq} 1 + |\chi| = |\chi?|$

□

Φιλτράρισμα

Έστω $\varphi \in \Phi$ και μοντέλο Kripke $\mathfrak{M} = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi\}, \overline{V})$ για τη $\Gamma_{\Delta 0}$. Τότε μπορεί να οριστεί η διμελής σχέση $\sim_\varphi \subseteq W \times W$ ως εξής: $\forall u, v \in W$

$$u \sim_\varphi v \iff \forall \psi \in FL(\varphi)(u \in \psi^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow v \in \psi^{\mathfrak{M}})$$

πράγμα που σημαίνει ότι ουσιαστικά «ταυτίζουμε» δύο κόσμους u, v (μέσω της $\sim_\varphi$) ανν δεν διαφέρουν ως προς την ικανοποιησιμότητα των τύπων του $FL(\varphi)$. Είναι άμεσο ότι η $\sim_\varphi$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Έτσι, συμβολίζουμε - ως συνήθως - με $[u/\sim_\varphi]$ την κλάση ισοδυναμίας του κόσμου u, δηλ.

$$[u/\sim_\varphi] = \{v \in W | u \sim_\varphi v\}$$

και με $[\![W/\sim_\varphi]\!]$ το αντίστοιχο σύνολο πηλίκο, δηλ.

$$[\![W/\sim_\varphi]\!] = \{[u/\sim_\varphi] \in \mathcal{P}(W) | u \in W\}$$

Άμεσο είναι το παρακάτω

Λήμμα 2.3.5

$$\#[\![W/\sim_\varphi]\!] \leq 2^{\#FL(\varphi)}$$

Απόδειξη
Έστω $FL(\varphi) = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ (αφού από Λήμμα 2.3.4(i) το $FL(\varphi)$ είναι πεπερασμένο) Έστω επίσης μια κλάση ισοδυναμίας $[u/\sim_\varphi]$ και κάποιος τύπος ψ_i. Τότε, ή όλοι οι τύποι της $[u/\sim_\varphi]$ θα ικανοποιούν τον ψ_i ή κανένας τους. Άρα η $[u/\sim_\varphi]$ χαρακτηρίζεται από το αν ικανοποιεί τον ψ_i ή όχι. Αυτό δε, συμβαίνει για όλους τους τύπους $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Άρα η $[u/\sim_\varphi]$ χαρακτηρίζεται από την ικανοποιησιμότητα των $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Αφού δε, υπάρχουν 2^n συνδυασμοί για την ικανοποιησιμότητα των $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, θα υπάρχουν το πολύ 2^n διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας.

□

Έχοντας όλον τον παραπάνω συμβολισμό μπορεί να δοθεί τώρα ο

Ορισμός 2.3.6
Έστω $\varphi \in \Phi$ και μοντέλο Kripke $\mathfrak{M} = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi\}, \overline{V})$ για τη $\Gamma_{\Delta 0}$. Το $\mathfrak{M}$ μπορεί να είναι standard ή ακόμα και nonstandard.
Φιλτράρισμα του $\mathfrak{M}$ από το $FL(\varphi)$ ονομάζεται το **standard** μοντέλο Kripke $\mathfrak{M}/\sim_\varphi = (\llbracket W/\sim_\varphi \rrbracket, \{R_\alpha/\sim_\varphi | \alpha \in \Pi\}, \overline{V/\sim_\varphi})$ όπου

$$\forall \alpha \in \Pi_0 : R_\alpha/\sim_\varphi = \alpha^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} = \{([u/\sim_\varphi], [v/\sim_\varphi]) \in \llbracket W/\sim_\varphi \rrbracket^2 | (u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} = R_\alpha\}$$

$$\forall \psi \in \Phi_0 : V/\sim_\varphi (\psi) = \psi^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} = \{[u/\sim_\varphi] \in \llbracket W/\sim_\varphi \rrbracket | u \in \psi^{\mathfrak{M}} = V(\psi)\}$$

και η επέκταση $\overline{V/\sim_\varphi}$ (της $V/\sim_\varphi$) και οι σχέσεις R_α (για όλα τα προγράμματα κι όχι μόνο για τα ατομικά) ορίζονται όπως στα standard μοντέλα Kripke.

Δ

Λήμμα 2.3.7 (Φιλτραρίσματος)
Έστω standard μοντέλο Kripke $\mathfrak{M} = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi\}, \overline{V})$ για τη $\Gamma_{\Delta 0}$ και $\varphi \in \Phi$. Τότε, $\forall \psi \in \Phi, \forall \alpha \in \Pi$ ισχύει

(i) $\psi \in FL(\varphi) \Longrightarrow \forall u \in W : (u \in \psi^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow [u/\sim_\varphi] \in \psi^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi})$

(ii) $\forall \chi \in \Phi$: αν $[\alpha]\chi \in FL(\varphi)$, τότε $\forall u, v \in W$ ισχύουν τα ακόλουθα

  (a) $(u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow ([u/\sim_\varphi], [v/\sim_\varphi]) \in \alpha^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}$

  (b) $(([u/\sim_\varphi], [v/\sim_\varphi]) \in \alpha^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \wedge u \in ([\alpha]\chi)^{\mathfrak{M}}) \Rightarrow v \in \chi^{\mathfrak{M}}$

Απόδειξη
Θα αποδειχθούν οι (i) και (ii) ταυτοχρόνως με επαγωγή στην πολυπλοκότητα των $\psi \in \Phi$ και $\alpha \in \Pi$.
Επ.Βάση:
Αν $\psi \in \Phi_0 \cup \{\perp\}$ και $\alpha \in \Pi_0$, τότε
(i)

- Αν $\psi \in \Phi_0$, τότε ας υποθέσουμε ότι $\psi \in FL(\varphi)$.
  Αν $u \in \psi^{\mathfrak{M}}$, τότε εξ'ορισμού του μοντέλου $\mathfrak{M}/\sim_\varphi$ θα ισχύει $[u/\sim_\varphi] \in \psi^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}$.
  Αντιστρόφως, αν $[u/\sim_\varphi] \in \psi^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}$, τότε θα υπάρχει κάποιο $u' \in W$ τ.π. $u \sim_\varphi u'$ και $u' \in \psi^{\mathfrak{M}}$. Επειδή όμως $\psi \in FL(\varphi)$ και $u \sim_\varphi u'$ θα ισχύει επίσης $u \in \psi^{\mathfrak{M}}$.
- Αν $\psi = \perp$, τότε $\perp^{\mathfrak{M}} = \perp^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} = \varnothing$ άρα ισχύει τετριμμένως η ισοδυναμία της (i).

(ii)
Έστω $\chi \in \Phi$ τ.π. $[\alpha]\chi \in FL(\varphi)$

(a) αν $(u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}}$, τότε εξ'ορισμού (επειδή $\alpha \in \Pi_0$) ισχύει $([u/\sim_\varphi], [v/\sim_\varphi]) \in \alpha^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}$.

(b) έστω ότι $([u/\sim_\varphi], [v/\sim_\varphi]) \in \alpha^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}$ καθώς και $u \in ([\alpha]\chi)^{\mathfrak{M}}$. Άρα θα υπάρχουν εξ'ορισμού (επειδή $\alpha \in \Pi_0$) $u', v' \in W$ τ.π. $u \sim_\varphi u', v \sim_\varphi v'$ και $(u', v') \in \alpha^{\mathfrak{M}}$. Επειδή δε, $[\alpha]\chi \in FL(\varphi)$, λόγω του ότι $u \sim_\varphi u'$ θα ισχύει επίσης $u' \in ([\alpha]\chi)^{\mathfrak{M}}$ άρα $v' \in \chi^{\mathfrak{M}}$. Όμως το Λήμμα 2.3.3(iii) εγγυάται ότι $\chi \in FL(\varphi)$ κι έτσι, λόγω του ότι $v \sim_\varphi v'$ θα έχουμε το ζητούμενο $v \in \chi^{\mathfrak{M}}$.

Επ.Υπόθεση:
Για κάποιο $\psi \in \Phi$ και για κάποιο $\alpha \in \Pi$, έστω ότι ισχύει η (i) για όλους τους υποτύπους τους και η (ii) για όλα τα υποπρογράμματά τους.
Επ.Βήμα:
(i)
Για όλα τα παρακάτω έστω ότι $\psi \in FL(\varphi)$.

- Αν $\psi = \sigma \to \tau$, τότε επειδή $\sigma \to \tau \in FL(\varphi)$, λόγω Λήμματος 2.3.2(i) θα έχουμε $FL(\sigma \to \tau) \subseteq FL(\varphi)$ κι έτσι εξ'ορισμού $FL(\sigma) \subseteq FL(\varphi)$. Τότε όμως, από Λήμμα 2.3.3(ii) προκύπτει ότι $\sigma \in FL(\varphi)$ (1)
Ομοίως έχουμε $\tau \in FL(\varphi)$ (2)
Έτσι ισχύει η ισοδυναμία που δίνει το ζητούμενο

$$u \in (\sigma \to \tau)^{\mathfrak{M}} \iff (u \in \sigma^{\mathfrak{M}} \Rightarrow u \in \tau^{\mathfrak{M}}) \overset{(1),(2),E\pi.Y\pi.(i)}{\iff}$$

$$([u/\sim_\varphi] \in \sigma^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \Rightarrow [u/\sim_\varphi] \in \tau^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}) \iff [u/\sim_\varphi] \in (\sigma \to \tau)^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}$$

- Αν $\psi = [\beta]\sigma$, τότε επειδή $[\beta]\sigma \in FL(\varphi)$, λόγω Λήμματος 2.3.3(iii) θα έχουμε $\sigma \in FL(\varphi)$ κι έτσι από Επ.Υπ.(i) για τον σ (ως υποτύπο του ψ) έχουμε

$$\forall u \in W : (u \in \sigma^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow [u/\sim_\varphi] \in \sigma^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}) \qquad (3)$$

ενώ από Επ.Υπ.(ii)-(a) και (ii)-(b) για το β (ως υποπρόγραμμα του ψ) προκύπτει αντιστοίχως

$$\forall u, v \in W : ((u,v) \in \beta^{\mathfrak{M}} \Rightarrow ([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}) \qquad (4)$$

$$\forall \chi \in \Phi, \forall u, v \in W : ((([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \wedge u \in ([\beta]\chi)^{\mathfrak{M}}) \Rightarrow v \in \chi^{\mathfrak{M}}) \qquad (5)$$

Έστω τώρα $s \in ([\beta]\sigma)^{\mathfrak{M}}$ και τυχαίο $t \in W$ τ.π. $([s/\sim_\varphi],[t/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}$. Τότε λόγω (5) έχουμε ότι $t \in \sigma^{\mathfrak{M}}$. Φάνηκε δηλ. ότι

$$s \in ([\beta]\sigma)^{\mathfrak{M}} \Longrightarrow \forall t \in W(([s/\sim_\varphi],[t/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \Rightarrow t \in \sigma^{\mathfrak{M}}) \qquad (6)$$

Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει το συμπέρασμα της (6) κι ας θεωρήσουμε τυχαίο $t \in W$ τ.π. $(s,t) \in \beta^{\mathfrak{M}}$. Τότε η (4) δίνει $([s/\sim_\varphi],[t/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}$ κι απ'το συμπέρασμα της (6) παίρνουμε $t \in \sigma^{\mathfrak{M}}$. Φάνηκε δηλ ότι $\forall t \in W : ((s,t) \in \beta^{\mathfrak{M}} \Rightarrow t \in \sigma^{\mathfrak{M}})$ πράγμα που σημαίνει ότι $s \in ([\beta]\sigma)^{\mathfrak{M}}$. Αποδείχθηκε δηλ. ότι

$$\forall t \in W(([s/\sim_\varphi],[t/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \Rightarrow t \in \sigma^{\mathfrak{M}}) \Longrightarrow s \in ([\beta]\sigma)^{\mathfrak{M}} \qquad (7)$$

Συνεπώς ισχύει η ισοδυναμία

$$s \in ([\beta]\sigma)^{\mathfrak{M}} \overset{(6),(7)}{\iff}$$

$$\forall t \in W(([s/\sim_\varphi],[t/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \Rightarrow t \in \sigma^{\mathfrak{M}}) \overset{(3)}{\iff}$$

$$\forall t \in W(([s/\sim_\varphi],[t/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \Rightarrow [t/\sim_\varphi] \in \sigma^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}) \iff$$

$$[s/\sim_\varphi] \in ([\beta]\sigma)^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}$$

(ii)
Για όλα τα παρακάτω έστω τυχαίος $\chi \in \Phi$ τ.π. $[\alpha]\chi \in FL(\varphi)$ καθώς και τυχαία $u, v \in W$

- Αν $\alpha = \beta \cup \gamma$, τότε επειδή $[\beta \cup \gamma]\chi \in FL(\varphi)$, λόγω Λήμματος 2.3.3(v) θα έχουμε $[\beta]\chi, [\gamma]\chi \in FL(\varphi)$ (8)
Επίσης, μπορεί να εφαρμοστεί η Επ.Υπόθεση(ii)-(a) και (b) για τα β και γ ως υποπρογράμματα του α. Έτσι έχουμε

  (a) Ισχύει, λόγω της ακόλουθης συνεπαγωγής

$$(u,v) \in (\beta \cup \gamma)^{\mathfrak{M}} \Rightarrow ((u,v) \in \beta^{\mathfrak{M}} \vee (u,v) \in \gamma^{\mathfrak{M}}) \overset{(8),E\pi.\underline{Y\pi}.(ii)(a)}{\Longrightarrow}$$
$$([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \vee ([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in \gamma^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \Rightarrow$$
$$([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in (\beta \cup \gamma)^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}$$

  (b) Ισχύει, λόγω της ακόλουθης συνεπαγωγής

$$([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in (\beta \cup \gamma)^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \wedge u \in ([\beta \cup \gamma]\chi)^{\mathfrak{M}} \overset{\Lambda\eta\mu\mu\alpha 2.2.5(i)}{\Longrightarrow}$$
$$(([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \vee ([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in \gamma^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}) \wedge$$
$$u \in ([\beta]\chi \wedge [\gamma]\chi)^{\mathfrak{M}} \Longrightarrow$$
$$(([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \wedge u \in ([\beta]\chi \wedge [\gamma]\chi)^{\mathfrak{M}}) \vee$$
$$(([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in \gamma^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \wedge u \in ([\beta]\chi \wedge [\gamma]\chi)^{\mathfrak{M}}) \Longrightarrow$$
$$(([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \wedge u \in ([\beta]\chi)^{\mathfrak{M}}) \vee$$
$$(([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in \gamma^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \wedge u \in ([\gamma]\chi)^{\mathfrak{M}}) \overset{(8),E\pi.\underline{Y\pi}.(ii)(b)}{\Longrightarrow}$$
$$(v \in \chi^{\mathfrak{M}} \vee v \in \chi^{\mathfrak{M}}) \Rightarrow v \in \chi^{\mathfrak{M}}$$

- Αν $\alpha = \beta; \gamma$, τότε επειδή $[\beta; \gamma]\chi \in FL(\varphi)$, λόγω Λήμματος 2.3.3(vi) θα έχουμε $[\beta][\gamma]\chi \in FL(\varphi)$ και $[\gamma]\chi \in FL(\varphi)$ (9)
Επίσης, μπορεί να εφαρμοστεί η Επ.Υπόθεση(ii)-(a) και (b) για τα β και γ ως υποπρογράμματα του α. Έτσι έχουμε

  (a) Ισχύει, λόγω της ακόλουθης συνεπαγωγής

$$(u,v) \in (\beta;\gamma)^{\mathfrak{M}} \Rightarrow \exists s \in W : ((u,s) \in \beta^{\mathfrak{M}} \wedge (s,v) \in \gamma^{\mathfrak{M}}) \overset{(9),E\pi.\underline{Y\pi}.(ii)(a)}{\Longrightarrow}$$
$$\exists s \in W : (([u/\sim_\varphi],[s/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \wedge ([s/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in \gamma^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}) \Longrightarrow$$
$$([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in (\beta;\gamma)^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}$$

  (b) Ισχύει, λόγω της ακόλουθης συνεπαγωγής

$$([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in (\beta;\gamma)^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \wedge u \in ([\beta;\gamma]\chi)^{\mathfrak{M}} \overset{\Lambda\eta\mu\mu\alpha 2.2.5(ii)}{\Longrightarrow}$$
$$(\exists s \in W : (([u/\sim_\varphi],[s/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \wedge ([s/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in \gamma^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi})) \wedge$$
$$u \in ([\beta][\gamma]\chi)^{\mathfrak{M}} \overset{(9),E\pi.\underline{Y\pi}.(ii)(b)}{\Longrightarrow}$$
$$\exists s \in W : (s \in ([\gamma]\chi)^{\mathfrak{M}} \wedge ([s/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in \gamma^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}) \overset{(9),E\pi.\underline{Y\pi}.(ii)(b)}{\Longrightarrow}$$
$$v \in \chi^{\mathfrak{M}}$$

- Αν $\alpha = \beta^*$, τότε επειδή $[\beta^*]\chi \in FL(\varphi)$, λόγω Λήμματος 2.3.3(vii) θα έχουμε $[\beta][\beta^*]\chi \in FL(\varphi)$ (10)
  Επίσης, μπορεί να εφαρμοστεί η Επ.Υπόθεση(ii)-(a) και (b) για το β ως υποπρόγραμμα του α. Έτσι έχουμε

  (a) Ισχύει, λόγω της ακόλουθης συνεπαγωγής

$$(u,v) \in (\beta^*)^{\mathfrak{M}} \Rightarrow$$

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists s_0, \ldots, s_n \in W : u = s_0 \wedge v = s_n \wedge$$

$$\forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i < n \Rightarrow (s_i, s_{i+1}) \in \beta^{\mathfrak{M}}) \stackrel{(10), E\pi.Y\pi.(ii)(a)}{\Longrightarrow}$$

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists s_0, \ldots, s_n \in W : u = s_0 \wedge v = s_n \wedge$$

$$\forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i < n \Rightarrow ([s_i/\sim_\varphi], [s_{i+1}/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}) \Longrightarrow$$

$$([u/\sim_\varphi], [v/\sim_\varphi]) \in (\beta^*)^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}$$

  (b) Καταρχάς ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή

$$([u/\sim_\varphi], [v/\sim_\varphi]) \in (\beta^*)^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \wedge u \in ([\beta^*]\chi)^{\mathfrak{M}} \Longrightarrow$$

$$\Big(\exists n \in \mathbb{N}, \exists s_0, \ldots, s_n \in W : u = s_0 \wedge v = s_n \wedge$$

$$\forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i < n \Rightarrow ([s_i/\sim_\varphi], [s_{i+1}/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi})\Big) \wedge$$

$$u \in ([\beta^*]\chi)^{\mathfrak{M}} \qquad (11)$$

  Τώρα θα αποδειχθεί με επαγωγή ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\forall u, v \in W :$$

$$\Big(\Big(\exists s_0, \ldots, s_n \in W : u = s_0 \wedge v = s_n \wedge$$

$$\forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i < n \Rightarrow ([s_i/\sim_\varphi], [s_{i+1}/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi})\Big) \wedge$$

$$u \in ([\beta^*]\chi)^{\mathfrak{M}}\Big) \Longrightarrow$$

$$\forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i \leq n \Rightarrow s_i \in ([\beta^*]\chi)^{\mathfrak{M}}) \qquad (\star)$$

  <u>Βοηθ.Επ.Βάση:</u>
  Για $n = 0$ η $(\star)$ γίνεται

$$\forall u, v \in W : ((u = v \wedge u \in ([\beta^*]\chi)^{\mathfrak{M}}) \Rightarrow v \in \chi^{\mathfrak{M}})$$

  πράγμα που είναι αληθές λόγω του Λήμματος 2.2.5(iii).
  <u>Βοηθ.Επ.Υπόθεση:</u>
  Ισχύει η $(\star)$ για κάποιο συγκεκριμένο $n \in \mathbb{N}$.
  <u>Βοηθ.Επ.Βήμα:</u>
  Ισχύει η συνεπαγωγή για τυχαία $u, v \in W$

$$\Big(\Big(\exists s_0, \ldots, s_{n+1} \in W : u = s_0 \wedge v = s_{n+1} \wedge$$

$$\forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i \leq n \Rightarrow ([s_i/\sim_\varphi],[s_{i+1}/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi})\Big)\wedge$$

$$u \in ([\beta^*]\chi)^{\mathfrak{M}}\Big) \overset{Bo\eta\theta.E\pi.Y\pi.}{\Longrightarrow}$$

$$\forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i \leq n \Rightarrow s_i \in ([\beta^*]\chi)^{\mathfrak{M}})\wedge$$

$$([s_n/\sim_\varphi],[s_{n+1}/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \overset{\Lambda\eta\mu\mu\alpha 2.2.5(iii)}{\Longrightarrow}$$

$$\forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i \leq n \Rightarrow s_i \in ([\beta^*]\chi)^{\mathfrak{M}})\wedge$$

$$s_n \in ([\beta][\beta^*]\chi)^{\mathfrak{M}} \wedge ([s_n/\sim_\varphi],[s_{n+1}/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \overset{(10),E\pi.Y\pi.(ii)(b)}{\Longrightarrow}$$

$$\forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i \leq n \Rightarrow s_i \in ([\beta^*]\chi)^{\mathfrak{M}}) \wedge s_{n+1} \in ([\beta^*]\chi)^{\mathfrak{M}}$$

□ (Βοηθ.Επαγωγής)

Επομένως ισχύει

$$(11) \overset{(\star)}{\Longrightarrow} v = s_n \in ([\beta^*]\chi)^{\mathfrak{M}} \overset{\Lambda\eta\mu\mu\alpha 2.2.5(iii)}{\Longrightarrow} v \in \chi^{\mathfrak{M}}$$

- Αν $\alpha = \sigma?$, τότε επειδή $[\sigma?]\chi \in FL(\varphi)$, λόγω Λήμματος 2.3.3(iv) θα έχουμε $\sigma \in FL(\varphi)$ (12)
  Επίσης, μπορεί να εφαρμοστεί η Επ.Υπόθεση(i) για τον σ ως υποτύπο του α.

  (a) Ισχύει, λόγω της ακόλουθης συνεπαγωγής

  $$(u,v) \in (\sigma?)^{\mathfrak{M}} \Rightarrow u = v \in \sigma^{\mathfrak{M}} \overset{E\pi.Y\pi.(i)}{\Longrightarrow}$$

  $$[u/\sim_\varphi] = [v/\sim_\varphi] \in \sigma^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \Rightarrow ([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in (\sigma?)^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi}$$

  (b) Ισχύει καταρχάς η συνεπαγωγή

  $$([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in (\sigma?)^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \wedge u \in ([\sigma?]\chi)^{\mathfrak{M}} \overset{\Lambda\eta\mu\mu\alpha 2.2.5(iv)}{\Longrightarrow}$$

  $$[u/\sim_\varphi] = [v/\sim_\varphi] \in \sigma^{\mathfrak{M}/\sim_\varphi} \wedge u \in (\sigma \to \chi)^{\mathfrak{M}} \overset{(12),E\pi.Y\pi.(i)}{\Longrightarrow}$$

  $$u \in \sigma^{\mathfrak{M}} \wedge u \in (\sigma \to \chi)^{\mathfrak{M}} \Rightarrow u \in \chi^{\mathfrak{M}}$$

  Επειδή δε, $[\sigma?]\chi \in FL(\varphi)$, λόγω Λήμματος 2.3.3(iii) θα έχουμε $\chi \in FL(\varphi)$. Επίσης, $[u/\sim_\varphi] = [v/\sim_\varphi]$ σημαίνει ότι $u \sim_\varphi v$. Άρα θα ισχύει και $v \in \chi^{\mathfrak{M}}$ που είναι το ζητούμενο.

□

Χρησιμοποιώντας τώρα το Λήμμα Φιλτραρίσματος μπορεί να αποδειχθεί εύκολα το κεντρικό θεώρημα αυτής της παραγράφου

Θεώρημα 2.3.8 (Μικρού Μοντέλου)
Έστω ικανοποιήσιμος $\varphi \in \Phi$. Τότε υπάρχει standard μοντέλο Kripke $\mathfrak{M} = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi\}, \overline{V})$ για τη $\Gamma_{\Delta 0}$ με $\#W \leq 2^{|\varphi|}$ και κόσμος $u \in W$ τ.π. $\mathfrak{M}, u \vDash \varphi$.

Απόδειξη
Επειδή ο φ είναι ικανοποιήσιμος, θα υπάρχει μοντέλο Kripke $\mathfrak{M}' = (W', \{R_\alpha | \alpha \in \Pi\}, \overline{V})$ για τη $\Gamma_{\Delta 0}$ και κόσμος $u \in W'$ τ.π. $\mathfrak{M}', u \vDash \varphi$. Το Λήμμα 2.3.3(ii) δίνει ότι $\varphi \in FL(\varphi)$ κι έτσι από το Λήμμα Φιλτραρίσματος (2.3.7) προκύπτει ότι $\mathfrak{M}'/\sim_\varphi, [u/\sim_\varphi] \vDash \varphi$. Έστω τώρα W το σύνολο των κόσμων του $\mathfrak{M}'/\sim_\varphi$. Τότε, από Λήμμα 2.3.5 έχουμε $\#W \leq 2^{\#FL(\varphi)}$ οπότε από Λήμμα 2.3.4(i) έπεται ότι $\#W \leq 2^{|\varphi|}$.

□

Τώρα, προκύπτει αμέσως το ακόλουθο

Πόρισμα 2.3.9 (Αποκρισιμότητα ΠΔΛ)
Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας ενός τύπου της ΠΔΛ είναι αποκρίσιμο.

Απόδειξη
Απ'το Θεώρημα Μικρού Μοντέλου (2.3.8) προκύπτει ότι για να ελέγξουμε αν κάποιος τύπος φ είναι ικανοποιήσιμος, αρκεί να ελέγξουμε μοντέλα με πεπερασμένο πλήθος κόσμων. Αυτά όμως τα μοντέλα θα είναι επίσης πεπερασμένα το πλήθος. Επίσης, δοθέντων ενός τύπου φ, ενός μοντέλου Kripke $\mathfrak{M}$ και ενός κόσμου του u, μπορούμε προφανώς να αποφανθούμε αν $\mathfrak{M}, u \vDash \varphi$ ή όχι. Η ιδέα του αλγορίθμου είναι αντίστοιχη μ'αυτήν της Κλασικής Προτασιακής Λογικής (χρησιμοποιώντας το συντακτικό δένδρο του τύπου), μόνο που εδώ αν συναντήσουμε κάποιο υποπρόγραμμα του φ θα πρέπει ενδεχομένως να ελέγξουμε όλους τους κόσμους εξόδου του προγράμματος (που θα είναι σίγουρα πεπερασμένοι το πλήθος, αφού το μοντέλο είναι πεπερασμένο).

□

Επίσης, ισχύει το αντίστοιχο Πόρισμα για τα προγράμματα.

Πόρισμα 2.3.10
Το πρόβλημα της ισοδυναμίας δύο προγραμμάτων της ΠΔΛ είναι αποκρίσιμο.

Απόδειξη
Έστω $\alpha, \beta \in \Pi$. Τότε, από Πρόταση 2.2.10 προκύπτει

$$\alpha, \beta : \text{μη ισοδύναμα} \quad \Longleftrightarrow \quad \neg(<\alpha>p \leftrightarrow <\beta>p) : \text{ ικανοποιήσιμος}$$

Έτσι, λόγω Πορίσματος 2.3.9 προκύπτει το ζητούμενο.

□

Φιλτράρισμα σε nonstandard μοντέλα

Για την απόδειξη της πληρότητας του αξιωματικού συστήματος της ΠΔΛ (που θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα) δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα Φιλτραρίσματος 2.3.7 αλλά μια μικρή τροποποίησή του που θα αναφέρεται σε nonstandard μοντέλα Kripke. Για να αποδειχθεί αυτό το τροποποιημένο Λήμμα Φιλτραρίσματος χρειαζόμαστε το ακόλουθο

Λήμμα 2.3.11
Έστω nonstandard μοντέλο Kripke $\mathfrak{N}$ για τη $\Gamma_{\Delta 0}$, $\varphi \in \Phi$ και $\alpha \in \Pi$ τ.π. $\mathfrak{N} \models \varphi \to [\alpha]\varphi$. Τότε $\mathfrak{N} \models \varphi \to [\alpha^*]\varphi$.

Απόδειξη
Έστω τυχαίο $u \in W$ τ.π. $u \in \varphi^{\mathfrak{N}}$. Τότε για τυχαίο $v \in W$, λόγω της υπόθεσης, θα ισχύει $v \in (\varphi \to [\alpha]\varphi)^{\mathfrak{N}}$ άρα θα ισχύει με τετριμμένο τρόπο

$$\forall v \in W : ((u,v) \in (\alpha^*)^{\mathfrak{N}} \Rightarrow v \in (\varphi \to [\alpha]\varphi)^{\mathfrak{N}})$$

δηλ. $u \in ([\alpha^*](\varphi \to [\alpha]\varphi))^{\mathfrak{N}}$
Επειδή δε, $u \in \varphi^{\mathfrak{N}}$, έχουμε $u \in (\varphi \wedge [\alpha^*](\varphi \to [\alpha]\varphi))^{\mathfrak{N}}$
Όμως το $\mathfrak{N}$ είναι nonstandard. Έτσι, από την ιδιότητά του 2.2.2-ii προκύπτει $u \in ([\alpha^*]\varphi)^{\mathfrak{N}}$. Δηλ. αποδείχθηκε ότι

$$\forall u \in W : (u \in \varphi^{\mathfrak{N}} \Rightarrow u \in ([\alpha^*]\varphi)^{\mathfrak{N}})$$

που σημαίνει ότι

$$\mathfrak{N} \models \varphi \to [\alpha^*]\varphi$$

□

Λήμμα 2.3.12 (Φιλτραρίσματος σε nonstandard μοντέλα)
Έστω nonstandard μοντέλο Kripke $\mathfrak{N} = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi\}, \overline{V})$ για τη $\Gamma_{\Delta 0}$ και $\varphi \in \Phi$. Τότε, $\forall \psi \in \Phi, \forall \alpha \in \Pi$ ισχύει

(i) $\psi \in FL(\varphi) \Longrightarrow \forall u \in W : (u \in \psi^{\mathfrak{N}} \Leftrightarrow [u/\sim_\varphi] \in \psi^{\mathfrak{N}/\sim_\varphi})$

(ii) $\forall \chi \in \Phi$: αν $[\alpha]\chi \in FL(\varphi)$, τότε $\forall u, v \in W$ ισχύουν τα ακόλουθα

(a) $(u,v) \in \alpha^{\mathfrak{N}} \Rightarrow ([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in \alpha^{\mathfrak{N}/\sim_\varphi}$

(b) $(([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in \alpha^{\mathfrak{N}/\sim_\varphi} \wedge u \in ([\alpha]\chi)^{\mathfrak{N}}) \Rightarrow v \in \chi^{\mathfrak{N}}$

Απόδειξη
Θα αποδειχθούν οι (i) και (ii) ταυτοχρόνως με επαγωγή στην πολυπλοκότητα των $\psi \in \Phi$ και $\alpha \in \Pi$ ακριβώς όπως στην απόδειξη του Λήμματος Φιλτραρίσματος 2.3.7 εκτός από την περίπτωση που $\alpha = \beta^*$. Αυτή είναι εξάλλου η μοναδική διαφορά ανάμεσα στον αναδρομικό ορισμό των standard και nonstandard μοντέλων Kripke. Επίσης, επειδή το μοντέλο $\mathfrak{N}/\sim_\varphi$ είναι standard (ακόμα κι αν το $\mathfrak{N}$ δεν είναι) η περίπτωση (ii)-(b) για $\alpha = \beta^*$ αποδεικνύεται ακριβώς όπως στο 2.3.7. Άρα απομένει να αποδειχθεί μόνο η περίπτωση (ii)-(a) για $\alpha = \beta^*$. Κι αυτό διότι στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του 2.3.7 η ιδιότητα του $(\beta^*)^{\mathfrak{M}}$ να είναι η ανακλαστική και μεταβατική κλειστότητα της $\beta^{\mathfrak{M}}$. Πράγμα που δεν ισχύει στα nonstandard μοντέλα.
Ιδού λοιπόν το εναπομείναν προς απόδειξη τμήμα.
Έστω τυχαίο $\chi \in \Phi$ τ.π. $[\beta^*]\chi \in FL(\varphi)$ και τυχαίοι $u, v \in W$ τ.π. $(u,v) \in (\beta^*)^{\mathfrak{N}}$. Έστω τώρα το σύνολο

$$E =_{o\rho.} \{t \in W | ([u/\sim_\varphi],[t/\sim_\varphi]) \in (\beta^*)^{\mathfrak{N}/\sim_\varphi}\}$$

Στην απόδειξη του Λήμματος 2.3.5 είχαμε δει ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας $[u/\sim_\varphi]$ χαρακτηρίζεται από την ικανοποιησιμότητα των $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ όπου $FL(\varphi) = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Έτσι, αν για κάποιον τυχαίο $\psi_i \in FL(\varphi)$ ισχύει $u \in \psi_i^{\mathfrak{N}}$, τότε θα ισχύει $v \in \psi_i^{\mathfrak{N}}, \forall v \in [u/\sim_\varphi]$. Αντιστρόφως, αν για κάποιον τυχαίο $\psi_i \in FL(\varphi)$ ισχύει $u \notin \psi_i^{\mathfrak{N}}$, τότε $v \notin \psi_i^{\mathfrak{N}}, \forall v \in [u/\sim_\varphi]$. Και μάλιστα, οι δύο αυτές ιδιότητες ισχύουν ακριβώς για τα στοιχεία του $[u/\sim_\varphi]$. Γι'αυτό το λόγο, αν θέσουμε

$$\forall \psi_i \in FL(\varphi) : \chi_i =_{o\rho.} \begin{cases} \psi_i, & \text{αν } u \in \psi_i^{\mathfrak{N}} \\ \neg\psi_i, & \text{αν } u \notin \psi_i^{\mathfrak{N}} \end{cases} \quad \text{και} \quad \chi_u =_{o\rho.} \chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_n$$

θα ισχύει

$$[u/\sim_\varphi] = (\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n)^{\mathfrak{N}} = \chi_u^{\mathfrak{N}} \qquad (1)$$

Όμως, παρατηρούμε ότι το σύνολο E είναι ένωση κλάσεων ισοδυναμίας. Έστω λοιπόν ότι $E = \bigcup_{t\in D}[t/\sim_\varphi]$ όπου D είναι ένα πεπερασμένο (λόγω Λήμματος 2.3.5) σύνολο αντιπροσώπων των κλάσεων ισοδυναμίας, από τις οποίες αποτελείται το E. Τότε, αν θέσουμε

$$\chi_E =_{o\rho.} \bigvee_{t\in D} \chi_t$$

θα έχουμε

$$\chi_E^{\mathfrak{N}} = (\bigvee_{t\in D} \chi_t)^{\mathfrak{N}} = \bigcup_{t\in D} \chi_t^{\mathfrak{N}} \stackrel{(1)}{=} \bigcup_{t\in D}[t/\sim_\varphi] = E \qquad (2)$$

Έστω τώρα $s, t \in W$ τ.π. $s \in E$ και $(s,t) \in \beta^{\mathfrak{N}}$. Τότε από Επ.Υπ.(ii)-(a) για το β ως υποπρόγραμμα του $\alpha = \beta^*$ (επειδή ακριβώς $[\beta][\beta^*]\chi \in FL(\varphi)$ - λόγω Λήμματος 2.3.3(vii) και εξαιτίας του ότι $[\beta^*]\chi \in FL(\varphi)$) θα έχουμε

$$([s/\sim_\varphi],[t/\sim_\varphi]) \in \beta^{\mathfrak{N}/\sim_\varphi} \qquad (3)$$

Επειδή όμως $s \in E$, εξ'ορισμού του E θα έχουμε

$$([u/\sim_\varphi],[s/\sim_\varphi]) \in (\beta^*)^{\mathfrak{N}/\sim_\varphi} \qquad (4)$$

Επειδή όμως η σχέση $(\beta^*)^{\mathfrak{N}/\sim_\varphi}$ είναι η ανακλαστική και μεταβατική κλειστότητα της $\beta^{\mathfrak{N}/\sim_\varphi}$ (ας θυμηθούμε ότι το μοντέλο $\mathfrak{N}/\sim_\varphi$ είναι standard) οι σχέσεις (3) και (4) δίνουν

$$([u/\sim_\varphi],[t/\sim_\varphi]) \in (\beta^*)^{\mathfrak{N}/\sim_\varphi}$$

κι έτσι, εξ'ορισμού του E ισχύει $t \in E$. Άρα αποδείχθηκε ότι

$$s \in E \wedge (s,t) \in \beta^{\mathfrak{N}} \Rightarrow t \in E$$

πράγμα που σημαίνει, λόγω (2), ότι

$$\mathfrak{N} \vDash \chi_E \to [\beta]\chi_E$$

κι έτσι, από Λήμμα 2.3.11

$$\mathfrak{N} \vDash \chi_E \to [\beta^*]\chi_E \qquad (5)$$

Επειδή τώρα η σχέση $(\beta^*)^{\mathfrak{N}/\sim_\varphi}$ είναι ανακλαστική, από τον ορισμό του συνόλου E προκύπτει $u \in E$ κι έτσι, από (2) και (5) έχουμε $u \in ([\beta^*]\chi_E)^{\mathfrak{N}}$
Όμως, υποθέσαμε ότι $(u,v) \in (\beta^*)^{\mathfrak{N}}$. Άρα $v \in \chi_E^{\mathfrak{N}}$ που σημαίνει, λόγω (2) ότι $v \in E$ κι έτσι, εξ'ορισμού του E έχουμε το ζητούμενο:

$$([u/\sim_\varphi],[v/\sim_\varphi]) \in (\beta^*)^{\mathfrak{N}/\sim_\varphi}$$

□

2.4 Ένα αξιωματικό σύστημα για την ΠΔΛ

Όπως έχουν οριστεί οι έννοιες του *αξιωματικού συστήματος* (κατά Hilbert) και της *απόδειξης* στην Κλασική Λογική, έτσι ακριβώς ορίζονται και στην ΠΔΛ. Έτσι, ένα αξιωματικό σύστημα $\mathcal{A} =< A, K >$ θα αποτελείται από ένα σύνολο *αξιωμάτων* A και από ένα σύνολο *αποδεικτικών κανόνων* K. Επίσης, *τυπική απόδειξη* στο $\mathcal{A}$ θα είναι μια ακολουθία προτασιακών τύπων της ΠΔΛ $\tau_1, \ldots, \tau_n$ έτσι ώστε κάθε τ_i να είναι ή αξίωμα ή άμεση συνέπεια κάποιων από τους $\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}$ βάσει κάποιου αποδεικτικού κανόνα του K. Τότε, ο τ_n λέγεται *τυπικό θεώρημα* του $\mathcal{A}$ και γράφουμε $\vdash_{\mathcal{A}} \tau_n$. Ενας τύπος δε φ, θα λέγεται *συνεπής* ανν $\nvdash_{\mathcal{A}} \varphi$. Ένα πεπερασμένο σύνολο τύπων Σ θα καλείται συνεπές ανν η σύζευξη $\bigwedge \Sigma$ είναι συνεπής τύπος ενώ ένα άπειρο σύνολο τύπων θα είναι συνεπές ανν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι συνεπές.

Έστω λοιπόν το ακόλουθο αξιωματικό σύστημα $\mathcal{A}_1 =< A_1, K_1 >$ όπου A_1 είναι το σύνολο των αξιωμάτων που παράγονται από τα παρακάτω αξιωματικά σχήματα (ΑΣ1 - ΑΣ8) και $K_1 = \{MP, GEN\}$ όπου MP είναι ο αποδεικτικός κανόνας modus ponens και GEN ο κανόνας (τροπικής) γενίκευσης όπως ακριβώς φαίνονται παρακάτω.
(Από τη στιγμή που παγιώνουμε αυτό το αξιωματικό σύστημα, θα γράφουμε για ευκολία $\vdash \varphi$ αντί του $\vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$)

ΑΣ1. Αξιωματικά σχήματα της κλασικής προτασιακής λογικής (π.χ. $H1 - H3$)

ΑΣ2. $[\alpha](\varphi \to \psi) \to ([\alpha]\varphi \to [\alpha]\psi)$

ΑΣ3. $[\alpha](\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow [\alpha]\varphi \wedge [\alpha]\psi$

ΑΣ4. $[\alpha \cup \beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha]\varphi \wedge [\beta]\varphi$

ΑΣ5. $[\alpha; \beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha][\beta]\varphi$

ΑΣ6. $[\psi?]\varphi \leftrightarrow (\psi \to \varphi)$

ΑΣ7. $[\alpha^*]\varphi \leftrightarrow \varphi \wedge [\alpha][\alpha^*]\varphi$

ΑΣ8. $\varphi \wedge [\alpha^*](\varphi \to [\alpha]\varphi) \to [\alpha^*]\varphi$ (αξίωμα επαγωγής)

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi} \qquad (MP)$$

$$\frac{\varphi}{[\alpha]\varphi} \qquad (GEN)$$

Για να είναι χρήσιμο αυτό το αποδεικτικό σύστημα πρέπει να αποδειχθούν θεωρήματα Πληρότητας-Εγκυρότητας. Ξεκινούμε με την (ευκολότερη προς απόδειξη) εγκυρότητα.

Θεώρημα 2.4.1 (Εγκυρότητας $\mathcal{A}_1$)
Κάθε τυπικό θεώρημα του $\mathcal{A}_1$ είναι έγκυρος τύπος, δηλ. $\forall \varphi \in \Phi$ ισχύει

$$\vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi \Longrightarrow \ \vDash \varphi$$

Απόδειξη
Πρέπει να αποδειχθεί ότι κάθε αξίωμα του A_1 (δηλ. που προκύπτει από κάποιο από τα ΑΣ1 - ΑΣ8) είναι έγκυρο και ότι οι κανόνες MP, GEN διατηρούν την αλήθεια, δηλ. ότι $\forall \varphi, \psi \in \Phi, \alpha \in \Pi$ ισχύει

$$\models \varphi \wedge \models \varphi \to \psi \implies \models \psi \qquad (MP)$$

$$\models \varphi \implies \models [\alpha]\varphi \qquad (GEN)$$

Για όλα τα παρακάτω, έστω τυχαίοι $\varphi, \psi \in \Phi$ και $\alpha, \beta \in \Pi$ καθώς και standard μοντέλο Kripke $\mathfrak{M} = (W, \{R_\alpha | \alpha \in \Pi\}, \overline{V})$ για τη $\Gamma_{\Delta 0}$ και τυχαίο $u \in W$.

<u>ΑΣ1</u>
Έστω ότι πρόκειται για αξιώματα που προκύπτουν από τα αξιωματικά σχήματα $H1 - H3$ της κλασικής προτασιακής λογικής, δηλ. που προκύπτουν με αντικατάσταση των τύπων που εμφανίζονται σε κάποιο αξιωματικό σχήμα από τα $H1 - H3$, με τύπους της ΠΔΛ. Τότε, όπως ακριβώς και στην κλασική προτασιακή λογική, αποδεικνύεται τετριμμένως (με χρήση πινάκων αλήθειας) ότι τα αξιώματα αυτά είναι ταυτολογίες.

<u>ΑΣ2</u>
Ισχύει η συνεπαγωγή

$$u \in ([\alpha](\varphi \to \psi))^{\mathfrak{M}} \wedge u \in ([\alpha]\varphi)^{\mathfrak{M}} \implies$$

$$\forall v \in W : ((u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in (\varphi \to \psi)^{\mathfrak{M}}) \wedge \forall v \in W : ((u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}}) \implies$$

$$\forall v \in W : ((u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow (v \in (\varphi \to \psi)^{\mathfrak{M}} \wedge v \in \varphi^{\mathfrak{M}}) \implies$$

$$\forall v \in W : ((u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow ((v \in \varphi^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \psi^{\mathfrak{M}}) \wedge v \in \varphi^{\mathfrak{M}}) \implies$$

$$\forall v \in W : ((u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \psi^{\mathfrak{M}}) \implies$$

$$u \in ([\alpha]\psi)^{\mathfrak{M}}$$

<u>ΑΣ3</u>
Ισχύει η ισοδυναμία

$$u \in ([\alpha](\varphi \wedge \psi))^{\mathfrak{M}} \iff$$

$$\forall v \in W : ((u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in (\varphi \wedge \psi)^{\mathfrak{M}}) \iff$$

$$\forall v \in W : ((u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow (v \in \varphi^{\mathfrak{M}} \wedge v \in \psi^{\mathfrak{M}}) \iff$$

$$\forall v \in W : ((u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \varphi^{\mathfrak{M}}) \wedge \forall v \in W : ((u,v) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \Rightarrow v \in \psi^{\mathfrak{M}}) \iff$$

$$u \in ([\alpha]\varphi)^{\mathfrak{M}} \wedge u \in ([\alpha]\psi)^{\mathfrak{M}}$$

$$u \in ([\alpha]\varphi \wedge [\alpha]\psi)^{\mathfrak{M}}$$

<u>ΑΣ4</u>
Αποδείχθηκε στο Λήμμα 2.2.5(i)

<u>ΑΣ5</u>
Αποδείχθηκε στο Λήμμα 2.2.5(ii)

ΑΣ6
Αποδείχθηκε στο Λήμμα 2.2.5(iv)

ΑΣ7
Αποδείχθηκε στο Λήμμα 2.2.5(iii)

ΑΣ8
Έστω ότι $u \in \varphi^{\mathfrak{M}}$ (1)
καθώς και ότι $u \in ([\alpha^*](\varphi \to [\alpha]\varphi))^{\mathfrak{M}}$ (2)
Θα αποδειχθεί εν πρώτοις με επαγωγή στους φυσικούς ότι $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\forall v_0, \ldots, v_n \in W :$$

$$u = v_0 \wedge \forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i < n \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \in \alpha^{\mathfrak{M}}) \Longrightarrow v_n \in \varphi^{\mathfrak{M}} \qquad (3)$$

Επ.Βάση:
Για $n = 0$ πρέπει να δείξουμε ότι $\forall v_0 \in W : (u = v_0 \Rightarrow v_0 \in \varphi^{\mathfrak{M}})$, πράγμα που ισχύει λόγω (1)
Επ.Υπόθεση:
Έστω ότι ισχύει η (3) για κάποιο συγκεκριμένο $n \in \mathbb{N}$
Επ.Βήμα:
Έστω τυχαία $v_0, \ldots, v_{n+1} \in W$ τ.π.

$$u = v_0 \wedge \forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i < n+1 \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \in \alpha^{\mathfrak{M}}) \qquad (4)$$

δηλ. λόγω Επ.Υπόθεσης

$$v_n \in \varphi^{\mathfrak{M}} \wedge (v_n, v_{n+1}) \in \alpha^{\mathfrak{M}} \qquad (5)$$

Όμως, η (2) σημαίνει ότι

$$\forall v \in W : (\exists n \in \mathbb{N}, \exists v_0, \ldots, v_n \in W : u = v_0 \wedge v = v_n \wedge$$

$$\forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i < n \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \in \alpha^{\mathfrak{M}}) \Rightarrow v \in (\varphi \to [\alpha]\varphi)^{\mathfrak{M}})$$

και η υπόθεση αυτής της σχέσης ισχύει για $v = v_n$ λόγω (4).
Άρα, ισχύει το συμπέρασμά της για $v = v_n$, δηλ. $v_n \in (\varphi \to [\alpha]\varphi)^{\mathfrak{M}}$
οπότε, λόγω της πρώτης σχέσης του (5) έχουμε $v_n \in ([\alpha]\varphi)^{\mathfrak{M}}$
κι έτσι, λόγω της δεύτερης σχέσης του (5) έχουμε το ζητούμενο:

$$v_{n+1} \in \varphi^{\mathfrak{M}}$$

□ (Επαγωγής)

Έστω τώρα τυχαίο $v \in W$ τ.π. $(u, v) \in (\alpha^*)^{\mathfrak{M}}$ δηλ.

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists v_0, \ldots, v_n \in W : u = v_0 \wedge v = v_n \wedge \forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i < n \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \in \alpha^{\mathfrak{M}})$$

κι έτσι λόγω (3) $v = v_n \in \varphi^{\mathfrak{M}}$.
Αυτό σημαίνει όμως ότι

$$u \in ([\alpha^*]\varphi)^{\mathfrak{M}}$$

(MP)
Έστω ότι $\models \varphi$ και $\models \varphi \to \psi$ δηλ. για το τυχαίο μοντέλο $\mathfrak{M}$ και το τυχαίο $u \in W$

θα ισχύει $u \in \varphi^{\mathfrak{M}}$ και $u \in (\varphi \to \psi)^{\mathfrak{M}}$. Έτσι προκύπτει αμέσως $u \in \psi^{\mathfrak{M}}$ δηλ. $\models \psi$.

(GEN)
Έστω ότι $\models \varphi$ δηλ. για το τυχαίο μοντέλο $\mathfrak{M}$ θα ισχύει $\forall v \in W : v \in \varphi^{\mathfrak{M}}$ (1)
Έστω τώρα τυχαίο $u \in W$. Τότε, $\forall v \in W$ τ.π. $(u, v) \in \alpha^{\mathfrak{M}}$ θα ισχύει λόγω (1) $v \in \varphi^{\mathfrak{M}}$. Άρα $u \in ([\alpha]\varphi)^{\mathfrak{M}}$ δηλ. φάνηκε ότι $\models [\alpha]\varphi$

$\square$

Θα ακολουθήσει η απόδειξη της πληρότητας του $\mathcal{A}_1$. Για να γίνει όμως αυτό απαιτούνται τέσσερα λήμματα και μία πρόταση, των οποίων οι αποδείξεις γίνονται τώρα αμέσως.

Λήμμα 2.4.2
Έστω $\Sigma \subseteq \Phi$ και $\varphi \in \Phi$. Τότε

(i) Σ: συνεπές ανν $\Sigma \cup \{\varphi\}$: συνεπές ή $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$: συνεπές

(ii) αν το Σ είναι συνεπές, τότε είναι υποσύνολο ενός μεγιστικώς συνεπούς συνόλου

Επιπλέον, αν το Σ είναι μεγιστικώς συνεπές, τότε

(iii) το Σ περιέχει όλα τα τυπικά θεωρήματα του $\mathcal{A}_1$

(iv) $\varphi \in \Sigma \iff \neg\varphi \notin \Sigma$

(v) $\varphi \in \Sigma \wedge \varphi \to \psi \in \Sigma \Rightarrow \psi \in \Sigma$

(vi) $\varphi \vee \psi \in \Sigma \iff \varphi \in \Sigma \vee \psi \in \Sigma$

(vii) $\varphi \wedge \psi \in \Sigma \iff \varphi \in \Sigma \wedge \psi \in \Sigma$

(viii) $\perp \notin \Sigma$

Απόδειξη

(i)
Θα αποδειχθεί το αντιθετοανάστροφο.

($\Rightarrow$) Έστω ότι το Σ είναι αντιφατικό. Τότε, υπάρχουν $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$ τ.π. $\vdash \neg(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n)$. Επειδή προφανώς $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma \cup \{\varphi\}$ και $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ θα είναι αντιφατικά και τα $\Sigma \cup \{\varphi\}$ και $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι είναι αντιφατικά τα $\Sigma \cup \{\varphi\}$ και $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν πεπερασμένα $\Sigma_1 \subseteq \Sigma \cup \{\varphi\}$ και $\Sigma_2 \subseteq \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ τ.π. $\vdash \neg \bigwedge \Sigma_1$ και $\vdash \neg \bigwedge \Sigma_2$.
Αν $\varphi \notin \Sigma_1$, τότε $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ κι έτσι το Σ είναι αντιφατικό. Τελειώσαμε.
Ομοίως, αν $\neg\varphi \notin \Sigma_2$. Τότε $\Sigma_2 \subseteq \Sigma$ κι έτσι το Σ είναι αντιφατικό.
Έστω λοιπόν ότι $\varphi \in \Sigma_1$ και $\neg\varphi \in \Sigma_2$. Αυτό σημαίνει ότι $\Sigma_1 = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \varphi\}$ και $\Sigma_2 = \{\tau_1, \ldots, \tau_m, \neg\varphi\}$ με $n, m \in \mathbb{N}$ (όπου προφανώς έχουμε θεωρήσει $\sigma_i \neq \varphi$ και $\tau_i \neq \neg\varphi$). Αν ίσχυε $n = m = 0$, τότε $\vdash \neg\varphi$ και $\vdash \neg\neg\varphi$ δηλ. $\vdash \neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$ κι έτσι από το Θεώρημα Εγκυρότητας (2.4.1) θα είχαμε $\models \neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$ πράγμα άτοπο. Άρα $n > 0$ ή $m > 0$.

- Αν $n > 0$ και $m = 0$, τότε $\vdash \neg(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \wedge \varphi)$ και $\vdash \neg\neg\varphi$. Το πρώτο μάς δίνει (χρησιμοποιώντας γνωστά τυπικά θεωρήματα του κλασικού προτασιακού λογισμού – που ισχύουν και στην ΠΔΛ λόγω του ΑΣ1): $\vdash \neg(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \vee \neg\varphi$ ή εξ'ορισμού $\vdash \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \to \neg\varphi$ δηλ. $\vdash \varphi \to \neg(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n)$. Όμως $\vdash \neg\neg\varphi$ ή $\vdash \varphi$ οπότε με MP παίρνουμε $\vdash \neg(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n)$ πράγμα που σημαίνει ότι το Σ είναι αντιφατικό.
- Αν $n = 0$ και $m > 0$, τότε αποδεικνύεται το ζητούμενο με τετριμμένως όμοιο τρόπο.
- Αν $n > 0$ και $m > 0$, τότε $\vdash \neg(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \wedge \varphi)$ και $\vdash \neg(\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_m \wedge \neg\varphi)$. Το πρώτο μάς δίνει (όπως προηγουμένως) $\vdash \varphi \to \neg(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n)$ και το δεύτερο $\vdash \neg\varphi \to \neg(\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_m)$. Όμως, είναι τυπικό θεώρημα ότι $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$. Άρα ισχύει $\vdash \neg(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \vee \neg(\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_m)$ πράγμα που δίνει $\vdash \neg(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \wedge \tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_m)$. Άρα το Σ είναι και στην τελευταία αυτήν περίπτωση αντιφατικό.

(ii)
Έστω ότι το Σ είναι συνεπές. Επειδή η γλώσσα $\Gamma_{\Delta 0}$ είναι αριθμήσιμη, θα είναι και το σύνολο των εκφράσεών της (απόρροια του 1ου Θεωρήματος του Cantor). Έτσι, θα είναι αριθμήσιμο και το σύνολο των τύπων της ΠΔΛ (ως υποσύνολο των εκφράσεων). Έστω λοιπόν μία απαρίθμηση των τύπων $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ καθώς και η ακολουθία $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του Φ που ορίζεται αναδρομικά ως εξής

$$\Sigma_0 = \Sigma \qquad \text{και}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Sigma_{n+1} =_{o\rho.} \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_n\}, & \text{αν } \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} : \text{συνεπές} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έστω τώρα το σύνολο $\overline{\Sigma} =_{o\rho.} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$. Τότε ισχύει ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ το Σ_n είναι συνεπές (προκύπτει με μια τετριμμένη επαγωγή, χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό και την (i)). Έστω τώρα, ότι το $\overline{\Sigma}$ ήταν αντιφατικό. Αυτό σημαίνει ότι θα υπήρχαν $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_n} \in \overline{\Sigma}$ τ.π. $\vdash \neg(\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_n})$. Όμως, από τη στιγμή που κάθε $\varphi_{i_j} \in \overline{\Sigma}$ θα ισχύει ότι $\varphi_{i_j} \in \Sigma_{i_j+1}$. Επίσης παρατηρούμε ότι $\forall n \in \mathbb{N} : \Sigma_n \subseteq \Sigma_{n+1}$. Άρα $\varphi_{i_j} \in \Sigma_k$ όπου $k = \max\{i_1, \ldots, i_n\} + 1$ που σημαίνει ότι το Σ_k είναι αντιφατικό. Άτοπο.
Άρα το $\overline{\Sigma}$ είναι συνεπές.
Έστω τέλος, κάποιος $\varphi_k \notin \overline{\Sigma}$. Αυτό σημαίνει ότι το $\Sigma_k \cup \{\varphi_k\}$ ήταν αντιφατικό δηλ. υπήρχαν $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma_k \cup \{\varphi_k\}$ τ.π. $\vdash \neg(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n)$. Όμως $\Sigma_k \cup \{\varphi_k\} \subseteq \overline{\Sigma} \cup \{\varphi_k\}$ δηλ. $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \overline{\Sigma} \cup \{\varphi_k\}$. Άρα, το $\overline{\Sigma} \cup \{\varphi_k\}$ είναι αντιφατικό κι έτσι το $\overline{\Sigma}$ είναι μεγιστικώς συνεπές (και φυσικά περιέχει το $\Sigma_0 = \Sigma$).

Σε ό,τι ακολουθεί θεωρούμε ότι το Σ είναι μεγιστικώς συνεπές.

(iii)
Έστω - προς άτοπο - ότι υπήρχε τύπος $\varphi \notin \Sigma$ τ.π. $\vdash \varphi$. Τότε, επειδή το Σ είναι μεγιστικώς συνεπές, το $\Sigma \cup \{\varphi\}$ θα ήταν αντιφατικό, άρα θα υπήρχε πεπερασμένο $\Sigma' \subseteq \Sigma \cup \{\varphi\}$ τ.π. $\vdash \neg \bigwedge \Sigma'$. Αν $\varphi \notin \Sigma'$, τότε $\Sigma' \subseteq \Sigma$ κι έτσι το Σ θα ήταν αντιφατικό, πράγμα που δεν ισχύει, άρα $\varphi \in \Sigma'$. Έστω λοιπόν ότι $\Sigma' = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \varphi\}$ όπου φυσικά ισχύει $\sigma_i \neq \varphi$. Τότε $\vdash \neg(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \wedge \varphi)$ πράγμα που μας δίνει (όπως ακριβώς στο (i)-($\Leftarrow$)) $\vdash \varphi \to \neg(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n)$. Επομένως, από το ότι $\vdash \varphi$ με MP παίρνουμε $\vdash \neg(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n)$, πράγμα που

σημαίνει ότι το Σ είναι αντιφατικό. Άτοπο. Άρα, αν $\vdash \varphi$, τότε $\varphi \in \Sigma$.

(iv)

(⇒) Έστω ότι $\varphi \in \Sigma$. Επειδή ισχύει το τυπικό θεώρημα $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$, αν ίσχυε και ότι $\neg\varphi \in \Sigma$, τότε το Σ θα ήταν αντιφατικό. Άτοπο. Άρα $\neg\varphi \notin \Sigma$.

(⇐) Έστω ότι $\neg\varphi \notin \Sigma$. Επειδή το Σ είναι μεγιστικώς συνεπές, το $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ θα είναι αντιφατικό κι έτσι, από (i), το $\Sigma \cup \{\varphi\}$ θα είναι συνεπές. Έστω λοιπόν ότι $\varphi \notin \Sigma$. Επειδή το Σ είναι μεγιστικώς συνεπές, το $\Sigma \cup \{\varphi\}$ θα ήταν αντιφατικό. Άτοπο. Άρα $\varphi \in \Sigma$.

(v)
Έστω ότι $\varphi \in \Sigma$ και $\varphi \to \psi \in \Sigma$. Από το πρώτο, λόγω (iv), προκύπτει ότι $\neg\varphi \notin \Sigma$ κι έτσι (επειδή το Σ είναι μεγιστικώς συνεπές) το $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ θα είναι αντιφατικό. Με ακριβώς την ίδια επιχειρηματολογία με το σκέλος (i)-(⇐) προκύπτει ότι $\vdash \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \to \varphi$ για κάποια $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$. Από το ότι $\varphi \to \psi \in \Sigma$ προκύπτει ομοίως ότι $\vdash \tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_m \to (\varphi \to \psi)$ για κάποια $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \Sigma$.
Επομένως, με χρήση γνωστών τυπικών θεωρημάτων παίρνουμε $\vdash \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \wedge \tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_m \to \varphi \wedge (\varphi \to \psi)$. Ισχύει όμως και το τυπικό θεώρημα $\vdash \varphi \wedge (\varphi \to \psi) \to \psi$. Άρα $\vdash \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \wedge \tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_m \to \psi$ δηλ. $\vdash \neg(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \wedge \tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_m \wedge \neg\psi)$ άρα το $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ είναι αντιφατικό κι έτσι, από (i), το $\Sigma \cup \{\psi\}$ είναι συνεπές. Αν ίσχυε ότι $\psi \notin \Sigma$, τότε (επειδή το Σ είναι μεγιστικώς συνεπές) το $\Sigma \cup \{\psi\}$ θα ήταν αντιφατικό. Άτοπο. Άρα $\psi \in \Sigma$.

(vi)

(⇒) Έστω ότι $\varphi \vee \psi \in \Sigma$. Αν $\varphi \in \Sigma$, τότε τελειώσαμε. Αν $\varphi \notin \Sigma$, τότε από (iv) θα έχουμε $\neg\varphi \in \Sigma$. Όμως, $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ σημαίνει εξ'ορισμού ότι $\neg\varphi \to \psi \in \Sigma$. Έτσι, από (v) προκύπτει $\psi \in \Sigma$.

(⇐) Έστω ότι $\varphi \in \Sigma$. Επειδή ισχύει το τυπικό θεώρημα $\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$, λόγω (iii) έχουμε $\varphi \to \varphi \vee \psi \in \Sigma$. Άρα, από (v) προκύπτει $\varphi \vee \psi \in \Sigma$. Ομοίως και αν $\psi \in \Sigma$.

(vii)

(⇒) Έστω ότι $\varphi \wedge \psi \in \Sigma$. Επειδή ισχύει το τυπικό θεώρημα $\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$, λόγω (iii) έχουμε $\varphi \wedge \psi \to \varphi \in \Sigma$. Άρα, από (v) προκύπτει $\varphi \in \Sigma$. Ομοίως προκύπτει και ότι $\psi \in \Sigma$.

(⇐) Θα αποδειχθεί το αντιθετοανάστροφο. Έστω λοιπόν ότι $\varphi \wedge \psi \notin \Sigma$. Οπότε, λόγω (iv) $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma$. Επειδή όμως ισχύει το τυπικό θεώρημα $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi$, λόγω (iii) έχουμε $\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi \in \Sigma$. Άρα, από (v) προκύπτει $\neg\varphi \vee \neg\psi \in \Sigma$. Συνεπώς, από (vi) έχουμε $\neg\varphi \in \Sigma$ ή $\neg\psi \in \Sigma$ δηλ. από (iv) $\varphi \notin \Sigma$ ή $\psi \notin \Sigma$.

(viii)
Ισχύει κατ'αρχάς το τυπικό θεώρημα $\vdash \bot \to \bot$ που σημαίνει εξ'ορισμού $\vdash \neg\bot$. Άρα, λόγω (iii) έχουμε $\neg\bot \in \Sigma$ δηλ. λόγω (iv) $\bot \notin \Sigma$.

□

Η κατασκευή του μεγιστικώς συνεπούς συνόλου στο (ii) του προηγούμενου λήμματος όπως και οι υπόλοιπες ιδιότητες που αποδείχθηκαν είναι ακριβώς ό,τι υπάρχει στην αντίστοιχη απόδειξη πληρότητας στην κλασική λογική. Το επόμενο λήμμα όμως, είναι χαρακτηριστικό της ΠΔΛ.

Λήμμα 2.4.3
Έστω μεγιστικώς συνεπή $\Sigma, \Gamma \subseteq \Phi$ και $\alpha \in \Pi$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) $\forall \psi \in \Phi : (\psi \in \Gamma \Rightarrow <\alpha> \psi \in \Sigma)$

(β) $\forall \psi \in \Phi : ([\alpha]\psi \in \Sigma \Rightarrow \psi \in \Gamma)$

Απόδειξη
$(\alpha) \Rightarrow (\beta)$
Έστω τυχαίος $\psi \in \Phi$ τ.π. $[\alpha]\psi \in \Sigma$. Όμως, το τυπικό θεώρημα $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$ δίνει με γενίκευση $\vdash [\alpha](\psi \to \neg\neg\psi)$ κι έτσι από το ΑΣ2 με MP παίρνουμε $\vdash [\alpha]\psi \to [\alpha]\neg\neg\psi$. Αυτό όμως λόγω Λήμματος 2.4.2(iii) σημαίνει ότι $[\alpha]\psi \to [\alpha]\neg\neg\psi \in \Sigma$ επομένως, από Λήμμα 2.4.2(v) έχουμε $[\alpha]\neg\neg\psi \in \Sigma$. Τότε, από Λήμμα 2.4.2(iv) προκύπτει $<\alpha> \neg\psi \notin \Sigma$ δηλ. από (α) έπεται $\neg\psi \notin \Gamma$ οπότε και πάλι από Λήμμα 2.4.2(iv) $\psi \in \Gamma$.

$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$
Έστω τυχαίος $\psi \in \Phi$ τ.π. $\psi \in \Gamma$. Τότε, από Λήμμα 2.4.2(iv) $\neg\psi \notin \Gamma$ δηλ. από (β) προκύπτει $[\alpha]\neg\psi \notin \Sigma$ οπότε και πάλι από Λήμμα 2.4.2(iv) έχουμε $<\alpha> \psi \in \Sigma$.

□

Ας οριστούν τώρα το ακόλουθο σύνολο και οι συναρτήσεις: $(\star)$

$$N =_{op.} \{S \subseteq \Phi | S : \text{μεγιστικώς συνεπές}\}$$

$$\varepsilon : \Phi \to \mathcal{P}(N) \text{ τ.π. } \forall \varphi \in \Phi : \varepsilon(\varphi) =_{op.} \{S \in N | \varphi \in S\}$$

$$\rho : \Pi \to \mathcal{P}(N^2) \text{ τ.π.}$$
$$\forall \alpha \in \Pi : \rho(\alpha) =_{op.} \{(S,T) \in N^2 | \forall \varphi \in \Phi : \varphi \in T \Rightarrow <\alpha> \varphi \in S\}$$

Λόγω μάλιστα του Λήμματος 2.4.3 μπορεί να γραφεί ότι

$$\forall \alpha \in \Pi : \rho(\alpha) = \{(S,T) \in N^2 | \forall \varphi \in \Phi : [\alpha]\varphi \in S \Rightarrow \varphi \in T\}$$

Θα αποδειχθεί ότι η δομή $(N, \rho[\Pi], \varepsilon)$ είναι nonstandard μοντέλο Kripke για τη $\Gamma_{\Delta 0}$. Για να γίνει όμως αυτό απαιτούνται τα ακόλουθα τρία Λήμματα:

Λήμμα 2.4.4
Έστω $\varphi, \psi \in \Phi$ και $\alpha \in \Pi$. Τότε:

(i) $\vdash_{\mathcal{A}_1} [\alpha]\varphi \wedge <\alpha> \psi \to <\alpha> (\varphi \wedge \psi)$

(ii) $\vdash_{\mathcal{A}_1} <\alpha> (\varphi \wedge \psi) \to <\alpha> \varphi \wedge <\alpha> \psi$

(iii) $\vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi \to [\alpha]\varphi \Longrightarrow \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi \to [\alpha^*]\varphi$
Η συνεπαγωγή αυτή είναι γνωστή και ως *κανόνας (LI)* (=loop invariance).

(iv) $\vdash_{\mathcal{A}_1} [\alpha^*]\varphi \to \varphi \wedge [\alpha^*](\varphi \to [\alpha]\varphi)$
Πρόκειται για το αντίστροφο του ΑΣ8, της επαγωγής.

Απόδειξη

(i)
Το ΑΣ2 δίνει $\vdash [\alpha](\varphi \to \neg\psi) \to ([\alpha]\varphi \to [\alpha]\neg\psi)$ δηλ. με αντιθετοαναστροφή (που αποτελεί τυπικό θεώρημα του κλασικής προτασιακής λογικής) και MP
$\vdash \neg([\alpha]\varphi \to [\alpha]\neg\psi) \to \neg[\alpha](\varphi \to \neg\psi)$ άρα εξ ορισμού του $<>$
$\vdash \neg([\alpha]\varphi \to \neg <\alpha> \psi) \to <\alpha> \neg(\varphi \to \neg\psi)$ δηλ. εξ ορισμού του $\wedge$
$\vdash [\alpha]\varphi \wedge <\alpha> \psi \to <\alpha> (\varphi \wedge \psi)$

(ii)
Ισχύει προφανώς $\vdash \neg\varphi \to \neg\varphi \vee \neg\psi$. Άρα από GEN $\vdash [\alpha](\neg\varphi \to \neg\varphi \vee \neg\psi)$ όποτε από ΑΣ2 και MP παίρνουμε $\vdash [\alpha]\neg\varphi \to [\alpha](\neg\varphi \vee \neg\psi)$ δηλ. με αντιθετοαναστροφή $\vdash <\alpha> (\varphi \wedge \psi) \to <\alpha> \varphi$. Ομοίως προκύπτει $\vdash <\alpha> (\varphi \wedge \psi) \to <\alpha> \psi$.
Χρησιμοποιώντας τώρα το τυπικό θεώρημα
$\vdash (\chi_1 \to \chi_2) \to ((\chi_1 \to \chi_3) \to (\chi_1 \to \chi_2 \wedge \chi_3))$ και MP έχουμε
$\vdash <\alpha> (\varphi \wedge \psi) \to <\alpha> \varphi \wedge <\alpha> \psi$.

(iii)
Έστω ότι $\vdash \varphi \to [\alpha]\varphi$. Τότε με GEN προκύπτει ότι $\vdash [\alpha^*](\varphi \to [\alpha]\varphi)$ άρα προφανώς $\vdash \varphi \to [\alpha^*](\varphi \to [\alpha]\varphi)$ και φυσικά $\vdash \varphi \to \varphi \wedge [\alpha^*](\varphi \to [\alpha]\varphi)$. Τότε όμως από ΑΣ8, το τυπικό θεώρημα της μεταβατικότητας και MP παίρνουμε $\vdash \varphi \to [\alpha^*]\varphi$.

(iv)
Το ΑΣ7 δίνει $\vdash [\alpha^*]\varphi \to \varphi$ κι έτσι παίρνουμε με GEN $\vdash [\alpha]([\alpha^*]\varphi \to \varphi)$ οπότε, απ'το ΑΣ2 με MP έπεται $\vdash [\alpha][\alpha^*]\varphi \to [\alpha]\varphi \qquad (1)$
Όμως το ΑΣ7 δίνει επίσης $\vdash [\alpha^*]\varphi \to [\alpha][\alpha^*]\varphi$ κι έτσι απ'την (1) προκύπτει (χρησιμοποιώντας το τυπικό θεώρημα της μεταβατικότητας και MP)
$\vdash [\alpha^*]\varphi \to [\alpha]\varphi \qquad (2)$
Επειδή όμως ισχύει (από κλασική λογική) $\vdash [\alpha]\varphi \to (\varphi \to [\alpha]\varphi)$ η (2) δίνει (και πάλι με μεταβατικότητα και MP) $\vdash [\alpha^*]\varphi \to (\varphi \to [\alpha]\varphi)$. Αυτό όμως μας δίνει με GEN, $\vdash [\alpha^*]([\alpha^*]\varphi \to (\varphi \to [\alpha]\varphi))$ ή αλλιώς με ΑΣ2 και MP
$\vdash [\alpha^*][\alpha^*]\varphi \to [\alpha^*](\varphi \to [\alpha]\varphi) \qquad (3)$
Τώρα, το ΑΣ7 δίνει $\vdash [\alpha^*]\varphi \to [\alpha][\alpha^*]\varphi$ κι έτσι από (iii) (κανόνας LI) προκύπτει $\vdash [\alpha^*]\varphi \to [\alpha^*][\alpha^*]\varphi$ οπότε η (3) δίνει (με μεταβατικότητα και MP)
$\vdash [\alpha^*]\varphi \to [\alpha^*](\varphi \to [\alpha]\varphi) \qquad (4)$
Τέλος, παίρνουμε και πάλι από ΑΣ7, $\vdash [\alpha^*]\varphi \to \varphi$ άρα η (4) μαζί με γνωστό τυπικό θεώρημα και MP δίνει το ζητούμενο $\vdash [\alpha^*]\varphi \to \varphi \wedge [\alpha^*](\varphi \to [\alpha]\varphi)$

□

Λήμμα 2.4.5
Έστω $\varphi, \psi \in \Phi$ και $\alpha \in \Pi$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\varepsilon(\varphi \to \psi) = (N \setminus \varepsilon(\varphi)) \cup \varepsilon(\psi)$

(ii) $\varepsilon(\bot) = \varnothing$

(iii) $\varepsilon(\neg\varphi) = N \setminus \varepsilon(\varphi)$

(iv) $\varepsilon([\alpha]\varphi) = N \setminus (\rho(\alpha) \circ (N \setminus \varepsilon(\varphi)))$

Απόδειξη

(i)

Έστω ότι $S \in \varepsilon(\varphi \to \psi)$ δηλ. $\varphi \to \psi \in S$ (1)

Αν $\varphi \notin S$, τότε $S \notin \varepsilon(\varphi)$ δηλ. $S \in N \setminus \varepsilon(\varphi)$ κι έτσι $S \in (N \setminus \varepsilon(\varphi)) \cup \varepsilon(\psi)$.

Αν $\varphi \in S$, τότε από (1) και Λήμμα 2.4.2(v) προκύπτει ότι $\psi \in S$ δηλ. $S \in \varepsilon(\psi)$ κι έτσι ισχύει και πάλι $S \in (N \setminus \varepsilon(\varphi)) \cup \varepsilon(\psi)$.

Άρα $\varepsilon(\varphi \to \psi) \subseteq (N \setminus \varepsilon(\varphi)) \cup \varepsilon(\psi)$ (2)

Αντιστρόφως, έστω ότι $S \in (N \setminus \varepsilon(\varphi)) \cup \varepsilon(\psi)$.

Αν $S \in N \setminus \varepsilon(\varphi)$, τότε $S \notin \varepsilon(\varphi)$ δηλ. $\varphi \notin S$ οπότε, από Λήμμα 2.4.2(iv), $\neg\varphi \in S$ (3)

Όμως, το τυπικό θεώρημα $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ δίνει, λόγω Λήμματος 2.4.2(iii), ότι $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi) \in S$ άρα από (3) και Λήμμα 2.4.2(v) προκύπτει ότι $\varphi \to \psi \in S$ δηλ. $S \in \varepsilon(\varphi \to \psi)$.

Αν πάλι, $S \in \varepsilon(\psi)$, τότε $\psi \in S$ (4)

Όμως, το ΑΣ1 δίνει $\vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$ άρα, λόγω Λήμματος 2.4.2(iii), $\psi \to (\varphi \to \psi) \in S$ άρα από (4) και Λήμμα 2.4.2(v) προκύπτει ότι $\varphi \to \psi \in S$ δηλ. ισχύει και πάλι $S \in \varepsilon(\varphi \to \psi)$.

Έτσι και στις δύο περιπτώσεις ισχύει $(N \setminus \varepsilon(\varphi)) \cup \varepsilon(\psi) \subseteq \varepsilon(\varphi \to \psi)$ (5)

Από (2) και (5) έπεται το ζητούμενο.

(ii)

Ισχύει λόγω Λήμματος 2.4.2(viii) ότι $\varepsilon(\bot) = \{S \in N | \bot \in S\} = \varnothing$

(iii)

Ισχύει η ισοδυναμία

$$S \in \varepsilon(\neg\varphi) \iff \neg\varphi \in S \overset{2.4.2(iv)}{\iff} \varphi \notin S \iff S \notin \varepsilon(\varphi) \iff S \in N \setminus \varepsilon(\varphi)$$

(iv)

Θα αποδειχθεί καταρχάς ότι $\forall \psi \in \Phi$ ισχύει

$$\varepsilon(<\alpha> \psi) = \rho(\alpha) \circ \varepsilon(\psi) \qquad (6)$$

($\subseteq$)

Έστω $S \in \varepsilon(<\alpha> \psi)$ δηλ. $<\alpha> \psi \in S$.

Έστω επίσης το σύνολο $T' =_{o\rho.} \{\psi\} \cup \{\chi \in \Phi | [\alpha]\chi \in S\}$. Θα αποδείξουμε αρχικώς ότι το T' είναι συνεπές. Έστω λοιπόν τυχαίο $X =_{o\rho.} \{\chi_1 \ldots, \chi_n\} \subseteq T'$. Τότε, από Λήμμα 2.4.2(vii) προκύπτει $<\alpha> \psi \wedge [\alpha]\chi_1 \wedge \ldots \wedge [\alpha]\chi_n \in S$ (7)

Όμως από Λήμμα 2.4.4(i) και γνωστά τυπικά θεωρήματα έχουμε

$$\vdash <\alpha> \psi \wedge [\alpha]\chi_1 \wedge \ldots \wedge [\alpha]\chi_n \to <\alpha> (\psi \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n)$$

δηλ. από Λήμμα 2.4.2(iii) προκύπτει

$$<\alpha> \psi \wedge [\alpha]\chi_1 \wedge \ldots \wedge [\alpha]\chi_n \to <\alpha> (\psi \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n) \in S$$

οπότε από Λήμμα 2.4.2(v) και (7) έχουμε

$$<\alpha> (\psi \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n) \in S$$

(στην περίπτωση που $X = \{\psi\}$, τότε η παραπάνω σχέση ισχύει με τη μορφή $<\alpha> \psi \in S$, πράγμα που δεν χρειάζεται απόδειξη αφου ισχύει εξ υποθέσεως)

Επειδή όμως το S είναι συνεπές, θα ισχύει

$$\nvdash \neg <\alpha> (\psi \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n) \qquad ή$$

$$\nvdash [\alpha]\neg(\psi \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n) \qquad (8)$$

Αν ίσχυε ότι $\vdash \neg(\psi \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n)$, τότε θα παίρναμε από GEN
$\vdash [\alpha]\neg(\psi \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n)$. Άτοπο, λόγω (8). Άρα $\nvdash \neg(\psi \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n)$ (9)
Στην περίπτωση που $\psi \notin X$, αν ίσχυε ότι $\vdash \neg(\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n)$,
τότε $\vdash \neg(\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n) \vee \neg\psi$, δηλ. $\vdash \neg(\psi \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n)$. Άτοπο, λόγω (9).
Άρα $\nvdash \neg(\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n)$ ή αλλιώς $\nvdash \neg \bigwedge X$.
Στην περίπτωση που $\psi \in X$, η (9) δίνει αμέσως και πάλι $\nvdash \neg \bigwedge X$.
Αφού δε, το X επιλέχθηκε ως τυχαίο υποσύνολο του T' και αποδείχθηκε συνεπές, θα είναι εξ ορισμού και το T' συνεπές. Έτσι, λόγω Λήμματος 2.4.2(ii), υπάρχει μεγιστικώς συνεπές $T \supseteq T'$. Άρα $T \in N$.
Επίσης, αν για κάποιον τυχαίο $\chi \in \Phi$ ισχύει $[\alpha]\chi \in S$, τότε εξ ορισμού του T' έχουμε $\chi \in T'$ δηλ. $\chi \in T$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $(S,T) \in \rho(\alpha)$.
Επειδή δε, $\psi \in T'$ θα έχουμε και $\psi \in T$ δηλ. $T \in \varepsilon(\psi)$. Έτσι έχουμε συνολικά $\exists T \in N : (S,T) \in \rho(\alpha) \wedge T \in \varepsilon(\psi)$ άρα $S \in \rho(\alpha) \circ \varepsilon(\psi)$.

($\supseteq$)
Έστω $S \in \rho(\alpha) \circ \varepsilon(\psi)$ δηλ. $\exists T \in N : (S,T) \in \rho(\alpha) \wedge T \in \varepsilon(\psi)$ που σημαίνει εξ ορισμού ότι $\exists T \in N : \forall \chi \in \Phi : (\chi \in T \Rightarrow <\alpha> \chi \in S) \wedge \psi \in T$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $<\alpha> \psi \in S$ δηλ. $S \in \varepsilon(<\alpha> \psi)$.

$\square$ (6)

Ξεκινώντας τώρα από τη μόλις αποδεδειγμένη (6) έχουμε την ισοδυναμία

$$\varepsilon(<\alpha> \neg\varphi) = \rho(\alpha) \circ \varepsilon(\neg\varphi) \overset{Op}{\iff} \varepsilon(\neg[\alpha]\neg\neg\varphi) = \rho(\alpha) \circ \varepsilon(\neg\varphi) \overset{(iii)}{\iff}$$

$$N \setminus \varepsilon([\alpha]\neg\neg\varphi) = \rho(\alpha) \circ \varepsilon(\neg\varphi) \overset{(iii)}{\iff} \varepsilon([\alpha]\neg\neg\varphi) = N \setminus (\rho(\alpha) \circ (N \setminus \varepsilon(\varphi)))$$

Η απόδειξη τελείωσε διότι

$$S \in \varepsilon([\alpha]\neg\neg\varphi) \iff [\alpha]\neg\neg\varphi \in S \overset{\star}{\iff} [\alpha]\varphi \in S \iff S \in \varepsilon([\alpha]\varphi)$$

όπου στην $\star$ χρησιμοποιήθηκε το Λήμμα 2.4.2(v) και το γεγονός ότι
$[\alpha]\neg\neg\varphi \leftrightarrow [\alpha]\varphi \in S$ (από Λήμμα 2.4.2(iii), επειδή ισχύει το τυπικό θεώρημα $\vdash [\alpha]\neg\neg\varphi \leftrightarrow [\alpha]\varphi$)

$\square$

Λήμμα 2.4.6
Έστω $\psi \in \Phi$ και $\alpha, \beta \in \Pi$. Τότε:

(i) $\rho(\alpha \cup \beta) = \rho(\alpha) \cup \rho(\beta)$

(ii) $\rho(\alpha;\beta) = \rho(\alpha) \circ \rho(\beta)$

(iii) $\rho(\psi?) = \{(S,S) \in N^2 | S \in \varepsilon(\psi)\}$

Απόδειξη
(i)
Θα αποδειχθούν ξεχωριστά οι δύο κατευθύνσεις της ισοδυναμίας

$$(S,T) \in \rho(\alpha \cup \beta) \iff (S,T) \in \rho(\alpha) \vee (S,T) \in \rho(\beta)$$

$(\Rightarrow)$
Έστω - προς άτοπο - ότι υπήρχαν $\varphi, \psi \in T$ τ.π. $<\alpha> \varphi \notin S \wedge <\beta> \psi \notin S$. Τότε από Λήμμα 2.4.2(iv) θα είχαμε $\neg <\alpha> \varphi \in S \wedge \neg <\beta> \psi \in S$ ή αλλιώς εξ ορισμού (και από γνωστό τυπικό θεώρημα και 2.4.2(iii),(v)) $[\alpha]\neg\varphi \in S \wedge [\beta]\neg\psi \in S$ ή αλλιώς από 2.4.2(vii) $[\alpha]\neg\varphi \wedge [\beta]\neg\psi \in S$ (1)
Όμως το τυπικό θεώρημα $\vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$ δίνει με GEN, ΑΣ2 και MP
$\vdash [\alpha]\neg\varphi \rightarrow [\alpha](\neg\varphi \vee \neg\psi)$. Με ακριβώς ίδιο τρόπο αποδεικνύεται
$\vdash [\beta]\neg\psi \rightarrow [\beta](\neg\varphi \vee \neg\psi)$. Άρα προκύπτει από γνωστό τυπικό θεώρημα
$\vdash [\alpha]\neg\varphi \wedge [\beta]\neg\psi \rightarrow [\alpha](\neg\varphi \vee \neg\psi) \wedge [\beta](\neg\varphi \vee \neg\psi)$.
Οπότε, το ΑΣ4 με γνωστό τυπικό θεώρημα και MP δίνουν
$\vdash [\alpha]\neg\varphi \wedge [\beta]\neg\psi \rightarrow [\alpha \cup \beta](\neg\varphi \vee \neg\psi)$ άρα από 2.4.2(iii)
$[\alpha]\neg\varphi \wedge [\beta]\neg\psi \rightarrow [\alpha\cup\beta](\neg\varphi\vee\neg\psi) \in S$ δηλ. από (1) και 2.4.2(v) $[\alpha\cup\beta](\neg\varphi\vee\neg\psi) \in S$ οπότε από την υπόθεση, τον ορισμό του $\rho(\alpha \cup \beta)$ και το Λήμμα 2.4.3 προκύπτει $\neg\varphi \vee \neg\psi \in T$ δηλ. από γνωστό τυπικό θεώρημα και 2.4.2(iii),(v) έχουμε $\neg(\varphi \wedge \psi) \in T$ άρα από 2.4.2(iv) $\varphi \wedge \psi \notin T$. Άτοπο, από 2.4.2(vii) επειδή $\varphi, \psi \in T$.
Άρα ισχύει ότι

$$\exists \varphi \in \Phi : (\varphi \in T \wedge <\alpha> \varphi \notin S) \Longrightarrow \forall \psi \in \Phi : (\psi \in T \Rightarrow <\beta> \psi \in S) \qquad (2)$$

- Αν $\forall \varphi \in \Phi : (\varphi \in T \Rightarrow <\alpha> \varphi \in S)$, τότε $(S,T) \in \rho(\alpha)$ και τελειώσαμε.
- Αν $\exists \varphi \in \Phi : (\varphi \in T \wedge <\alpha> \varphi \notin S)$, τότε λόγω (2) $(S,T) \in \rho(\beta)$ και τελειώσαμε επίσης.

$(\Leftarrow)$
Έστω ότι $(S,T) \in \rho(\alpha)$ δηλ. $\forall \varphi \in \Phi : (\varphi \in T \Rightarrow <\alpha> \varphi \in S)$. Τότε προφανώς $\forall \varphi \in \Phi : (\varphi \in T \Rightarrow <\alpha> \varphi \in S \vee <\beta> \varphi \in S)$ ή από Λήμμα 2.4.2(vi)
$\forall \varphi \in \Phi : (\varphi \in T \Rightarrow <\alpha> \varphi \vee <\beta> \varphi \in S)$ (3)
Αν ίσχυε ότι $(S,T) \in \rho(\beta)$, τότε με ακριβώς ίδιο τρόπο θα αποδεικνυόταν η (3).
Τώρα όμως παρατηρούμε ότι το ΑΣ4 δίνει (με αντιθετοαναστροφή)
$\vdash <\alpha> \varphi \vee <\beta> \varphi \rightarrow <\alpha \cup \beta> \varphi$ άρα από Λήμμα 2.4.2(iii) έχουμε
$<\alpha> \varphi \vee <\beta> \varphi \rightarrow <\alpha\cup\beta> \varphi \in S$. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι $<\alpha> \varphi \vee <\beta> \varphi \in S$, τότε λόγω Λήμματος 2.4.2(v) θα προκύψει ότι $<\alpha \cup \beta> \varphi \in S$.
Δηλ. αποδείχθηκε ότι $<\alpha> \varphi \vee <\beta> \varphi \in S \Longrightarrow <\alpha \cup \beta> \varphi \in S$.
Έτσι η (3) γίνεται $\forall \varphi \in \Phi : (\varphi \in T \Rightarrow <\alpha \cup \beta> \varphi \in S)$ άρα εξ ορισμού $(S,T) \in \rho(\alpha \cup \beta)$.

(ii)

$(\subseteq)$
Έστω $(S,T) \in \rho(\alpha;\beta)$. Ας θεωρήσουμε επίσης το σύνολο $U' =_{o\rho.} U_1 \cup U_2$ όπου $U_1 =_{o\rho.} \{\varphi \in \Phi | [\alpha]\varphi \in S\}$ και $U_2 =_{o\rho.} \{<\beta> \psi \in \Phi | \psi \in T\}$ καθώς και τυχαία $X_1 =_{o\rho.} \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq U_1$ και $X_2 =_{o\rho.} \{<\beta> \psi_1, \ldots, <\beta> \psi_m\} \subseteq U_2$. Ας οριστούν τέλος οι τύποι $\varphi =_{o\rho.} \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ και $\psi =_{o\rho.} \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m$.
Τότε, από Λήμμα 2.4.2(vii) έπεται ότι $\psi \in T$. Επειδή δε, $(S,T) \in \rho(\alpha;\beta)$, θα ισχύει εξ ορισμού $<\alpha;\beta> \psi \in S$ (1)
Όμως το ΑΣ5 δίνει αμέσως (με αντιθετοαναστροφή) ότι
$\vdash <\alpha;\beta> \psi \rightarrow <\alpha><\beta> \psi$ άρα από Λήμμα 2.4.2(iii) έχουμε
$<\alpha;\beta> \psi \rightarrow <\alpha><\beta> \psi \in S$ δηλ. λόγω (1) και Λήμματος 2.4.2(v) έπεται ότι $<\alpha><\beta> \psi \in S$ (2)
Σκεπτόμενοι με ακριβώς ίδιο τρόπο, βλέπουμε ότι από Λήμμα 2.4.2(vii) προκύπτει

$[\alpha]\varphi_1 \wedge \ldots \wedge [\alpha]\varphi_n \in S \qquad (3)$
και ότι το ΑΣ3 δίνει $\vdash [\alpha]\varphi_1 \wedge \ldots \wedge [\alpha]\varphi_n \to [\alpha]\varphi$ άρα από Λήμμα 2.4.2(iii) έχουμε $[\alpha]\varphi_1 \wedge \ldots \wedge [\alpha]\varphi_n \to [\alpha]\varphi \in S$ δηλ. λόγω (3) και Λήμματος 2.4.2(v) έπεται ότι $[\alpha]\varphi \in S \qquad (4)$
Οπότε, από (4), (2) και Λήμμα 2.4.2(vii) προκύπτει $[\alpha]\varphi \wedge <\alpha><\beta>\psi \in S$.
Χρησιμοποιώντας τώρα το Λήμμα 2.4.4(i) και πάλι το 2.4.2(iii) και (v) παίρνουμε $<\alpha>(\varphi \wedge <\beta>\psi) \in S \qquad (5)$
Έστω τώρα ότι ίσχυε $\vdash \neg(\varphi \wedge <\beta>\psi)$. Τότε από GEN θα παίρναμε
$\vdash \neg <\alpha>(\varphi \wedge <\beta>\psi)$ δηλ. από Λήμμα 2.4.2(iii) $\neg <\alpha>(\varphi \wedge <\beta>\psi) \in S$ κι έτσι από 2.4.2(iv) $<\alpha>(\varphi \wedge <\beta>\psi) \notin S$. Άτοπο, λόγω (5).
Άρα $\nvdash \neg(\varphi \wedge <\beta>\psi) \qquad (6)$
Όμως, από Λήμμα 2.4.4(ii) και τους ορισμούς προκύπτει

$$\vdash \varphi \wedge <\beta>\psi \to \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge <\beta>\psi_1 \wedge \ldots \wedge <\beta>\psi_m$$

πράγμα που σημαίνει με αντιθετοαναστροφή, MP και (6) ότι

$$\nvdash \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge <\beta>\psi_1 \wedge \ldots \wedge <\beta>\psi_m) \qquad (7)$$

δηλ. $\nvdash \neg(\bigwedge X_1 \wedge \bigwedge X_2)$ ή $\nvdash \neg \bigwedge(X_1 \cup X_2)$ πράγμα που ισχύει ακόμα κι αν κάποιο από τα X_1, X_2 είναι κενό. Αφού δε, τα X_1, X_2 ήταν τυχαία πεπερασμένα υποσύνολα των U_1, U_2 αντιστοίχως (δηλ. το $X_1 \cup X_2$ ήταν τυχαίο πεπερασμένο υποσύνολο του $U' = U_1 \cup U_2$), η (7) σημαίνει ότι το U' είναι συνεπές άρα από Λήμμα 2.4.2(ii) υπάρχει μεγιστικώς συνεπές $U \supseteq U'$.
Αν τώρα ισχύει για κάποιο $\varphi \in \Phi$ ότι $[\alpha]\varphi \in S$, τότε εξ ορισμού $\varphi \in U_1 \subseteq U' \subseteq U$. Αυτό σημαίνει εξ ορισμού ότι $(S,U) \in \rho(\alpha)$.
Ομοίως, αν ισχύει για κάποιο $\psi \in \Phi$ ότι $\psi \in T$, τότε εξ ορισμού $<\beta>\psi \in U_2 \subseteq U' \subseteq U$. Αυτό σημαίνει εξ ορισμού ότι $(U,T) \in \rho(\beta)$.
Δηλ. $\exists U \in N : (S,U) \in \rho(\alpha) \wedge (U,T) \in \rho(\beta)$ άρα $(S,T) \in \rho(\alpha) \circ \rho(\beta)$.

($\supseteq$)
Έστω $(S,T) \in \rho(\alpha) \circ \rho(\beta)$. Δηλ. $\exists U \in N : (S,U) \in \rho(\alpha) \wedge (U,T) \in \rho(\beta)$.
Αυτό όμως σημαίνει εξ ορισμού ότι

$$\exists U \in N : \forall \varphi \in \Phi : (\varphi \in U \Rightarrow <\alpha>\varphi \in S) \wedge \forall \psi \in \Phi : (\psi \in T \Rightarrow <\beta>\psi \in U)$$

δηλ. $\forall \psi \in \Phi : (\psi \in T \Rightarrow <\alpha><\beta>\psi \in S) \qquad (8)$
Ακριβώς όπως προηγουμένως, το ΑΣ5 δίνει (με αντιθετοαναστροφή)
$\vdash <\alpha><\beta>\psi \to <\alpha;\beta>\psi$ άρα από Λήμμα 2.4.2(iii) έχουμε
$<\alpha><\beta>\psi \to <\alpha;\beta>\psi \in S$ δηλ. λόγω (8) και Λήμματος 2.4.2(v) έπεται ότι
$\forall \psi \in \Phi : (\psi \in T \Rightarrow <\alpha;\beta>\psi \in S)$ που σημαίνει εξ ορισμού ότι $(S,T) \in \rho(\alpha;\beta)$.

(iii)
Κατ'αρχάς παρατηρούμε ότι το ΑΣ6 δίνει (με αντιθετοαναστροφή)
$\vdash <\psi?>\varphi \leftrightarrow \neg(\psi \to \neg\varphi)$ δηλ. εξ ορισμού $\vdash <\psi?>\varphi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$ άρα από Λήμμα 2.4.2(iii) έχουμε $<\psi?>\varphi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi \in S$. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι $<\psi?>\varphi \in S$, τότε λόγω Λήμματος 2.4.2(v) θα προκύψει ότι $\psi \wedge \varphi \in S$ και αντιστρόφως.
Δηλ. αποδείχθηκε ότι

$$<\psi?>\varphi \in S \iff \psi \wedge \varphi \in S \qquad (1)$$

Τώρα ισχύει η ισοδυναμία

$$(S,T) \in \rho(\psi?) \overset{\text{Ορ.}}{\iff} \forall \varphi \in \Phi : (\varphi \in T \Rightarrow <\psi?>\varphi \in S) \overset{(1)}{\iff}$$

$$\forall\varphi \in \Phi : (\varphi \in T \Rightarrow \psi \wedge \varphi \in S) \stackrel{2.4.2(vii)}{\iff} \forall\varphi \in \Phi : (\varphi \in T \Rightarrow (\psi \in S \wedge \varphi \in S) \iff$$
$$T \subseteq S \wedge \psi \in S \stackrel{\text{T:μεγ.συνεπές}}{\iff} T = S \wedge \psi \in S \iff (S,T) \in \{(S,S) \in N^2 | S \in \varepsilon(\psi)\}$$

□

Πρόταση 2.4.7
Έστω σύνολο N και συναρτήσεις ε, ρ όπως ακριβώς ορίστηκαν στην $(\star)$.
Τότε η δομή $(N, \rho[\Pi], \varepsilon)$ είναι nonstandard μοντέλο Kripke για τη $\Gamma_{\Delta 0}$.

Απόδειξη
Ανακαλώντας τον Ορισμό 2.2.2 περί μοντέλων Kripke για τη $\Gamma_{\Delta 0}$ βλέπουμε ότι ισχύουν για τη δομή $(N, \rho[\Pi], \varepsilon)$ τα ακόλουθα, $\forall\varphi, \chi, \psi \in \Phi$ και $\forall\alpha, \beta, \gamma \in \Pi$:
(για τους προτασιακούς τύπους)

- $\varepsilon(\bot) = \varnothing$ (από Λήμμα 2.4.5(ii))
- $\varepsilon(\psi \to \chi) = (N \setminus \varepsilon(\psi)) \cup \varepsilon(\chi)$ (από Λήμμα 2.4.5(i))
- $\varepsilon([\alpha]\psi) = N \setminus (\rho(\alpha) \circ (N \setminus \varepsilon(\psi)))$ (από Λήμμα 2.4.5(iv))

(για τα προγράμματα)

- $\rho(\beta;\gamma) = \rho(\beta) \circ \rho(\gamma)$ (από Λήμμα 2.4.6(ii))
- $\rho(\beta \cup \gamma) = \rho(\beta) \cup \rho(\gamma)$ (από Λήμμα 2.4.6(i))
- $\rho(\varphi?) = \{(U,U) \in N \times N | U \in \rho(\varphi)\}$ (από Λήμμα 2.4.6(iii))
- Έστω ότι $(S,T) \in \rho(\beta)$.
  Έστω επίσης τυχαίος $\varphi \in \Phi$ τ.π. $[\beta^*]\varphi \in S$ (1)
  Τώρα χρησιμοποιώ τη σχέση (2) που αποδείχθηκε στο Λήμμα 2.4.4(iv), δηλ. ότι $\vdash [\beta^*]\varphi \to [\beta]\varphi$. Άρα από 2.4.2(iii) έπεται ότι $[\beta^*]\varphi \to [\beta]\varphi \in S$ δηλ. από (1) και 2.4.2(v) προκύπτει $[\beta]\varphi \in S$. Οπότε, επειδή $(S,T) \in \rho(\beta)$, έχουμε εξ ορισμού και Λήμματος 2.4.3 ότι $\varphi \in T$. Δηλ. αποδείχθηκε ότι $\forall\varphi \in \Phi : ([\beta^*]\varphi \in S \Longrightarrow \varphi \in T)$ άρα $(S,T) \in \rho(\beta^*)$. Φάνηκε δηλ. ότι $\underline{\rho(\beta) \subseteq \rho(\beta^*)}$.
- Έστω τυχαίος $\varphi \in \Phi$ τ.π. $[\beta^*]\varphi \in S$ (2)
  Από ΑΣ7 προκύπτει ότι $\vdash [\beta^*]\varphi \to \varphi$. Άρα από 2.4.2(iii) έπεται ότι $[\beta^*]\varphi \to \varphi \in S$ δηλ. από (2) και 2.4.2(v) προκύπτει $\varphi \in S$.
  Δηλ. αποδείχθηκε ότι $\forall\varphi \in \Phi : ([\beta^*]\varphi \in S \Longrightarrow \varphi \in S)$ άρα $(S,S) \in \rho(\beta^*)$ που σημαίνει ότι <u>η $\rho(\beta^*)$ είναι ανακλαστική</u>.
- Έστω ότι $(S,U), (U,T) \in \rho(\beta^*)$.
  Έστω επίσης τυχαίος $\varphi \in \Phi$ τ.π. $[\beta^*]\varphi \in S$ (3)
  Τώρα χρησιμοποιώ τη σχέση που αποδείχθηκε στο Λήμμα 2.4.4(iv) μετά τη σχέση (4), δηλ. ότι $\vdash [\beta^*]\varphi \to [\beta^*][\beta^*]\varphi$. Άρα από 2.4.2(iii) έπεται ότι $[\beta^*]\varphi \to [\beta^*][\beta^*]\varphi \in S$ δηλ. από (3) και 2.4.2(v) προκύπτει $[\beta^*][\beta^*]\varphi \in S$. Οπότε, επειδή $(S,U) \in \rho(\beta^*)$, έχουμε εξ ορισμού και Λήμματος 2.4.3 ότι $[\beta^*]\varphi \in U$. Επειδή δε, $(U,T) \in \rho(\beta^*)$, έχουμε και πάλι εξ ορισμού και Λήμματος 2.4.3 ότι $\varphi \in T$.
  Δηλ. αποδείχθηκε ότι $\forall\varphi \in \Phi : ([\beta^*]\varphi \in S \Longrightarrow \varphi \in T)$ άρα $(S,T) \in \rho(\beta^*)$. Φάνηκε δηλ. ότι <u>η $\rho(\beta^*)$ είναι μεταβατική</u>.

- Το ΑΣ7 δίνει $\vdash [\beta^*]\varphi \leftrightarrow \varphi \wedge [\beta][\beta^*]\varphi$ άρα από 2.4.2(iii) προκύπτει ότι $[\beta^*]\varphi \leftrightarrow \varphi \wedge [\beta][\beta^*]\varphi \in U$ για κάθε μεγιστικώς συνεπές U, δηλ. $\forall U \in N$. Τότε όμως, από 2.4.2(v) έπεται

  $$\forall U \in N : ([\beta^*]\varphi \in U \iff \varphi \wedge [\beta][\beta^*]\varphi \in U)$$

  δηλ. εξ ορισμού της συνάρτησης ε

  $$\forall U \in N : (U \in \varepsilon([\beta^*]\varphi) \iff U \in \varepsilon(\varphi \wedge [\beta][\beta^*]\varphi))$$

  άρα αποδείχθηκε ότι $\underline{\varepsilon([\beta^*]\varphi) = \varepsilon(\varphi \wedge [\beta][\beta^*]\varphi)}$.
- Το ΑΣ8 και το 2.4.4(iv) δίνουν $\vdash [\beta^*]\varphi \leftrightarrow \varphi \wedge [\beta^*](\varphi \to [\beta]\varphi)$ άρα ακριβώς όπως προηγουμένως προκύπτει ότι $\underline{\varepsilon([\beta^*]\varphi) = \varepsilon(\varphi \wedge [\beta^*](\varphi \to [\beta]\varphi))}$.

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι η δομή $\mathfrak{N}_{mc} =_{o\rho.} (N, \rho[\Pi], \varepsilon)$ αποτελεί nonstandard μοντέλο Kripke για τη γλώσσα $\Gamma_{\Delta 0}$.

□

Μετά την Πρόταση 2.4.7 ο παρακάτω συμβολισμός είναι συνεπής με εκείνον του Ορισμού 2.2.2:

$\varphi^{\mathfrak{N}_{mc}} =_{o\rho.} \varepsilon(\varphi)$ όπου $\varphi \in \Phi$

$\alpha^{\mathfrak{N}_{mc}} =_{o\rho.} \rho(\alpha)$ όπου $\alpha \in \Pi$

Θεώρημα 2.4.8 (Πληρότητας του $\mathcal{A}_1$ της Π.Δ.Λ.)
Κάθε έγκυρος τύπος αποτελεί τυπικό θεώρημα του $\mathcal{A}_1$, δηλ. $\forall \varphi \in \Phi$ ισχύει

$$\models \varphi \Longrightarrow\ \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$$

Απόδειξη
Θα αποδειχθεί ότι αν ο τυχαίος $\psi \in \Phi$ είναι συνεπής, τότε είναι ικανοποιήσιμος σε κάποιο standard μοντέλο Kripke. (1)
Αν λοιπόν ο ψ είναι συνεπής, τότε από Λήμμα 2.4.2(ii) θα ανήκει σε κάποιο μεγιστικώς συνεπές σύνολο τύπων U, το οποίο ανήκει στο N, το σύνολο των κόσμων της δομής $\mathfrak{N}_{mc}$, η οποία αποτελεί nonstandard μοντέλο Kripke λόγω της Πρότασης 2.4.7. Έτσι εξ ορισμού, αφού $\psi \in U$, θα ισχύει

$$U \in \varepsilon(\psi) \qquad \text{ή αλλιώς} \qquad U \in \psi^{\mathfrak{N}_{mc}} \qquad (2)$$

Τότε όμως, από Λήμμα 2.3.3(ii) έπεται ότι $\psi \in FL(\psi)$ κι έτσι από (2) και από το Λήμμα Φιλτραρίσματος σε nonstandard μοντέλα (Λήμμα 2.3.12) προκύπτει ότι

$$[U/\sim_\psi] \in \psi^{\mathfrak{N}_{mc}/\sim_\psi} \qquad \text{ή αλλιώς} \qquad \mathfrak{N}_{mc}/\sim_\psi, [U/\sim_\psi] \models \psi$$

όπου $\mathfrak{N}_{mc}/\sim_\psi$ είναι standard μοντέλο Kripke (το επονομαζόμενο - όπως είδαμε - φιλτράρισμα του $\mathfrak{N}_{mc}$ από το $FL(\psi)$). Άρα ο ψ είναι ικανοποιήσιμος σε κάποιο standard μοντέλο Kripke κι έτσι αποδείχθηκε η (1), η οποία θα μπορούσε να γραφεί και ως εξής:

$$\forall \psi \in \Phi : (\nvdash \neg\psi \Longrightarrow \exists \mathfrak{M}, \exists u \in W : \mathfrak{M}, u \models \psi) \qquad \text{ή}$$

$$\forall \psi \in \Phi : (\forall \mathfrak{M}, \forall u \in W : \mathfrak{M}, u \models \neg\psi \Longrightarrow \vdash \neg\psi) \qquad \text{δηλ.}$$

$$\forall \psi \in \Phi : (\models \neg\psi \Longrightarrow \vdash \neg\psi)$$

Αν εφαρμοστεί η τελευταία αυτή σχέση για $\neg\varphi$, τότε προκύπτει

$$\models \neg\neg\varphi \Longrightarrow \vdash \neg\neg\varphi$$

κι έτσι, χρησιμοποιώντας γνωστό τυπικό θεώρημα και MP παίρνουμε

$$\models \varphi \Longrightarrow \vdash \varphi$$

□

Παρατήρηση 2.4.9
Στην κλασική λογική το Θεώρημα Πληρότητας μπορεί να γραφεί και με τη μορφή $\varphi \models \psi \Longrightarrow \varphi \vdash \psi$, αφού οι δύο αυτές μορφές είναι ισοδύναμες λόγω του Θεωρήματος Απαγωγής:

$$\varphi \vdash \psi \iff \vdash \varphi \to \psi$$

Όμως δυστυχώς, στην Π.Δ.Λ. το Θεώρημα Απαγωγής δεν ισχύει.
Αυτό φαίνεται αμέσως, αν παρατηρήσουμε ότι για $\varphi \in \Phi$ και $\alpha \in \Pi$ ισχύει $\varphi \vdash [\alpha]\varphi$ (αφού προκύπτει αμέσως ο $[\alpha]\varphi$ από τον φ με GEN) ενώ δεν ισχύει πάντα $\vdash \varphi \to [\alpha]\varphi$.

3 Η Πρωτοβάθμια Δυναμική Λογική (ΔΛ)

3.1 Η γλώσσα $\Gamma_{\Delta 1}$ (Συντακτικό)

Για μία γλώσσα $\Gamma_{\Delta 1}$ της ΔΛ ορίζονται οι εξής έννοιες:

Ορισμός 3.1.1
Το σύνολο των συμβόλων $\Sigma(\Gamma_{\Delta 1})$ της $\Gamma_{\Delta 1}$ είναι η ένωση των ακόλουθων συνόλων:

- $M(\Gamma_{\Delta 1}) =_{o\rho.} \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$
  μεταβλητές
- $\{\perp\}$
  αντίφαση
- $\{\rightarrow\}$
  σύνδεσμος τύπων: συνεπαγωγή
- $\{;, \cup, *\}$
  σύνδεσμοι προγραμμάτων: σύνθεση, επιλογή, επανάληψη
- $\{[,], ?\}$
  μικτοί σύνδεσμοι: αναγκαιότητα, test
- $\{=, :=, \forall, (,)\}$
  ισότητα, εκχώρηση τιμής, καθολικός ποσοδείκτης, παρενθέσεις
- $K\alpha\tau(\Gamma_{\Delta 1}) =_{o\rho.} \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}\{P_{n,i} | i \in [0, m_n)\}$
  n-μελή κατηγορηματικά σύμβολα (όπου $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, m_n \in \mathbb{N}$)
- $\Sigma\upsilon\nu(\Gamma_{\Delta 1}) =_{o\rho.} \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}\{f_{n,i} | i \in [0, p_n)\}$
  n-θέσια συναρτησιακά σύμβολα (όπου $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p_n \in \mathbb{N}$)
- $\Sigma\tau(\Gamma_{\Delta 1}) =_{o\rho.} \{c_i | i \in K\}$
  σταθερές (όπου K αρχικό τμήμα του $\mathbb{N}$ ή ίσο με το $\mathbb{N}$)

Δ

Ορισμός 3.1.2
Κάθε στοιχείο του συνόλου $\Sigma(\Gamma_{\Delta 1})^*$ καλείται *έκφραση*.
Το σύνολο των *όρων* $O(\Gamma_{\Delta 1})$ της $\Gamma_{\Delta 1}$ είναι το σύνολο που ορίζεται αναδρομικώς ως εξής:
Μία έκφραση ε καλείται *όρος* ανν

- $\varepsilon \in M(\Gamma_{\Delta 1}) \cup \Sigma\tau(\Gamma_{\Delta 1})$ ή
- $\varepsilon \equiv f\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$

  όπου f είναι n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο και $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ είναι ήδη κατασκευασμένοι όροι.

Δ

Προς διευκόλυνσή μας, γράφουμε $f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, αντί για $f\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$.

Ορισμός 3.1.3

- Το σύνολο των *ατομικών τύπων* $AT(\Gamma_{\Delta 1})$ είναι το σύνολο που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} AT(\Gamma_{\Delta 1}) =_{o\rho.} \{\varepsilon \in \Sigma(\Gamma_{\Delta 1})^* \mid\ & \exists P \in K\alpha\tau(\Gamma_{\Delta 1}), t_1, \ldots, t_n \in O(\Gamma_{\Delta 1}) : \\ & \varepsilon \equiv \bot \quad \acute{\eta} \\ & \varepsilon \equiv t_1 = t_2 \quad \acute{\eta} \\ & \varepsilon \equiv P t_1 \cdots t_n \} \end{aligned}$$

- Το σύνολο των *ατομικών προγραμμάτων* $A\Pi(\Gamma_{\Delta 1})$ είναι το σύνολο που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} A\Pi(\Gamma_{\Delta 1}) =_{o\rho.} \{\varepsilon \in \Sigma(\Gamma_{\Delta 1})^* \mid\ & \exists x \in M(\Gamma_{\Delta 1}), t \in O(\Gamma_{\Delta 1}) : \\ & \varepsilon \equiv x := t\} \end{aligned}$$

Δ

Τώρα μπορεί να οριστεί το σύνολο $T(\Gamma_{\Delta 1})$ των τύπων και το σύνολο $\Pi(\Gamma_{\Delta 1})$ των προγραμμάτων της $\Gamma_{\Delta 1}$.

Ορισμός 3.1.4
α)
Μία έκφραση φ είναι *τύπος* ανν

- $\varphi \in AT(\Gamma_{\Delta 1})$ ή
- είναι της μορφής:
  $(\psi \to \chi)$ ή
  $\forall x \psi$ ή
  $[\alpha]\psi$

  όπου ψ, χ είναι ήδη κατασκευασμένοι τύποι, α ήδη κατασκευασμένο πρόγραμμα και $x \in M(\Gamma_{\Delta 1})$

β)
Μία έκφραση α είναι *πρόγραμμα* ανν

- $\alpha \in A\Pi(\Gamma_{\Delta 1})$ ή
- είναι της μορφής:
  $(\beta; \gamma)$ ή
  $(\beta \cup \gamma)$ ή
  (β^*) ή
  $(\varphi?)$

  όπου β, γ είναι ήδη κατασκευασμένα προγράμματα και φ ήδη κατασκευασμένος τύπος.

Δ

Οι παραπάνω ορισμοί έχουν «καλώς», πράγμα που αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο όπως στο Λήμμα 2.1.3. Η απόδειξη στηρίζεται στο Θεώρημα Ταυτόχρονης Αναδρομής.

Παρατήρηση 3.1.5
Εκτός των συντομογραφιών που ισχύουν στην ΠΔΛ χρησιμοποιούνται επιπλέον και οι εξής:
$t_1 \neq t_2 =_{ορ.} \neg(t_1 = t_2)$ όπου t_1, t_2: όροι
$\exists x\psi =_{ορ.} \neg(\forall x(\neg\psi))$

***Φτωχό και πλούσιο* test**
Σε πολλές περιπτώσεις θεωρούμε ότι κάθε πρόγραμμα μιας γλώσσας της ΔΛ, όποτε περιέχει test τύπου, τότε αυτός είναι τύπος της πρωτοβάθμιας κλασικής λογικής δίχως ποσοδείκτες. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για *ΔΛ φτωχού test* και ο ορισμός των συνόλων $T(\Gamma_{\Delta 1})$ και $\Pi(\Gamma_{\Delta 1})$ δεν απαιτεί χρήση του Θεωρήματος Ταυτόχρονης Αναδρομής, αφού μπορεί να χρησιμοποιηθεί το Θεώρημα Αναδρομής (το απλό) για τον ορισμό των τύπων της πρωτοβάθμιας κλασικής λογικής (ως υποπερίπτωση της ΔΛ), κατόπιν για τον ορισμό των προγραμμάτων της ΔΛ και τέλος για τον ορισμό των τύπων της ΔΛ.
Στην περίπτωση που δεν έχουμε αυτόν τον περιορισμό στα test, αναφερόμαστε στη *ΔΛ πλούσιου test* ή απλά ΔΛ.

Αιτιοκρατικά προγράμματα while
Συχνά θεωρούμε ως προγράμματα μιας γλώσσας της ΔΛ, μόνον εκείνα που καλούνται *αιτιοκρατικά προγράμματα while (απw)* και που ανήκουν στο σύνολο $A\Pi W(\Gamma_{\Delta 1}) \subset \Pi(\Gamma_{\Delta 1})$, το οποίο ορίζεται με ταυτόχρονη αναδρομή (με το σύνολο $TA\Pi W(\Gamma_{\Delta 1}) \subset T(\Gamma_{\Delta 1})$ των τύπων αιτιοκρατικών προγραμμάτων while (ταπw))ως εξής:

Ορισμός 3.1.6
α)
Ο $\varphi \in T(\Gamma_{\Delta 1})$ είναι ταπw ανν

- $\varphi \in AT(\Gamma_{\Delta 1})$ ή
- είναι της μορφής:
  $(\psi \to \chi)$ ή
  $\forall x\psi$ ή
  $[\alpha]\psi$

όπου ψ, χ είναι ήδη κατασκευασμένοι ταπw, α ήδη κατασκευασμένο απw και $x \in M(\Gamma_{\Delta 1})$.
β)
Το $\gamma \in \Pi(\Gamma_{\Delta 1})$ είναι απw ανν

- $\gamma \in A\Pi(\Gamma_{\Delta 1})$ ή
  $\gamma \equiv$ **fail** ή
  $\gamma \equiv$ **skip** ή
- $\gamma \equiv \alpha;\beta$ ή
  $\gamma \equiv$ **if** φ **then** α **else** β ή
  $\gamma \equiv$ **while** φ **do** α

όπου α, β είναι απw και φ είναι ταπw.

Δ

Αναιτιοκρατικά προγράμματα while
Το σύνολο $AN\Pi W(\Gamma_{\Delta 1}) \subset \Pi(\Gamma_{\Delta 1})$ των *αναιτιοκρατικών προγραμμάτων while (ανπw)* ορίζεται όπως το $A\Pi W(\Gamma_{\Delta 1})$ με τη διαφορά ότι στη δεύτερη περίπτωση του προηγούμενου αναδρομικού ορισμού πρέπει να προστεθεί:
$\gamma \equiv \alpha \cup \beta$
(Ο ορισμός αυτός γίνεται και πάλι με ταυτόχρονη αναδρομή με το αντίστοιχο σύνολο τύπων αναιτιοκρατικών προγραμμάτων while $TAN\Pi W(\Gamma_{\Delta 1})$.)
Έτσι, η μόνη διαφορά των $AN\Pi W(\Gamma_{\Delta 1})$ από τα $\Pi(\Gamma_{\Delta 1})$ είναι στη χρήση του test (*) και της επανάληψης (?). Για παράδειγμα:
$\varphi? \in \Pi(\Gamma_{\Delta 1}) \setminus AN\Pi W(\Gamma_{\Delta 1})$, αν $\varphi \neq \bot$ και $\varphi \neq \top$.
$\alpha^* \in \Pi(\Gamma_{\Delta 1}) \setminus AN\Pi W(\Gamma_{\Delta 1})$, πάντοτε, ακόμα κι αν $\alpha \in AN\Pi W(\Gamma_{\Delta 1})$.
($\mathbf{while}\, \varphi\, \mathbf{do}\, \alpha$)$\in \Pi(\Gamma_{\Delta 1}) \setminus AN\Pi W(\Gamma_{\Delta 1})$, αν $\alpha \notin AN\Pi W(\Gamma_{\Delta 1})$ ή $\varphi \notin TAN\Pi W(\Gamma_{\Delta 1})$.

Παραδείγματα 3.1.7
Έστω η γλώσσα $\Gamma_{\Delta 1}^{\theta\alpha}$ της ΔΛ, η οποία έχει μόνο τα (γνωστά) συναρτησιακά σύμβολα $', \oplus, \odot$ (το πρώτο μονοθέσιο, τα άλλα δύο διθέσια) και τη σταθερά $\mathbf{0}$.
α) $\forall x < y := \mathbf{0}; \mathbf{while}\ y \neq x\ \mathbf{do}\ y := y' > \top$
είναι τύπος της $\Gamma_{\Delta 1}^{\theta\alpha}$ όπου το πρόγραμμα μέσα στα $<, >$ είναι απw.
β) $\forall x < y := \mathbf{0}; (y := y')^* > (x = y)$
είναι τύπος της $\Gamma_{\Delta 1}^{\theta\alpha}$ όπου το πρόγραμμα μέσα στα $<, >$ δεν είναι απw.

3.2 Ερμηνεία της $\Gamma_{\Delta 1}$ (Σημασιολογία)

Στην παράγραφο αυτή θα οριστεί η ερμηνεία των συντακτικών αντικειμένων μιας τυχαίας γλώσσας $\Gamma_{\Delta 1}$ της Δυναμικής Λογικής. Από την ερμηνεία αυτή θα διαφανεί και ο λόγος επιλογής του ονόματος «δυναμική» της λογικής αυτής. Διότι θα γίνει προφανές ότι τα προγράμματα θα αλλάζουν (δυναμικά) τις τιμές των μεταβλητών μέσω ακολουθιών εκχωρήσεων τιμών $x := t$, οι οποίες θα καθορίζονται από τις αληθοτιμές των tests που θα εκτελούνται κατά τη διάρκεια του «υπολογισμού».

Ορισμός 3.2.1
Μια *δομή* (*ή ερμηνεία*) $\mathcal{A}$ για τη $\Gamma_{\Delta 1}$ αποτελείται από:

- Ένα μη κενό σύνολο, στο οποίο παίρνουν τιμές οι μεταβλητές.
  Καλείται *σύμπαν* της $\mathcal{A}$ και συμβολίζεται με $|\mathcal{A}|$.
- Ένα (ίσως κενό) σύνολο, στο οποίο ερμηνεύονται τα κατηγορηματικά σύμβολα.
  Είναι το $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{P_{n,i}^{\mathcal{A}} \subseteq |\mathcal{A}|^n \quad | i \in [0, m_n)\}$
  (όπου $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, m_n \in \mathbb{N}$).
  Κάθε κατηγορηματικό σύμβολο $P_{n,i}$ ερμηνεύεται με τη σχέση $P_{n,i}^{\mathcal{A}}$.
- Ένα (ίσως κενό) σύνολο, στο οποίο ερμηνεύονται τα συναρτησιακά σύμβολα.
  Είναι το $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{f_{n,i}^{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^n \to |\mathcal{A}| \quad | i \in [0, p_n)\}$
  (όπου $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p_n \in \mathbb{N}$).
  Κάθε συναρτησιακό σύμβολο $f_{n,i}$ ερμηνεύεται με τη συνάρτηση $f_{n,i}^{\mathcal{A}}$.

- Ένα (ίσως κενό) σύνολο, στο οποίο ερμηνεύονται οι σταθερές.
  Είναι το $\{c_i^{\mathcal{A}} \in |\mathcal{A}| \quad | i \in K\}$
  (όπου K αρχικό τμήμα του $\mathbb{N}$ ή ίσο με το $\mathbb{N}$).
  Κάθε σταθερά c_i ερμηνεύεται με το στοιχείο του σύμπαντος $c_i^{\mathcal{A}}$.

$\triangle$

Ορισμός 3.2.2
Έστω δομή $\mathcal{A}$ για τη $\Gamma_{\Delta 1}$.

- *Αποτίμηση* στην $\mathcal{A}$ ονομάζεται κάθε συνάρτηση $u : M(\Gamma_{\Delta 1}) \to |\mathcal{A}|$
- $u[x|a]$, όπου $x \in M(\Gamma_{\Delta 1})$ και $a \in |\mathcal{A}|$, είναι η αποτίμηση στην $\mathcal{A}$, για την οποία ισχύει:
$$u[x|a](y) = \begin{cases} a & \text{αν} \quad y = x \\ u(y) & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
- w_a, όπου $a \in |\mathcal{A}|$, είναι η αποτίμηση στην $\mathcal{A}$, για την οποία ισχύει:
  $w_a(x) = a, \forall x \in M(\Gamma_{\Delta 1})$

$\triangle$

Πρόταση 3.2.3
Για κάθε αποτίμηση u στη δομή $\mathcal{A}$ για τη $\Gamma_{\Delta 1}$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\overline{u} : O(\Gamma_{\Delta 1}) \to |\mathcal{A}|$ τ.π.:

- $\overline{u}(x) = u(x), \forall x \in M(\Gamma_{\Delta 1})$
- $\overline{u}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{A}}(\overline{u}(t_1), \ldots, \overline{u}(t_n))$,
  $\forall t_1, \ldots, t_n \in O(\Gamma_{\Delta 1})$, $\forall f$: n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο
- $\overline{u}(c) = c^{\mathcal{A}}, \forall c \in \Sigma\tau(\Gamma_{\Delta 1})$

Η απόδειξη είναι άμεση λόγω του αναδρομικού ορισμού των όρων.

Ορισμός 3.2.4
Σύνολο καταστάσεων της δομής $\mathcal{A}$ για τη $\Gamma_{\Delta 1}$ καλείται το:

$$S^{\mathcal{A}} =_{\text{ορ.}} \{w_a[x_{i_1}/a_1]\cdots[x_{i_n}/a_n] | \quad a, a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|, \; x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in M(\Gamma_{\Delta 1}), n, i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}\}$$

$\triangle$

Τώρα μπορεί να δοθεί ερμηνεία στους τύπους και τα προγράμματα με χρήση του Θεωρήματος Ταυτόχρονης Αναδρομής.
Η ερμηνεία ενός τύπου φ θα είναι ένα υποσύνολο του $S^{\mathcal{A}}$, το οποίο θα περιέχει εκείνες ακριβώς τις αποτιμήσεις του $S^{\mathcal{A}}$, για τις οποίες αληθεύει ο φ.
Η ερμηνεία ενός προγράμματος α θα είναι μία σχέση στο $S^{\mathcal{A}}$ - που καλείται *σχέση εισόδου/εξόδου* του α - η οποία θα περιέχει εκείνα ακριβώς τα ζεύγη (u, v), για τα οποία θα ισχύει ότι με «είσοδο» u στο πρόγραμμα α, προκύπτει ως «έξοδος» η αποτίμηση των μεταβλητών v. Ιδού λοιπόν ο ορισμός:

Ορισμός 3.2.5
Έστω δομή $\mathcal{A}$ για τη $\Gamma_{\Delta 1}$.
α)
Η *ερμηνεία* στην $\mathcal{A}$ - συμβ. $\varphi^{\mathcal{A}}$ - του τύπου φ είναι το παρακάτω σύνολο, ανάλογα με την περίπτωση για τον φ (επέκταση του ορισμού αλήθειας του Tarski):

- $\bot^{\mathcal{A}} =_{\text{ορ.}} \varnothing$
- αν $t_1, t_2 \in O(\Gamma_{\Delta 1})$, τότε
  $(t_1 = t_2)^{\mathcal{A}} =_{\text{ορ.}} \{u \in S^{\mathcal{A}} | \overline{u}(t_1) = \overline{u}(t_2)\}$
- αν $P \in K\alpha\tau(\Gamma_{\Delta 1}), t_1, \ldots, t_n \in O(\Gamma_{\Delta 1})$, τότε
  $(Pt_1 \cdots t_n)^{\mathcal{A}} =_{\text{ορ.}} \{u \in S^{\mathcal{A}} | (\overline{u}(t_1), \ldots, \overline{u}(t_2)) \in P^{\mathcal{A}}\}$
- αν $\psi, \chi \in T(\Gamma_{\Delta 1})$, τότε
  $(\psi \to \chi)^{\mathcal{A}} =_{\text{ορ.}} \{u \in S^{\mathcal{A}} | u \in \psi^{\mathcal{A}} \Rightarrow u \in \chi^{\mathcal{A}}\}$
- αν $x \in M(\Gamma_{\Delta 1})$ και $\psi \in T(\Gamma_{\Delta 1})$, τότε
  $(\forall x \psi)^{\mathcal{A}} =_{\text{ορ.}} \{u \in S^{\mathcal{A}} | \forall a \in |\mathcal{A}| : u[x/a] \in \psi^{\mathcal{A}}\}$
- αν $\alpha \in \Pi(\Gamma_{\Delta 1})$ και $\psi \in T(\Gamma_{\Delta 1})$, τότε
  $([\alpha]\psi)^{\mathcal{A}} =_{\text{ορ.}} \{u \in S^{\mathcal{A}} | \forall v \in S^{\mathcal{A}} : ((u, v) \in \alpha^{\mathcal{A}} \Rightarrow v \in \psi^{\mathcal{A}})\}$

β)
Η *ερμηνεία* στην $\mathcal{A}$ - συμβ. $\alpha^{\mathcal{A}}$ - του προγράμματος α είναι η παρακάτω σχέση, ανάλογα με την περίπτωση για το α:

- αν $x \in M(\Gamma_{\Delta 1})$ και $t \in O(\Gamma_{\Delta 1})$, τότε
  $(x := t)^{\mathcal{A}} =_{\text{ορ.}} \{(u, u[x/\overline{u}(t)]) \in S^{\mathcal{A}} \times S^{\mathcal{A}} | u \in S^{\mathcal{A}}\}$
- αν $\beta, \gamma \in \Pi(\Gamma_{\Delta 1})$, τότε
  $$\begin{aligned}(\beta;\gamma)^{\mathcal{A}} &=_{\text{ορ.}} \beta^{\mathcal{A}} \circ \gamma^{\mathcal{A}} = \\ &= \{(u, v) \in S^{\mathcal{A}} \times S^{\mathcal{A}} | \exists w \in S^{\mathcal{A}} : (u, w) \in \beta^{\mathcal{A}} \wedge (w, v) \in \gamma^{\mathcal{A}}\}\end{aligned}$$
- αν $\beta, \gamma \in \Pi(\Gamma_{\Delta 1})$, τότε
  $(\beta \cup \gamma)^{\mathcal{A}} =_{\text{ορ.}} \beta^{\mathcal{A}} \cup \gamma^{\mathcal{A}}$
- αν $\beta \in \Pi(\Gamma_{\Delta 1})$, τότε
  $$\begin{aligned}(\beta^*)^{\mathcal{A}} &=_{\text{ορ.}} \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\beta^{\mathcal{A}})^n = \\ &= \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\beta^{\mathcal{A}} \circ \cdots \circ \beta^{\mathcal{A}}}_{n \text{ φορές}} = \\ &= \{(u, v) \in S^{\mathcal{A}} \times S^{\mathcal{A}} | \quad \begin{aligned}&\exists n \in \mathbb{N}, \exists v_0, \ldots, v_n \in S^{\mathcal{A}} : \\ &u = v_0 \wedge v = v_n \wedge \\ &\forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i < n \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \in \beta^{\mathcal{A}})\}\end{aligned}\end{aligned}$$
- αν $\varphi \in T(\Gamma_{\Delta 1})$, τότε
  $(\varphi?)^{\mathcal{A}} =_{\text{ορ.}} \{(u, u) \in S^{\mathcal{A}} \times S^{\mathcal{A}} | u \in \varphi^{\mathcal{A}}\}$

Δ

Ικανοποιησιμότητα και Εγκυρότητα

Ορισμός 3.2.6
α)
Έστω $\mathcal{A}$ δομή για τη $\Gamma_{\Delta 1}$, u κατάσταση της $\mathcal{A}$ (δηλ. $u \in S^{\mathcal{A}}$) και φ τύπος της $\Gamma_{\Delta 1}$. Θα λέμε ότι ο φ:

- *αληθεύει για την u στην $\mathcal{A}$* - συμβ. $\mathcal{A}, u \vDash \varphi$ - ανν εξ'ορισμού $u \in \varphi^{\mathcal{A}}$.
- είναι *$\mathcal{A}$-έγκυρος* - συμβ. $\mathcal{A} \vDash \varphi$ - ανν εξ'ορισμού $\forall u \in S^{\mathcal{A}} : \mathcal{A}, u \vDash \varphi$.
  Τότε, η $\mathcal{A}$ καλείται *μοντέλο* του φ.

- είναι *έγκυρος* - συμβ. $\models \varphi$ - ανν εξ'ορισμού για κάθε δομή $\mathcal{A}$ ισχύει $\mathcal{A} \models \varphi$.
- είναι *ικανοποιήσιμος* ανν εξ'ορισμού υπάρχει δομή $\mathcal{A}$ και κατάσταση u της $\mathcal{A}$ τ.π. $\mathcal{A}, u \models \varphi$.

β)
Έστω $\varphi \in T(\Gamma_{\Delta 1})$ και $\Sigma \subseteq T(\Gamma_{\Delta 1})$.
Ο φ καλείται *λογική συνέπεια* του Σ - συμβ. $\Sigma \models \varphi$ - ανν εξ'ορισμού για κάθε δομή $\mathcal{A}$ για τη $\Gamma_{\Delta 1}$ και κατάσταση u της $\mathcal{A}$ ισχύει:

$$\mathcal{A}, u \models \Sigma \Longrightarrow \mathcal{A}, u \models \varphi$$

Δ

Από τους παραπάνω ορισμούς και τον ορισμό αλήθειας του Tarski για την κλασική λογική προκύπτει αμέσως το ακόλουθο

Πόρισμα 3.2.7
Έστω Γ_1 ο περιορισμός στην κλασική λογική μιας $\Gamma_{\Delta 1}$, $\mathcal{A}$ δομή για τη $\Gamma_{\Delta 1}$, u κατάσταση της $\mathcal{A}$ και φ τύπος της Γ_1. Τότε

$$\mathcal{A}, u \models \varphi \iff \mathcal{A} \models \varphi[u]$$

Για τους υπόλοιπους τύπους, οι οποίοι ανήκουν στο σύνολο $T(\Gamma_{\Delta 1}) \setminus T(\Gamma_1)$ και είναι της μορφής $[\alpha]\varphi$ μπορεί να ειπωθεί - ατύπως - το εξής:
$\mathcal{A}, u \models [\alpha]\varphi$ σημαίνει ότι κάθε τερματίζων υπολογισμός του προγράμματος α που ξεκινά από την κατάσταση u, τερματίζει σε κατάσταση, για την οποία αληθεύει ο φ.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα έγκυρου τύπου (δηλ. τύπου, για τον οποίον κάθε δομή αποτελεί μοντέλο). Ο τρόπος απόδειξης της εγκυρότητας άλλων τύπων είναι ο ίδιος · ακολουθώντας απλώς τους ορισμούς.

Παράδειγμα 3.2.8
Έστω γλώσσα $\Gamma_{\Delta 1}$ που περιέχει τουλάχιστον το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P και τα μονοθέσια συναρτησιακά σύμβολα f και g. Τότε ο ακόλουθος τύπος είναι έγκυρος:

$$P(f(x), g(x)) \rightarrow < y := f(x); z := g(x) > P(y, z)$$

(Χρησιμοποιούνται για λόγους απλούστευσης της διατύπωσης οι μεταβλητές x, y, z αντί των x_i, x_j, x_k που θα ήταν τυπικώς το σωστό)
Απόδειξη
Έστω τυχαία δομή $\mathcal{A}$ και τυχαία κατάσταση u της $\mathcal{A}$. Θα ισχύει, εφαρμόζοντας απλώς τους ορισμούς:

$$\mathcal{A}, u \models P(f(x), g(x)) \rightarrow < y := f(x); z := g(x) > P(y, z) \iff$$

$$u \in (P(f(x), g(x)) \rightarrow < y := f(x); z := g(x) > P(y, z))^{\mathcal{A}} \iff$$

$$(u \in (P(f(x), g(x)))^{\mathcal{A}} \Rightarrow u \in (< y := f(x); z := g(x) > P(y, z))^{\mathcal{A}}) \iff$$

$$(P^{\mathcal{A}}(\overline{u}(f(x)), \overline{u}(g(x))) \Rightarrow u \in (([y := f(x); z := g(x)]\neg P(y, z)) \rightarrow \bot)^{\mathcal{A}}) \iff$$

$$(P^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(\overline{u}(x)), g^{\mathcal{A}}(\overline{u}(x))) \Rightarrow (u \in ([y := f(x); z := g(x)]\neg P(y,z))^{\mathcal{A}} \Rightarrow u \in \varnothing)) \iff$$

$$(P^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(u(x)), g^{\mathcal{A}}(u(x))) \Rightarrow (u \notin \varnothing \Rightarrow u \notin ([y := f(x); z := g(x)]\neg P(y,z))^{\mathcal{A}})) \iff$$

$$\begin{aligned}&(P^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(u(x)), g^{\mathcal{A}}(u(x))) \Rightarrow \\ &\exists v \in S^{\mathcal{A}} : ((u,v) \in (y := f(x); z := g(x))^{\mathcal{A}} \wedge v \in (P(y,z))^{\mathcal{A}})) \iff\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(P^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(u(x)), g^{\mathcal{A}}(u(x))) \Rightarrow \\ &\exists v \in S^{\mathcal{A}} : (P^{\mathcal{A}}(\overline{v}(y), \overline{v}(z)) \wedge \\ &\exists w \in S^{\mathcal{A}} : ((u,w) \in (y := f(x))^{\mathcal{A}} \wedge (w,v) \in (z := g(x))^{\mathcal{A}}))) \iff\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(P^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(u(x)), g^{\mathcal{A}}(u(x))) \Rightarrow \\ &\exists v \in S^{\mathcal{A}} : (P^{\mathcal{A}}(v(y), v(z)) \wedge \\ &\exists w \in S^{\mathcal{A}} : (w = u[y/\overline{u}(f(x))] \wedge v = w[z/\overline{w}(g(x))]))) \iff\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(P^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(u(x)), g^{\mathcal{A}}(u(x))) \Rightarrow \\ &\exists v, w \in S^{\mathcal{A}} : (P^{\mathcal{A}}(v(y), v(z)) \wedge \\ &w = u[y/f^{\mathcal{A}}(\overline{u}(x))] \wedge v = w[z/g^{\mathcal{A}}(\overline{w}(x))])) \iff\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(P^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(u(x)), g^{\mathcal{A}}(u(x))) \Rightarrow \\ &\exists v, w \in S^{\mathcal{A}} : (P^{\mathcal{A}}(w(y), g^{\mathcal{A}}(w(x))) \wedge \\ &w = u[y/f^{\mathcal{A}}(u(x))] \wedge v = w[z/g^{\mathcal{A}}(w(x))])) \iff\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(P^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(u(x)), g^{\mathcal{A}}(u(x))) \Rightarrow \\ &\exists v, w \in S^{\mathcal{A}} : (P^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(u(x)), g^{\mathcal{A}}(u(x))) \wedge \\ &w = u[y/f^{\mathcal{A}}(u(x))] \wedge v = w[z/g^{\mathcal{A}}(w(x))]))\end{aligned}$$

πράγμα που είναι προφανώς αληθές.

□

3.3 ΔΛ και κλασικά θεωρήματα

Στην παράγραφο αυτή θα αποδειχθεί ότι στη ΔΛ **δεν** ισχύουν κάποια σημαντικά θεωρήματα της πρωτοβάθμιας κλασικής λογικής.

Löwenheim-Skolem

Προκειμένου να ελεγχθεί τι ισχύει στη ΔΛ όσον αφορά σε κάποιο αντίστοιχο του Θεωρήματος Löwenheim-Skolem της πρωτοβάθμιας κλασικής λογικής, θα αποδειχθεί το ακόλουθο

Θεώρημα 3.3.1

Υπάρχει γλώσσα $\Gamma_{\Delta 1}$ και θεωρία της T που έχει μόνο αριθμήσιμα, άπειρα μοντέλα.

Απόδειξη

Έστω η γλώσσα $\Gamma_{\Delta 1}^{\theta\alpha}$, η οποία έχει μόνο τα συναρτησιακά σύμβολα $', \oplus, \odot$ (το πρώτο μονοθέσιο, τα άλλα δύο διθέσια) και τη σταθερά $\mathbf{0}$.

Έστω επίσης T η θεωρία που αποτελείται από τις προτάσεις:

1. $\forall x(x' \neq 0)$
2. $\forall x \forall y(x' = y' \rightarrow x = y)$
3. $\forall x(x \oplus 0 = x)$
4. $\forall x \forall y(x \oplus y' = (x \oplus y)')$

5. $\forall x(x \odot 0 = 0)$
6. $\forall x \forall y(x \odot y' = (x \odot y) \oplus x)$
7. $\forall x < y := 0; \mathbf{while}\ y \neq x\ \mathbf{do}\ y := y' > \top$

Έστω ότι η T είναι ικανοποιήσιμη και $\mathcal{A} \vDash T$. Επειδή στην $\mathcal{A}$ ισχύει η πρόταση (7), για κάθε $u \in S^{\mathcal{A}}$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
&u \in (\forall x < y := 0; \mathbf{while}\ y \neq x\ \mathbf{do}\ y := y' > \top)^{\mathcal{A}} \iff \\
&\forall a \in |\mathcal{A}| : u[x/a] \in (< y := 0; \mathbf{while}\ y \neq x\ \mathbf{do}\ y := y' > \top)^{\mathcal{A}} \iff \\
&\forall a \in |\mathcal{A}|, \exists v \in S^{\mathcal{A}} : (u[x/a], v) \in (y := 0; \mathbf{while}\ y \neq x\ \mathbf{do}\ y := y')^{\mathcal{A}} \iff \\
&\forall a \in |\mathcal{A}|, \exists v, w \in S^{\mathcal{A}} : (u[x/a], v) \in (y := 0)^{\mathcal{A}} \wedge \\
&\qquad\qquad (v, w) \in (\mathbf{while}\ y \neq x\ \mathbf{do}\ y := y')^{\mathcal{A}} \iff \\
&\forall a \in |\mathcal{A}|, \exists n \in \mathbb{N}, \exists v_0, \ldots, v_n \in S^{\mathcal{A}} : \\
&\qquad v_0 = u[x/a][y/\mathbf{0}^{\mathcal{A}}] \wedge \\
&\qquad v_n \notin (y \neq x)^{\mathcal{A}} \wedge \\
&\qquad \forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i < n \Rightarrow ((v_i, v_{i+1}) \in (y := y')^{\mathcal{A}} \wedge v_i \in (y \neq x)^{\mathcal{A}})) \iff \\
&\forall a \in |\mathcal{A}|, \exists n \in \mathbb{N} : (a = (\mathbf{0}^{\mathcal{A}})^{\prime\mathcal{A} \cdots \prime\mathcal{A}(n \text{ φορές})} \wedge \\
&\qquad\qquad \forall i \in \mathbb{N} : (0 \leq i < n \Rightarrow a \neq (\mathbf{0}^{\mathcal{A}})^{\prime\mathcal{A} \cdots \prime\mathcal{A}(i \text{ φορές})})) \qquad (*)
\end{aligned}$$

Έστω τώρα η δομή $\mathcal{N}$ με $|\mathcal{N}| = \mathbb{N}$ και ερμηνείες των $', \oplus, \odot$ τις συνήθεις πράξεις στους φυσικούς «επόμενος», $+, \cdot$.
Αξιωματικώς θεωρούμε ότι στο $\mathbb{N}$ ισχύουν τα πέντε γνωστά αξιώματα του Peano. Άρα στο $\mathbb{N}$ ισχύουν αμέσως οι προτάσεις 1 και 2 του T. Επίσης, λόγω του αναδρομικού ορισμού της συνήθους πρόσθεσης στο $\mathbb{N}$, ισχύουν οι προτάσεις 3 και 4 του T και λόγω του αναδρομικού ορισμού του συνήθους πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{N}$, ισχύουν οι προτάσεις 5 και 6 του T. Η πρόταση 7, όπως αποδείχθηκε προηγουμένως, είναι ισοδύναμη με την $(*)$, η οποία ισχύει στο $\mathbb{N}$, όπως μπορεί να αποδειχθεί με μια τετριμμένη επαγωγή.
Άρα η δομή $\mathcal{N}$ είναι μοντέλο της θεωρίας T.

Έστω τώρα τυχαίο μοντέλο $\mathcal{A}$ της T. Θα δείξω ότι το δομημένο σύνολο $(|\mathcal{A}|, \mathbf{0}^{\mathcal{A}}, '^{\mathcal{A}})$ είναι σύστημα φυσικών αριθμών. Αρκεί να αποδειχθούν για το $\mathcal{A}$ τα πέντε αξιώματα του Peano.

1. Το $|\mathcal{A}|$ είναι σύνολο και $\mathbf{0}^{\mathcal{A}} \in |\mathcal{A}|$.
2. Η $'^{\mathcal{A}}$ είναι συνάρτηση στο $|\mathcal{A}|$.
3. Η $'^{\mathcal{A}}$ είναι μονομορφισμός, λόγω της πρότασης 2 της T.
4. $\forall a \in |\mathcal{A}| : a'^{\mathcal{A}} \neq \mathbf{0}^{\mathcal{A}}$, λόγω της πρότασης 1 της T.

Για να δειχθεί το πέμπτο αξίωμα (της επαγωγής) στο $\mathcal{A}$ ας θεωρήσουμε $X \subseteq |\mathcal{A}|$ τ.π. $\mathbf{0}^{\mathcal{A}} \in X$ και $\forall a \in |\mathcal{A}| : (a \in X \Rightarrow a'^{\mathcal{A}} \in X)$.
Θα αποδειχθεί πρώτα με επαγωγή στους φυσικούς ότι:
$\forall n \in \mathbb{N} : (\mathbf{0}^{\mathcal{A}})^{\prime\mathcal{A} \cdots \prime\mathcal{A}(n \text{ φορές})} \in X$
<u>Επ.Βάση:</u>
Πρέπει $\mathbf{0}^{\mathcal{A}} \in X$. Ισχύει.
<u>Επ.Βήμα:</u>
Αν $(\mathbf{0}^{\mathcal{A}})^{\prime\mathcal{A} \cdots \prime\mathcal{A}(n \text{ φορές})} \in X$, τότε από τη 2. ιδιότητα του X ισχύει

$(\mathbf{0}^{\mathcal{A}})^{\prime\mathcal{A}\cdots\ \prime\mathcal{A}(n+1\ \text{φορές})} \in X$ που είναι το ζητούμενο. □

Έστω τώρα τυχαίο $b \in |\mathcal{A}|$. Επειδή το $\mathcal{A}$ είναι μοντέλο της T, θα ισχύει στο $\mathcal{A}$ η πρόταση 7 της T άρα και η $(*)$. Έτσι $b = (\mathbf{0}^{\mathcal{A}})^{\prime\mathcal{A}\cdots\ \prime\mathcal{A}(m\ \text{φορές})}$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ και λόγω της προηγούμενης απόδειξης θα ισχύει $b \in X$.
Άρα $|\mathcal{A}| \subseteq X$, δηλ. $|\mathcal{A}| = X$.
Άρα ισχύει το Αξίωμα Επαγωγής στο $\mathcal{A}$.

Αφού λοιπόν το δομημένο σύνολο $(|\mathcal{A}|, \mathbf{0}^{\mathcal{A}}, {}^{\prime\mathcal{A}})$ είναι σύστημα φυσικών αριθμών (και επειδή αξιωματικώς έχουμε δεχθεί ότι το $(\mathbb{N}, 0, {}^{\prime\mathcal{N}})$ είναι σύστημα φυσικών αριθμών), λόγω του Θεωρήματος Μοναδικότητας των Φυσικών Αριθμών υπάρχει μοναδική αντιστοιχία $f : |\mathcal{A}| \rightarrowtail \mathbb{N}$ τ.π.
$f(\mathbf{0}^{\mathcal{A}}) = 0$ και
$\forall a \in |\mathcal{A}| : f(a^{\prime\mathcal{A}}) = f(a) + 1$

Τώρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί το Αξίωμα Επαγωγής στο $\mathcal{A}$ για να αποδειχθεί ότι: $\forall a, b \in |\mathcal{A}| : f(a \oplus^{\mathcal{A}} b) = f(a) + f(b)$.
Επ.Βάση:
$f(a \oplus^{\mathcal{A}} \mathbf{0}^{\mathcal{A}}) \overset{(3)}{=} f(a) = f(a) + 0 = f(a) + f(\mathbf{0}^{\mathcal{A}})$
Επ.Βήμα:
$f(a \oplus^{\mathcal{A}} b^{\prime\mathcal{A}}) \overset{(4)}{=} f((a \oplus^{\mathcal{A}} b)^{\prime\mathcal{A}}) = f(a \oplus^{\mathcal{A}} b) + 1 \overset{\text{Επ.Υπ.}}{=} f(a) + f(b) + 1 = f(a) + f(b^{\prime\mathcal{A}})$

Με ακριβώς όμοιο τρόπο (χρησιμοποιώντας απλώς τις προτάσεις 5 και 6 της T) αποδεικνύεται ότι: $\forall a, b \in |\mathcal{A}| : f(a \odot^{\mathcal{A}} b) = f(a) \cdot f(b)$.

Απ'όλα τα προηγούμενα προκύπτει ότι τα μοντέλα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{N}$ της θεωρίας T είναι ισόμορφα. Άρα τα $|\mathcal{A}|$ και $\mathbb{N}$ είναι ισοπληθικά.

□

Κατ'αντιστοιχία με την πρωτοβάθμια κλασική λογική δίνεται τώρα ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 3.3.2
Πληθικότητα μιας γλώσσας $\Gamma_{\Delta 1}$ - συμβ. $|\Gamma_{\Delta 1}|$ - ονομάζεται ο πληθάριθμος του συνόλου $K\alpha\tau(\Gamma_{\Delta 1}) \cup \Sigma\upsilon\nu(\Gamma_{\Delta 1}) \cup \Sigma\tau(\Gamma_{\Delta 1}) \cup T(\Gamma_{\Delta 1})$.

Δ

Αν θα θέλαμε να διατυπώσουμε κάποιο αντίστοιχο θεώρημα στη ΔΛ με το «προς τα πάνω» Θεώρημα Löwenheim-Skolem της πρωτοβάθμιας κλασικής λογικής, θα έπρεπε να πούμε ότι κάθε θεωρία μιας $\Gamma_{\Delta 1}$ που έχει άπειρο μοντέλο θα έχει και μοντέλα οποιασδήποτε πληθικότητας μεγαλύτερης ή ίσης της $|\Gamma_{\Delta 1}|$. Όμως, το προηγούμενο θεώρημα δίνει ένα αντιπαράδειγμα που αποδεικνύει το αντίθετο. Άρα στη ΔΛ δεν ισχύει κάποιο αντίστοιχο του «προς τα πάνω» Θεωρήματος Löwenheim-Skolem.

Συμπάγεια
Θα αποδειχθεί καταρχάς το ακόλουθο

Θεώρημα 3.3.3
Υπάρχουν $\Gamma_{\Delta 1}$ και άπειρο σύνολο τύπων της T, το οποίο δεν είναι ικανοποιήσιμο ενώ κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ικανοποιήσιμο.
Απόδειξη
Έστω γλώσσα $\Gamma^1_{\Delta 1}$, η οποία έχει το μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο P και το μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο f. Έστω επίσης το σύνολο τύπων της

$$\Sigma_\infty = \{< \textbf{while } P(x) \textbf{ do } x := f(x) > \top\} \cup \{P(f^n(x)) \in T(\Gamma^1_{\Delta 1}) | n \in \mathbb{N}\}$$

α)
Ας θεωρήσουμε αρχικώς κάποιο τυχαίο πεπερασμένο $\Sigma \subset \Sigma_\infty$

- Αν $\Sigma = \{P(f^i(x)) \in T(\Gamma^1_{\Delta 1}) | i \in A\}$ όπου A πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, τότε ας θεωρήσουμε δομή $\mathcal{A}$ τ.π. για τις ερμηνείες των P και f να ισχύουν τα εξής:

  $$\forall x \in |\mathcal{A}| : f^{\mathcal{A}}(x) = a \in |\mathcal{A}| \qquad \alpha \in P^{\mathcal{A}}$$

  Τότε $\mathcal{A} \models P(f^i(x)), \forall i \in A$ αφού $(f^{\mathcal{A}})^i(x) = a, \forall i \in A$ και ισχύει $P^{\mathcal{A}}(a)$
  Άρα το Σ είναι ικανοποιήσιμο.

- Αν $\Sigma = \{< \textbf{while } P(x) \textbf{ do } x := f(x) > \top\}$, τότε ας θεωρήσουμε δομή $\mathcal{A}$ τ.π. για την ερμηνεία του P να ισχύει $P^{\mathcal{A}} = \varnothing$
  Τότε προφανώς $\mathcal{A} \models \Sigma$, άρα και πάλι το Σ είναι ικανοποιήσιμο.

- Αν

  $$\Sigma = \{< \textbf{while } P(x) \textbf{ do } x := f(x) > \top\} \cup \{P(f^i(x)) \in T(\Gamma^1_{\Delta 1}) | i \in A\}$$

  όπου A πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, τότε ας θεωρήσουμε δομή $\mathcal{A}$, τυχαίο $b \in |\mathcal{A}|$ και ότι για τις ερμηνείες των P και f ισχύουν τα εξής:

  $$P^{\mathcal{A}} = \{(f^{\mathcal{A}})^i(b) \in |\mathcal{A}| \ \ | i \in A\}$$

  $$(f^{\mathcal{A}})^{m+1}(b) \notin P^{\mathcal{A}}$$

  όπου $m = \min\{n \in \mathbb{N} | P(f^n(x)) \in \Sigma \wedge P(f^{n+1}(x)) \notin \Sigma\}$
  (Οι παραπάνω απαιτήσεις για τις $P^{\mathcal{A}}$ και $f^{\mathcal{A}}$ δεν αναιρούν η μία την άλλη και μπορούν να ικανοποιηθούν αφού $m + 1 \notin A$)
  Ας θεωρούμε επίσης αποτίμηση $u \in S^{\mathcal{A}}$ τ.π. $u(x) = b$
  Τότε προφανώς $\mathcal{A}, u \models P(f^i(x)), \forall i \in A$ αφού είναι έτσι ορισμένη η $P^{\mathcal{A}}$
  Επίσης $\mathcal{A}, u \models < \textbf{while } P(x) \textbf{ do } x := f(x) > \top$ διότι $\neg P^{\mathcal{A}}((f^{\mathcal{A}})^{m+1}(b))$ αφού $(f^{\mathcal{A}})^{m+1}(b) \notin P^{\mathcal{A}}$
  Άρα το Σ είναι ικανοποιήσιμο.

β)
Έστω, προς άτοπο, ότι υπήρχαν δομή $\mathcal{A}$ και $u \in S^{\mathcal{A}}$ τ.π. $\mathcal{A}, u \models \Sigma_\infty$
Τότε, επειδή $\mathcal{A}, u \models <$ **while** $P(x)$ **do** $x := f(x) > \top$, θα υπήρχαν $a, b \in |\mathcal{A}|$ και $m \in \mathbb{N}$ τ.π. $\neg P^{\mathcal{A}}(a)$, $a = (f^{\mathcal{A}})^m(b)$ και $u(x) = b$. Άρα ισχύει $\neg P^{\mathcal{A}}((f^{\mathcal{A}})^m(b))$
Επίσης, επειδή $\mathcal{A}, u \models P(f^m(x))$, θα ισχύει $P^{\mathcal{A}}((f^{\mathcal{A}})^m(b))$. Άτοπο.
Άρα το Σ_∞ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

□

Το Θεώρημα απέδειξε ότι δεν ισχύει η συμπάγεια στη ΔΛ.

Πληρότητα
Ας θεωρήσουμε καταρχάς ότι οι όροι *αποδεικτικό σύστημα* και *απόδειξη* έχουν στη ΔΛ την ίδια έννοια με την κλασική λογική (λεπτομερείς ορισμοί γι' αυτούς τους όρους θα δοθούν σε επόμενη παράγραφο). Τότε ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα 3.3.4
Υπάρχουν $\Gamma_{\Delta 1}$, θεωρία της T και $\varphi \in T(\Gamma_{\Delta 1})$ τ.π.

$$\neg(T \models \varphi \iff T \vdash \varphi)$$

Απόδειξη
Έστω και πάλι η γλώσσα $\Gamma_{\Delta 1}^{\theta\alpha}$ και η θεωρία T του Θεωρήματος 2.2.1.
Ας θεωρήσουμε επίσης τα σύνολα:

$$Th_{\Delta 1}\mathcal{N} =_{o\rho.} \{\varphi \in T(\Gamma_{\Delta 1}^{\theta\alpha}) | \mathcal{N} \models \varphi\}$$

$$Th_1\mathcal{N} =_{o\rho.} \{\varphi \in T(\Gamma_1^{\theta\alpha}) | \mathcal{N} \models \varphi\}$$

$$\Lambda\sigma(T) =_{o\rho.} \{\varphi \in T(\Gamma_{\Delta 1}^{\theta\alpha}) | T \models \varphi\}$$

$$A\pi(T) =_{o\rho.} \{\varphi \in T(\Gamma_{\Delta 1}^{\theta\alpha}) | T \vdash \varphi\}$$

Τώρα ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι ίσχυε $\forall \varphi \in T(\Gamma_{\Delta 1}^{\theta\alpha}) : T \models \varphi \iff T \vdash \varphi$
Τότε θα έπρεπε $\Lambda\sigma(T) = A\pi(T) \qquad (1)$
Έστω τώρα $< A\xi \cup T, K >$ το αξιωματικό σύστημα που χρησιμοποιούμε (όπου $A\xi = \{\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n\}$ το σύνολο των μη λογικών αξιωμάτων και $K = \{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m\}$ το σύνολο των αποδεικτικών κανόνων του συστήματος).
Έστω επίσης ότι ονομάζουμε $\tau_0, \ldots, \tau_6$ τις προτάσεις του T, $\tau_7, \ldots, \tau_{n+6}$ τα στοιχεία του $A\xi$, $\tau_{n+7}, \ldots, \tau_{n+m+6}$ τα στοιχεία του K και θέτουμε $\lambda = n+m+7$.
Τώρα ορίζουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις στους φυσικούς (τις δύο πρώτες με πρωτογενή αναδρομή):

$$d(x, 0) = x \text{ div } \lambda$$
$$d(x, i+1) = d(x, i) \text{ div } \lambda$$

$$m(x, 0) = x \bmod \lambda$$
$$m(x, i+1) = d(x, i) \bmod \lambda$$

$$lh(x) = (\mu y \leq x)[x < \frac{\lambda^y - 1}{\lambda - 1}\lambda]$$

$$g(x, i) = m(x - \frac{\lambda^{lh(x)-1} - 1}{\lambda - 1}, i)$$

Όλες οι παραπάνω συναρτήσεις είναι αναδρομικές (και μάλιστα πρωτογενώς).
Έτσι, θα είναι αναδρομική και η $f : \mathbb{N} \to \{\tau_0, \ldots, \tau_{\lambda-1}\}^*$ με

$$f(x) =< \tau_{g(x,0)}, \ldots, \tau_{g(x,lh(x)-1)} >$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η f είναι 1-1 και επί.
(Η απόδειξη είναι απλώς διασκεδαστική(!) και χρησιμοποιεί το γεγονός ότι κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί με μοναδικό τρόπο σε οποιοδήποτε αριθμητικό σύστημα - δηλ. σε οποιαδήποτε βάση - άρα και στο αριθμητικό σύστημα με βάση το λ.)
Όμως για κάθε $\varphi \in A\pi(T)$ θα υπάρχει ακολουθία $< \tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_n} >$ με $\tau_{i_n} = \varphi$.
Άρα θα ισχύει:

$$\varphi \in A\pi(T) \iff \exists x \in \mathbb{N} : P^{lh(x)-1}_{lh(x)-1}(f(x)) = \varphi$$

(όπου P^n_i η πρωτογενώς αναδρομική i-οστή προβολή της ακολουθίας n στοιχείων)
Έτσι, η παραπάνω σχέση του «ανήκειν» είναι Σ_1, δηλ.
το $A\pi(T)$ είναι α.α. σύνολο (2)

- Έστω $\varphi \in \Lambda\sigma(T)$, δηλ. $T \vDash \varphi$. Επειδή ισχύει (όπως φάνηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1) $\mathcal{N} \vDash T$, θα έχουμε $\varphi \in Th_{\Delta 1}\mathcal{N}$.

- Έστω $\varphi \in Th_{\Delta 1}\mathcal{N}$ (δηλ. $\mathcal{N} \vDash \varphi$) και τυχαίο μοντέλο $\mathcal{A}$ του T. Λόγω του Θεωρήματος 2.2.1 θα ισχύει $\mathcal{A} \cong \mathcal{N}$, άρα $\mathcal{A} \vDash \varphi$. Αυτό σημαίνει ότι $T \vDash \varphi$, δηλ. $\varphi \in \Lambda\sigma(T)$.

Από τα δύο προηγούμενα σημεία προκύπτει ότι $\Lambda\sigma(T) = Th_{\Delta 1}\mathcal{N}$, άρα λόγω (1) και (2) το $Th_{\Delta 1}\mathcal{N}$ είναι α.α. σύνολο που απαριθμείται από την αναδρομική συνάρτηση που απαριθμεί το $A\pi(T)$.
Έστω τώρα η σχέση

$$K\Lambda(\varphi) \iff \varphi \in T(\Gamma_1^{\theta\alpha})$$

Επειδή έχουν οριστεί οι τύποι στη πρωτοβάθμια κλασική λογική με αναδρομή, η σχέση $K\Lambda(\varphi)$ θα είναι αναδρομική, άρα η σχέση

$$\begin{aligned} \varphi \in Th_1\mathcal{N} &\iff \varphi \in Th_{\Delta 1}\mathcal{N} \quad \wedge \quad K\Lambda(\varphi) \iff \\ &\iff \exists x \in \mathbb{N} : (P^{lh(x)-1}_{lh(x)-1}(f(x)) = \varphi \quad \wedge \quad K\Lambda(\varphi)) \end{aligned}$$

θα είναι Σ_1, δηλ. το $Th_1\mathcal{N}$ θα είναι α.α. σύνολο.
Έστω λοιπόν $Th_1\mathcal{N} = f'[\mathbb{N}]$ για κάποια αναδρομική f' και
$h(n) =_{o\rho.} \ulcorner f'(n) \urcorner$, $\forall n \in \mathbb{N}$ όπου $\ulcorner\ \urcorner$ η αναδρομική κωδικοποίηση τύπων του Gödel. Επειδή η h είναι αναδρομική, θα είναι και αναπαραστάσιμη στο P, άρα θα υπάρχει τύπος $\varphi_h(x_0, x_1)$ τ.π. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &P \vdash \varphi_h(\underline{n}, \underline{\ulcorner f'(n) \urcorner}) \\ &P \vdash \neg\varphi_h(\underline{n}, \underline{m}), \text{ αν } m \neq \ulcorner f'(n) \urcorner \end{aligned}$$

Από όλα τα παραπάνω και από Θεώρημα Εγκυρότητας της πρωτοβάθμιας κλασικής λογικής έπεται:

$$\forall \varphi \in Th_1\mathcal{N}, \exists n \in \mathbb{N} : \mathcal{N} \vDash \varphi_h(\underline{n}, \underline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \qquad (3)$$

Έστω τώρα ο τύπος $\forall x_0 \neg \varphi_h(x_0, x_1)$. Για τον τύπο αυτό προκύπτει από το Θεώρημα σταθερού σημείου του Gödel, ότι υπάρχει πρόταση τ τ.π.

$$P \vdash \tau \leftrightarrow \forall x_0 \neg \varphi_h(x_0, \underline{\ulcorner \tau \urcorner}) \qquad \text{δηλ.}$$

$$\mathcal{N} \vDash \tau \leftrightarrow \forall x_0 \neg \varphi_h(x_0, \underline{\ulcorner \tau \urcorner}) \qquad (4)$$

Έτσι έχουμε την ακόλουθη ισοδυναμία

$$\tau \in Th_1\mathcal{N} \overset{(3)}{\iff} \exists t \in \mathbb{N} : \mathcal{N} \vDash \varphi_h(\underline{t}, \underline{\ulcorner \tau \urcorner}) \overset{(4)}{\iff} \mathcal{N} \vDash \neg\tau \iff \tau \notin Th_1\mathcal{N}$$

Άτοπο.
Άρα δεν ισχύει η αρχική μας υπόθεση, δηλ. $\exists \varphi \in T(\Gamma_{\Delta 1}^{\theta\alpha})$ τ.π. να μην ισχύει $T \vDash \varphi \iff T \vdash \varphi$

$\square$

Όμως μπορούν να επιλεγούν μη λογικά αξιώματα και αποδεικτικοί κανόνες έτσι ώστε να διατηρείται η «αλήθεια» στις αποδείξεις· δηλ. να ισχύει ένα Θεώρημα εγκυρότητας. Άρα το Θεώρημα 3.3.4 αποδεικνύει ότι δεν ισχύει στη ΔΛ η πληρότητα.

4 Βιβλιογραφία

Alur R. and Madhusudan P.(2004). *Visibly pushdown languages.* In *Proceedings of STOC'04*, pp.202-211. ACM.

Blackburn P., de Rijke M. and Venema Y.(2001). *Modal Logic.* Cambridge University Press.

Fischer M.J. and Ladner R.E.(1979). *Propositional dynamic logic of regular programs.* In *Journal of Computer and System Sciences*, 18(2), pp.194-211.

Goldblatt R.(1992). *Logics of Time and Computation.* CSLI Lecture Notes Nr.7.

Δημητρακόπουλος Κ.(1999). *Σημειώσεις Μαθηματικής Λογικής.* (Σημειώσεις Ε.Κ.Π.Α.)

Harel D., Kozen D. and Tiuryn J.(2000). *Dynamic Logic.* The MIT Press.

Harel D. and Raz D.(1993). *Deciding properties of nonregular programs.* In *SIAM Journal of Computing.* 22(4), pp.857-874.

Koren T. and Pnueli A.(1983). *There exists decidable context-free propositional dynamic logic.* In *Proc. Symp. on Logics of Programs*, Vol.64 of *Lect. Notes in Comp. Sci.*, pp.290-312. Springer-Verlag.

Kozen D. and Tiuryn J.(1990). *Logics of Programs.* In *Handbook of theoretical computer science.* Elsevier Science Publishers.

Μοσχοβάκης Γ.(1993). *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία.* Εκδόσεις Νεφέλη.

Parikh R.(1978). *The completeness of propositional dynamic logic.* In *Proc. 7th Symp. on Math. Found. of Comp. Sci.*, Vol.64 of *Lect. Notes in Comp. Sci.*, pp.403-415. Springer-Verlag.

Pratt V. R.(1978). *A practical decision method for propositional dynamic logic.* In *Proc. 10th Symp. Theory of Comput.*, pp.326-337. ACM.