Άλλα Σιροκόφσκιχ

Θεωρία Μοντέλων, με έμφαση στην Αριθμητική

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"Λογική και Θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού"
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Ιούλιος 2007

Στη μητέρα μου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα κατ' αρχήν να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της διατριβής μου κ. Κ. Δημητρακόπουλο για την πολύτιμη βοήθειά του καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μαζί του και για τις βάσεις στην μαθηματική λογική που μου προσέφερε.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. J. Paris για την επιστημονική συνεργασία και τη θερμή υποστήριξη που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια της τρίμηνης παραμονής μου στο Πανεπιστήμιο του Manchester.

Για τις πολύ εποικοδομητικές συζητήσεις, οι οποίες έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη αυτής της διατριβής, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους L. Beklemishev, A. Cordón-Franco, R. Kaye, F. Lara-Martín, N. Thapen, A. Woods, Α. Τζουβάρα και Χ. Κορνάρο.

Ευχαριστώ και τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής μου επιτροπής, δηλαδή τους καθηγητές κ. Γ. Μοσχοβάκη και κ. Α. Φειδά, για τις συμβουλές και τη βοήθειά τους κατά την εκπόνηση της διατριβής μου.

Ευχαριστώ επίσης τα μέλη της επταμελούς επιτροπής καθηγητές κ.κ. Λ. Κυρούση, Α. Τζουβάρα, Γ. Κολέτσο, Ε. Ράπτη και Δ. Θηλυκό, για τις παρατηρήσεις τους που βοήθησαν στη βελτίωση του τελικού κειμένου της διατριβής.

Ευχαριστώ και τον D. Richerby από τον οποίον έμαθα πολλά "tips and tricks" του LaTeX.

Η εκπόνηση της διατριβής υποστηρίχθηκε από υποτροφία στα πλαίσια του έργου "ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ" (ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ).

Περίληψη

Οι δύο κύριοι άξονες γύρω από τους οποίους κινούνται τα αποτελέσματα της διατριβής είναι οι εξής: ένα από τα προβλήματα που τέθηκε από τον J. Paris σχετικά με την ιεραρχία συγκεκριμένων υποσυστημάτων της Peano αριθμητικής και η Εικασία του G. Priest, η οποία αφορά τις άπειρες δομές της λογικής του παραδόξου.

Πιο αναλυτικά, στις αρχές της δεκαετίας του '80 έγινε μια σημαντική προσπάθεια να ενταχθούν σε μια ιεραρχία τα γνωστά μέχρι τότε υποσυστήματα της Peano αριθμητικής. Τα πρώτα αποτελέσματα στη κατεύθυνση αυτή δόθηκαν από τους C. Parsons, J. Paris, L. Kirby και H. Lessan. Ξεκαθαρίστηκαν σχέσεις μεταξύ Σ_n επαγωγής, Σ_n συλλογής και Σ_n αρχής ελαχίστου. Αφού διαπιστώθηκε ότι η Σ_n συλλογή είναι ασθενέστερη των άλλων δύο αναφερόμενων συστημάτων, αλλά είναι αρκετά ισχυρή ώστε να συνεπάγεται την Δ_n επαγωγή, τέθηκε από τον J. Paris το ακόλουθο

Πρόβλημα 1 (J. Paris). *Συνεπάγεται η Δ_n επαγωγή τη Σ_n συλλογή για $n \geq 1$;*

Το πρόβλημα αυτό κατατάσσεται ως ένα από τα δομικά προβλήματα από τους P. Clote και J. Krajíček στη λίστα ανοικτών προβλημάτων που δημοσίευσαν το 1993.

Στη προσπάθεια επίλυσης του αναφερόμενου προβλήματος, δημιουργήθηκε μια περιοχή έρευνας με επιμέρους ανοικτά ζητήματα. Μια από τις προσεγγίσεις είναι να ερευνηθούν ξεχωριστά τα συστήματα και ύστερα να γίνει η σύγκριση της ισχύος του καθενός. Η προσέγγιση αυτή θα δώσει αποτέλεσμα αν τελικά τα συστήματα δεν είναι ισοδύναμα. Στη κατεύθυνση αυτή κινήθηκε ο L. Beklemishev. Ήδη στη δεκαετία του '80 ήταν γνωστό ότι

Θεώρημα (C. Parsons). *Το σύνολο των Π_2 προτάσεων που αληθεύουν στους φυσικούς δεν συνεπάγεται τη Σ_1 συλλογή.*

Ο L. Beklemishev το 2003, εξετάζοντας τη σχέση του συνόλου των Π_2 προτάσεων που αληθεύουν στους φυσικούς με τη Δ_1 επαγωγή, κατέληξε στο

ακόλουθο

Θεώρημα (L. Beklemishev). *Το σύνολο των Π_2 προτάσεων που αληθεύουν στους φυσικούς δεν συνεπάγεται τη Δ_1 επαγωγή.*

Το Θεώρημα του L. Beklemishev δεν μας λέει ποια είναι η τελική σχέση μεταξύ των συστημάτων του Προβλήματος 1 (για $n = 1$), όμως υπογραμμίζει πως ακόμη κι αν είναι η Δ_1 επαγωγή ασθενέστερη της Σ_1 συλλογής, δεν είναι κατά πολύ ασθενέστερη.

Εμείς γενικεύσαμε το Θεώρημα του L. Beklemishev, δίνοντας μια καθαρά μοντελοθεωρητική απόδειξη (βλ. Κεφάλαιο 2), δηλαδή δείξαμε ότι

Θεώρημα 1. *Το σύνολο των Π_{n+1} προτάσεων που αληθεύουν στους φυσικούς δε συνεπάγεται τη Δ_n επαγωγή.*

Ως πόρισμα του Θεωρήματος του L. Beklemishev, έπεται πως υπάρχει μοντέλο της Δ_0 επαγωγής, στο οποίο η εκθετική συνάρτηση είναι ολική, αλλά το μοντέλο αυτό δεν ικανοποιεί τη Δ_1 επαγωγή. Παρατηρώντας αυτό, αλλά και το γεγονός πως η Δ_1 επαγωγή χωρίς παραμέτρους είναι γνήσια ασθενέστερη από τη Δ_1 επαγωγή (όπου δηλαδή επιτρέπεται η χρήση των παραμέτρων), ο L. Beklemishev έθεσε ορισμένα ερωτήματα, εκ των οποίων αναφέρουμε τα εξής δύο:

Πρόβλημα 2 (L. Beklemishev). *Συνεπάγεται η θεωρία Δ_1 επαγωγή + το σύνολο των Π_2 προτάσεων που αληθεύουν στους φυσικούς τη Σ_1 συλλογή;*

Πρόβλημα 3 (L. Beklemishev). *Συνεπάγεται η θεωρία Δ_1 επαγωγή + η εκθετική συνάρτηση είναι ολική τη Δ_1 επαγωγή χωρίς παραμέτρους;*

Το Πρόβλημα 2 απαντήθηκε θετικά έμμεσα από τον T. Slaman, ο οποίος με το θεώρημα που ακολουθεί στην ουσία δίνει μερική απάντηση στο βασικό Πρόβλημα 1.

Θεώρημα (T. Slaman). *Κάθε μοντέλο της Δ_n επαγωγής που ικανοποιεί την ολικότητα της εκθετικής συνάρτησης ικανοποιεί τη Σ_n συλλογή ($n \geq 1$).*

Έχοντας πως κάθε μοντέλο της Δ_n επαγωγής, για $n \geq 2$, ικανοποιεί την ολικότητα της εκθετικής συνάρτησης, μένει το Πρόβλημα 1 ανοικτό μόνο για $n = 1$, δηλαδή

Πρόβλημα 1α (J. Paris). *Συνεπάγεται η Δ_1 επαγωγή τη Σ_1 συλλογή;*

Στη δική μας προσπάθεια προσέγγισης του Προβλήματος 1α καταλήξαμε στο να απομονώσουμε τις δομές, οι οποίες πιθανόν να αποτελούν αντιπαράδειγμα για το Πρόβλημα 1α. Πιο συγκεκριμένα, δείξαμε

Θεώρημα 2. *Κάθε μοντέλο που ικανοποιεί τη Δ_1 επαγωγή, αλλά δεν ικανοποιεί τη Σ_1 συλλογή πρέπει να είναι της μορφής a^D, για κάποιο a non-standard και D που ικανοποιεί τη Σ_1 επαγωγή.*

Η αναλυτική επεξήγηση της μορφής και ο τρόπος απομόνωσης των ενδεχόμενων "κακών" δομών που οδηγούν στην αρνητική επίλυση του Προβλήματος του J. Paris περιγράφονται στο Κεφάλαιο 3.

Επιστρέφοντας στα προβλήματα που έθεσε ο L. Beklemishev, για την ακρίβεια στο Πρόβλημα 3, δίνουμε στο Κεφάλαιο 2 αρνητική απάντηση σε αυτό, δηλαδή αποδεικνύουμε το

Θεώρημα 3. *Υπάρχει μοντέλο της Δ_0 επαγωγής που ικανοποιεί την ολικότητα της εκθετικής συνάρτησης, αλλά δεν ικανοποιεί τη Δ_1 επαγωγή χωρίς παραμέτρους.*

Επικρατεί η άποψη πως τα μοντέλα της Δ_0 επαγωγής που ικανοποιούν την ολικότητα της εκθετικής συνάρτησης ικανοποιούν τις περισσότερες συνδυαστικές αρχές. Η άποψη αυτή έχει βάση, διότι για παράδειγμα τα επόμενα Θεωρήματα μας το επιβεβαιώνουν.

Θεώρημα (C. Dimitracopoulos και J. Paris). *Κάθε μοντέλο της Δ_0 επαγωγής που ικανοποιεί την ολικότητα της εκθετικής συνάρτησης ικανοποιεί την αρχή του περιστερώνα για Δ_0 τύπους.*

Θεώρημα (P. Erdös). *Κάθε μοντέλο της Δ_0 επαγωγής που ικανοποιεί την ολικότητα της εκθετικής συνάρτησης ικανοποιεί και την απειρία των πρώτων, για την ακρίβεια ικανοποιεί την πρόταση "για κάθε x υπάρχει πρώτος p με $x < p \leq 2x$."*

Για τους αναφερόμενους λόγους η εκθετική συνάρτηση θεωρείται ισχυρό εργαλείο. Όμως ο A. Woods παρατήρησε πως υπάρχει τρόπος αποφυγής της χρήσης της εκθετικής συνάρτησης για την απόδειξη της αρχής του περιστερώνα για Δ_0 τύπους, αρκεί να είναι δυνατή η καταμέτρηση των στοιχείων των Δ_0 συνόλων.

Θεώρημα (A. Woods). *Κάθε μοντέλο της Δ_0 επαγωγής που έχει τη δυνατότητα καταμέτρησης των στοιχείων των Δ_0 συνόλων ικανοποιεί την αρχή του περιστερώνα για Δ_0 τύπους.*

Ως εργαλείο η αρχή του περιστερώνα είναι αρκετά αυτοδύναμο. Για παράδειγμα οι C. Dimitracopoulos και J. Paris έδειξαν πως η αρχή του περιστερώνα συνεπάγεται τη Δ_0 επαγωγή, ενώ ο A. Woods έδειξε πως εάν ένα μοντέλο ικανοποιεί την αρχή του περιστερώνα, τότε έχει οπωσδήποτε άπειρο το πλήθος πρώτους, οι οποίοι μάλιστα πάνε ομοτελικά στο μοντέλο. Όμως η ασθενέστερη μορφή του περιστερώνα για Δ_0 και Σ_1 τύπους δε δείχνει μέχρι στιγμής πως έχει κάποια μορφή αυτονομίας. Πιο συγκεκριμένα, είναι άγνωστο αν υπάρχει υποσύστημα της Peano αριθμητικής το οποίο να έπεται (μη τετριμμένα) από την ασθενέστερη μορφή του περιστερώνα για Σ_1 τύπους. Στο Κεφάλαιο 3 δείχνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για την ασθενέστερη μορφή του περιστερώνα για Δ_0 τύπους

Θεώρημα 4. *Κάθε μοντέλο της Δ_0 επαγωγής που ικανοποιεί την ασθενέστερη μορφή του περιστερώνα για Δ_0 τύπους και έχει τη δυνατότητα καταμέτρησης των στοιχείων των Σ_1 συνόλων ικανοποιεί τη Σ_1 συλλογή.*

Στο Θεώρημα 4 δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις καταμέτρησης των στοιχείων των Σ_1 συνόλων με τις συναρτήσεις καταμέτρησης των στοιχείων των Δ_0 συνόλων, διότι είναι γνωστό πως αυτό δεν ισχύει. Το ενδιαφέρον ζήτημα είναι αν στο Θεώρημα 4 μπορούμε να αποφύγουμε τη χρήση της Δ_0 επαγωγής, δηλαδή δημιουργείται το εξής

Πρόβλημα 4. *Ικανοποιεί κάθε μοντέλο της ασθενέστερης μορφής του περιστερώνα για Δ_0 τύπους και που έχει τη δυνατότητα καταμέτρησης των στοιχείων των Σ_1 συνόλων τη Σ_1 συλλογή;*

Η θετική απάντηση στο Πρόβλημα 4 θα έδινε μια πιο σαφή εικόνα για την ασθενέστερη μορφή του περιστερώνα για Δ_0 τύπους.

Ο δεύτερος άξονας της διατριβής, όπως τονίσαμε στην αρχή της περίληψης, είναι η Εικασία του G. Priest και αφορά τη λογική του παραδόξου. Πρόκειται για μια λογική, στην οποία επιτρέπουμε για ορισμένους τύπους που αληθεύουν να αληθεύει και η άρνησή τους. Πρόκειται για μια paraconsistent λογική που επεκτείνει την κλασσική. Μάλιστα και οι δύο έχουν τις ίδιες ταυτολογίες. Ο πλήρης ορισμός της λογικής του παραδόξου δίνεται στην αρχή του Κεφαλαίου 4. 'Ολο το κεφάλαιο αυτό είναι αφιερωμένο στις ιδιότητες των (πεπερασμένων και άπειρων) δομών της λογικής αυτής.

Με την έννοια της paraconsistent λογικής φέρεται να ασχολήθηκε πρώτος ο Robert K. Meyer το 1976. Μαζί με τον M. Mortensen έδειξαν πως υπάρχει ολόκληρη κλάση μη συνεπών αριθμητικών θεωριών. Επίσης έδειξαν πως ανεξαρτήτως του πλήθους αντιφάσεων που μπορεί να έχει ένα μοντέλο, αυτές δεν επηρεάζουν αρνητικά τους αριθμητικούς υπολογισμούς. Τα αριθμητικά μοντέλα επιτρέπουν περιγραφή δομών πέραν του $\mathbb{N}$. Παραδείγματος χάριν, δακτύλιοι με διάταξη. Με τη λογική του παραδόξου ασχολήθηκε πολύ αρχικά ο G. Priest, την οποία μάλιστα την αποκαλεί "μία από τις πιο απλές και υπάκουες" από τις paraconsistent λογικές.

Στα τέλη της δεκαετίας του '90 ο G. Priest προσπάθησε να δώσει έναν χαρακτηρισμό των πεπερασμένων δομών που είναι μοντέλα της αριθμητικής Peano στα πλαίσια της λογικής του παραδόξου. Ο G. Priest διαπίστωσε πως υπάρχει μια σχέση που συνδέει τα κλασσικά μοντέλα της πλήρους αριθμητικής Peano με τα αντίστοιχα μοντέλα στη λογική του παραδόξου. Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει στην ουσία μια μέθοδο κατασκευής μοντέλων στη λογική του παραδόξου.

Θεώρημα (G. Priest). *Κάθε κλασσικό μοντέλο της πλήρους αριθμητικής Peano δίνει μέσω σχέσης ισοτιμίας ένα μοντέλο της ίδιας θεωρίας στη λογική του παραδόξου.*

Τη προσπάθεια του G. Priest για τον πλήρη χαρακτηρισμό, στη λογική του παραδόξου, των πεπερασμένων μοντέλων της πλήρους αριθμητικής Peano ολοκλήρωσαν οι J. Paris και N. Pathmanathan. Μάλιστα παρατήρησαν πως ίδιος χαρακτηρισμός δουλεύει (στη λογική του παραδόξου) και για πεπερασμένα μοντέλα θεωριών ασθενέστερων από την πλήρη αριθμητική. Ο δικός μας σκοπός στο Κεφάλαιο 4 είναι να δώσουμε απαντήσεις σε ορισμένα από τα προβλήματα που τέθηκαν από τον G. Priest το 1997 και 2000, να ρίξουμε κάποιο φως στη δομή των άπειρων μοντέλων και να πάρουμε θέση στην εικασία που διατύπωσε ο G. Priest το 2000.

Ο G. Priest συγκέντρωσε μια λίστα από προβλήματα που αφορούν ιδιότητες πεπερασμένων και άπειρων δομών. Λόγω της πλήρους ταξινόμησης των πεπερασμένων μοντέλων, τα περισσότερα ερωτήματα, περιλαμβανομένης και της εικασίας, αφορούν τα άπειρα μοντέλα. Το ερώτημα που αφορά την πεπερασμένη περίπτωση είναι

Πρόβλημα 5 (G. Priest). *Πόσα πεπερασμένα (πληθικότητας n) μη ισόμορφα μοντέλα της πλήρους αριθμητικής στη λογική του παραδόξου υπάρχουν;*

Στην παράγραφο 4.3 δίνεται ένας **αναδρομικός τύπος** συναρτήσει του n, ο οποίος υπολογίζει το ζητούμενο πλήθος του Προβλήματος 5. Επίσης γίνεται μελέτη ειδικών περιπτώσεων και καταγραφή των αντίστοιχων μοντέλων που ανήκουν σε αυτές τις περιπτώσεις.

Ο G. Priest απέδειξε το 1997 ορισμένες ιδιότητες των πεπερασμένων δομών στη λογική του παραδόξου. Οι άπειρες συγκεκριμένες δομές που μελέτησε, διαπίστωσε πως έχουν και αυτές παρόμοιες ιδιότητες. Έτσι, έθεσε τα αντίστοιχα ερωτήματα, το αν δηλαδή όλες οι άπειρες δομές έχουν αυτές τις ιδιότητες. Οι περισσότερες ιδιότητες αναφέρονται στην εσωτερική περιγραφή των δομών, για αυτό και δεν θα παραθέσουμε όλα τα προβλήματα εδώ, στη περίληψη, αλλά παραπέμπουμε στην παράγραφο 4.2, όπου δίνονται δύο **αρνη-**

τικές και μια **θετική** απάντηση στα σχετικά ερωτήματα του G. Priest.

Προκειμένου να διατυπώσουμε την Εικασία του G. Priest, δίνουμε πρώτα το βασικό θεώρημα χαρακτηρισμού των πεπερασμένων δομών στη λογική του παραδόξου.

Θεώρημα (J. Paris και N. Pathmanathan). *Κάθε πεπερασμένο μοντέλο μιας πλήρους επέκτασης της αριθμητικής Peano στη λογική του παραδόξου προκύπτει από την κατάρρευση ενός κλασσικού μοντέλου της ίδιας θεωρίας με κατάλληλη σχέση ισοτιμίας.*

Σημειώνουμε πως η πλήρης αριθμητική είναι μία ειδική περίπτωση πλήρους επέκτασης της αριθμητικής Peano.

Ύστερα από μελέτη συγκεκριμένων άπειρων δομών, ο G. Priest διατύπωσε την ακόλουθη

Εικασία (G. Priest). *Κάθε άπειρο μοντέλο της πλήρους αριθμητικής Peano στη λογική του παραδόξου προκύπτει από την κατάρρευση ενός κλασσικού μοντέλου της πλήρους αριθμητικής Peano με κατάλληλη σχέση ισοτιμίας.*

Οι παράγραφοι 4.4 και 4.5 περιέχουν αποτελέσματα που στοχεύουν στην αρνητική επίλυσή της εικασίας αυτής. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε στην §4.4 πως όταν εξετάζουμε τα άπειρα μοντέλα της Peano αριθμητικής, τότε αυτά διαφέρουν στην συμπεριφορά από τα αντίστοιχα πεπερασμένα, δηλαδή

Θεώρημα 5. *Υπάρχει άπειρο μοντέλο της Peano αριθμητικής, τέτοιο ώστε να μην προκύπτει από την κατάρρευση κάποιου κλασσικού μοντέλου της Peano αριθμητικής για κάποια σχέση ισοτιμίας.*

Ενώ στην §4.5 ερευνούμε τις συνέπειες της Εικασίας, οι οποίες μας οδηγούν στο να σχηματίσουμε την άποψη της τελικά αρνητικής επίλυσής της. Το αξιοσημείωτο στην αποδοχή της Εικασίας του G. Priest είναι πως δίνει μοντελοθεωρητικά αποτελέσματα στην κλασσική λογική (βλ. Θεώρημα 4.34 και Πόρισμα 4.35) που πιστεύεται από πολλούς ότι δεν ισχύουν. Κατά αυτόν τον τρόπο συνεισφέρουμε προς την αρνητική επίλυσή της.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η αριθμητική *Peano* περιέχει πολλά γνήσια υποσυστήματα. Για μερικά από αυτά υπάρχουν αρκετά θεωρήματα, που βοηθούν στην κατανόηση των μοντέλων τους. Υπάρχουν όμως και κάποια άλλα, για τα οποία τα ερωτήματα που τέθηκαν είναι ακόμα ανοικτά. Ζητήματα ιεραρχίας και η εύρεση της ελάχιστης θεωρίας για τα βασικά θεωρήματα της αριθμητικής. Τη δεκαετία του '80 έγινε μια σημαντική προσπάθεια να ενταχθούν σε μια ιεραρχία ως προς τη δύναμή τους. Ορισμένα από τα θεωρήματα στη περιοχή αυτή συσχετίζονται με προβλήματα σε περιοχές όπως η *Θεωρία πολυπλοκότητας* και η *Θεωρία αριθμών.* Στη διατριβή αυτή ερευνούμε τη δύναμη συγκεκριμένων υποσυστημάτων. Για την ακρίβεια, οι P. Clote και J. Krajiček δημοσίευσαν ένα άρθρο, βλέπε την [CK93], στο οποίο συγκέντρωσαν πολλά ανοικτά προβλήματα που αφορούν τη φραγμένη αριθμητική, την πολυπλοκότητα αποδείξεων και υποσυστήματα της Peano αριθμητικής. Εμείς θα ασχοληθούμε με κάποια από τα προβλήματα στη λίστα αυτή.

Επίσης μελετάμε τη περίπτωση όλης της αριθμητικής Peano στα πλαίσια μιας μη κλασσικής λογικής. Για την ακρίβεια, φεύγουμε από την κλασσική λογική με σκοπό τη μελέτη των μοντέλων της αριθμητικής Peano στην paraconsistent λογική. Θα δούμε πως τελικά υπάρχει μια αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο λογικών και συνέπειες που αφορούν τα ασθενή υποσυστήματα στην κλασσική λογική.

1.1 Εισαγωγικές έννοιες

Καταρχήν δίνουμε τους απαραίτητους ορισμούς και κάνουμε μια συζήτηση περί του τι είναι γνωστό και τι όχι για τα υποσυστήματα της αριθμητικής Peano. Η γλώσσα $\mathcal{L}$ στην οποία δουλεύουμε είναι η *πρωτοβάθμια γλώσσα της* *αριθμητικής*, δηλαδή η γλώσσα με μη λογικά σύμβολα

$$\{\ ',\ +,\ \cdot,\ \leq,\ 0\}.$$

Για συντομία, PA^- είναι η πολύ γνωστή *βασική θεωρία* που περιγράφει τη συμπεριφορά της σταθεράς 0, των συναρτήσεων του επομένου, της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και της σχέσης $\leq$.

$$\begin{array}{rl}
\mathrm{Ax1} & \forall x, y, z((x+y)+z = x+(y+z)) \\
\mathrm{Ax2} & \forall x, y(x+y = y+x) \\
\mathrm{Ax3} & \forall x, y, z((x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)) \\
\mathrm{Ax4} & \forall x, y(x\cdot y = y\cdot x) \\
\mathrm{Ax5} & \forall x, y, z(x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z) \\
\mathrm{Ax6} & \forall x((x+0 = x)\wedge(x\cdot 0 = 0)) \\
\mathrm{Ax7} & \forall x, y(x\cdot y' = (x\cdot y)+x) \\
\mathrm{Ax8} & \forall x, y(x+y' = (x+y)') \\
\mathrm{Ax9} & \forall x, y, z((x<y\wedge y<z)\to x<z) \\
\mathrm{Ax10} & \forall x\neg(x<x) \\
\mathrm{Ax11} & \forall x, y(x<y\vee x=y\vee y<x) \\
\mathrm{Ax12} & \forall x, y, z(x<y\to x+z<y+z) \\
\mathrm{Ax13} & \forall x, y, z(0<z\wedge x<y\to x\cdot z<y\cdot z) \\
\mathrm{Ax14} & \forall x, y(x\leq y\to\exists z(x+z=y)) \\
\mathrm{Ax15} & 0<0'\wedge\forall x(x>0\to x\geq 0') \\
\mathrm{Ax16} & \forall x, y(x'=y'\to x=y) \\
\mathrm{Ax17} & \forall x(x\geq 0\wedge x'\neq 0)
\end{array}$$

Οι ιδιότητες αυτής της θεωρίας είναι συγκεντρωμένες με πολλές λεπτομέριες από τον R. Kaye στο [Kay91]. Συμβολίζουμε την πρωτοβάθμια αριθμητική Peano με PA, που είναι PA^- μαζί με το επόμενο σχήμα επαγωγής:

$$\mathrm{I}_\varphi \quad \forall\vec{y}(\varphi(0,\vec{y})\wedge\forall x(\varphi(x,\vec{y})\to\varphi(x+1,\vec{y}))\to\forall x\varphi(x,\vec{y})),$$

όπου φ είναι οποιοσδήποτε τύπος της $\mathcal{L}$. Για χάρη της πληρότητας, παραθέτουμε τους ορισμούς όλων των υποσυστημάτων στα οποία θα αναφερθούμε. Θεωρούμε $\mathbb{N}$ να είναι το standard μοντέλο του PA και για κάθε εμφάνιση του n θα εννοούμε ότι $n\in\mathbb{N}$.

- $\mathrm{I}\Sigma_n$ (ή Σ_n επαγωγή) είναι $\mathrm{PA}^- + \{\mathrm{I}_\varphi\ :\ \varphi$ είναι Σ_n-τύπος$\}$.

- $\mathrm{I}\Delta_n$ (ή Δ_n επαγωγή) είναι
  $\mathrm{PA}^- + \{\forall x \forall \vec{y}(\varphi(x,\vec{y}) \leftrightarrow \psi(x,\vec{y})) \rightarrow \mathrm{I}_\varphi \ : \ \varphi \ \ \Sigma_n\text{-τύπος}, \ \psi \ \ \Pi_n\text{-τύπος}\}$.

  Τύποι που είναι ταυτόχρονα Σ_n και Π_n λέγονται Δ_n-τύποι.

- $\mathrm{B}\Sigma_n$ (ή Σ_n συλλογή) είναι $\mathrm{I}\Delta_0 + \{\mathrm{B}_\varphi \ : \ \varphi$ είναι Σ_n-τύπος$\}$, όπου

$$\mathrm{B}_\varphi \quad \forall \vec{u} \forall z[\forall x < z \exists y \varphi(x,y,\vec{u}) \rightarrow \exists t \forall x < z \exists y < t \varphi(x,y,\vec{u})].$$

- $\mathrm{L}\Sigma_n$ (ή Σ_nαρχή ελαχίστου) είναι $\mathrm{PA}^- + \{\mathrm{L}_\varphi \ : \ \varphi$ είναι Σ_n-τύπος$\}$, όπου

$$\mathrm{L}_\varphi \quad \forall \vec{y}[\exists x \varphi(x,\vec{y}) \rightarrow \exists x[\varphi(x,\vec{y}) \wedge (\forall z < x) \neg \varphi(z,\vec{y})]].$$

Παρόμοια ορίζεται η $\mathrm{L}\Delta_n$ (ή Δ_n αρχή ελαχίστου). Επίσης με exp θα συμβολίζουμε το αξίωμα που εκφράζει ότι " η εκθετική είναι ολική", δηλαδή είναι η πρόταση

$$\forall x \forall y \exists z (z = x^y).$$

Ο Bennett ήταν ο πρώτος που περιέγραψε το γράφημα της εκθετικής συνάρτησης με έναν Δ_0 τύπο, βλέπε [Ben62]. Ο τύπος αυτός ήταν γραμμένος στη γλώσσα των λέξεων. Για αυτό, στη συνέχεια δόθηκε άλλος ορισμός από τον J. Paris στην $\mathcal{L}$ (βλέπε [Dim80]). Το γεγονός αυτό, δηλαδή ότι το $z = x^y$ είναι ένας Δ_0 τύπος, μας επιτρέπει να περιγράφουμε καλύτερα τα φράγματα, χωρίς να "χαλάει" η πολυπλοκότητα του τύπου.

Ένα άλλο, εξίσου χρήσιμο αξίωμα, είναι το $\Omega_{1,k}$, που εκφράζει ότι "$\Omega_{1,k}$ είναι ολική", όπου

$$\Omega_{1,k}(x) = x^{\overbrace{\log \cdots \log x}^{k \text{ φορές}}}.$$

Σε όλα τα παραπάνω αξιώματα επιτρέπεται η χρήση των παραμέτρων στους τύπους. Η δυνατότητα χρήσης των παραμέτρων έχει αποβεί πολλές φορές κρίσιμη έως αναγκαία. Για αυτό το λόγο, όταν δεν επιτρέπονται οι παράμετροι στα σχήματα της επαγωγής και της συλλογής, θα το τονίζουμε με ένα μείον στην άνω δεξιά γωνία του σχήματος, για παράδειγμα $\mathrm{I}\Sigma_n^-$, $\mathrm{B}\Sigma_n^-$ κ.τ.λ.

Είναι γνωστό πως το σύνολο όλων των προτάσεων που αληθεύουν σε ένα μοντέλο M, που το συμβολίζουμε με $Th(M)$, είναι πλήρης θεωρία[1].

Πολλές φορές κοιτάμε συγκεκριμένης πολυπλοκότητας προτάσεις μιας θεωρίας. Για αυτό το λόγο δίνουμε ορισμούς για τις επόμενες δύο θεωρίες.

[1] Μια θεωρία λέγεται *πλήρης* εάν για κάθε πρόταση φ, είτε $T \vdash \varphi$ είτε $T \vdash \neg\varphi$.

- $Th_{\Pi_n}(\mathbb{N})$ είναι το σύνολο των Π_n προτάσεων που αληθεύουν στους φυσικούς.

- $Th_{\Pi_n}(T)$ είναι το σύνολο των Π_n προτάσεων που αληθεύουν σε όλα τα μοντέλα της θεωρίας T.

Όπως είπαμε, η $Th(M)$ είναι πλήρης θεωρία, όμως ο περιορισμός της $Th_{\Pi_n}(M)$ σε Π_n προτάσεις καθιστά τη θεωρία $Th_{\Pi_n}(M)$ μη πλήρη.

Αφού μιλήσαμε για περιορισμούς θεωρίας, ας δούμε και τους περιορισμούς δομών, συγκεκριμένα ας ορίσουμε την έννοια της Σ_n στοιχειώδους υποδομής.

Ορισμός 1.1. Έστω $M \models \mathrm{PA}^-$ και K υποδομή της M. Λέμε ότι K είναι Σ_n *στοιχειώδης υποδομή* και το συμβολίζουμε με $K \prec_n M$, εάν για όλους τους Σ_n τύπους $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ και για όλα τα $a_1, \ldots, a_m \in K$,

$$M \models \varphi(a_1, \ldots, a_m) \iff K \models \varphi(a_1, \ldots, a_m).$$

Όταν ισχύει $K \prec_n M$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, τότε λέμε ότι η K είναι στοιχειώδης υποδομή της M και το συμβολίζουμε με $K \prec M$.

Μία Σ_n στοιχειώδης υποδομή ουσιαστικά "κληρονομεί" τις Σ_n ιδιότητες της δομής, όσον αφορά τα στοιχεία του σύμπαντος της υποδομής. Επίσης, σε μια Σ_n στοιχειώδη υποδομή αληθεύουν όλες οι Π_{n+1} προτάσεις που αληθεύουν στην υπερδομή.

1.2 Σχέσεις υποσυστημάτων της PA

Ας ρίξουμε μια πρώτη ματιά στο πώς συνδέονται τα σχήματα που ορίσαμε στην αρχή της προηγούμενης παραγράφου. Η σχέση της Σ_n συλλογής με άλλα υποσυστήματα της PA έχει εκτεταμένα μελετηθεί στα [PK78] και [Par70]. Ο Parsons έκανε την αρχή δείχνοντας ότι η Σ_n συλλογή έπεται από την Σ_n επαγωγή. Επίσης κατασκεύασε μοντέλο για τη θεωρία $\mathrm{I}\Sigma_n + \neg\mathrm{B}\Sigma_{n+1}$, αποδεικνύοντας έτσι πως η Σ_{n+1} συλλογή δεν έπεται από την Σ_n επαγωγή. Δηλαδή,

Θεώρημα 1.2 ([Par70])**.** *Για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$,

1. $\mathrm{I}\Sigma_n \Longrightarrow \mathrm{B}\Sigma_n$.

2. $\mathrm{I}\Sigma_n \not\Longrightarrow \mathrm{B}\Sigma_{n+1}$.

Οι J. Paris και L. Kirby συνέβαλαν σημαντικά στην περαιτέρω μελέτη των σχημάτων επαγωγής και συλλογής στο [PK78]. Μερικά από τα αποτελέσματα του άρθρου αυτού είναι τα παρακάτω:

Θεώρημα 1.3 ([PK78]). *Για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$,

1. $\mathrm{I}\Sigma_n \iff \mathrm{L}\Sigma_n \iff \mathrm{I}\Pi_n \iff \mathrm{L}\Pi_n$.
2. $\mathrm{B}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathrm{I}\Sigma_n$.
3. $\mathrm{B}\Sigma_{n+1} \not\Longrightarrow \mathrm{I}\Sigma_{n+1}$.
4. $\mathrm{B}\Pi_n \iff \mathrm{B}\Sigma_{n+1}$.
5. $\mathrm{I}\Sigma_{n+1} \Longrightarrow \mathrm{L}\Delta_{n+1} \Longrightarrow \mathrm{B}\Sigma_{n+1}$.

Ιδέα της απόδειξης. 1. Ισχύει η κλασσική απόδειξη που ξέρουμε από την συνολοθεωρία, ότι δηλαδή η αρχή ελαχίστου είναι ισοδύναμη με την αρχή της επαγωγής, μόνο που την κάνουμε για Σ_n (ή Π_n αντίστοιχα) σύνολα.

2. Η σημαντική παρατήρηση εδώ είναι ότι στην ουσία μπορούμε να δουλέψουμε με πλήρη επαγωγή στην μεταγλώσσα, δηλαδή έχοντας το $\mathrm{B}\Sigma_{n+1}$, υποθέτουμε ότι δείξαμε το $\mathrm{I}\Sigma_{n-1}$. Ύστερα, η απόδειξη του $\mathrm{I}\Sigma_n$ είναι απλή.

3. Για την απόδειξη αυτή χρησιμοποιήθηκε ένα μοντέλο που έχει για σύμπαν nonstandard Σ_n ορίσιμα στοιχεία. Επειδή θα ξαναχρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια αυτής της διατριβής ορίσιμα στοιχεία, παραθέτουμε αμέσως μετά το τέλος αυτής της απόδειξης το σχετικό ορισμό και μερικά αποτελέσματα.

4. Παρατηρούμε πως με χρήση της (οποιασδήποτε) συνάρτησης ζευγαρώματος, μπορούμε να απλοποιήσουμε τον υπαρξιακό ποσοδείκτη και με αυτόν τον τρόπο να κατεβάσουμε την πολυπλοκότητα του τύπου στο σχήμα συλλογής.

5. Η πρώτη συνεπαγωγή είναι τετριμμένη, ενώ για την άλλη: ορίζεται ένας Σ_{n+1} τύπος, έστω θ, που δίνει υποψήφια φράγματα για τον τύπο φ για τον οποίον θέλουμε να δείξουμε την συλλογή, και γράφοντας τον θ ως Π_{n+1} τύπο, εφαρμόζουμε την αρχή ελαχίστου.

□

Ορισμός 1.4. Έστω M μοντέλο της PA^-. Ένα στοιχείο $a \in M$ λέγεται *ορίσιμο* στο M αν υπάρχει τύπος φ της $\mathcal{L}$, με μια ελεύθερη μεταβλητή και χωρίς παραμέτρους, ώστε

$$M \models \varphi(a) \wedge \forall x[\varphi(x) \rightarrow x = a].$$

Το σύνολο των ορίσιμων στοιχείων του M είναι κλειστό ως προς επόμενο, πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, και περιέχει τους φυσικούς. Άρα είναι δομή για την $\mathcal{L}$. Αυτή την υποδομή της M, που έχει για σύμπαν το σύνολο των ορίσιμων στοιχείων, τη συμβολίζουμε με $K(M)$. Όταν θέλουμε οι τύποι που ορίζουν τα στοιχεία να είναι συγκεκριμένης πολυπλοκότητας Σ_n, τότε τη συμβολίζουμε με $K^n(M)$. Όταν θέλουμε να ορίζονται τα στοιχεία από ένα σύνολο παραμέτρων $X \subseteq M$, θα γράφουμε $K^n(M, X)$. Για $X = M$ παίρνουμε όλο το M, ενώ για $X = \emptyset$ παίρνουμε $K^n(M)$. Πριν περιγράψουμε τις ιδιότητες της $K^n(M)$, δίνουμε άλλη μία δομή που σχετίζεται στενά με ορίσιμα στοιχεία.

Ορισμός 1.5. Έστω M μοντέλο της PA^-. Ένα μη κενό σύνολο $I \subseteq M$ καλείται *τομή* αν είναι κλειστό ως προς την συνάρτηση του επομένου και ως προς τη σχέση $<$. Εάν $I \neq M$, τότε η τομή καλείται *γνήσια*. Τέλος, εάν η τομή είναι κλειστή ως προς πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, τότε καλείται *αρχικό τμήμα* του M και συμβολίζεται με $I \subseteq_e M$.

Σημειώνουμε ότι μια τομή δεν είναι (πάντα) δομή, ενώ το αρχικό τμήμα είναι δομή για την $\mathcal{L}$. Είναι προφανές ότι η μικρότερη τομή, που τυχαίνει να είναι και αρχικό τμήμα, είναι το $\mathbb{N}$. Ένα από τα αρχικά τμήματα του M που παρουσιάζουν ενδιαφέρον είναι το

$$I^n(M, X) = \{x \in M : \exists y \in K^n(M, X)[x < y]\}.$$

Οι στοιχειώδεις ιδιότητες των ορίσιμων στοιχείων μας εξασφαλίζουν την κλειστότητα του $I^n(M, X)$ ως προς τις $', +, \cdot$. Επίσης επειδή κάθε φορά σαρώνουμε όλα τα μικρότερα, έπεται ότι το $I^n(M, X)$ είναι κλειστό ως προς τη σχέση $<$, σε αντίθεση με το $K^n(M, X)$ που δεν είναι πάντα κλειστό ως προς την $<$. Δηλαδή, ισχύει πάντα ότι $I^n(M, X) \subseteq_e M$.

Η Πρόταση 1.6 δίνει ορισμένες από τις ιδιότητες των $I^n(M, X)$, $K^n(M, X)$, οι οποίες θα μας φανούν χρήσιμες στα επόμενα κεφάλαια. Οι P. Hájek και P. Pudlák έχουν συγκεντρώσει με λεπτομέρειες στο [HP93] πολλά αποτελέσματα για αυτές τις δομές. Οι J. Paris με L. Kirby και ανεξάρτητα ο H. Lessan απέδειξαν την παρακάτω

Πρόταση 1.6 ([Les78], [PK78])**.** *Έστω $n \geq 1$ και $M \models \mathrm{I}\Sigma_n$, $X \subseteq M$. Τότε ισχύουν*

1. $K^n(M, X) \prec_n M$.
2. $I^n(M, X) \prec_{n-1} M$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3, η Σ_{n+1} αρχή ελαχίστου είναι γνήσια πιο ισχυρή από την Σ_{n+1} συλλογή. Εάν όμως περιοριστούμε σε Δ_{n+1} αρχή ελαχίστου, τότε βγαίνει ότι είναι ισοδύναμα αυτά τα συστήματα. Αυτό το απέδειξε ο R. Gandy (για λεπτομέρειες βλέπε σελ. 66 του [HP93]). Επίσης στη κλασσική απόδειξη που αναφέραμε για το Θεώρημα 1.3 (1), ισχύει η μια κατεύθυνση για Δ_n τύπους. Δηλαδή, αν τα συνοψίσουμε προκύπτει το ακόλουθο

Θεώρημα 1.7. *Για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{B}\Sigma_{n+1} \Leftrightarrow \mathrm{L}\Delta_{n+1} \Rightarrow \mathrm{I}\Delta_{n+1}$.

Θεωρούμε την ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 1.2(2) για $n = 0$ και λόγω ιδιαίτερης σημασίας της απόδειξης για αυτήν τη περίπτωση, τη παραθέτουμε ως ξεχωριστό πόρισμα.

Πόρισμα 1.8. $\mathrm{I}\Delta_0 \not\Longrightarrow \mathrm{B}\Sigma_1$.

Το μοντέλο που χρησιμοποιείται για την απόδειξη του Πορίσματος 1.8 είναι της μορφής $K^1(M,X)$, για τυχαίο $M \models \mathrm{I}\Sigma_1$. Αυτό λοιπόν το μοντέλο ικανοποιεί το αξίωμα exp, διότι το γράφημα της εκθετικής είναι ένας Δ_0 τύπος και έτσι για $x, y \in K^1(M,X)$, το στοιχείο x^y (εφόσον υπάρχει στο M) είναι και αυτό μέσα στο $K^1(M,X)$. Μάλιστα η ύπαρξη μοντέλου που να ικανοποιεί τη θεωρία $\mathrm{I}\Delta_0 + \neg\mathrm{B}\Sigma_1$, αλλά να μην ικανοποιεί το exp τέθηκε ως πρόβλημα από τους J. Paris και A. Wilkie, που είναι ανοικτό ακόμα. Είναι το Πρόβλημα 29 στη λίστα[2] ανοικτών προβλημάτων [CK93].

Πρόβλημα 1.9 (J. Paris, A. Wilkie)**.** Υπάρχει μοντέλο M της θεωρίας $\mathrm{I}\Delta_0 + \neg\mathrm{B}\Sigma_1$ στο οποίο η εκθετική δεν είναι ολική;

Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε τις συνέπειες της θετικής απάντησης στο Πρόβλημα 1.9.

Τα σχόλια που κάναμε για το $K^1(M,X)$ προηγουμένως, θα τα διατυπώσουμε ως λήμμα, διότι θα το επικαλεστούμε σε αρκετά σημεία της διατριβής.

Λήμμα 1.10.

1. *Εάν* $M \models \mathrm{I}\Delta_0 + \exp$ *και* $K^1(M,X) \neq \mathbb{N}$, *τότε* $K^1(M,X) \not\models \mathrm{B}\Sigma_1$.
2. *Εάν* $M \models \mathrm{I}\Sigma_n$ *και* $K^n(M,X) \neq \mathbb{N}$, $n \geq 1$, *τότε* $K^n(M,X) \models \mathrm{I}\Sigma_{n-1} + \neg\mathrm{B}\Sigma_n$.
3. $\mathrm{I}\Delta_0 + \exp \nvdash \mathrm{B}\Sigma_1$.

Ανάμεσα στα υποσυστήματα της PA που αναφέραμε, το $I\Delta_n$ είναι ένα από τα πιο "μυστηριώδη", με την έννοια ότι δεν υπάρχουν πολλά αποτελέσματα, αλλά υπάρχουν πολλά ανοιχτά ερωτήματα. Για παράδειγμα, ένα βασικό ερώτημα που τέθηκε από τον J. Paris και είναι το Πρόβλημα 34 στη λίστα των ανοικτών προβλημάτων των Clote και Krajicek είναι το παρακάτω:

[2] Οι λεπτομέρειες για τη λίστα υπάρχουν στην πρώτη σελίδα της εισαγωγής.

Πρόβλημα 1.11 (Paris). $\mathrm{I}\Delta_n \vdash \mathrm{B}\Sigma_n$ $(n \geq 1)$;

Στη διατριβή αυτή θα γίνει αναφορά στην εξέλιξη του Προβλήματος 1.11 μέσα στην τελευταία εξαετία και στη συνεισφορά μας προς τη λύση του Προβλήματος.

1.3 Τελικές επεκτάσεις

Ένα από τα πράγματα που βοηθάει σημαντικά τη μελέτη ενός μοντέλου M είναι η δυνατότητα να το μελετήσουμε μέσα σε ένα άλλο μοντέλο N που το περιέχει. Όσο καλύτερα το M είναι "τοποθετημένο" μέσα στο N, τόσο περισσότερες είναι οι πληροφορίες που μπορούμε να αντλήσουμε για το M. Μία από τις 'καλές' επεκτάσεις είναι η τελική.

Ορισμός 1.12. Έστω M, N μοντέλα της PA^-. Το N λέγεται *τελική επέκταση* του M, εάν το M είναι αρχικό τμήμα του N, δηλαδή $M \subseteq_e N$. Όταν $M \neq N$, τότε η επέκταση καλείται *γνήσια*.

Ας δούμε σε τι βοηθάει η ύπαρξη μιας γνήσιας τελικής επέκτασης.

Θεώρημα 1.13 ([Kay91]). *Έστω M και N δυο δομές της $\mathcal{L}$, με $M \subseteq_e N$. Τότε $M \prec_0 N$, δηλαδή η M είναι Δ_0 στοιχειώδης υποδομή της N. Ειδικότερα, εάν $N \models \mathrm{I}\Delta_0$ και $M \subseteq_e N$, τότε και $M \models \mathrm{I}\Delta_0$.*

Στο παραπάνω Θεώρημα το M είναι απλή δομή. Χωρίς να υποθέσουμε τίποτα για αυτή τη δομή, παρά μόνο ότι έχει μια γνήσια επέκταση η οποία ικανοποιεί τη Δ_0 επαγωγή, συμπεραίνουμε ότι και το M ικανοποιεί τη Δ_0 επαγωγή.

Ας συμβολίσουμε για συντομία με $M \prec_{e,n} N$ την τελική επέκταση, όπου επιπλέον $M \prec_n N$. Βάζοντας επιπλέον υποθέσεις για το M προκύπτει η επόμενη

Πρόταση 1.14 ([HP93]). *Έστω $M \prec_{e,n} N$, με $N \models \mathrm{I}\Sigma_n$ και $M \neq N$. Τότε $M \models \mathrm{B}\Sigma_{n+1}$.*

Ως συνέπεια της Πρότασης 1.14 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 1.13 έπεται το εξής πολύ χρήσιμο

Πόρισμα 1.15. *Έστω $M \models \mathrm{I}\Delta_0$. Τότε κάθε γνήσιο αρχικό τμήμα του M ικανοποιεί $\mathrm{B}\Sigma_1$.*

Στο άρθρο τους ([PK78]) οι J. Paris και L. Kirby προσπάθησαν να κατανοήσουν τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένα αριθμήσιμο μοντέλο να έχει μια Σ_n στοιχειώδη γνήσια τελική επέκταση και το κατάφεραν για $n \geq 2$. Συγκεκριμένα έδειξαν το

Θεώρημα 1.16 ([PK78]). *Έστω $M \models \mathrm{I}\Delta_0$ αριθμήσιμο μοντέλο και $n \geq 2$. Τότε*

$$\text{το } M \text{ έχει γνήσια } \Sigma_n \text{ στοιχειώδη τελική επέκταση που ικανοποιεί } \mathrm{I}\Delta_0 \iff M \models \mathrm{B}\Sigma_n.$$

Μέχρι στιγμής παρόμοιες (ικανές και αναγκαίες) συνθήκες δεν έχουν βρεθεί για τις περιπτώσεις $n = 0, 1$. Το σχετικό ερώτημα μάλιστα κατατάσσεται ως θεμελιώδες ανοικτό πρόβλημα στη λίστα προβλημάτων των P. Clote και J. Krajiček.

Πρόβλημα 1.17 (Paris). Ισχύει πως κάθε αριθμήσιμο μοντέλο M του $\mathrm{B}\Sigma_1$ έχει μια γνήσια τελική επέκταση που ικανοποιεί $\mathrm{I}\Delta_0$;

Είδαμε στη Πρόταση 1.14 πως για να έχει οποιοδήποτε μοντέλο M μια τελική επέκταση N που ικανοποιεί Δ_0 επαγωγή, πρέπει το M να ικανοποιεί τη Σ_1 συλλογή.

Οι A. Wilkie και J. Paris, στο τέλος της δεκαετίας του '80, έδειξαν ότι εάν υποθέσουμε την ικανοποίηση του exp στο μοντέλο, τότε ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή,

Θεώρημα 1.18 ([WP89]). *Έστω $M \models \mathrm{I}\Delta_0 + \exp$ αριθμήσιμο μοντέλο. Τότε*

$$\text{το } M \text{ έχει γνήσια τελική επέκταση που ικανοποιεί } \mathrm{I}\Delta_0 \iff M \models \mathrm{B}\Sigma_1.$$

Η τελική αυτή επέκταση σύμφωνα με το Θεώρημα 1.13 είναι και Δ_0 στοιχειώδης.

Ένα άλλο ανοικτό πρόβλημα για τελικές επεκτάσεις, που πηγάζει από το Πρόβλημα 1.16, είναι αυτό που έθεσε ο P. Clote και είναι το Πρόβλημα 33 στη λίστα ([CK93]). Δηλαδή,

Πρόβλημα 1.19 (Clote). Για $n \geq 1$, εάν M είναι αριθμήσιμο μοντέλο της $\mathrm{B}\Sigma_{n+1}$, τότε υπάρχει γνήσια Σ_{n+1} στοιχειώδης τελική επέκταση που ικανοποιεί το $\mathrm{B}\Sigma_n$;

Θα επανέλθουμε στις τελικές επεκτάσεις στο Κεφάλαιο 3.

1.4 Στοιχειώδης Αριθμητική

Τα υποσυστήματα που αναφέραμε, για ακρίβεια τα Σ_n επαγωγικά σχήματα και Σ_{n+1} σχήματα συλλογής, για $n \geq 1$ συνεπάγονται το αξίωμα exp. Ενώ για τα $\mathrm{I}\Delta_0$ και $\mathrm{B}\Sigma_1$ υπάρχουν μοντέλα που δεν ικανοποιούν το αξίωμα exp. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, τα περισσότερα θεωρήματα, για παράδειγμα συνδυαστικής φύσεως, μπορούν να αποδειχθούν χρησιμοποιώντας για βάση μόνο τη θεωρία $I\Delta_0 + \exp$. Αυτήν τη θεωρία την καλούμε *στοιχειώδη αριθμητική*, και την συμβολίζουμε (EA).

Μια σημαντική κλάση που σχετίζεται με την EA είναι η κλάση του Grzegorczyk. Αρκετά αποτελέσματα που έχουν να κάνουν με αυτήν την κλάση υπάρχουν στα [Grz55], [Woo81] και [BI91]. Για να εξηγήσουμε τη σχέση αυτή δίνουμε τους απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 1.20. Η *κλάση του Grzegorczyk* $\mathcal{E}^2$ είναι η μικρότερη κλάση των πρωτογενών αναδρομικών συναρτήσεων στην $\mathcal{L}$, που περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις, τις συναρτήσεις προβολής, τη συνάρτηση του επομένου και είναι κλειστή ως προς αντικατάσταση και φραγμένη αναδρομή, δηλαδή, αν $g(y)$, $h(x,y,w)$ και $b(x,y)$ είναι στη $\mathcal{E}^2$, τότε είναι και η συνάρτηση $f(x,y)$ που ικανοποιεί:

- $f(0,y) = \min\{g(y), b(0,y)\}$
- $f(x+1,y) = \min\{h(x+1,y,f(x,y)), b(x+1,y)\}$.

Με $\mathcal{E}^2_*$-*κατηγόρημα* εννοούμε ένα κατηγόρημα του οποίου η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι στην κλάση $\mathcal{E}^2$. Τέτοια κατηγορήματα είναι κλειστά ως προς τους φραγμένους ποσοδείκτες. Κατά συνέπεια, κάθε Δ_0-κατηγόρημα είναι ένα $\mathcal{E}^2_*$-κατηγόρημα.

Ορίζουμε επίσης μια επέκταση της $\mathcal{L}$, την $\mathcal{L}'$: για κάθε συνάρτηση στη $\mathcal{E}^2$ προσθέσαμε ένα αντίστοιχο συναρτησιακό σύμβολο. Οπότε η νέα γλώσσα που προκύπτει έχει άπειρο πλήθος μη λογικών συμβόλων.

Μια σημαντική θεωρία που αποδεικνύεται ότι "περιέχεται" στην EA, είναι η $I\mathcal{E}^2_*$, όπου με $I\mathcal{E}^2_*$ συμβολίζουμε το σύστημα στη γλώσσα $\mathcal{L}'$, που προκύπτει εάν επιτρέψουμε επαγωγή για $\mathcal{E}^2_*$ κατηγορήματα. Στο τέλος αυτής της ενότητας θα εξηγήσουμε πως ακριβώς περιέχεται.

Έχει αποδειχθεί ότι όλες οι συναρτήσεις στην $\mathcal{E}^2$ έχουν πολυωνυμική αύξηση. Σε αυτό το σημείο πρέπει να γίνει μια διευκρίνηση: υπάρχουν συναρτήσεις που ενώ δεν ανήκουν στη $\mathcal{E}^2$, το γράφημά τους όμως είναι $\mathcal{E}^2_*$-κατηγόρημα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η εκθετική.

Θα περάσουμε τώρα σε μια κατηγορία συναρτήσεων από την κλάση $\mathcal{E}^2$. Είναι οι συναρτήσεις καταμέτρησης στοιχείων των Δ_0 συνόλων. Αυτές οι συναρτήσεις μας βοηθάνε να μετράμε το πλήθος των στοιχείων μέσα σε πλαίσια λογικών θεωριών. Έχουν εφαρμογές και στην υπολογιστική πολυπλοκότητα και στη συνδυαστική θεωρία αριθμών. Ο φορμαλιστικός ορισμός τέτοιας συνάρτησης είναι:

Ορισμός 1.21. Έστω A ένα ορίσιμο σύνολο. Η *συνάρτηση καταμέτρησης*, C_A, του A ορίζεται ως εξής:

- $C_A(0) = 0$
- $C_A(x+1) = \begin{cases} C_A(x)+1, & \text{αν } x \in A, \\ C_A(x), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

Εάν περιοριστούμε σε Δ_0 υποσύνολα του $\mathbb{N}$, τότε υπάρχει ένα ανοικτό ερώτημα που κατατάσσεται και στην κατηγορία συνδυαστικών προβλημάτων στα υποσυστήματα του PA και στην κατηγορία προβλημάτων στην υπολογιστική πολυπλοκότητα.

Πρόβλημα 1.22. Έστω Δ_0 υποσύνολο A του $\mathbb{N}$ και έστω C_A η συνάρτηση καταμέτρησης του A. Υπάρχει Δ_0 τύπος που να ορίζει την C_A;

Οι J. Paris και A. Wilkie έχουν μελετήσει αυτό το πρόβλημα μαζί με κάποια παρόμοια στο άρθρο τους [PW85]. Για να φανεί η σύνδεση του Προβλήματος 1.22 με προβλήματα που αφορούν την υπολογιστική πολυπλοκότητα, δίνουμε την ισοδύναμη διατύπωση όπως δόθηκε από τους J. Paris και A. Wilkie.

Πρόβλημα 1.23 ([PW85])**.** Έστω A ένα Δ_0 υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Έχει το σύνολο

$$\{\langle n, m\rangle : m = |A \cap n|\}$$

ένα Δ_0 ορισμό;

Στην εκφώνηση του Προβλήματος 1.23 το σύμβολο n έχει διπλή ερμηνεία, ανάλογη με τη χρήση του. Δηλαδή, στο $\langle n, m\rangle$ με n εννοείται ένας φυσικός αριθμός, ενώ στο $A \cap n$, το n αντιστοιχεί στο σύνολο $\{x : x < n\}$. Όσο για τη συνάρτηση $\langle\cdot,\cdot\rangle$, είναι η *κλασσική συνάρτηση ζευγαρώματος*, δηλαδή

$$\langle u_0, u_1\rangle = \frac{(u_0 + u_1 + 1)(u_0 + u_1)}{2} + u_0.$$

Τέλος, με $|X|$ συμβολίζουμε τον πληθάριθμο του συνόλου X.

Λίγα λόγια για χάρη της πληρότητας για έννοιες από την υπολογιστική πολυπλοκότητα. Με $\mathcal{F}$ θα συμβολίζουμε την *κλάση των αριθμητικών συναρτήσεων που υπολογίζονται από πεπερασμένα αυτόματα.* Ο R. Ritchie, στις αρχές της δεκαετίας του '60, εισήγαγε μια μεγαλύτερη κλάση $\mathcal{F}_1$ στο άρθρο του [Rit63], που είναι η κλάση των συναρτήσεων g (σε δυαδική μορφή) που υπολογίζονται από τις μηχανές Turing με χώρο εργασίας να είναι φραγμένος από μια πιο απλή συνάρτηση $f \in \mathcal{F}$.

Ο R. Ritchie ερμήνευσε τη κλάση $\mathcal{F}_1$ με δύο τρόπους: Ο πρώτος τρόπος ήταν να την ορίσει με τις μηχανές Turing, ενώ ο δεύτερος να την ορίσει αριθμητικά. Αυτό τον οδήγησε σε μια σύνδεση μεταξύ της κλάσης $\mathcal{F}$ και της κλάσης των Δ_0 συνόλων. Συγκεκριμένα απέδειξε το

Θεώρημα 1.24 ([Rit63]). *Κάθε Δ_0 υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι στο Lin.Space.*[3]

Ένα αναμενόμενο ερώτημα είναι εάν ισχύει η αντίστροφη σχέση εγκλεισμού. Δηλαδή,

Πρόβλημα 1.25. Αν το A ανήκει στο Lin.Space, είναι και Δ_0 ορίσιμο;

Πιστεύεται πως η απάντηση στο Πρόβλημα 1.25 είναι αρνητική. Ένας τρόπος να το δείξει αυτό κανείς θα ήταν να χρησιμοποιήσει την ακόλουθη χαρακτηριστική ιδιότητα της κλάσης Lin.space: Αν A ανήκει στη Lin.space, τότε και το σύνολο $\{\langle n, m\rangle : m = |A \cap n|\}$ επίσης ανήκει στη Lin.space. Κατά συνέπεια η αρνητική απάντηση στο Πρόβλημα 1.22 (ή ισοδύναμα στο Πρόβλημα 1.23) θα συνεπάγεται αρνητική απάντηση στο Πρόβλημα 1.25.

Τα παραπάνω περιγράφουν τη σχέση της κλάσης του Grzegorczyk με την υπολογιστική πολυπλοκότητα. Στη συνέχεια θα δούμε τη σχέση της και με τη συνδυαστική θεωρία αριθμών. Σε αυτό το σημείο είναι καλό να εξηγήσουμε με ποια έννοια η αναφερόμενη κλάση περιέχεται στην EA. Άμεσα δεν προκύπτει ότι είναι υποσύστημα της EA, διότι στην ουσία αλλάξαμε τη γλώσσα $\mathcal{L}$ με μια επέκτασή της. Όμως η ολικότητα της εκθετικής συνάρτησης στο EA μας επιτρέπει να εκφράσουμε τον αναδρομικό τύπο κάθε τέτοιας συνάρτησης με Δ_0 τρόπο. Το κλειδί σε αυτή την υπόθεση είναι η κωδικοποίηση. Έτσι, ξαναγυρίζουμε στην κλασσική μας γλώσσα $\mathcal{L}$ και θεωρούμε με αυτήν την έννοια ότι η θεωρία $\mathrm{I}\mathcal{E}_*^2$ περιέχεται στην EA.

Προς αποφυγή σύγχυσης πάντα θα τονίζουμε όταν η δομή M είναι για την $\mathcal{L}'$. Αλλιώς θα εννοείται ότι είναι δομή για την $\mathcal{L}$.

Θα επανέρθουμε στα συστήματα $\mathrm{I}\mathcal{E}_*^2$ και EA στο επόμενο κεφάλαιο.

1.5 Αρχή περιστερώνα

Αυτήν την παράγραφο της εισαγωγής θα την αφιερώσουμε σε μια από τις συνδυαστικές αρχές: την αρχή του περιστερώνα. Θα ορίσουμε μερικές μορφές

[3] Λέμε ότι το υποσύνολο A των φυσικών αριθμών ανήκει στο *Lin.Space* αν υπάρχει μια ντετερμινιστική μηχανή Turing η οποία αναγνωρίζει τα στοιχεία του A χρησιμοποιώντας χώρο εργασίας της τάξης $\mathcal{O}(n)$, δηλαδή με χώρο φραγμένο από το cn, για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{N}$.

της αρχής αυτής και θα εξετάσουμε τη σχέση τους με ορισμένα υποσυστήματα της PA.

Όπως είπαμε, υπάρχουν παραπάνω από μια μορφή της αρχής του περιστερώνα. Ξεκινάμε με την πιο ισχυρή (πλήρη) μορφή, που τη συμβολίζουμε με PHP_φ για συντομία, και είναι

$$\text{για κάθε } x, \text{“}\varphi \text{ δεν ορίζει 1-1 συνάρτηση από } x+1 \text{ στο } x\text{”}. \tag{1.1}$$

Συνήθως εστιάζουμε σε συγκεκριμένης πολυπλοκότητας τύπους, οπότε με $\mathrm{PHP}\Sigma_n$ θα εννοούμε το σύστημα PA^- μαζί με το σχήμα $\{\mathrm{PHP}_\varphi : \varphi \in \Sigma_n\}$.

Στην πραγματικότητα υπάρχουν άλλες τέσσερις (ισχυρές) μορφές της αρχής του περιστερώνα, (βλέπε [DP86]). Αυτές τις πέντε μορφές οι C. Dimitracopoulos και J. Paris τις συμβολίζουν με $\mathrm{PHP}_i\Sigma_n$, $1 \leq i \leq 5$. Παραδείγματος χάριν, η μορφή (1.1) αντιστοιχεί στο $i = 1$. Οι τέσσερις από αυτές είναι ισοδύναμες στο PA^-, συμπεριλαμβανόμενης της μορφής που δώσαμε πιο πάνω. Η πέμπτη, η οποία αντιστοιχεί στο $i = 3$ στο άρθρο [DP86], έπεται από κάθε μια από τις υπόλοιπες, αλλά είναι άγνωστο εάν ισχύει το αντίστροφο. Εμείς στη διατριβή αυτή θα περιοριστούμε στην μορφή (1.1).

Υπάρχουν και δύο, κατά τα φαινόμενα, ασθενέστερες μορφές, οι οποίες μελετήθηκαν σε μεγάλο βαθμό από τους J. Paris, A. Wilkie και A. Woods στο [PWW88] και είναι οι ακόλουθες:

- WPHP_φ για κάθε x και για τυχαίο (standard) ρητό $\epsilon > 0$, “εάν $(1+\epsilon)x > x$ τότε φ δεν ορίζει 1-1 συνάρτηση από $(1+\epsilon)x$ στο x”.

- wPHP_φ για κάθε x, “φ δεν ορίζει 1-1 συνάρτηση από x^2 στο x”.

Συμβολίζουμε τα αντίστοιχα υποσυστήματα, δηλαδή τα $\mathrm{PA}^- + \{\mathrm{WPHP}_\varphi : \varphi \in \Sigma_n\}$ και $\mathrm{PA}^- + \{\mathrm{wPHP}_\varphi : \varphi \in \Sigma_n\}$, με $\mathrm{WPHP}\Sigma_n$ και $\mathrm{wPHP}\Sigma_n$ αντίστοιχα.

Θα δώσουμε μερικά θεωρήματα, τα οποία εν μέρει θα δικαιολογήσουν το χαρακτηρισμό *ισχυρή* αρχή. Το επόμενο θεώρημα αποδείχθηκε από τους C. Dimitracopoulos και J. Paris, και λέει πως η πλήρης αρχή περιστερώνα για Δ_0 συναρτήσεις είναι αρκετά ισχυρή ώστε να συνεπάγεται από μόνη της την Δ_0 επαγωγή. Δηλαδή,

Θεώρημα 1.26 ([DP86])**.** $\vdash \mathrm{PHP}\Delta_0 \rightarrow \mathrm{I}\Delta_0$.

Στο ίδιο άρθρο, οι C. Dimitracopoulos και J. Paris έδειξαν επίσης πως η πλήρης αρχή περιστερώνα για Σ_1 συναρτήσεις συνεπάγεται τη Σ_1 συλλογή, ή ακόμα πιο γενικά,

Θεώρημα 1.27 ([DP86]). *Για* $n \geq 1$, $\vdash \mathrm{PHP}\Sigma_n \rightarrow \mathrm{B}\Sigma_n$.

Η ισχύς της αντίστροφης συνεπαγωγής του Θεωρήματος 1.26 τέθηκε ως ερώτημα από τον Macintyre, και παραμένει μέχρι στιγμής ένα από τα πιο βασικά ανοικτά προβλήματα στα υποσυστήματα της PA, βλέπε λίστα των ανοικτών προβλημάτων των Clote και Krajicek.

Πρόβλημα 1.28 (Macintyre). Μπορεί η Δ_0 επαγωγή να αποδείξει $\mathrm{PHP}\Delta_0$;

Επίσης ο A. Wilkie στο [Wil80b] μελέτησε ασθενή συστήματα, δηλαδή αυτά που δεν περιέχουν το exp. Εξέφρασε αμφιβολίες για τη δύναμη της Δ_0 επαγωγής και υπογράμμισε την σπουδαιότητα της θετικής απάντησης στο Πρόβλημα 1.29.

Πρόβλημα 1.29 (Wilkie). Μπορεί η Δ_0 επαγωγή να αποδείξει την απειρία των πρώτων;

Ο A. Woods, εμπνευσμένος από το Πρόβλημα 1.29, ήταν ο πρώτος που σκέφτηκε να χρησιμοποιήσει συναρτήσεις καταμέτρησης στις αποδείξεις των συνδυαστικών αρχών. Η προσέγγιση που έδωσε στο Πρόβλημα 1.29, αποτελείται από δύο στάδια:
Στάδιο 1. Ξεκίνησε με άρνηση του Θεωρήματος του Sylvester (βλέπε πιο κάτω το 1.31), για nonstandard στοιχεία. Όρισε στη συνέχεια κατάλληλες διαμερίσεις των δύο συγκεκριμένων διαστημάτων, και αφού έδωσε ετικέτες με βάση τους πρώτους, έκανε την καταμέτρηση των διαμερίσεων. Με αυτόν τον τρόπο κατασκεύασε μια 1-1 Δ_0 συνάρτηση από το $x[\log_2 y]$ στο $2x[\log_2 x] + ([\frac{x}{2}] + 1)[\log_2 y]$, με $y \geq x^5$. Αυτό όμως οδηγεί σε αντίφαση όταν το μοντέλο ικανοποιεί το $\mathrm{PHP}\Sigma_0$. Αφού λοιπόν έδειξε ότι ισχύει το Θεώρημα του Sylvester, κατέληξε στο επόμενο βασικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.30 ([Woo81]). $\mathrm{PHP}\Sigma_0 \vdash \forall x \exists p(p > x \ \wedge\ p$ *είναι πρώτος*$)$.

Το θεώρημα που αναφέραμε ως βασικό βήμα στο Θεώρημα 1.30, είναι ένα από τα δομικά θεωρήματα στην θεωρία αριθμών. Ο J. Sylvester απέδειξε (στους φυσικούς) την απειρία των πρώτων χρησιμοποιώντας κατάλληλες αριθμητικές σειρές. Για την ακρίβεια απέδειξε

Θεώρημα 1.31 (Sylvester). *Για* $1 \leq x \leq y$, *υπάρχει πρώτος* $p > x$, *ο οποίος διαιρεί τουλάχιστον έναν όρο της ακολουθίας* $y+1, \ldots y+x$.

Στάδιο 2. Συνεπώς η θετική απάντηση στο Πρόβλημα 1.28 οδηγεί σε επίσης θετική απάντηση στο Πρόβλημα 1.29. Σε αυτό το σημείο ο A. Woods πρόσθεσε στο $\mathrm{I}\Delta_0$ την ικανότητα να μετράει τα στοιχεία Δ_0 συνόλων και απέδειξε το εξής

Θεώρημα 1.32. *[Woo81] Οποιοδήποτε μοντέλο του* $\mathrm{I}\Delta_0$*, το οποίο έχει τη δυνατότητα καταμέτρησης στοιχείων* Δ_0 *συνόλων ικανοποιεί* $\mathrm{PHP}\Delta_0$.

Με άλλα λόγια οποιοδήποτε μοντέλο για την $\mathcal{L}'$ (επεκτεταμένη γλώσσα που ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο) του $\mathrm{I}\Delta_0$ είναι και μοντέλο του $\mathrm{PHP}\Delta_0$.

Οι C. Dimitracopoulos και J. Paris στο [DP86] έδωσαν διαφορετική προσέγγιση στο Πρόβλημα 1.28. Θεώρησαν ένα μοντέλο του $\mathrm{I}\Delta_0 + \exp$ και χρησιμοποιώντας κωδικοποίηση έδειξαν το ακόλουθο

Θεώρημα 1.33 ([DP86])**.** $\mathrm{I}\Delta_0 + \exp \vdash \mathrm{PHP}\Delta_0$.

Οι J. Paris, A. Wilkie και A. Woods τοποθετώντας στη θέση του exp το ασθενέστερο αξίωμα Ω_1 (βλέπε§ 1.1) απέδειξαν την πιο ασθενή μορφή της αρχής του περιστερώνα. Επίσης έδειξαν ότι έχοντας το αξίωμα Ω_1 οι δύο ασθενέστερες αρχές είναι ισοδύναμες. Δηλαδή,

Θεώρημα 1.34 ([PWW88])**.**

1. $\mathrm{I}\Delta_0 + \Omega_1 \vdash \mathrm{wPHP}\Delta_0$.

2. $\mathrm{I}\Delta_0 + \Omega_1 \vdash \mathrm{wPHP}\Delta_0 \iff \mathrm{WPHP}\Delta_0$.

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με μια συζήτηση που αφορά τη σχέση του $\mathrm{B}\Sigma_1$ και $\mathrm{PHP}\Delta_0$. Είναι γνωστό ότι $\mathrm{PHP}\Delta_0$ δεν συνεπάγεται $\mathrm{B}\Sigma_1$. Ο λόγος είναι πως το $\mathrm{PHP}\Delta_0$ περιέχεται στο $\mathrm{I}\Delta_0+\exp$, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.33, όπου το τελευταίο δεν συνεπάγεται $\mathrm{B}\Sigma_1$ (βλέπε Λήμμα 1.10).

Από την άλλη, υπάρχουν μοντέλα του $\mathrm{PHP}\Delta_0$ που δεν ικανοποιούν καμία μορφή εκθετικού. Για παράδειγμα, έστω ένα nonstandard μοντέλο $M \models \mathrm{I}\Sigma_1$ και έστω τυχαίο nonstandard στοιχείο του M, ας πούμε a. Τότε το μοντέλο που ζητάμε είναι $a^{\mathbb{N}} = \{x \in M : x \leq a^n,$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}\}$. Περισσότερες λεπτομέρειες υπάρχουν στο [HP93].

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι τα υποσυστήματα $\mathrm{PHP}\Delta_0+\mathrm{B}\Sigma_1$ και $\mathrm{I}\Delta_0 + \exp$ είναι ανεξάρτητα.

Εξετάζοντας προσεχτικά την πολυπλοκότητα[4] του $\mathrm{PHP}\Sigma_n$ συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για μια Π_{n+2} πρόταση. Οι H. Friedman και J. Paris έδειξαν ανεξάρτητα το επόμενο θεώρημα, το οποίο θα το χρησιμοποιήσουμε για τον αναπροσδιορισμό του Προβλήματος 1.28.

Θεώρημα 1.35 ([Par81])**.** *Για όλα τα* n*, οι θεωρίες* $\mathrm{I}\Sigma_n$ *και* $\mathrm{B}\Sigma_{n+1}$ *έχουν τις ίδιες* Π_{n+1} *συνέπειες. Δηλαδή, για κάθε* Π_{n+1} *πρόταση* φ,

$$\mathrm{I}\Sigma_n \vdash \varphi \iff \mathrm{B}\Sigma_{n+1} \vdash \varphi.$$

[4]Η αναλυτική μορφή της σχέσης (1.1) δίνεται στο [DP86].

Επειδή λοιπόν το PHPΔ_0 είναι μια Π_2 πρόταση, το ανοικτό Ερώτημα 1.28, μπορεί να διατυπωθεί και ως "Αποδεικνύει η Σ_1 συλλογή το PHPΔ_0;"

1.6 Το Θεώρημα DMPR

Το Θεώρημα Davis-Matiyasevič h-Putnam-Robinson αποδείχθηκε το 1970 (βλέπε [Mat70]), μετά από σειρά εργασιών από πολλούς ερευνητές. Το Θεώρημα αυτό έπαιξε καθοριστικό ρόλο για την αρνητική επίλυση του 10ου προβλήματος του Hilbert και διατυπώνεται κατ'αρχήν ως εξής.

Θεώρημα 1.36 (DMPR). *Για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}^k$, $k \geq 1$*

$$\textit{Το } A \textit{ είναι } \Sigma_1 \textit{ ορίσιμο} \iff \textit{το } A \textit{ είναι Διοφαντικό.}$$

Μια διατύπωση του Θεωρήματος αυτού, που βολεύει περισσότερο για γενίκευση είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 1.37 (DMPR). *Για κάθε Σ_1 τύπο $\varphi(\vec{x})$ της $\mathcal{L}$ μπορούμε να βρούμε "αποτελεσματικά" ένα πολυώνυμο $p(\vec{x},\vec{y}) \in \mathbb{Z}[\vec{x},\vec{y}]$ τέτοιο ώστε*

$$\mathbb{N} \models \forall \vec{x}(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \exists \vec{y}(p(\vec{x},\vec{y})=0)).$$

Σημειώνουμε ότι ο συμβολισμός $p(\vec{x},\vec{y})$ δίνεται καταχρηστικά στα πλαίσια της $\mathcal{L}$ και αντιστοιχεί στον τύπο της $p_+(\vec{x},\vec{y})=p_-(\vec{x},\vec{y})$, όπου με $p_+(\vec{x},\vec{y})$ (αντίστοιχα $p_-(\vec{x},\vec{y})$) συμβολίζουμε το μέρος του $p(\vec{x},\vec{y})$ με θετικούς (αντίστοιχα αρνητικούς) συντελεστές.

Το Θεώρημα 1.37 γενικεύεται από τους H. Gaifman και C. Dimitracopoulos (βλέπε [GD82]) ως εξής

Θεώρημα 1.38 (DMPR). *Για κάθε Σ_1 τύπο $\varphi(\vec{x})$ της $\mathcal{L}$ μπορούμε να βρούμε "αποτελεσματικά" ένα πολυώνυμο $p(\vec{x},\vec{y}) \in \mathbb{Z}[\vec{x},\vec{y}]$ τέτοιο ώστε*

$$\mathrm{I}\Delta_0 + \exp \vdash \forall \vec{x}(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \exists \vec{y}(p(\vec{x},\vec{y})=0)).$$

Μετά το αποτέλεσμα αυτό δημιουργήθηκε φυσιολογικά το ακόλουθο ερώτημα που περιλαμβάνεται ως θεμελιώδες πρόβλημα $B(d)$ στη λίστα των P. Clote και J. Krajíček (βλέπε την [CK93]).

Πρόβλημα 1.39. Αποδεικνύεται το Θεώρημα DMPR στο $\mathrm{I}\Delta_0$;

Το πρόβλημα αυτό παραμένει ανοικτό και θεωρείται ιδιαίτερα ενδιαφέρον, αφού συνδέεται με το πρόβλημα $NP = co{-}NP$, όπως παρατήρησε ο A. Wilkie (βλέπε [Wil80a]).

Θεώρημα 1.40 (Wilkie). *Αν το Πρόβλημα 1.39 έχει θετική λύση, τότε* $NP = co - NP$.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα συνέπεια που θα είχε μια θετική λύση του Προβλήματος 1.39 είναι η δυνατότητα σημαντικής μείωσης του άνω φράγματος που μπορεί να τεθεί στον υπαρξιακό ποσοδείκτη ενός τύπου που "ορίζει την αλήθεια για Δ_0 τύπους". Για να μπορέσουμε να δώσουμε λεπτομέρειες πρέπει πρώτα να αναφέρουμε δύο γνωστά αποτελέσματα.

Θεώρημα 1.41. *Για κάθε* $n \geq 1$, *υπάρχει* Σ_1 *τύπος* $Sat_0(x_0, \dots x_n)$ *τέτοιος που για κάθε* Δ_0 *τύπο* $\varphi(x_1, \dots x_n)$ *να ισχύει*

$$\mathrm{I}\Delta_0 + \exp \vdash \forall \vec{x}(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow Sat_0(\ulcorner \varphi \urcorner, \vec{x})).$$

Ο H. Lessan έδειξε (βλέπε [Les78]) ότι στον υπαρξιακό ποσοδείκτη του "Δ_0 πλήρους τύπου" $Sat_0(x_0, \dots x_n)$ μπορεί να μπει ως άνω φράγμα οποιοσδήποτε αριθμός $\geq 2^{a^m}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, όπου $x = \max\{x_1, \dots x_n\}$. Συγκεκριμένα απέδειξε το ακόλουθο

Θεώρημα 1.42. *Για κάθε* $M \models \mathrm{I}\Delta_0 + \exp$, $a \in M$ *και* $b \geq 2^{a^{\mathbb{N}}}$, *δηλαδή* $b \geq 2^{x^m}$ *για κάθε* $m \in \mathbb{N}$, *και κάθε* Δ_0 *τύπο* $\varphi(x_1, \dots x_n)$ *ισχύει*

$$M \models \forall \vec{x} \leq a(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow Sat_0^{\leq b}(\ulcorner \varphi \urcorner, \vec{x})),$$

όπου με τον $Sat_0^{\leq b}$ *συμβολίζουμε τύπο που προκύπτει από τον* Sat_0 *αν φράξουμε τον αρχικό ποσοδείκτη με* b.

Οι J. Paris και C. Dimitracopoulos διαπίστωσαν ότι το Πρόβλημα 1.39 συνδέεται με το μέγεθος του φράγματος στο Θεώρημα 1.42. Συγκεκριμένα, απέδειξαν (βλέπε [PD82]) το ακόλουθο.

Θεώρημα 1.43. *Υποθέτοντας ότι το Πρόβλημα 1.39 έχει θετική λύση, το φράγμα στο Θεώρημα 1.42 μπορεί να μειωθεί σε* $a^{\mathbb{N}}$.

Κεφάλαιο 2

Περί της Δ_1-επαγωγής

Ο σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να συμπληρώσουμε την εικόνα της Στοιχειώδους Αριθμητικής που δώσαμε στην εισαγωγή (§ 1.4) με πιο πρόσφατα αποτελέσματα. Έχει γίνει αρκετή μελέτη από τον L. Beklemishev από το 2000 και μετά. Ανάμεσα στα αποτελέσματα είναι και αποτελέσματα ανεξαρτησίας. Επίσης έχει συγκεντρώσει κάποια ερωτήματα στο τέλος της δημοσίευσής του, σε μερικά από τα οποία θα δώσουμε απαντήσεις στην παράγραφο 2.3.

2.1 Το $\mathrm{I}\Delta_1$ από τη σκοπιά της υπολογισιμότητας

Ο L. Beklemishev στην προσπάθεια να ξεκαθαρίσει το τοπίο γύρω από την Δ_1 επαγωγή στο άρθρο του [Bek03], συγκέντρωσε πληθώρα ενδιαφερόντων αποτελεσμάτων. Η γλώσσα στην οποία δουλεύει επεκτείνει πεπερασμένα την $\mathcal{L}$ με επιπλέον ένα συναρτησιακό σύμβολο 2^x. Όμως η ολικότητα του 2^x σε τυχόν μοντέλο M ισοδυναμεί με την ύπαρξη του x^y στο M για όλα τα x, y. Για αυτό το λόγο ας ονομάσουμε αυτήν τη γλώσσα $\mathcal{L}(\exp)$. Θα δανειστούμε το συμβολισμό από τους P. Hájek και P. Pudlák, (βλέπε [HP93]), για τα υποσυστήματα που ορίσαμε στην εισαγωγή αλλά πλέον μέσα στην $\mathcal{L}(\exp)$. Για την ακρίβεια, σε τυχόν σύστημα T στην $\mathcal{L}$, αντιστοιχούμε το $T(\exp)$ στην $\mathcal{L}(\exp)$.

Έχοντας Σ_1 επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι η εκθετική είναι ολική. Άρα ένα τυχόν μοντέλο του $\mathrm{I}\Sigma_1$ μπορεί να θεωρηθεί και μοντέλο του $\mathrm{I}\Sigma_1(\exp)$, λόγω ολικότητας του exp. Αντίστροφα, εάν το M ικανοποιεί $\mathrm{I}\Sigma_1(\exp)$, τότε ο περιορισμός του στην γλώσσα $\mathcal{L}$ θα ικανοποιεί το $\mathrm{I}\Sigma_1$. Έτσι τα συστήματα, αν και σε διαφορετική γλώσσα, είναι ισοδύναμα. Το ίδιο ισχύει για τα συστήματα $\mathrm{I}\Delta_0(\exp)$ και EA, όπου EA είναι το $\mathrm{I}\Delta_0 + \exp$ (βλέπε §1.4).

Κάτι τέτοιο όμως δεν μπορούμε να ισχυριστούμε για τα συστήματα $\mathrm{I}\Delta_1(\exp)$, $\mathrm{B}\Sigma_1(\exp)$. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με το πόρισμα 1.15 κάθε γνήσιο αρχικό τμήμα τυχόντος μοντέλου του $\mathrm{I}\Delta_0$ ικανοποιεί $\mathrm{B}\Sigma_1$. Για παράδειγμα, έστω ένα nonstandard μοντέλο $M \models \mathrm{I}\Delta_0$ και έστω a τυχόν nonstandard στοιχείο του M. Τότε το μοντέλο $(\log a)^{\mathbb{N}} = \{x \in M : x \leq (\log a)^n, \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}\}$ είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του M και δεν ικανοποιεί exp. Ο λόγος που διαλέξαμε $(\log a)^{\mathbb{N}}$ και όχι $a^{\mathbb{N}}$ είναι πως θέλουμε να εξασφαλίσουμε τη γνησιότητα του αρχικού τμήματος, μιας και θα μπορούσε να τύχει $M = a^{\mathbb{N}}$. Επειδή όμως $(\log a)^{\mathbb{N}} < a$, έπεται ότι $(\log a)^{\mathbb{N}} \neq M$. Άρα, το $\mathrm{B}\Sigma_1(\exp)$ που είναι ισοδύναμο με το $\mathrm{B}\Sigma_1 + \exp$, είναι γνήσια ισχυρότερη θεωρία από τη θεωρία $\mathrm{B}\Sigma_1$. Ακριβώς το ίδιο συμπέρασμα ισχύει για το $\mathrm{I}\Delta_1$, και επειδή το $\mathrm{B}\Sigma_1$ συνεπάγεται το $\mathrm{I}\Delta_1$, αλλά και γιατί ακριβώς το ίδιο παράδειγμα δουλεύει για το $\mathrm{I}\Delta_1$.

Ένα από τα πράγματα που έδειξε ο L. Beklemishev στο [Bek03], είναι ότι το $\mathrm{I}\Delta_1 + \exp$ είναι γνήσια επέκταση της στοιχειώδους αριθμητικής. Δηλαδή,

Θεώρημα 2.1 (Beklemishev)**.** $EA \nvdash \mathrm{I}\Delta_1 + \exp$.

Πριν δώσουμε ένα αρχικό σχήμα για τα υποσυστήματα που αναφέραμε, ας πούμε δυο λόγια για τη θεωρία $\mathrm{I}\mathcal{E}^2_*(\exp)$. Έχουμε ορίσει την $\mathrm{I}\mathcal{E}^2_*$ στην §1.4 της εισαγωγής. Η διαφορά της $\mathrm{I}\mathcal{E}^2_*(\exp)$ με την $\mathrm{I}\mathcal{E}^2_*$ είναι πως όλα τα μοντέλα της πρώτης ικανοποιούν το αξίωμα exp. Επίσης η $\mathrm{I}\mathcal{E}^2_*(\exp)$ επεκτείνει την EA, ενώ η $\mathrm{I}\mathcal{E}^2_*$ επεκτείνεται από την EA με το τρόπο που περιγράψαμε στην §1.4. Μάλιστα και οι δύο επεκτάσεις είναι γνήσιες.

Σημειώνουμε πως η $\mathrm{I}\mathcal{E}^2_*(\exp)$ επεκτείνεται γνήσια από την θεωρία $\mathrm{I}\Sigma_1(\exp)$ (ή ισοδύναμα από τη $\mathrm{I}\Sigma_1$). Ο λόγος είναι πως υπάρχουν αναδρομικές συναρτήσεις (που είναι άρα και Σ_1), οι οποίες δεν είναι πρωτογενώς αναδρομικές. Για παράδειγμα η γνωστή συνάρτηση του Ackermann. Είναι ολική σε κάθε μοντέλο του $\mathrm{I}\Sigma_1$, αλλά δεν είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Τα παραπάνω τα συσχετίζουμε στην Εικόνα 2.1, όπου όλες οι συνεπαγωγές είναι γνήσιες.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{I}\Sigma_1(\exp) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & \mathrm{I}\Sigma_1 \arrow[d, Rightarrow] \\
 & \mathrm{I}\Delta_1(\exp) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \mathrm{I}\mathcal{E}^2_*(\exp) \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathrm{I}\Delta_1 & & \mathrm{EA} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{I}\mathcal{E}^2_*
\end{tikzcd}$$

Εικόνα 2.1: Σχέσεις συστημάτων με και χωρίς το exp.

Τα δύο ζεύγη της Εικόνας 2.1: $I\Delta_1$ με EA, και $I\Delta_1(\exp)$ με $I\mathcal{E}^2_*(\exp)$ είναι ζεύγη ανεξάρτητων υποσυστημάτων.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.1 για βασικό βήμα, ο Beklemishev έδωσε ένα πιο ισχυρό αποτέλεσμα στο ίδιο άρθρο. Είναι η προσπάθεια βελτίωσης του Θεωρήματος 2.2. Συγκεκριμένα ο C. Parsons στο [Par72] απέδειξε την ανεξαρτησία της θεωρίας $Th_{\Pi_2}(\mathbb{N})$ (βλέπε §1.1) από τη $B\Sigma_1$. Δηλαδή,

Θεώρημα 2.2 (Parsons). $Th_{\Pi_2}(\mathbb{N}) \nvdash B\Sigma_1$.

Είναι ακόμα ανοικτό το ερώτημα εάν η Σ_1 συλλογή είναι γνήσια ή όχι επέκταση της Δ_1 επαγωγής, βλέπε Πρόβλημα 1.11, για $n = 1$. Θα κάνουμε εκτενή συζήτηση για αυτό το θέμα στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο. Κατά συνέπεια το Θεώρημα 2.3 μπορεί να θεωρείται μέχρι στιγμής βελτίωση του Θεωρήματος 2.2. Ο Beklemishev λοιπόν έδειξε το επόμενο

Θεώρημα 2.3 (Beklemishev). $Th_{\Pi_2}(\mathbb{N}) \nvdash I\Delta_1$.

Η απόδειξη που δίνει στηρίζεται στην κατασκευή συγκεκριμένης συνάρτησης με Δ_0 γράφημα για δοσμένη μηχανή Turing με μαντείο. Το μαντείο δίνει απάντηση "ΝΑΙ" ή "'ΟΧΙ" στην ερώτηση:

Είναι το x τοπικό μέγιστο της συνάρτησης f στο διάστημα $[a, b]$;

Ο Beklemishev απέδειξε πως για κάθε μηχανή Turing με μαντείο υπάρχει συνάρτηση με Δ_0 γράφημα για την οποία δεν μπορούμε να υπολογίσουμε πιστά το τοπικό μέγιστο σε κάποιο διάστημα $[a, b]$. Η αιτία είναι ο περιορισμένος αριθμός ερωτήσεων που μπορούμε να κάνουμε στο μαντείο. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [Bek03].

$$\begin{array}{lllll} B\Sigma_1 & & & & \\ \Downarrow & & & & \\ I\Delta_1 & \not\Leftarrow & \Pi_2(\mathbb{N}) & \Rightarrow & I\Delta_0 + \exp \end{array}$$

Εικόνα 2.2: Η ισχύς του $\Pi_2(\mathbb{N})$.

Επίσης ο Beklemishev σημείωσε πως το Θεώρημα 2.3 (όπως και άλλα αποτελέσματα αυτού του άρθρου) μπορούν εύκολα να γενικευτούν για τυχόν $n > 1$.

Αξίζει να σημειωθεί πως στο τέλος του άρθρου του ο L. Beklemishev έθεσε ορισμένα ερωτήματα. 'Ενα από αυτά είναι το Πρόβλημα 2.4 που ακολουθεί και έχει σχέση με το Πρόβλημα 1.11 για $n = 1$, το οποίο αναφέραμε στην §1.2.

Πρόβλημα 2.4 (Beklemishev). Έπεται η Σ_1 συλλογή από την Δ_1 επαγωγή μαζί με όλες τις Π_2 προτάσεις που αληθεύουν στους φυσικούς;

2.2 Η δύναμη της Δ_n επαγωγής

Ένα μικρό διάστημα μετά τη δημοσίευση [Bek03], ο Slaman στο [Sla04] δίνει ένα δυνατό αποτέλεσμα, το οποίο έδωσε νέα τροπή στη σχέση της Σ_n συλλογής με την Δ_n επαγωγή. Για την ακρίβεια, απέδειξε πως έχοντας την ολικότητα της εκθετικής συνάρτησης, τα δύο αυτά συστήματα είναι ισοδύναμα. Την μια συνεπαγωγή την είδαμε στην §1.2, στο Θεώρημα 1.7. Η αντίστροφη είναι το επόμενο

Θεώρημα 2.5 (Slaman). *Για όλα τα $n \geq 1$, $\mathrm{I}\Delta_n + \exp \Rightarrow \mathrm{B}\Sigma_n$.*

Ο Slaman παρακινήθηκε από το Πρόβλημα 1.11. Στο άρθρο του, βλέπε [Sla04], ασχολήθηκε με μια παραλλαγή του Προβλήματος 1.11 και δούλεψε για $n = 1$. Ξεκίνησε με πιο ισχυρή θεωρία: $\mathrm{I}\Delta_1 + \exp$ αντί $\mathrm{I}\Delta_1$, διότι η απόδειξή του περιλάμβανε κωδικοποιήσεις Δ_0 ορίσιμων ακολουθιών τυχόντος μήκους. Τέτοιες κωδικοποιήσεις απαιτούν την ύπαρξη εκθετικού.

Ως συνέπεια, ο Slaman έδωσε θετική απάντηση στο Πρόβλημα 1.11 για $n > 1$, διότι για τέτοια n,

$$\mathrm{I}\Delta_n \Rightarrow \mathrm{I}\Sigma_{n-1} \Rightarrow \exp\,.$$

Έτσι, το κομμάτι από το Πρόβλημα 1.11 που μένει ανοικτό, είναι

Πρόβλημα 2.6. $\mathrm{I}\Delta_1 \vdash \mathrm{B}\Sigma_1$;

Για αυτόν τον λόγο, η μόνη συνεπαγωγή που δεν ξέρουμε αν είναι γνήσια στην Εικόνα 2.2, είναι: $\mathrm{I}\Delta_1 \Rightarrow \mathrm{B}\Sigma_1$. Όλες οι υπόλοιπες είναι γνήσιες.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}\Sigma_1 \arrow[d, Rightarrow] & & \\
\mathrm{B}\Sigma_1 \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{B}\Sigma_1(\exp) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{I}\Delta_1(\exp) \\
\mathrm{I}\Delta_1 & EA &
\end{tikzcd}$$

Εικόνα 2.3: Σχέσεις συστημάτων με την EA.

Εκτός λοιπόν από τη μερική απάντηση στο Πρόβλημα 1.11, ο Slaman έδωσε έμμεσα απάντηση και στο Πρόβλημα 2.4. Συγκεκριμένα, έχοντας ότι το αξίωμα exp είναι μια Π_2 πρόταση που αληθεύει στους φυσικούς, δίνει μια θετική απάντηση στο Πρόβλημα 2.4.

Ένα αρχικό αποτέλεσμα της μελέτης μας των άρθρων [Bek03] και [Sla04] ήταν ότι η απόδειξη του Θεωρήματος 2.3 απλοποιείται πολύ, αν χρησιμοποιηθεί το Θεώρημα 2.5. Παραθέτουμε πιο κάτω αυτήν την εναλλακτική απόδειξη, για τη γενική περίπτωση.

Θεώρημα 2.7. *Για κάθε* $n \geq 1$, $Th_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N}) \nvdash \mathrm{I}\Delta_n$.

Απόδειξη. Έστω M ένα nonstandard μοντέλο της $Th(\mathbb{N})$, $a \in M - \mathbb{N}$ και $n \geq 1$. Ας πάρουμε το σύνολο των Σ_n ορίσιμων στοιχείων του M με παράμετρο a. Παρατηρούμε ότι $a \in K^n(M, a)$, οπότε έπεται ότι $K^n(M, a) \neq \mathbb{N}$. Άρα από τη Πρόταση 1.6(1) έπεται πως $K^n(M, a)$ είναι Σ_n στοιχειώδης υποδομή του M. Κατά συνέπεια, η δομή $K^n(M, a)$ ικανοποιεί τη $Th_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N})$. Παρατηρούμε επίσης πως και το αξίωμα exp ικανοποιείται στο $K^n(M, a)$, διότι είναι μια Π_2 πρόταση που αληθεύει στους φυσικούς.

Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι η $K^n(M, a)$ επίσης ικανοποιεί την Δ_n επαγωγή. Εφόσον εξασφαλίσαμε την ύπαρξη εκθετικού στο $K^n(M, a)$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.5. Δηλαδή συμπεραίνουμε ότι το $K^n(M, a)$ ικανοποιεί $\mathrm{B}\Sigma_n$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με το Λήμμα 1.10(2).

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα που θέλαμε εξαρχής, ότι δηλαδή για $n \geq 1$, $Th_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N}) \nvdash \mathrm{I}\Delta_n$,. □

2.3 Πόσο ασθενής είναι η Δ_1^- επαγωγή;

Ας δούμε τι γίνεται όταν έχουμε την Δ_1 επαγωγή, αλλά δεν επιτρέπεται η χρήση των παραμέτρων. Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, ο συμβολισμός αυτού του συστήματος είναι $\mathrm{I}\Delta_1^-$. Θα δούμε πως το σύστημα αυτό είναι πολύ ασθενέστερο από το $\mathrm{I}\Delta_1$.

Άλλα συστήματα στα οποία επίσης δεν επιτρέπεται η χρήση παραμέτρων έχουν μελετηθεί από τους R. Kaye, J. Paris και C. Dimitracopoulos. Πιο συγκεκριμένα, οι σχέσεις μεταξύ των $\mathrm{B}\Sigma_n^-$, $\mathrm{I}\Sigma_n^-$, $\mathrm{I}\Pi_n^-$ και $\mathrm{L}\Sigma_n^-$ έχουν πλήρως ξεκαθαριστεί στο [KPD88]. Όσο αφορά το $\mathrm{I}\Delta_1^-$, αυτό ερευνήθηκε από τον L. Beklemishev στο [Bek03]. Το επόμενο λήμμα μας λέει πως δεν χρειάζεται να έχει πολύ θεωρία ένα μοντέλο ώστε να ικανοποιεί $\mathrm{I}\Delta_1^-$, για λεπτομέρειες βλέπε [Bek03].

Λήμμα 2.8. $Th_{\Pi_1}(\mathbb{N}) \vdash \mathrm{I}\Delta_1^-$.

Συσχετίζοντας αυτό το Λήμμα με το Θεώρημα 2.3, βγαίνει το συμπέρασμα ότι η χρήση των παραμέτρων κάνει τη θεωρία πιο πλούσια. Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα, όπου μεταβάλλεται τόσο πολύ η δύναμη του συστήματος λόγω παραμέτρων, είναι το $\mathrm{I}\Pi_1$. Σε όλα τα μοντέλα του $\mathrm{I}\Pi_1$ είναι ολική η εκθετική συνάρτηση. Ενώ για το $\mathrm{I}\Pi_1^-$ οι R. Kaye, J. Paris και C. Dimitracopoulos στο [KPD88] έδειξαν το ακόλουθο

Λήμμα 2.9. $\mathrm{I}\Pi_1^- \nvdash \exp$.

Το αποτέλεσμα του Λήμματος 2.8 ήταν ο λόγος να θέσει ο L. Beklemishev στο τέλος του [Bek03] το εξής ερώτημα.

Πρόβλημα 2.10 (Beklemishev)**.** Μπορεί η $\mathrm{I}\Delta_1^-$ να έπεται από την EA;

Σε αυτό το πρόβλημα δώσαμε αρνητική απάντηση. Δηλαδή αποδείξαμε το

Θεώρημα 2.11. $EA \nvdash \mathrm{I}\Delta_1^-$.

Απόδειξη. Ακολουθούμε την ιδέα της απόδειξης που δώσαμε για το Θεώρημα 2.7. Ξεκινάμε με ένα μοντέλο της PA που περιέχει nonstandard Δ_0 ορίσιμα στοιχεία. Την ύπαρξη τέτοιου μοντέλου μας εξασφαλίζει έμμεσα το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας του Gödel. Δηλαδή, το γεγονός ότι "αρκετά ισχυρές" θεωρίες δεν μπορούν να αποδείξουν την συνέπειά τους. Το PA ανήκει σε αυτήν την κατηγορία των "αρκετά ισχυρών" θεωριών. Για περισσότερες διευκρινήσεις παραπέμπουμε στο κεφάλαιο 3 του [Kay91]. Οπότε υπάρχει μοντέλο, έστω M, της θεωρίας $\mathrm{PA} + \neg Con_{PA}$[1]. Το M αυτό έχει nonstandard Δ_0 ορίσιμα στοιχεία. Ας δούμε τι ισχύει για τα Σ_1 ορίσιμα στοιχεία του M.

Οι δύο υποδομές του M, οι $K^0(M)$ με $K^1(M)$, συνδέονται πολύ στενά. Για την ακρίβεια, είναι ομοτελικές[2]. Είναι προφανές ότι $K^0(M)$ είναι υποδομή της $K^1(M)$. Θα δείξουμε ότι $K^0(M) \subseteq_{cf} K^1(M)$. Πράγματι, έστω $b \in K^1(M)$. Άρα υπάρχει ένας Σ_1 τύπος, ας πούμε $\exists y \theta(x,y)$, που ορίζει το b. Ορίζουμε $\varphi(u)$ να είναι ο τύπος

$$\exists x, y < u(u = \langle x, y\rangle \wedge \theta(x,y)) \wedge (\text{“}u \text{ είναι ο ελάχιστος”}),$$

όπου η συνάρτηση ζευγαρώματος είναι αυτή που ορίσαμε στην ενότητα 1.4 της εισαγωγής. Έτσι ο $\varphi(z)$ είναι Δ_0 και ορίζει το u. Από τις ιδιότητες της δοσμένης συνάρτησης ζευγαρώματος έχουμε ότι $b < u$.

Για να προχωρήσουμε την απόδειξη, χρειαζόμαστε $K^1(M) \neq \mathbb{N}$. Αυτό προκύπτει από το $K^0(M) \subseteq K^1(M)$ και την ύπαρξη nonstandard Δ_0 ορίσιμου στοιχείου. Οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 1.10, που μας λέει ότι

$$K^1(M) \models EA + \neg \mathrm{B}\Sigma_1.$$

[1] Η *συνέπεια* της θεωρίας T, που συμβολίζεται με Con_T, είναι μια πρόταση της $\mathcal{L}$ που εκφράζει ότι το "0=1" δεν αποδεικνύεται από την T.

[2] Λέμε ότι η υποδομή N_1 της N_2 είναι *ομοτελική* στην N_2 ($N_1 \subseteq_{cf} N_2$) αν για κάθε $a_2 \in N_2$ υπάρχει $a_1 \in N_1$ με $N_2 \models a_2 < a_1$.

Όμως το $K^1(M)$ ικανοποιεί το αξίωμα exp. Άρα από το Θεώρημα 2.5, έπεται πως

$$K^1(M) \models \neg \mathrm{I}\Delta_1.$$

Ας υποθέσουμε προς άτοπο, ότι το $K^1(M)$ ικανοποιεί το $\mathrm{I}\Delta_1^-$. Έστω $a \in K^1(M)$ και ας πάρουμε επίσης τύπους $\varphi(x,y) \in \Sigma_1$ και $\psi(x,y) \in \Pi_1$ ώστε

$$K^1(M) \models \forall x[\varphi(x,a) \leftrightarrow \psi(x,a)] \wedge \varphi(0,a) \wedge \forall x[\varphi(x,a) \rightarrow \varphi(x+1,a)].$$

Δηλαδή, υποθέτουμε πως ισχύει το πρώτο μέρος της Δ_1 επαγωγής για τον Δ_1 τύπο φ με παράμετρο a. Το γεγονός ότι $a \in K^1(M)$ μας επιτρέπει ύστερα από κατάλληλη τροποποίηση του αρχικού τύπου που περιέχει το a (ως παράμετρο) να καταλήξουμε σε έναν ισοδύναμο τύπο που πλέον δεν περιέχει το a. Ας πούμε πως το a ορίζεται από τον $\theta(x)$.

Θέτουμε $\overline{\varphi}$ να είναι ο τύπος $\exists y[\theta(y) \wedge \varphi(x,y)]$. Αντίστοιχα ορίζεται και ο τύπος $\overline{\psi}$, δηλαδή είναι ο τύπος $\forall y[\theta(y) \rightarrow \psi(x,y)]$.

Υπολογίζοντας την πολυπλοκότητα των νέων αυτών τύπων, διαπιστώνουμε ότι $\overline{\varphi} \in \Sigma_1$ και $\overline{\psi} \in \Pi_1$. Επίσης την αρχική επαγωγική υπόθεση την ξαναγράφουμε με τους νέους ισοδύναμους τύπους:

$$K^1(M) \models \forall x[\overline{\varphi}(x) \leftrightarrow \overline{\psi}(x)] \wedge \overline{\varphi}(0) \wedge \forall x[\overline{\varphi}(x) \rightarrow \overline{\varphi}(x+1)].$$

Αυτό πλέον είναι το πρώτο μέρος της Δ_1^- επαγωγής. Οπότε λόγω υπόθεσης για το $K^1(M)$, έπεται πως

$$K^1(M) \models \forall x \overline{\varphi}(x).$$

Από τον ορισμό του $\overline{\varphi}(x)$, έπεται στην ουσία ότι

$$K^1(M) \models \forall x \varphi(x,a).$$

Δηλαδή καταλήγουμε σε συμπέρασμα ότι το $K^1(M)$ ικανοποιεί την Δ_1 επαγωγή. Άτοπο. □

Η απόδειξη αυτή γενικεύεται και μας δίνει το εξής

Πόρισμα 2.12. $\mathrm{I}\Sigma_{n-1} \nvdash \mathrm{I}\Delta_n^-$, *για* $n \geq 2$.

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.11, ξεκινήσαμε με Δ_0 ορίσιμα στοιχεία, αλλά συνεχίσαμε την απόδειξη χρησιμοποιώντας τα Σ_1 ορίσιμα στοιχεία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως παρατηρήσαμε την "άσχημη τοποθέτηση" του $K^0(M)$ μέσα στο M. Συγκεκριμένα, όταν το $K^0(M)$ είναι nonstandard, τότε δεν είναι καν στοιχειώδης Δ_0 υποδομή.

Πρόταση 2.13. *Για τυχόν μοντέλο M του $\mathrm{I}\Delta_0$, εάν $K^0(M) \neq \mathbb{N}$, τότε $K^0(M) \not\prec_0 M$.*

Απόδειξη. Έστω $M \models \mathrm{I}\Delta_0$ και έστω $K^0(M) \neq \mathbb{N}$. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι $K^0(M) \prec_0 M$. Παρατηρούμε ότι αυτό συνεπάγεται

$$K^0(M) \models \Pi_1(M). \tag{2.1}$$

Από την άλλη το σύστημα $\mathrm{I}\Delta_0$ είναι αξιωματικοποιήσιμο από Π_1 προτάσεις. Πράγματι, όλα τα αξιώματα του συστήματος αυτού εκτός από το σχήμα επαγωγής είναι προφανώς Π_1 προτάσεις. Το αξίωμα I_φ για Δ_0 τύπους φ, δεν προκύπτει να είναι Π_1 όπως έχει οριστεί στην §1.1. Χρειάζεται να δείξουμε πρώτα την ισοδυναμία της συνηθισμένης επαγωγής με την $\mathrm{I}'\Delta_0$, όπου το στιγμιότυπο I'_φ της $\mathrm{I}'\Delta_0$ ορίζεται ως εξής:

$$\forall \vec{y}, z(\varphi(0,\vec{y}) \wedge \forall x < z(\varphi(x,\vec{y}) \to \varphi(x+1,\vec{y})) \to \forall x \leq z\varphi(x,\vec{y})) \tag{2.2}$$

Η ισοδυναμία του $\mathrm{I}\Delta_0$ με το $\mathrm{I}'\Delta_0$ αποδεικνύεται στο τέταρτο κεφάλαιο του [Kay91] και είναι ξεκάθαρο πλέον λόγω της (2.2) ότι πρόκειται για Π_1 προτάσεις.

Το γεγονός λοιπόν πως το $\mathrm{I}\Delta_0$ είναι Π_1 αξιωματικοποιήσιμο μαζί με τη σχέση (2.1) μας δίνει ότι

$$K^0(M) \models \mathrm{I}\Delta_0.$$

Ας πάρουμε έναν Δ_0-πλήρη τύπο, $\exists z\theta(x,y,z)$ και έστω $a \in K^0(M) - \mathbb{N}$, το οποίο είναι αρκετά μικρό, δηλαδή θέλουμε το στοιχείο $2^{2^{\alpha}}$ να υπάρχει στο M. Τότε για κάθε $c \in K^0(M)$,

$$M \models \exists y < a \exists u[\theta(u_0,y,u_1) \& u_0 = c \& \forall w < u \neg\theta(w_0,y,w_1)], \tag{2.3}$$

όπου $\langle u_0, u_1\rangle = u$ και η συνάρτηση ζευγαρώματος είναι αυτή που ήδη αναφέραμε.

Στη σχέση (2.3) μπορούμε να βάλουμε φράγμα στον υπαρξιακό ποσοδείκτη $\exists u$ σύμφωνα με το Θεώρημα 1.42, για παράδειγμα το 2^{a^c}, την ύπαρξη του οποίου την εξασφαλίσαμε πιο πάνω, φράζει το u.

Θέτουμε $\eta(c,y,u)$ να είναι ο Δ_0 τύπος

$$\theta(u_0,y,u_1) \& u_0 = c \& \forall w < u \neg\theta(w_0,y,w_1).$$

Τότε για όλα τα $c \in K^0(M)$ ισχύει ότι

$$M \models \exists y < a \exists y < 2^{a^c} \eta(c,y,u). \tag{2.4}$$

Όμως από την υπόθεση ότι $K^0(M) \prec_0 M$ και τη σχέση (2.4) έπεται ότι

$$K^0(M) \models \exists y < a \exists y < 2^{a^c} \eta(c, y, u),$$

άρα

$$K^0(M) \models \forall x < a + 1 \exists y < a \exists y < 2^{a^c} \eta(c, y, u). \tag{2.5}$$

Για να δείξουμε ένα στιγμιότυπο PHP_φ σε ένα μοντέλο M του $\mathrm{I}\Delta_0$ για κάποιο a, όπου φ ένας Δ_0 τύπος, αρκεί να υπάρχει το a^a στο M. Αυτό προκύπτει ως πόρισμα του Θεωρήματος 1.33. Άρα το $K^0(M)$ ικανοποιεί το στιγμιότυπο PHP_η για a. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με τη σχέση (2.5). Κατά συνέπεια έχουμε ότι $K^0(M) \not\prec_0 M$. □

Στην πραγματικότητα, το πως είναι "τοποθετημένο" το $K^0(M)$ στο M σχετίζεται με το Πρόβλημα 1.39. Για να εξηγήσουμε τι εννοούμε, πρέπει πρώτα να δώσουμε ένα Λήμμα που προκύπτει με αφορμή την Πρόταση 4.1 στο [Dim80].

Λήμμα 2.14. *Υποθέτοντας ότι η απάντηση στο Πρόβλημα 1.39 είναι "ναι", για τυχόντα μοντέλα M, K του $\mathrm{I}\Delta_0$ ισχύει ότι αν $M \subseteq K$ τότε $M \prec_0 K$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το Πρόβλημα 1.39 έχει θετική απάντηση και M, K τυχόντα μοντέλα του $\mathrm{I}\Delta_0$ με $M \subseteq K$. Θεωρούμε τυχόντα Δ_0 τύπο $\theta(\vec{x})$ και $\vec{a} \in M$. Λόγω της υπόθεσης, υπάρχει πολυώνυμο $p(\vec{x}, \vec{y})$ τέτοιο που

$$\mathrm{I}\Delta_0 \vdash \forall \vec{x}(\theta(\vec{x} \leftrightarrow \exists \vec{y}(p(\vec{x}\vec{y}) = 0))).$$

Συνεπώς προκύπτει η εξής σειρά συνεπαγωγών:

$$M \models \theta(\vec{a}) \Rightarrow M \models \exists \vec{y} p(\vec{a}, \vec{y}) = 0) \Rightarrow K \models \exists \vec{y} p(\vec{a}, \vec{y}) = 0) \Rightarrow K \models \theta(\vec{a}).$$

Επειδή και ο τύπος $\neg\theta(\vec{x})$ είναι Δ_0, όμοια δείχνουμε την συνεπαγωγή $K \models \theta(\vec{a}) \Rightarrow M \models \theta(\vec{a})$. Συνεπώς έπεται ότι $M \prec_0 K$, δηλαδή το ζητούμενο. □

Συνδυάζοντας το Λήμμα 2.14 με την Πρόταση 2.13 συμπεραίνουμε εύκολα το ακόλουθο.

Πόρισμα 2.15. *Αν υπάρχει μοντέλο M του $\mathrm{I}\Delta_0$ τέτοιο που $K^0(M) \neq \mathbb{N}$ και $K^0(M) \models \mathrm{I}\Delta_0$, τότε η απάντηση στο Πρόβλημα 1.39 είναι "όχι".*

Κεφάλαιο 3

Επαγωγή vs συλλογή

Παρακινούμενοι από το Πρόβλημα 2.6, στο οποίο θα αναφερόμαστε από εδώ και στο εξής ως Πρόβλημα του J. Paris, αρκετοί συγγραφείς ([Bek03], [Sla04], [Tha05]) πρόσφατα μελέτησαν την ισχύ της Δ_n επαγωγής προσπαθώντας να προσεγγίσουν αυτό το πρόβλημα, έστω και με επιπλέον εργαλεία. Αναφέραμε ήδη μια από αυτές τις προσεγγίσεις στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στο παρόν κεφάλαιο έχουμε συγκεντρώσει και την πορεία του Προβλήματος αυτού τα τελευταία χρόνια και τη δική μας μελέτη πάνω σε αυτό.

Σε διάφορα σημεία της διατριβής (βλέπε §1.2, 1.5, 2.1) αναφερόμαστε σε μοντέλα που δεν ικανοποιούν το αξίωμα exp. Θεωρίες που έχουν τέτοια μοντέλα θα τις καλούμε "ασθενή υποσυστήματα" της PA. Ο λόγος που τις καλούμε έτσι, δεν είναι ότι δεν έχουν πολλές συνέπειες. Απλά για τις περισσότερες τέτοιες θεωρίες δεν είμαστε σε θέση να πούμε τί αποδεικνύουν και τί όχι. Ενώ οι θεωρίες από τις οποίες έπεται το exp έχουν μελετηθεί πάρα πολύ. Αυτό, στις περισσότερες περιπτώσεις οφειλόταν στην δυνατότητα κωδικοποίησης μέσα σε αυτές τις θεωρίες. Μάλιστα, παρακάτω θα φανεί η σπουδαιότητα της αναφερόμενης δυνατότητας. Μπορούμε να προσθέσουμε, χωρίς να είμαστε υπερβολικοί, πως δεν είναι λίγες οι φορές, όταν οι "φυσικοί τρόποι" απόδειξης απαιτούν την ολικότητα της εκθετικής. Κυρίως αυτό είναι εμφανές στις αποδείξεις συνδυαστικής φύσεως.

3.1 Αποδείξεις με συντακτική έννοια

Ένας από τους τρόπους προσέγγισης ενός προβλήματος, είναι η προσπάθεια επίλυσης κάποιας παραλλαγής του. Αυτό έκαναν οι A. Fernández-Margarit και F. F. Lara-Martín στο [FL04]. Η αλλαγή που έκαναν είναι να δουν το Πρόβλημα του J. Paris από τη συντακτική σκοπιά και όχι από την σημασιολογική. Έθεσαν και μελέτησαν το ακόλουθο πρόβλημα στην προσπάθεια κατανόησης του Προβλήματος του J. Paris.

Πρόβλημα 3.1. Κάτω από ποιές συνθήκες για τη θεωρία T έχουμε την ισοδυναμία $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(T) \Leftrightarrow \mathrm{L}\Delta_{n+1}(T)$;

Τα σχήματα S_φ που αφορούν τους Δ_n τύπους φ, όπως για παράδειγμα I_φ, L_φ, είναι συνήθως της μορφής $(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow S_\varphi$, όπου φ είναι Σ_n τύπος και ψ είναι Π_n τύπος. Εάν όμως απαιτήσουμε η ισοδυναμία $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ να είναι σε μια θεωρία T, τότε το σχήμα γράφεται ως $S_\varphi(T)$. Αυτό το σχήμα είναι πιο ασθενές από το S_φ. Ο έλεγχος μέσα σε θεωρία T περιορίζει τον αριθμό των τύπων στους οποίους μπορεί να εφαρμοστεί το σχήμα S. Κατά συνέπεια, όσο πιο ισχυρή είναι η θεωρία T, τόσο το $S_\varphi(T)$ πλησιάζει το S_φ.

Μερικά από τα αποτελέσματα στο [FL04] είναι

Πρόταση 3.2. *Για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$*,*

(i) $\mathrm{I}\Sigma_n \Rightarrow \mathrm{I}\Delta_{n+1}(T) \Rightarrow \mathrm{I}\Sigma_{n+1}$.

(ii) Εάν $Th_{\Pi_{n+2}}(T) = Th_{\Pi_{n+2}}(T')$*, τότε* $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(T) = \mathrm{I}\Delta_{n+1}(T')$.

(iii) $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{B}\Sigma_{n+1}) \Leftrightarrow \mathrm{I}\Sigma_n$.

Στις περισσότερες περιπτώσεις όμως, όποια θεωρία να βάλουμε, δεν αρκεί να φτάσουμε σε ισοδυναμία μεταξύ $S_\varphi(T)$ και S_φ. Αυτό προκύπτει από την Εικόνα 3.1.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{I}\Sigma_{n+1} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
\mathrm{B}\Sigma_{n+1} \arrow[d, Rightarrow] & & \mathrm{L}\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_{n+1}) \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_{n+1}) \\
\mathrm{I}\Delta_n \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
 & \mathrm{I}\Sigma_n \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathrm{L}\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_n) \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{I}\Sigma_n)
\end{tikzcd}$$

Εικόνα 3.1: Αποτελέσματα της Πρότασης 3.2 σε πιο γενικό πλαίσιο.

Μια από τις συνθήκες που προτείνουν οι A. Fernández-Margarit και F. F. Lara-Martín για το Πρόβλημα 3.1 είναι το σύνολο $\Delta_{n+1}(T)$ να είναι κλειστό μέσα στην T ως προς φραγμένους ποσοδείκτες. Δηλαδή, για κάθε φ_1, φ_2,

$$\text{αν } \varphi_1, \varphi_2 \in \Delta_{n+1}(T), \text{ τότε } \forall^< \varphi_1, \exists^< \varphi_2 \in \Delta_{n+1}(T).$$

Ως συνέπεια αυτού έπεται η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.3 ([FL04]). *Για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(\mathrm{B}\Sigma_{n+1}) \Leftrightarrow \mathrm{L}\Delta_{n+1}(\mathrm{B}\Sigma_{n+1})$.

Παρόμοιο αποτέλεσμα που "απαιτεί" η πολυπλοκότητα του τύπου να αποδεικνύεται σε θεωρία, είναι ένα αποτέλεσμα του Parikh (βλέπε [Par71]) που λέει ότι

Θεώρημα 3.4 (Parikh). *Έστω* $\varphi(x, y) \in \Sigma_1$ *τέτοιος ώστε* $\mathrm{I}\Delta_0 \vdash \forall x \exists y \varphi(x, y)$. *Τότε υπάρχει όρος* $t(x)$ *της* $\mathcal{L}$ *ώστε* $\mathrm{I}\Delta_0 \vdash \forall x \exists y < t(x) \varphi(x, y)$.

Το μειονέκτημα της προσέγγισης αυτής από τους A. Fernández-Margarit και F. F. Lara-Martín βρίσκεται στη δυσκολία της συντακτικής απόδειξης ενός τύπου. Επίσης όσο πιο πολύ θέλουμε να καταλήξει η ισοδυναμία $\mathrm{I}\Delta_{n+1}(T) \Leftrightarrow \mathrm{L}\Delta_{n+1}(T)$ να είναι επίσης ισοδύναμη με $\mathrm{I}\Delta_{n+1}$, τόση πιο ισχυρή T χρειαζόμαστε.

Περισσότερες λεπτομέρειες για τα σχήματα αυτά υπάρχουν επίσης και σε ένα άλλο άρθρο τους μαζί με τον A. Cordón-Franko, το [CFL06].

3.2 Λήμμα κωδικοποίησης

Έστω M τυχόν μοντέλο του $\mathrm{I}\Delta_0$, $a, b, d \in M$. Ας πάρουμε μια Δ_0 ορίσιμη ακολουθία με μήκος d και με κάθε όρο της να είναι φραγμένος από το a. Δηλαδή υπάρχει Δ_0 τύπος $\varphi(i, x, b)$, (για ευκολία υποθέτουμε πως έχει μόνο μια παράμετρο b), τέτοιος ώστε

$$M \models \forall i < d \exists x < a \varphi(i, x, b).$$

Τότε η ύπαρξη του στοιχείου a^d στο M είναι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να κωδικοποιηθεί, με βάση το a-δικό ανάπτυγμα, η δοσμένη ακολουθία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως το a^d χρησιμοποιείται ως φράγμα για τον κωδικό, και εφόσον ο τύπος που μιλάει για την ύπαρξη κωδικού γίνεται Δ_0 τύπος, εφαρμόζουμε την Δ_0 επαγωγή για να ολοκληρωθεί το ζητούμενο.

Εάν θελήσουμε να επαναλάβουμε την διαδικασία αντικαθιστώντας παντού Δ_0 με Δ_1, τότε θα διαπιστώσουμε ότι η πολυπλοκότητα του τύπου που μιλάει για την ύπαρξη κωδικού γίνεται Σ_1. Για την ακρίβεια παίρνει τη μορφή

$$\exists c < a^d \Delta_1. \tag{3.1}$$

Ο τύπος (3.1) είναι Σ_1, διότι πρώτον θεωρούμε τον Δ_1 τύπο ως Σ_1 και δεύτερον οι υπαρξιακοί ποσοδείκτες μετατίθενται. Οπότε ο άφρακτος υπαρξιακός ποσοδείκτης έρχεται μπροστά και τον ακολουθεί ο Δ_0 τύπος. Εάν θεωρήσουμε όμως τον Δ_1 τύπο ως Π_1, τότε η πολυπλοκότητα γίνεται Σ_2. Δηλαδή δεν είναι επαρκής (εκ πρώτης όψης) η ύπαρξη του στοιχείου a^d. Χρειάζεται και η Σ_1 συλλογή για να δείξουμε ότι ο τύπος (3.1) είναι και Π_1.

Κατά συνέπεια δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κωδικοποίηση ως έχει, μόνο με το $\mathrm{I}\Delta_1$, για να δείξουμε τη Σ_1 συλλογή, μιας και δημιουργείται ένας φαύλος κύκλος: υπάρχει Σ_1 συλλογή αν και μόνο αν υπάρχει $\exists^{\leq}\Delta_1$ κωδικοποίηση.

Το τέχνασμα που μας βγάζει από τον φαύλο κύκλο οφείλεται στον Slaman, ο οποίος προσάρμοσε την έννοια της κωδικοποίησης σε τομές. Για την ακρίβεια, θεώρησε πως επαρκεί για μια Σ_1 ακολουθία, συγκεκριμένης μορφής, με δείκτες πλέον από μία Σ_1 τομή, να υπάρχει κωδικός e, τέτοιος που όσο οι δείκτες i ανήκουν στη τομή, το $(e)_i$ ορίζει τον αντίστοιχο όρο της ακολουθίας. Αυτό το τέχνασμα λοιπόν, που αναφέρεται έμμεσα στο [Sla04], δόθηκε σε μορφή λήμματος με μια πιο κομψή απόδειξη από τον N. Thapen (βλέπε Λήμμα 1 στο [Tha05]) και στη διατριβή αυτή είναι το επόμενο βασικό λήμμα: το Λήμμα κωδικοποίησης.

Λήμμα 3.5. *Έστω $M \models I\Delta_1$, $a{\in}M$ και θ, η Σ_1 τύποι τέτοιοι ώστε*

(i) $M \models$ *"θ ορίζει μια τομή"*

(ii) $M \models \forall i\ (\theta(i) \rightarrow \exists! y{<}a\ \eta(i,y)) \wedge \forall i\ [\theta(i) \rightarrow \exists t{\leq}a^x \forall j{\leq}i\ \eta(j,(t)_j)]$,

όπου $(t)_j$ είναι το j'οστό ψηφίο της αναπαράστασης του t με βάση a.
Αν υπάρχει $I{<}b{\in}M$ τέτοιο ώστε το a^b να υπάρχει στο M, τότε

$$M \models \exists t{<}a^b \forall i\ [\theta(i) \rightarrow \eta(i,(t)_i)].$$

Σε αυτό το σημείο, έχει νόημα να περιγράψουμε την κεντρική ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος 2.5, που έδωσε ο Slaman, διότι βασιζόμενος σε αυτήν, με κάποιες αλλαγές, ο N. Thapen βελτίωσε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.5.

Η κεντρική ιδέα είναι η εξής: Ξεκινώντας με $M \models \mathrm{I}\Delta_1 + \exp + \neg \mathrm{B}\Sigma_1$, ο Slaman θεώρησε μια Δ_0 συνάρτηση από το $[0, a-1]$ στο M, με ομοτελική (μη φραγμένη δηλαδή) εικόνα. Η ύπαρξη τέτοιας συνάρτησης εξασφαλίζεται από την άρνηση της Σ_1 συλλογής. Για Σ_1 ακολουθία πήρε τα στοιχεία x από το $[0, a-1]$ με τέτοια σειρά ώστε οι εικόνες τους να είναι διαδοχικές κατά αύξουσα σειρά. Απέδειξε ότι η ακολουθία αυτή ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 3.5, και μαζί με μερικά ακόμα επιχειρήματα κατέληξε στο $M \models \neg \mathrm{I}\Delta_1$, το οποίο είναι προφανώς άτοπο.

Ο N. Thapen παρατήρησε πως εάν δεν πάρουμε διαδοχικές εικόνες, έτσι όπως είναι δηλαδή στο μοντέλο, αλλά απαιτήσουμε η επόμενη εικόνα που θα διαλέγουμε να ξεπερνάει το τετράγωνο της προηγούμενης. Με αυτό τον τρόπο, θα χρειαστούμε πολύ λιγότερα βήματα για να ανέβουμε ψηλά στο μοντέλο. Άρα και το σύνολο δεικτών θα είναι μικρότερο από πριν. Το αξιοσημείωτο στη απόδειξη του N. Thapen είναι πως το νέο σύνολο δεικτών είναι κλειστό ως προς πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις. Αυτό έχει ως συνέπεια, να επαρκεί πλέον η ολικότητα πολύ ασθενούς μορφής εκθετικού. Για παράδειγμα, επαρκεί $M \models \Omega_{1,k}$, όπου το αξίωμα $\Omega_{1,k}$ ορίστηκε στην εισαγωγή (§1.1). Η παρατήρησή του αυτή για τις πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις τον οδήγησε στο

Θεώρημα 3.6 (Thapen). $\mathrm{I}\Delta_1 + th_p \Rightarrow \mathrm{B}\Sigma_1$,
όπου με th_p συμβολίζουμε το αξίωμα

$$\forall x \exists y \exists z (x < p(y) \wedge z = x^y),$$

με p να είναι οποιαδήποτε πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση.

Παρατηρούμε πως η σταθερή συνάρτηση, που είναι πρωτογενώς αναδρομική, δεν ικανοποιεί το πρώτο μέρος του αξιώματος του Thapen. Δηλαδή, δεν ικανοποιεί το $\forall x \exists y (x < p(y))$. Άρα απαιτείται και πάλι κάποια μορφή εκθετικού σε μοντέλο που ικανοποιεί το αξίωμα th_p.

3.3 Μορφές δομών για αντιπαράδειγμα

Σε αυτή τη παράγραφο θα δώσουμε εναλλακτικές αποδείξεις στα Θεωρήματα 2.5 και 3.6. Ο τρόπος που προσεγγίζουμε εμείς το Πρόβλημα 2.6, μας δίνει τη δυνατότητα να απομονώσουμε τις "κακές" δομές. Δηλαδή, καταλήγουμε σε δύο μορφές δομών τέτοιες ώστε αν η απάντηση στο Πρόβλημα 2.6 είναι αρνητική, τότε το μοντέλο του αντιπαραδείγματος θα έχει μια από αυτές τις δύο μορφές. Ας κάνουμε την αρχή με την

Εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος 2.5. Έστω $M \models I\Delta_1 + exp + \neg B\Sigma_1$, $a \in M$ και $\varphi(x,w) \in \Delta_0$ τέτοια ώστε

$$M \models \forall x \leq a \exists w \ \varphi(x,w) \wedge \forall z \exists x \leq a \forall w \leq z \ \neg\varphi(x,w).$$

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση ζευγαρώματος[1] και $\mathrm{L}\Delta_0$, μπορούμε να κανονίσουμε έτσι ώστε ο τύπος φ να ορίζει μια 1-1 συνάρτηση f με πεδίο ορισμού

[1] Η συνάρτηση ζευγαρώματος έχει οριστεί στην απόδειξη της Πρότασης 2.13.

το (ακέραιο) διάστημα $[0, a]$ και με πεδίο τιμών ένα μη φραγμένο υποσύνολο του M.

Η δική μας κεντρική ιδέα είναι να θεωρήσουμε το σύνολο των στοιχείων x που βρίσκονται κάτω από το $a+1$, τα οποία συμπεριφέρονται "όμορφα" όσο αφορά τον τύπο φ, με την έννοια ότι το φ-στιγμιότυπο της συλλογής ισχύει σε όλα τα μικρότερα ή ίσα με κάθε τέτοιο x. Οι ιδιότητες του συνόλου αυτού θα μας οδηγήσουν σε άτοπο.

Ορίζουμε το επόμενο σύνολο:

$$A = \{b{\leq}a : \exists w_0[\exists x_0{\leq}b\ \varphi(w_0 = f(x_0)) \wedge \forall x{\leq}b \exists z{\leq}w_0\ (z = f(x))]\}.$$

Είναι προφανές από τον ορισμό πως το A είναι ένα Σ_1 ορίσιμο γνήσιο υποσύνολο του $[0, a]$.

Ισχυρισμός. Το σύνολο A είναι τομή.
Απόδειξη ισχυρισμού. Προφανώς ισχύει ότι $0{\in}A$. Μας μένει να ελέγξουμε αν το A είναι κλειστό ως προς τον επόμενο και ως προς τη σχέση $<$.
Αρχικά, έστω $b{\in}A$. Από την υπόθεση για τη συνάρτηση f, υπάρχουν w_b, w_{b+1} τέτοια ώστε $M \models w_b = f(b) \wedge w_{b+1} = f(b+1)$. Επίσης, υπάρχουν $x_0{\leq}b$ και w_0 με την ιδιότητα $w_0 = f(x_0) \wedge \forall x{\leq}b \exists z{\leq}w_0 (z = f(x))$. Έπεται ότι

$$w_{b+1} \leq w_0, \text{ οπότε έπεται ότι } \forall x{\leq}b+1 \exists z{\leq}w_0\ (z = f(x))$$

ή

$$w_0 < w_{b+1}, \text{ οπότε έπεται ότι } \forall x{\leq}b+1 \exists z{\leq}w_{b+1}\ (z = f(x)).$$

Κατά συνέπεια $b+1{\in}A$, δηλαδή το A είναι κλειστό ως προς τη συνάρτηση του επομένου.

Ας πάρουμε $c{<}b$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο

$$\{z{\leq}w_0 : \exists x{\leq}c\ (z = f(x))\}$$

είναι Δ_0-ορίσιμο και φραγμένο στο M. Οπότε λόγω $\mathrm{L}\Delta_0$, αυτό θα έχει μέγιστο στοιχείο, ας το ονομάσουμε w_1. Τότε ισχύει:

$$\forall x{\leq}c \exists z{\leq}w_1\ (z = f(x)).$$

Έπεται ότι $c{\in}A$, δηλαδή ελέγξαμε πως το A είναι κλειστό προς τα κάτω, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του ισχυρισμού. □

Επιστρέφουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.5. Θα δείξουμε ότι για κάθε

$i{\in}A$ μπορούμε να κωδικοποιήσουμε την ακολουθία στοιχείων $x_0, \ldots, x_i{\leq}i$, για την οποία υπάρχει φραγμένη ακολουθία $w_0, \ldots, w_i{\leq}w$ που ικανοποιεί:

"για κάθε $j \leq i$, το στοιχείο x_j είναι το ελάχιστο στο $[0, j]$ για το οποίο υπάρχει w_j με $w_j = f(x_j)$ και w_j είναι ένα άνω φράγμα για το $\{f(k) : k{\leq}j\}$."

Σημειώνουμε πως λόγω της κατασκευής της, η ακολουθία $x_0, \ldots, x_i$, είναι μοναδική. Αυτό και το γεγονός πως όλοι οι ποσοδείκτες που περιγράφουν τα παραπάνω είναι φραγμένοι και υπάρχουν όλα τα απαραίτητα εκθετικά, μας επιτρέπουν να κωδικοποιήσουμε τοπικά (δηλαδή μέχρι i) την ακολουθία αυτή.

Επεξηγούμε αυτά που είπαμε με ένα παράδειγμα. Ο κωδικός

$$\langle 0, 1, 2, 2, 2, 5, 6, 6, 6, 6 \rangle$$

σημαίνει πως το $f(2)$ είναι το άνω φράγμα για τις φ-τιμές των 0, 1, 2, 3 και 4, δηλαδή για τις $f(0), \ldots, f(4)$, ενώ το $f(6)$ είναι άνω φράγμα των $f(0), f(1), \ldots, f(9)$.

Τώρα θα πούμε τεχνικά περί της κωδικοποίησης της $x_0, \ldots, x_i$ και για όλα αυτά που περιγράψαμε στη μεταγλώσσα. Έστω $\psi(i)$ ο Σ_1 τύπος:

$$\exists x_0 \ldots x_i{\leq}i \exists w \ \Theta(x_0, \ldots, x_i, w),$$

όπου Θ είναι τύπος με φραγμένους ποσοδείκτες ο οποίος εκφράζει

"$x_0 = 0 \wedge$ η ακολουθία $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_i)$ απαριθμεί όλα τα στοιχεία στο πεδίο τιμών της f τα οποία είναι $\leq w$ (με επαναλήψεις)".

Διευκρινίζουμε ότι η ακολουθία $w_0, w_1, \ldots, w_i$ "κωδικοποιεί" τις πρώτες $i+1$ τιμές της "συνάρτησης":

$$\begin{array}{lcl} h(0) & = & f(0) \\ h(x+1) & = & \left\{ \begin{array}{ll} f(x+1), & \text{αν } f(x+1){>}f(y), \text{ για κάθε } y{\leq}x \\ h(x), & \text{αλλιώς.} \end{array} \right. \end{array}$$

Θέτουμε $\chi(i)$ να είναι ο Π_1 τύπος που εκφράζει

$\forall w \forall x \leq i$["$x$ είναι το ελάχιστο t τέτοιος ώστε $w = f(t)$ είναι το άνω φράγμα του

$$\{f(0), \ldots, f(i)\}\text{"} \rightarrow \exists x_0 \ldots x_i{\leq}i \ (x = x_i \wedge \ \Theta(x_0, \ldots, x_i, w))].$$

Επισημαίνουμε ότι υπάρχει $b{\in}M$ που ικανοποιεί την προηγουμένως αναφερόμενη συνεπαγωγή για $x = i{\in}A$. Πράγματι, εφόσον $i{\in}A$, το σύνολο $\{f(0), \ldots, f(i)\}$ είναι άνω φραγμένο και Δ_0 ορίσιμο και άρα έχει μέγιστο. Λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι η ακολουθία που ορίζεται από τον τύπο $\Theta(x_0, \ldots, x_i, w)$ είναι μοναδική (όταν βέβαια υπάρχει), συμπεραίνουμε ότι

$$M \models \forall i \ [i \in A \rightarrow (\psi(i) \leftrightarrow \chi(i))].$$

Παρατηρούμε πως και οι δύο τύποι $\psi(i)$ και $\chi(i)$, αν και δεν είναι γραμμένοι σε μερικά σημεία με σύμβολα της $\mathcal{L}$ και φαίνεται να χρησιμοποιούνται άπειροι το πλήθος ποσοδείκτες, μπορούν να θεωρηθούν κανονικοί τύποι, διότι κάθε ακολουθία $x_0, \ldots, x_i$ κωδικοποιείται από έναν αριθμό $e<a^{i+1} \in M$.
Από την στιγμή λοιπόν που ο $\psi(i)$ είναι Δ_1, όταν περιοριστούμε στο A, με επαγωγή στο $i \leq b$ δείχνουμε ότι

$$M \models \forall i \leq b \ \psi(i), \text{ για κάθε } b \in A$$

(είναι γνωστό ότι, για οποιαδήποτε κλάση συναρτήσεων, η κλασσική επαγωγή συνεπάγει την "επαγωγή έως ενός σημείου t, για τυχόν t" - βλέπε για παράδειγμα σελ. 44 του [Kay91]).

Το σύνολο που ακολουθεί παίζει πολύ σημαντικό ρόλο τόσο σε αυτήν την απόδειξη, όσο και στα επόμενα που θα πούμε.

$$\Omega = \{w : \exists i \ (i \in A \wedge \exists x_0 \ldots x_i \leq i \ \Theta(w, x_0, \ldots, x_i))\}.$$

Περίπτωση 1. Το σύνολο Ω είναι φραγμένο.
Τότε υπάρχει w_{max} στο M τέτοιο ώστε

$$A = \{b \leq a : \exists w_0 \leq w_{max} \ [\exists x_0 \leq b \ \varphi(x_0, w_0) \wedge \forall x \leq b \exists z \leq w_0 \ \varphi(x, z)]\}.$$

Αυτό δείχνει πως το A είναι μια Δ_0-ορίσιμη γνήσια τομή στο M, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι $M \models I\Delta_0$.

Περίπτωση 2. Το σύνολο Ω δεν είναι φραγμένο.
Θέτουμε $\theta(x)$ να είναι ο Σ_1 τύπος που ορίζει το A και $\eta(i, y)$ να είναι άλλος ένας Σ_1 τύπος που εκφράζει "$y<a \wedge f(y)$ είναι η μικρότερη τιμή της f η οποία είναι άνω φράγμα του $\{f(0), \ldots, f(i)\}$". Τότε οι θ και η ικανοποιούν την υπόθεση του Λήμματος 3.5. Και βέβαια από το $M \models \exp$ εξασφαλίζουμε την ύπαρξη του a^a στο M.

Κατά συνέπεια το Λήμμα 3.5 μας δίνει $e<a^a$ τέτοιο ώστε

$$M \models \forall i \leq length(e) \ [\theta(i) \rightarrow \eta(i, (e)_i)].$$

Έχοντας ότι η ακολουθία που ορίζεται από τον Θ είναι μοναδική (όταν υπάρχει), δείχνουμε, όπως πριν, ότι το σύνολο A ταυτίζεται με το σύνολο

$$\{i \leq e : \forall w_1, w_2 \forall j, k \leq i \ [\varphi((e)_j, w_1) \wedge \varphi((e)_k, w_2) \wedge j<k \rightarrow w_1 \leq w_2]\}.$$

Έτσι καταλήγουμε στο ότι το A είναι μια Δ_1-ορίσιμη γνήσια τομή του M. Πράγμα που πάλι έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι $M \models I\Delta_1$. $\square$

Στη προσπάθεια να κάνουμε την κεντρική μας ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος 3.6 περισσότερο σαφή, δίνουμε για αρχή μια απλή τροποποίηση του επιχειρήματός μας για να αποδείξουμε πρώτα ένα πιο ασθενές αποτέλεσμα. Το ασθενέστερο αυτό αποτέλεσμα το ανέφερε και ο N. Thapen ως εφαρμογή του κυρίως Θεωρήματός του (βλέπε [Tha05]).

Πρόταση 3.7. *$I\Delta_1 + \Omega_{1,k} \Rightarrow B\Sigma_1$, για οποιοδήποτε $k \geq 1$.*

Απόδειξη. Έστω $M \models I\Delta_1 + \Omega_{1,k} + \neg\Omega_{1,k-1} + \neg B\Sigma_1$, $k{\geq}1$, $a{\in}M$ και $\varphi(x,w){\in}\Delta_0$ τέτοιος ώστε ο φ ορίζει μια 1-1 συνάρτηση με πεδίο ορισμού $[0,a]$ και με πεδίο τιμών ένα μη φραγμένο υποσύνολο του M.
Αρχικά, παρατηρούμε πως μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$$a^{log^{(k-1)}a} \notin M.$$

Πράγματι, ας πούμε πως $M \models \exists z\ (z = a^{log^{(k-1)}a})$. Τότε από την υπόθεση υπάρχει $b \in M$, $b{>}a$, τέτοιο ώστε $M \not\models \exists z\ (z = b^{log^{(k-1)}b})$. Θεωρούμε τον τύπο $\hat{\varphi}(x,w)$ να είναι

$$(x{\leq}a \wedge \varphi(x,w)) \vee\ (a{<}x{\leq}b \wedge w = x).$$

Από τον ορισμό του, ο $\hat{\varphi}$ είναι ένας Δ_0 τύπος που ορίζει μια συνάρτηση από το διάστημα $[0,b]$ στο M, που η εικόνα της δεν είναι φραγμένη. Οπότε δουλεύουμε με τους $b, \hat{\varphi}$ αντί τους a, φ.
Χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό με την προηγούμενη απόδειξη. Δηλαδή το σύνολο A είναι

$$\{b{\leq}a : \exists w_0[\exists x_0{\leq}b\ \varphi(w_0 = f(x_0)) \wedge \forall x{\leq}b \exists z{\leq}w_0\ (z = f(x))]\}.$$

Αν υπάρχει $d{\in}M$ με την ιδιότητα $A{<}d$ και με a^d να υπάρχει στο M, τότε επαναλαμβάνεται όπως είναι η προηγούμενη απόδειξη, η οποία μας οδηγεί σε άτοπο.

Κατά συνέπεια υποθέτουμε πως δεν υπάρχει τέτοιο $d{\in}M$. Από την άλλη, λόγω του μικρού μεγέθους, $log^{(k)}a \in A$, διότι μέχρι εκεί ισχύει η Σ_1 συλλογή. Η σκέψη μας εδώ είναι να θεωρήσουμε αντί για το A, μια "εκθετικά πιο μικρή" τομή. Για αυτό το λόγο, ορίζουμε το επόμενο υποψήφιο σύνολο για μια τέτοια "μικρότερη" τομή.

$$E = \{b{\leq}a : \exists i \exists w \exists z\ (i{\in}A \wedge \varphi(i,w) \wedge w{>}z \wedge z = a^{2^b})\}.$$

Το E είναι τομή διότι πρώτον τις κλειστότητες ως προς το 0 και τη $<$ μας τα δίνει το γεγονός πως το E είναι αρχικό υποσύνολο της τομής A και δεύτερον επειδή

$$a^{2^{b+1}} = (a^{2^b})^2,$$

έπεται ότι εάν $a^{2^b} \in M$, τότε και $a^{2^{b+1}} \in M$. Δηλαδή το E είναι κλειστό και ως προς τον επόμενο.

Παρατηρούμε ότι $log^{(k)}a \notin E$. Διότι αν το $log^{(k)}a$ βρίσκεται μέσα στο E, τότε θα έπρεπε το $a^{2^{log^{(k)}a}}$ να υπάρχει στο M, δηλαδή το $a^{log^{(k-1)}a}$ θα υπήρχε στο M. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας.

Από τη στιγμή που $E<log^{(k)}a$ και το $a^{log^{(k)}a}$ υπάρχει, ουσιαστικά μπορούμε να προσαρμόσουμε την ήδη γνωστή απόδειξη, που δώσαμε πριν. Για την ακρίβεια, αυτό που γίνεται είναι να μπει στη θέση του A η τομή E και ξαναγράφουμε τους τύπους $\psi(i)$ και $\chi(i)$ έτσι ώστε να ταιριάζουν με τον ορισμό του E. Συγκεκριμένα, πρέπει να εισαγάγουμε επιπλέον συνδέσμους σε αυτούς τους τύπους, με εκφράσεις που θα λένε πως ο ελάχιστος μάρτυρας w_i για κάθε x_i είναι μεγαλύτερος του a^{2^i}. □

Έχοντας στο μυαλό μας να φτάσουμε στο αποτέλεσμα του Thapen, δυναμώνοντας την Πρόταση 3.7, παραθέτουμε το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 3.8. $I\Delta_1 + \forall x \exists y{>}x \exists z\ [\exists u\ (u = x^z) \wedge \neg\exists u\ (u = y^z)] \Rightarrow B\Sigma_1$.

Απόδειξη. Μιμούμενοι την απόδειξη της Πρότασης 3.7, επαναορίζουμε το σύνολο E ως εξής:

$$E = \{b{\leq}a : \exists i \exists w \exists z\ (i{\in}A \wedge \varphi(i,w) \wedge w{>}z \wedge z = c^b)\},$$

όπου c είναι τέτοιο ώστε

$$M \models \exists z \text{ “}a^z \text{ υπάρχει και } c^y \text{ δεν υπάρχει”}.$$

□

Εν όψει του Πορίσματος 3.8, τα μοντέλα του $I\Delta_1$ που μας έμειναν να εξετάσουμε (εννοείται να δούμε αν ικανοποιούν ή όχι το $B\Sigma_1$), είναι εκείνα που ικανοποιούν

$$\exists x \forall y{>}x \forall z\ [\exists u\ (u = x^z) \rightarrow \exists u\ (u = y^z)]. \tag{3.2}$$

Ας δούμε οποιοδήποτε μοντέλο M της μορφής $a^{\mathbb{N}}$ για κάποιο $a{\in}M - \mathbb{N}$, δηλαδή στο M ισχύει

$$\exists a{\in}M - \mathbb{N}\ \forall b{\in}M\ \exists n{\in}\mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } M \models b{\leq}a^n.$$

Τότε όλα αυτά τα μοντέλα ικανοποιούν την σχέση (3.2). Οπότε συμπεραίνουμε ότι τα μοντέλα που απομένουν εμπίπτουν σε μια από τις δύο επόμενες κατηγορίες:

Κατηγορία 1. M είναι της μορφής $a^{\mathbb{N}}$ για κάποιο $a \in M - \mathbb{N}$.

Κατηγορία 2. M δεν ανήκει στην προηγούμενη κατηγορία και $M \models (3.2)$.

Σε αυτό το σημείο επισημαίνουμε πως κανένα μοντέλο της θεωρίας $I\Delta_1 + th_p$ δεν ανήκει στη πρώτη κατηγορία. Πριν προχωρήσουμε στην δική μας απόδειξη του Θεωρήματος 3.6, παραθέτουμε μερικά λήμματα, τα οποία θα χρειαστούν παρακάτω. Το πρώτο είναι γνωστό ως "Αρχή υπερχείλισης (Overspill principle)". Οφείλεται στον A. Robinson και η απόδειξή του μπορεί να βρεθεί για παράδειγμα στο [Kay91].

Λήμμα 3.9 (Αρχή υπερχείλισης)**.** *Έστω K ένα nonstandard μοντέλο του $I\Sigma_n$, και I μια γνήσια τομή του K. Έστω επίσης $\varphi(x,y)$ ένας Σ_n τύπος και $a{\in}K$. Εάν $K \models \varphi(i,a)$ για κάθε $i{\in}I$, τότε υπάρχει $j{\in}K - I$ τέτοιο ώστε $K \models \forall x{\leq}j\varphi(x,a)$.*

Ένα μέρος του επόμενου λήμματος έχει χρησιμοποιηθεί από το N. Thapen.

Λήμμα 3.10. *Για οποιοδήποτε μοντέλο K του $I\Delta_0$,*

$K \models \neg I\Sigma_1 \Leftrightarrow$ υπάρχει μια γνήσια (Σ_1 -ορίσιμη) τομή J του K και μια Δ_0 -ορίσιμη αύξουσα $f : J \to K$ με άφρακτο πεδίο τιμών.

Απόδειξη. Για απλότητα, οι τύποι θα είναι χωρίς παραμέτρους.
($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε την ύπαρξη της γνήσιας τομής J του K και της Δ_0-ορίσιμης αύξουσας συνάρτησης $f : J \to K$ με άφρακτο πεδίο τιμών. Τότε για κάθε $j{\in}J$ ισχύει

$$K \models \exists w\ [f(j) = w \wedge \forall y{\leq}j\exists z{\leq}w\ (f(y) = z)]\ \ (*).$$

Έστω προς άτοπο ότι $K \models I\Sigma_1$. Τότε εφαρμόζοντας Σ_1-υπερχείλιση προκύπτει ότι υπάρχει $a{\in}K - J$ με την ιδιότητα $(*)$ που δώσαμε προηγουμένως. Αυτό όμως αναγκάζει το $f(J)$ να είναι φραγμένο, παραδείγματος χάριν από το στοιχείο $f(a)$. Και αυτό είναι άτοπο.
($\Rightarrow$) Τώρα ας υποθέσουμε ότι $K \models \neg I\Sigma_1$. Τότε υπάρχει ένας Δ_0-τύπος $\varphi(x,y)$ τέτοιος ώστε

$$K \models \exists y\varphi(0,y) \wedge \forall x\ [\exists y\varphi(x,y) \to \exists y\varphi(x+1,y)] \wedge \neg\forall x\exists y\ \varphi(x,y).$$

Ορίζουμε $J = \{x{\in}K : \exists w\forall y{\leq}x\exists z{\leq}w\ \varphi(y,z)\}$ και την $f : J \to K$ ως εξής

$$f(x) = \text{είναι ο ελάχιστος } w \text{ τέτοιος ώστε } \forall y{\leq}x\exists z{\leq}w\ \varphi(y,z).$$

Από την υπόθεσή μας για τον τύπο φ, έχουμε ότι $0{\in}J$ και το J είναι κλειστό ως προς τον επόμενο. Το J είναι επίσης κλειστό ως προς τη σχέση $<$, διότι οποιοδήποτε φράγμα για το σύνολο $\{f(y) : y{\leq}x\}$ είναι επίσης φράγμα και του συνόλου $\{f(y) : y{\leq}t\}$, για όλα τα $t{<}x$. Συμπεραίνουμε πως τελικά το J είναι μια Σ_1-ορίσιμη γνήσια τομή του K. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς πως η f είναι μια Δ_0-ορίσιμη αύξουσα συνάρτηση με μη φραγμένο πεδίο τιμών. □

Τώρα είμαστε σε θέση να δώσουμε τη δική μας απόδειξη στο αποτέλεσμα του N. Thapen.

Εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος 3.6. Έστω $M \models I\Delta_1{+}th_p{+}\neg B\Sigma_1$, $a{\in}M$ και $\varphi(x,w){\in}\Delta_0$, με φ να ορίζει μια 1-1 συνάρτηση από $[0,a]$ σε ένα μη φραγμένο υποσύνολο του M. Σε αυτό το σημείο εξηγούμε γιατί το M δεν μπορεί να ανήκει στην κατηγορία 1. Ο λόγος είναι πως το αξίωμα th_p συνεπάγεται ότι για κάθε $b{\in}M$ υπάρχει κάποιο $\gamma{\in}M-\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$M \models \exists y\ (y = b^\gamma),$$

διότι το $\mathbb{N}$ είναι κλειστό ως προς το σύνολο των πρωτογενών αναδρομικών συναρτήσεων.
Με το σύνολο A εννοούμε ακριβώς αυτό που ήδη ορίστηκε στην απόδειξή μας του Θεωρήματος 2.5. Θυμόμαστε επίσης από εκείνη την απόδειξη, πως μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει $d{>}A$ τέτοιος ώστε a^d να είναι μέσα στο M. Κατά συνέπεια $D{\subseteq}A$, όπου

$$D = \{d \in M : \forall x \exists z\ (z = x^d)\}.$$

Θα δείξουμε ότι $D \models \neg I\Sigma_1$. Πράγματι, ας υποθέσουμε το αντίθετο. Έχοντας ότι $M \models th_p$, υπάρχει $b \in D$ τέτοιος ώστε $M \models a{<}p(b) \wedge \exists z\ (z = a^b)$. Όμως έχουμε ότι D είναι κλειστό ως προς το σύνολο των πρωτογενών αναδρομικών συναρτήσεων (λόγω της Σ_1 επαγωγής). Κατά συνέπεια $p(b){\in}D$ και άρα έπεται πως $a{\in}D$. Αυτό όμως είναι αδύνατον, διότι $D{\subseteq}A{<}a$.
Από το Λήμμα 3.10, υπάρχει μια γνήσια Σ_1-ορίσιμη τομή J του D και μια Δ_0-ορίσιμη αύξουσα συνάρτηση $f : J \to D$ με πεδίο τιμών μη φραγμένο.
Θεωρούμε ένα κατάλληλο υποσύνολο του J:

$$E = \{b{\leq}a : b{\in}J \wedge \exists i \exists w \exists z\ (i{\in}A \wedge \varphi(i,w) \wedge w{>}z \wedge z = a^{f(b)})\}.$$

Έτσι τροποποιούμε την επιχειρηματολογία της απόδειξης της Πρότασης 3.7, θέτοντας οποιοδήποτε $d{\in}D$-J στη θέση του $log^{(k)}a$. Και αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση. □

Το αποτέλεσμα της μεθοδολογίας αυτής είναι να σχηματίσουμε μια άποψη για τη μορφή που θα έχει ένα μοντέλο του $I\Delta_1 + \neg B\Sigma_1$, εάν υπάρχει τελικά.

Θεώρημα 3.11. *Αν* $M \models I\Delta_1 + \neg B\Sigma_1$, *τότε υπάρχουν* $D \subset_e M$ *και* $a \in M - \mathbb{N}$ *τέτοια ώστε* $D \models I\Sigma_1$ *και* $M = a^D = \{b \in M : b \leq a^d$ *για κάποιο* $d \in D\}$.

Απόδειξη. Ξεκινάμε με ένα μοντέλο $M \models I\Delta_1 + \neg B\Sigma_1$. Από το Πόρισμα 3.8, έχουμε ότι

$$M \models \exists x \forall y > x \forall z\ [\exists u\ (u = x^z) \rightarrow \exists u\ (u = y^z)].$$

Ας πούμε πως $a \in M$ είναι τέτοιο ώστε

$$\forall y > a \forall z\ [\exists u\ (u = a^z) \rightarrow \exists u\ (u = y^z)].$$

Αφήνουμε τον ορισμό του D όπως τον δώσαμε προηγουμένως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.6. Ισχυριζόμαστε ότι $M = a^D$.

Καταρχάς είναι ξεκάθαρο πως $a^D \subseteq M$. Για το αντίστροφο, ας πάρουμε τυχόν στοιχείο $c \in M$. Επειδή λοιπόν $M \models L\Delta_0$, υπάρχει $e \in M$ τέτοιο ώστε a^e είναι η μέγιστη δύναμη του a που βρίσκεται πιο κάτω από το c. Αλλά τότε $c \leq a^{e+1}$ και $e + 1 \in D$, όπως ακριβώς θέλαμε να δείξουμε.
Σημειώνουμε ότι $D \models I\Sigma_1$, διότι ειδάλλως χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.10 θα φτάναμε σε άτοπο, όπως ακριβώς στο τελευταίο μέρος του Θεωρήματος 3.6. □

3.4 Σχέση με το Πρόβλημα 1.17

Είδαμε στην εισαγωγή πως ακόμα δεν έχουν βρεθεί ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να έχει ένα αριθμήσιμο μοντέλο του $\mathrm{B}\Sigma_1$ μια γνήσια τελική επέκταση που ικανοποιεί το $\mathrm{I}\Delta_0$. Μάλιστα η εύρεση τέτοιων συνθηκών σχετίζεται με το Πρόβλημα 1.17. Αναφερόμαστε συγκεκριμένα στο πρόβλημα της ύπαρξης τελικής επέκτασης που ικανοποιεί $\mathrm{I}\Delta_1$ και το θέτουμε ως επόμενο

Πρόβλημα 3.12. Ισχύει πως κάθε αριθμήσιμο μοντέλο M του $\mathrm{B}\Sigma_1$ έχει μια γνήσια τελική επέκταση που ικανοποιεί $\mathrm{I}\Delta_1$;

Για να δώσουμε τη συσχέτιση των Προβλημάτων 2.6 και 3.12, θα μας χρειαστεί η έννοια του ω_1-*like*[2] μοντέλου, όπως επίσης και ένα αποτέλεσμα σχετικά με αυτήν την έννοια.

Ορισμός 3.13. Ένα μοντέλο $M \models PA^-$ λέγεται ότι είναι ω_1-*like* αν και μόνο αν

(i) $card(M) = \omega_1$ και

[2]Συμβολίζουμε με ω_1 τον πρώτο μη αριθμήσιμο διατακτικό.

(ii) $card\{b{\in}M : M \models b{<}a\} \leq \aleph_0$, για κάθε $a{\in}M$.

Το αποτέλεσμα που αναφέραμε είναι το ακόλουθο και υπάρχει ως άσκηση 7.7(d) στο [Kay91].

Πρόταση 3.14. *Κάθε ω_1-like μοντέλο του $I\Delta_0$ ικανοποιεί $B\Sigma_n$, για όλα τα $n{\in}\mathbb{N}$.*

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε τη σχέση μεταξύ των Προβλημάτων 2.6 και 3.12. Το επιχείρημα που δίνουμε, προκύπτει από μελέτη μιας αντίστοιχης συσχέτισης από τους A. Wilkie και J. Paris στο [WP89].

Πρόταση 3.15. *Ένα από τα Προβλήματα: 2.6 ή 3.12 πρέπει να έχει αρνητική απάντηση.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι ισχύουν ταυτόχρονα τα παρακάτω:

(1) $I\Delta_1 \Rightarrow B\Sigma_1$ και

(2) Κάθε αριθμήσιμο μοντέλο του $B\Sigma_1$ έχει γνήσια τελική επέκταση που ικανοποιεί το $I\Delta_1$.

Έστω M_0 ένα αριθμήσιμο μοντέλο του $B\Sigma_1$ στο οποίο υπάρχει τυπική απόδειξη της πρότασης "$0 = 1$" από τη θεωρία $I\Delta_0$. Θα δείξουμε ότι τέτοιο M_0 υπάρχει. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5 στο [WP87] ισχύει

$$\mathrm{I}\Delta_0 + \exp \nvdash Con_{\mathrm{I}\Delta_0},$$

όπου ο ορισμός του Con_T έχει δοθεί κατά τη διάρκεια της απόδειξης του Θεωρήματος2.11. Άρα κατά μείζονα λόγο έχουμε

(a) $\mathrm{I}\Delta_0 \nvdash Con_{\mathrm{I}\Delta_0}$.

Επίσης ο J.Paris στο [Par81] έδειξε ότι

(b) το $B\Sigma_1$ είναι Π_2-συντηρητικό επί του $I\Delta_0$.

Από τις (a) και (b) έπεται η ύπαρξη του M_0. Από την (2) έχουμε ότι το M_0 έχει μια γνήσια αριθμήσιμη τελική επέκταση M_1, τέτοια που να ικανοποιεί $\mathrm{I}\Delta_1$. Η σχέση (1) μας λέει ότι M_1 επίσης ικανοποιεί $B\Sigma_1$ και άρα ξαναχρησιμοποιούμε την (2) για να καταλήξουμε ότι το M_1 έχει γνήσια αριθμήσιμη τελική επέκταση M_2, που με τη σειρά της ικανοποιεί $\mathrm{I}\Delta_1$. Συνεχίζοντας με αυτό το τρόπο ω_1 φορές,

$$M_0 \precneqq_e M_1 \precneqq_e \cdots \precneqq_e M_{\omega_1}$$

κατασκευάζουμε ένα M_{ω_1} το οποίο είναι ω_1-*like* μοντέλο του $\mathrm{I}\Delta_0$. Όμως σύμφωνα με την Πρόταση 3.14, το M_{ω_1} ικανοποιεί το $B\Sigma_n$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Αυτό στην ουσία σημαίνει πως $M_{\omega_1} \models PA$. Φτάσαμε σε αντίφαση, διότι το M_{ω_1} κληρονόμησε την ιδιότητα του M_0, δηλαδή, το M_{ω_1} περιέχει την απόδειξη της πρότασης "$0 = 1$" από το $I\Delta_0$. $\square$

Για ιστορικούς λόγους, αναφέρουμε πώς τέθηκε το Πρόβλημα 3.12. Είδαμε στην εισαγωγή πως στο Θεώρημα 1.16 το n είναι από 2 και πάνω. Επίσης κάναμε μια συζήτηση για το Πρόβλημα 1.17. Στο άρθρο τους [WP89] οι A. Wilkie και J. Paris εισήγαγαν την έννοια $\mathrm{I}\Delta_0$-*fullness* και έδειξαν πως όταν το M είναι $\mathrm{I}\Delta_0$-*full*, τότε για το M αυτό η απάντηση στο Πρόβλημα 1.17 είναι θετική.

Τροποποιώντας κατάλληλα το σκεπτικό τους, καταλήγουμε πως κάθε $\mathrm{I}\Delta_1$-full μοντέλο έχει μια γνήσια τελική επέκταση που ικανοποιεί $\mathrm{I}\Delta_1$. Συνεπώς το Πρόβλημα 3.12 είναι ουσιαστικά μια παραλλαγή του Προβλήματος 1.17.

Για $n = 1$, παρατηρούμε πως μια θετική απάντηση στο Πρόβλημα 1.11 συνεπάγεται μια ομοιόμορφη[3] απάντηση στα Προβλήματα 3.12 και 1.19.

3.5 Η χρήση των συναρτήσεων καταμέτρησης

Τώρα εστιάζουμε τη προσοχή μας σε μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση: ας πάρουμε ένα $M \models \mathrm{I}\Delta_1$. Μέχρι στιγμής σε αυτό το κεφάλαιο, για να ισχυριστούμε πως το M έχει $\mathrm{B}\Sigma_1$ θα πρέπει είτε να βρίσκεται μέσα σε ένα άλλο K ως γνήσιο αρχικό τμήμα (δηλαδή $M \subsetneqq_e K$) είτε να ικανοποιεί κάποιο αξίωμα που εκφράζει την ολικότητα μιας μορφής εκθετικού (για παράδειγμα να ικανοποιεί το αξίωμα th_p). Αφήνοντας στην άκρη την υπόθεση της ύπαρξης κάποιας γνήσιας τελικής επέκτασης K, μας μένει το M να ικανοποιεί κάποιο σχετικό αξίωμα. Για την ακρίβεια, τα αποτελέσματα που υπάρχουν σε αυτό το κεφάλαιο έχουν ως πόρισμα πως το M πρέπει τουλάχιστον να ικανοποιεί το $\mathrm{I}\Delta_1 + th_p$ για να έπεται ότι $M \models \mathrm{B}\Sigma_1$. Κατά συνέπεια το Θεώρημα 1.27, για $n = 1$, παραμένει η μοναδική πηγή που μας δίνει ένα σύστημα (στη γλώσσα $\mathcal{L}$), το οποίο ενώ αποδεικνύει ολικότητα συναρτήσεων μόνο πολυωνυμικής αύξησης, συνεπάγεται και τη Σ_1 συλλογή. Με άλλα λόγια το $\mathrm{PHP}\Sigma_1$ είναι το μοναδικό σύστημα με τα δύο αυτά χαρακτηριστικά.

Η ιδέα μας είναι να ξεφύγουμε από την κλασσική μας γλώσσα $\mathcal{L}$ και να πάμε σε μια επέκτασή της, $\mathcal{L}^{\{\#,1\}}$.

[3] Δηλαδή, είτε και τα δύο προβλήματα θα έχουν αρνητική απάντηση είτε και τα δύο θετική απάντηση.

Θέτουμε λοιπόν $\mathcal{L}^{\{\#,1\}}$ να είναι η $\mathcal{L}$ μαζί με συναρτησιακά σύμβολα για τις συναρτήσεις καταμέτρησης στοιχείων των Σ_1-συνόλων στην $\mathcal{L}$. Εισάγουμε τα αντίστοιχα συστήματα:

$$\begin{aligned} \mathrm{WPHP}\Sigma_1^{\{\#,1\}} &\quad \text{είναι το } \mathrm{WPHP}\Sigma_1 \text{ στην επεκτεταμένη γλώσσα } \mathcal{L}^{\{\#,1\}} \\ \mathrm{I}\Delta_1^{\{\#,1\}} &\quad \text{είναι το } \mathrm{I}\Delta_1 \text{ στην επεκτεταμένη γλώσσα } \mathcal{L}^{\{\#,1\}}. \end{aligned}$$

Στην Εικόνα 3.2 έχουμε συγκεντρώσει τις σχέσεις των υποσυστημάτων που αναφέρονται σε αυτό το κεφάλαιο. Ας δούμε πώς είναι οι σχέσεις στην $\mathcal{L}$ και θα τις δώσουμε ύστερα και στην επεκτεταμένη γλώσσα.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{I}\Delta_1+\exp \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & \mathrm{B}\Sigma_1+\exp \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & \begin{array}{c}\mathrm{PHP}\Delta_0\\+\mathrm{B}\Sigma_1\end{array} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dddr, Rightarrow] & \mathrm{PHP}\Sigma_1 & & \mathrm{I}\Delta_0+\exp \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathrm{B}\Sigma_1 \arrow[d, Rightarrow] & & \mathrm{PHP}\Delta_0 \arrow[dl, Rightarrow] & \mathrm{I}\Delta_0+\mathrm{I}\mathcal{E}_*^2 \arrow[l, Rightarrow] & \mathrm{I}\Delta_0+\Omega_1 \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathrm{I}\Delta_1 \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{I}\Delta_0 & & \begin{array}{c}\mathrm{WPHP}\Delta_0\\+\,\mathrm{I}\Delta_0+\Omega_1\end{array} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \begin{array}{c}\mathrm{wPHP}\Delta_0\\+\,\mathrm{I}\Delta_0+\Omega_1\end{array} \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & \mathrm{WPHP}\Sigma_1 \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{WPHP}\Delta_0 \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{wPHP}\Delta_0
\end{tikzcd}$$

Εικόνα 3.2: Σύνοψη των κύριων συνεπαγωγών της διατριβής.

Ας πούμε δύο λόγια για τις μη τετριμμένες συνεπαγωγές της Εικόνας 3.2. Η ισοδυναμία $\mathrm{I}\Delta_1+\exp \iff \mathrm{B}\Sigma_1+\exp$ είναι αποτέλεσμα των Θεωρημάτων 1.7(για $n=0$) και 2.5(για $n=1$). Η δεύτερη ισοδυναμία

$$\mathrm{WPHP}\Delta_0{+}\mathrm{I}\Delta_0{+}\Omega_1 \iff \mathrm{wPHP}\Delta_0{+}\mathrm{I}\Delta_0{+}\Omega_1$$

είναι το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 1.34(2). Για την ισχύ της τρίτης ισοδυναμίας (και της τελευταίας σε αυτό το σχήμα)

$$\mathrm{PHP}\Delta_0{+}\mathrm{B}\Sigma_1 \iff \mathrm{PHP}\Sigma_1$$

έχουμε: η κατεύθυνση "$\Rightarrow$" είναι η παρατήρηση πως με την $\mathrm{B}\Sigma_1$ κάθε Σ_1 συνάρτηση που "κρύβεται" στο $\mathrm{PHP}\Sigma_1$ γίνεται Δ_0. Ενώ η κατεύθυνση "$\Leftarrow$" είναι το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 1.27(για $n=1$).

Η συνεπαγωγή (μάλιστα γνήσια) $I\Delta_1$+exp $\Rightarrow$ PHPΔ_0+BΣ_1 είναι αποτέλεσμα των Θεωρημάτων 1.33 και 2.5.

Για την συνεπαγωγή (και αυτή είναι γνήσια) $I\Delta_0$+exp $\Rightarrow$ $I\Delta_0$+$I\mathcal{E}_*^2$, βλέπε § 1.4. της εισαγωγής.

Η συνεπαγωγή $I\Delta_0$+$I\mathcal{E}_*^2$ $\Rightarrow$ PHPΔ_0 είναι το Θεώρημα 1.32.

Η συνεπαγωγή PHPΔ_0 $\Rightarrow$ $I\Delta_0$ είναι το Θεώρημα 1.26.

Τέλος η συνεπαγωγή BΣ_1 $\Rightarrow$ $I\Delta_1$ είναι το Θεώρημα 1.7(για $n = 0$).

Εμείς θα δείξουμε ότι προσθέτοντας στα συστήματα WPHPΣ_0 και $I\Delta_0$ την ικανότητα να μετράνε το πλήθος των στοιχείων των Σ_1 συνόλων, χωρίς άμεση χρήση οποιασδήποτε εκθετικής συνάρτησης, είναι αρκετό ώστε να συμπεράνουμε το BΣ_1. Λέμε άμεσα, εννοώντας πως είναι άγνωστο αν η ικανότητα να μετράνε το πλήθος των στοιχείων των Σ_1 συνόλων είναι ανεξάρτητη από την ύπαρξη οποιουδήποτε εκθετικού. Όσο για τα συστήματα WPHPΣ_0 και $I\Delta_0$ είναι γνωστό πως είναι ανεξάρτητα από την ύπαρξη οποιουδήποτε εκθετικού.

Θεώρημα 3.16. $\mathrm{WPHP}\Sigma_0^{\{\#,1\}} + \mathrm{I}\Delta_0^{\{\#,1\}} \Rightarrow \mathrm{B}\Sigma_1$.

Απόδειξη. Έστω $M \models \neg\mathrm{B}\Sigma_1 + \mathrm{WPHP}\Sigma_1^{\{\#,1\}} + \mathrm{I}\Delta_1^{\{\#,1\}}$. Ας πάρουμε $a \in M$ και $f : a \to M$ μια Δ_0 ορίσιμη συνάρτηση, 1-1, με μη φραγμένο πεδίο τιμών. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε πως και ο περιορισμός της f στο $[0, \frac{a}{2}]$ έχει επίσης μη φραγμένο πεδίο τιμών

Ορίζουμε το ακόλουθο σύνολο:

$$A_0 = \{i : \exists x < a \exists w[f(x) = w \wedge i = \#\{z < a : f(z) < w\}]\},$$

όπου με $\#\{z : f(z) < w\}\}$ συμβολίζουμε την πληθικότητα του Δ_0-συνόλου. Η ικανότητα να μετράμε τα στοιχεία των Σ_1-συνόλων μας επιτρέπει να μιλάμε με τύπο για την πληθικότητα των Δ_0-συνόλων.

Παρατηρούμε καταρχήν ότι $0 \in A_0$. Επίσης το γεγονός ότι η εικόνα της f δεν είναι φραγμένη έχει ως συμπέρασμα πως το A είναι μια Σ_1 τομή.

Επίσης ορίζουμε το σύνολο

$$A_1 = \{i : \exists x < \frac{a}{2} \exists w[f(x) = w \wedge i = \#\{z < \frac{a}{2} : f(z) < w\}]\},$$

το οποίο παρομοίως δείχνουμε πως είναι μια Σ_1 τομή.

Η προφανής σχέση εγκλεισμού είναι $A_1 \subseteq A_2$.

Θεωρούμε την εξής συνάρτηση καταμέτρησης με παράμετρο το a:

$$c(x, a) = i \iff i = \#\{u : \exists w[f(x) = w \wedge \exists y < af(y) = u \wedge u < w]\}.$$

Θέτουμε $\varphi(i)$ να είναι ο εξής $\Delta_0^{\{\#,1\}}$ τύπος:

$$\exists x < ac(x,a) = i \rightarrow \exists y < \frac{a}{2}c(y,\frac{a}{2}) = i.$$

Εφόσον ο $\varphi(i)$ είναι $\Delta_0^{\{\#,1\}}$ και ισχύει $\varphi(0)$ και για κάθε x αν $\varphi(x)$ τότε $\varphi(x+1)$, έπεται πως $\forall x\varphi(x)$. Δηλαδή ότι $A_1 = A_0$. Αυτό το γεγονός όμως μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε μια 1-1 $\Delta_0^{\{\#,1\}}$ συνάρτηση από το [0, $\frac{a}{2}$] στο [0,a]. Άτοπο, λόγω $\mathrm{WPHP}\Sigma_0^{\{\#,1\}}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν τελικά πως $M \models \mathrm{B}\Sigma_1$. □

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση f, με την ύπαρξη της οποίας ξεκινήσαμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.16, μπορεί να ορίζεται και στην επεκτεταμένη γλώσσα. Δηλαδή, δεν μας πειράζει να υπάρχουν νέα σύμβολα (από $\mathcal{L}^{\{\#,1\}}$) στον ορισμό της f. Άρα θέτοντας

$$\mathrm{B}\Sigma_1^{\{\#,1\}} \quad \text{να είναι το} \quad \mathrm{B}\Sigma_1 \quad \text{στην επεκτεταμένη γλώσσα } \mathcal{L}^{\{\#,1\}}$$

έχουμε ως φυσικό επακόλουθο το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 3.17. $\mathrm{WPHP}\Sigma_0^{\{\#,1\}} + \mathrm{I}\Delta_0^{\{\#,1\}} \Rightarrow \mathrm{B}\Sigma_1^{\{\#,1\}}$.

Άλλο ένα πόρισμα του Θεωρήματος 3.16 είναι το

Πόρισμα 3.18. *(a)* $\mathrm{WPHP}\Sigma_0^{\{\#,1\}} + \mathrm{I}\Delta_0^{\{\#,1\}} \Rightarrow \mathrm{PHP}\Sigma_1$.

(b) $\mathrm{WPHP}\Sigma_0^{\{\#,1\}} + \mathrm{I}\Delta_0^{\{\#,1\}} \Rightarrow \mathrm{PHP}\Sigma_1^{\{\#,1\}}$.

Απόδειξη. **(a)** Έστω ένα μοντέλο M που ικανοποιεί $\mathrm{WPHP}\Sigma_0^{\{\#,1\}} + \mathrm{I}\Delta_0^{\{\#,1\}}$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 1.32 έπεται πως επιπλέον $M \models \mathrm{PHP}\Delta_0$. Είναι επίσης γνωστό ότι το σύστημα $\mathrm{PHP}\Delta_0 + \mathrm{B}\Sigma_1$ είναι ισοδύναμο με το $\mathrm{PHP}\Sigma_1$ (βλέπε για λεπτομέρειες [DP86]). Από αυτά τα δύο αποτελέσματα μαζί με το Θεώρημα 3.16 και το γεγονός πως

$$\mathrm{B}\Sigma_1^{\{\#,1\}} \Rightarrow \mathrm{B}\Sigma_1$$

έπεται το ζητούμενο, ότι δηλαδή, $M \models \mathrm{PHP}\Sigma_1$. **(b)** Το ζητούμενο αποδεικνύεται παρόμοια, μιας και

$$\mathrm{PHP}\Delta_0^{\{\#,1\}} + \mathrm{B}\Sigma_1^{\{\#,1\}} \Longleftrightarrow PHP\Sigma_1^{\{\#,1\}}.$$

□

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{PHP}\Sigma_1 \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{S} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{I}\Delta_0 + \exp \arrow[l, Rightarrow, "/" marking] \arrow[dl, Rightarrow, ";" ', "/" marking] \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathrm{B}\Sigma_1 & \mathrm{WPHP}\Sigma_1 \arrow[l, Rightarrow, ";" '] \arrow[r, Rightarrow, ";" '] & \mathrm{I}\Delta_0
\end{tikzcd}
$$

Εικόνα 3.3: Οι συνεπαγωγές για την $\mathcal{L}^{\#}$.

Συνοψίζουμε, όπως υποσχεθήκαμε στη αρχή αυτής της παραγράφου, με μια εικόνα που περιέχει πλέον κάποια συστήματα σε επεκτεταμένη γλώσσα.

Στην Εικόνα 3.3 με S συμβολίζουμε το $WPHP\Sigma_0^{\{\#,1\}} + I\Delta_0^{\{\#,1\}}$. Η συνεπαγωγή $\mathrm{WPHP}\Sigma_0^{\{\#,1\}} + \mathrm{I}\Delta_0^{\{\#,1\}} \Rightarrow \mathrm{PHP}\Sigma_1$ είναι το αποτέλεσμα του Πορίσματος 3.18(a).

Το γεγονός ότι ισχύει $\mathrm{I}\Delta_0$+exp $\not\Rightarrow \mathrm{I}\Delta_1$ (είναι πόρισμα του Λήμματος 1.10(3)) μαζί με την δυνατότητα ερμηνείας των μη λογικών συμβόλων της $\mathcal{L}^{\{\#,1\}}$ σε μοντέλα του $\mathrm{I}\Delta_0$+exp, συνεπάγεται το $\mathrm{I}\Delta_0$+exp $\not\Rightarrow \mathrm{WPHP}\Sigma_0^{\{\#,1\}} + \mathrm{I}\Delta_0^{\{\#,1\}}$.

Όμως είναι ακόμα ανοικτό ερώτημα η συνεπαγωγή $\mathrm{I}\Delta_0$+exp $\Rightarrow \mathrm{WPHP}\Sigma_1$. Πιστεύουμε πως δεν πρέπει να ισχύει.

Μελετώντας την Εικόνα 3.2 μπορεί να διαπιστώσει κανείς πως το σύστημα $\mathrm{WPHP}\Sigma_1$ δεν συνεπάγεται κανένα άλλο σύστημα εκτός από τις δύο ασθενείς Δ_0 μορφές του περιστερώνα, όπου αυτές οι συνεπαγωγές ισχύουν κατά τετριμμένη έννοια. Θα περίμενε κανείς πως επιτρέποντας σε ένα μοντέλο M να έχει ασθενή μορφή του περιστερώνα για Σ_1 συναρτήσεις, θα έπεται τουλάχιστον πως $M \models \mathrm{I}\Delta_0$. Όμως η συνεπαγωγή αυτή, δηλαδή η $\mathrm{WPHP}\Sigma_1 \Rightarrow \mathrm{I}\Delta_0$ παραμένει ανοικτό ερώτημα, και μιας και ισχύει η $\mathrm{B}\Sigma_1 \Rightarrow \mathrm{I}\Delta_1$, είναι προφανές πως και η $\mathrm{WPHP}\Sigma_1 \Rightarrow \mathrm{B}\Sigma_1$ αποτελεί επίσης ανοικτό πρόβλημα.

3.6 Εικασία περί διαχωρισμού συστημάτων

Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό με την εξής

Εικασία 3.19. Δεν υπάρχουν συστήματα T_1 της κατηγορίας A και T_2 της κατηγορίας B τέτοια ώστε είτε $T_1 \Rightarrow T_2$ είτε $T_2 \Rightarrow T_1$, όπου οι κατηγορίες A και B δίνονται στην Εικόνα 3.4.

Παραθέτουμε τους λόγους που μας ώθησαν να διατυπώσουμε την Εικασία 3.19.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{I}\Delta_0+\exp \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\ \mathrm{I}\mathcal{E}^2_* & \mathrm{I}\Delta_0+\mathrm{th_p} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{PHP}\Sigma_1 \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] \\ \mathrm{B}\Sigma_1 \arrow[d, Rightarrow] & \\ \mathrm{I}\Delta_1 & \mathrm{WPHP}\Sigma_1 \end{tikzcd}$$

Εικόνα 3.4: Κατηγορία A - Κατηγορία B αντίστοιχα.

(Λ1) Είναι γνωστό πως μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο της μορφής $a^{\mathbb{N}}$, όπου $a > \mathbb{N}$, το οποίο να ικανοποιεί όλα τα συστήματα της κατηγορίας B, βλέπε για παράδειγμα § 1.2 και § 1.5. Αυτομάτως κανένα σύστημα της κατηγορίας B δεν συνεπάγεται τα $\mathrm{I}\Delta_0$+exp και $\mathrm{I}\Delta_0+th_p$. Το σκεπτικό αυτό όμως δεν εφαρμόζεται για το $\mathrm{I}\mathcal{E}^2_*$.

(Λ2) Είναι άγνωστο ακόμα τι χρειάζεται να ικανοποιεί ένα μοντέλο M, εκτός από την ολικότητα της εκθετικής συνάρτησης και το $\mathrm{I}\Delta_0$, ώστε να ισχύει $M \models \mathrm{I}\mathcal{E}^2_*$. Έχουμε αναφέρει στην § 1.4 ότι

$$\mathrm{I}\Delta_0 \subseteq \mathrm{I}\mathcal{E}^2_* \subsetneqq \mathrm{I}\Delta_0 + \exp$$

και πως είναι άγνωστη η ισοδυναμία $\mathrm{I}\Delta_0 \Leftrightarrow \mathrm{I}\mathcal{E}^2_*$. Επικρατεί ωστόσο σε μεγάλο βαθμό η άποψη πως η ισοδυναμία αυτή δεν αληθεύει. Μια συνέπεια της αναφερόμενης ισοδυναμίας (σε περίπτωση που τελικά αποδειχθεί) είναι να μην ισχύει η Εικασία 3.19, διότι όπως είδαμε στην εισαγωγή όλα τα συστήματα (εκτός ίσως του $\mathrm{WPHP}\Sigma_1$) συνεπάγονται το $\mathrm{I}\Delta_0$. Από την άλλη, αν αποδειχθεί ότι $\mathrm{I}\Delta_0 \not\Rightarrow \mathrm{I}\mathcal{E}^2_*$, τότε οι πιθανότητες για την συνεπαγωγή $\mathrm{PHP}\Sigma_1 \Rightarrow \mathrm{I}\mathcal{E}^2_*$ θα είναι ακόμα πιο λίγες.

(Λ3) Είδαμε πως $\mathrm{I}\Delta_0+\exp \not\Rightarrow \mathrm{I}\Delta_1$, βλέπε Λήμμα 1.10(3) σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2.5. Κατά συνέπεια κανένα σύστημα από την κατηγορία A δεν συνεπάγεται τα $\mathrm{PHP}\Sigma_1$, $\mathrm{B}\Sigma_1$ και $\mathrm{I}\Delta_1$.

(Λ4) Είναι πολλά τα ερωτήματα γύρω από το $\mathrm{WPHP}\Sigma_1$, βλέπε για παράδειγμα τα σχόλια στο τέλος της § 3.5. Παρόλα αυτά πιστεύουμε ότι το $\mathrm{WPHP}\Sigma_1$ "μοιράζεται την ανεξαρτησία" από την κατηγορία A με τα υπόλοιπα συστήματα της κατηγορίας B.

Οι λόγοι λοιπόν (Λ1) και (Λ2) "υποστηρίζουν" την κατεύθυνση $B \not\Rightarrow A$, ενώ οι (Λ3) και (Λ4) "υποστηρίζουν" την κατεύθυνση $A \not\Rightarrow B$.

Κεφάλαιο 4

LP-μοντέλα της αριθμητικής

Αυτό το κεφάλαιο είναι αφιερωμένο σε μια εκ πρώτης όψης διαφορετική αριθμητική και ασύνδετη με αυτήν που μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Συγκεκριμένα, εισάγουμε την έννοια ενός LP-μοντέλου, εξετάζουμε τις ιδιότητές του και δίνουμε απαντήσεις σε ορισμένα προβλήματα που τέθηκαν από τον G. Priest στο [Pri97] και στο [Pri00]. Ο στόχος μας είναι να κατανοήσουμε καλύτερα τα άπειρα LP-μοντέλα, ώστε να φτάσουμε κοντά σε κάποιο χαρακτηρισμό τους. Στο τέλος θα φανεί η στενή σχέση της κλασσικής αριθμητικής και της αριθμητικής αυτού του κεφαλαίου.

4.1 Εισαγωγή

Από τη σκοπιά της κλασσικής λογικής, ένα από τα πρώτα πράγματα που μαθαίνουμε είναι η εξής αρχή:

ex contradictione quodlibet (ECQ)

δηλαδή, πως από την αντίφαση έπονται τα πάντα. Όμως, εάν μιλήσουμε στα πλαίσια της γενικότητας, υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες θα μπορούσαμε να δεχτούμε ορισμένες αντιφάσεις, χωρίς να καταρρεύσει το σύστημά μας υπό το βάρος μιας τέτοιας αρχής.

Ένα παράδειγμα, ίσως βαρύ, αλλά χαρακτηριστικό, έχει να κάνει με τα δύο πολύ γνωστά συστήματα φυσικής: την Νευτώνεια φυσική και του Einstein. Τα συστήματα αυτά είναι ασυμβίβαστα. Παρόλα αυτά και τα δύο χρησιμοποιούνται σήμερα, το καθένα έχει δική του εφαρμογή, χωρίς βέβαια να έπεται πως τα πάντα αποδεικνύονται από αυτά τα συστήματα.

Όσο αναφορά την μη συνεπή αριθμητική θεωρία, ο πρώτος που φέρεται να έχει ασχοληθεί με αυτήν, είναι ο Robert K. Meyer (1976), βλέπε [Mor].

Μαζί με τον M. Mortensen στο [MM84] απέδειξαν πως υπάρχει ολόκληρη κλάση μη συνεπών αριθμητικών θεωριών. Ένα από τα αποτελέσματά τους ήταν να δείξουν πως ανεξαρτήτως του πλήθους αντιφάσεων που μπορεί να έχει ένα μοντέλο, αυτές δεν επηρεάζουν αρνητικά τους αριθμητικούς υπολογισμούς. Τα αριθμητικά μοντέλα επιτρέπουν περιγραφή δομών πέραν του $\mathbb{N}$. Παραδείγματος χάριν, δακτύλιοι με διάταξη. Για αυτούς τους λόγους ορισμένοι συγγραφείς ξεκίνησαν να ερευνούν αυτού του είδους λογική, την οποία καλούμε *paraconsistent λογική*.

Υπάρχουν πολλών ειδών paraconsistent λογικές. Μία από τις πιο απλές και "υπάκουες", όπως την χαρακτηρίζει ο G. Priest στο [Pri87], είναι η *λογική των παραδόξου*. Ο αγγλικός αντίστοιχος όρος είναι *Logic of Paradox*, από τον οποίον δανειζόμαστε τα αρχικά για συντομία: *LP-λογική*.

Ακολουθούμε πιστά τον συμβολισμό που δόθηκε στα [PP06] and [Pri87]. Ορίζουμε LP-δομή για τυχούσα (πρωτοβάθμια) γλώσσα $\mathcal{L}$ να είναι το ζεύγος $\langle D, I\rangle$, όπου D είναι το σύμπαν και I είναι η ερμηνεία των μη λογικών συμβόλων της γλώσσας, ώστε να ισχύουν:

- $I(c) \in D$, για όλες τις σταθερές c.
- $I(f)$ είναι μία n-θέσια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το D, για κάθε n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο f.
- $I(P)$ είναι το ζεύγος $\langle I^+(P), I^-(P)\rangle$, όπου $I^+(P), I^-(P)$ είναι έκταση και αντι-έκταση της P, που ικανοποιούν $I^+(P) \cup I^-(P) = D^n$, για κάθε n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο P.
- $I^+(=) = \{\langle x, x\rangle : x \in D\}$.

Στην ειδική περίπτωση, που $I^+(P) \cap I^-(P) = \emptyset$, παρατηρούμε ότι LP-δομή ταυτίζεται με μια κλασσική δομή.

Θα δούμε πως η LP-αποτίμηση αλήθειας για μια LP-δομή δεν διαφέρει πολύ από την κλασσική αποτίμηση του Tarski. Μία από τις σημαντικότερες διαφορές είναι πως η γνώση μας της αλήθειας του $I^+(\varphi)$, δεν μας δίνει κατά ανάγκη πληροφορίες για $I^+(\neg\varphi)$. Και αυτό, όπως θα φανεί παρακάτω, έχει αντίκτυπο στην εγκυρότητα του Modus Ponens. Για να τονιστεί περισσότερο η ιδιότητα " Ο τύπος φ ισχύει ταυτόχρονα με τον $\neg\varphi$", η LP-αποτίμηση θεωρείται τρίτιμη, δηλαδή με τιμές από το σύνολο $\{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

Συνεχίζουμε με τον αναδρομικό ορισμό αλήθειας για τις LP-δομές. Έστω μια τέτοια δομή, $\mathcal{A} = \langle D, I\rangle$ και έστω v μια LP-αποτίμηση.

Για τον όρο $t(\vec{x})$ της $\mathcal{L}$ ορίζουμε την τιμή $t^{M,v}(\vec{x})$ ως εξής:

- $\mathcal{A}, v \models_{LP} t(\vec{x}) = c \iff t^{\mathcal{A},v}(\vec{x}) = I(c)$, για όλες τις σταθερές c.
- $\mathcal{A}, v \models_{LP} t(\vec{x}) = f(t_1(\vec{x}), ..., t_n(\vec{x})) \iff t^{\mathcal{A},v}(\vec{x}) = I(f)(t_1^{\mathcal{A},v}(\vec{x}), ..., t_n^{\mathcal{A},v}(\vec{x}))$, για κάθε n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο f.
- $\mathcal{A}, v \models_{LP} P(t_1(\vec{x}), ..., t_n(\vec{x})) \iff \langle t_1^{\mathcal{A},v}(\vec{x}), ..., t_n^{\mathcal{A},v}(\vec{x})\rangle \in I^+(P)$ $\iff 1 \in v(P(t_1(\vec{x}), ..., t_n(\vec{x})))$,

  $\mathcal{A}, v \models_{LP} \neg P(t_1(\vec{x}), ..., t_n(\vec{x})) \iff \langle t_1^{\mathcal{A},v}(\vec{x}), ..., t_n^{\mathcal{A},v}(\vec{x})\rangle \in I^-(P)$, $\iff 0 \in v(P(t_1(\vec{x}), ..., t_n(\vec{x})))$, για κάθε n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο P.

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό αλήθειας για σύνθετους τύπους, συνοψίζουμε σε έναν πίνακα τον ορισμό αλήθειας για άρνηση n-μελούς κατηγορηματικού συμβόλου P.

P	$\neg P$
$\{1\}$	$\{0\}$
$\{0\}$	$\{1\}$
$\{0{,}1\}$	$\{0{,}1\}$

Για τον (σύνθετο) τύπο $\theta(\vec{x})$ της $\mathcal{L}$, που αποτελείται από τους υποτύπους $\theta_1(\vec{x}), \theta_2(\vec{x})$, και για την αποτίμηση v των ελεύθερων μεταβλητών μέσα στο D, με $\mathcal{A}, v \vDash \theta(\vec{x})$ εννοούμε:

- $\mathcal{A}, v \models_{LP} \neg\theta_1(\vec{x}) \iff 0 \in v(\theta_1)$.
- $\mathcal{A}, v \models_{LP} \theta_1(\vec{x}) \wedge \theta_2(\vec{x}) \iff \mathcal{A}, v \models_{LP} \theta_1(\vec{x})$ και $\mathcal{A}, v \models_{LP} \theta_2(\vec{x})$.
- $\mathcal{A}, v \models_{LP} \theta_1(\vec{x}) \vee \theta_2(\vec{x}) \iff \mathcal{A}, v \models_{LP} \theta_1(\vec{x})$ ή $\mathcal{A}, v \models_{LP} \theta_2(\vec{x})$.
- $\mathcal{A}, v \models_{LP} \theta_1(\vec{x}) \rightarrow \theta_2(\vec{x}) \iff \mathcal{A}, v \models_{LP} \neg\theta_1(\vec{x})$ ή $\mathcal{A}, v \models_{LP} \theta_2(\vec{x})$.

Για τον τύπο $\theta(y, \vec{x})$ της $\mathcal{L}$, έχουμε:

- $\mathcal{A}, v \models_{LP} \exists y\theta(y, \vec{x}) \iff$ για κάποιο $a \in D$, $\mathcal{A}, v \models_{LP} \theta(a, \vec{x})$.
- $\mathcal{A}, v \models_{LP} \forall y\theta(y, \vec{x}) \iff$ για κάθε $a \in D$, $\mathcal{A}, v \models_{LP} \theta(a, \vec{x})$.

Ο έλεγχος της εγκυρότητας των κανόνων του De Morgan στη δομή $\mathcal{A}$ είναι θέμα ρουτίνας. Δηλαδή,

- $\mathcal{A}, v \models_{LP} \neg(\theta_1(\vec{x}) \wedge \theta_2(\vec{x})) \iff \mathcal{A}, v \models_{LP} \neg\theta_1(\vec{x})$ ή $\mathcal{A}, v \models_{LP} \neg\theta_2(\vec{x})$.
- $\mathcal{A}, v \models_{LP} \neg(\theta_1(\vec{x}) \vee \theta_2(\vec{x})) \iff \mathcal{A}, v \models_{LP} \neg\theta_1(\vec{x})$ και $\mathcal{A}, v \models_{LP} \neg\theta_2(\vec{x})$.

Το ίδιο ισχύει και για τον νόμο διπλής άρνησης:

$$\mathcal{A}, v \models_{LP} \neg\neg\theta(\vec{x}) \iff \mathcal{A}, v \models_{LP} \theta(\vec{x}).$$

Για οποιοδήποτε σύνολο προτάσεων T της $\mathcal{L}$, λέμε ότι η δομή $\mathcal{A}$ είναι LP-μοντέλο του T εάν $\mathcal{A} \models_{LP} \theta$, για όλους τους $\theta \in T$.

Ας γυρίσουμε στην παρατήρηση που κάναμε στην αρχή για τον κανόνα Modus Ponens. Παύει λοιπόν να είναι έγκυρος στο $\mathcal{A}$, όταν

$$I^+(P) \cap I^-(P) \neq \emptyset.$$

Η εξήγηση είναι απλή: υπάρχει κάποιος τύπος θ,τέτοιος ώστε $\mathcal{A}, v \models_{LP} \theta$, $\mathcal{A}, v \models_{LP} \neg\theta$. Ας πάρουμε τυχόν ϕ τέτοιο ώστε $\mathcal{A}, v \not\models_{LP} \phi$. Λόγω $\mathcal{A}, v \models_{LP} \neg\theta$ έπεται ότι $\mathcal{A}, v \models_{LP} \theta \to \phi$. Άρα έχουμε

$$\mathcal{A}, v \models_{LP} \theta, \ \ \mathcal{A}, v \models_{LP} \theta \to \phi, \ \ \text{αλλά} \ \ \mathcal{A}, v \not\models_{LP} \phi.$$

Έτσι αν δουλεύουμε με μοντέλα που ικανοποιούν, για παράδειγμα, τα αξιώματα Peano, (PA), δεν έχουμε όλες τις συνέπειες που θα θέλαμε. Αυτός είναι και ο λόγος που θεωρούμε τα μοντέλα μας σε όλο το κεφάλαιο αυτό να είναι LP-μοντέλα μιας πλήρους θεωρίας που επεκτείνει το (PA). Λέγοντας πλήρη θεωρία, εννοούμε ό,τι ακριβώς και στην κλασσική περίπτωση. Δηλαδή η T είναι πλήρης αν για κάθε τύπο θ της $\mathcal{L}$

$$T \models_{LP} \theta \text{ ή } T \models_{LP} \neg\theta.$$

Λέμε πως μια πρόταση θ είναι LP-ταυτολογία αν για κάθε LP-δομή $\mathcal{A}$ και LP αποτίμηση $v_{\mathcal{A}}$ ισχύει ότι $1 \in v_{\mathcal{A}}(\theta)$. Έχοντας ότι οι κλασσικές δομές και αποτιμήσεις είναι ειδική περίπτωση των αντίστοιχων LP, έπεται πως

$$\text{αν } \models_{LP} \theta \text{ τότε } \models \theta.$$

Με άλλα λόγια, η LP-λογική επεκτείνει την κλασσική λογική, με την έννοια ότι κάθε πρόταση που είναι λογικά αληθής στην LP-λογική είναι λογικά αληθής και στην κλασσική λογική. Στην ουσία, ο ορισμός της ταυτολογίας μας επιτρέπει να δείξουμε και το αντίστροφο. Για λεπτομέρειες, βλέπε [Pri87]. Οπότε τελικά έχουμε ότι[1]

$$\models_{LP} \theta \iff \models \theta.$$

Η διατήρηση της αλήθειας, καθώς περνάμε από τη κλασσική περίπτωση σε LP, μπορεί να γενικευτεί για τυχούσες επεκτάσεις, με την εξής έννοια:

[1]Η συνεπαγωγή που δεν φέρνει δείκτη LP θεωρείται κλασσική συνεπαγωγή, δηλαδή με κλασσικό μοντέλο και την αντίστοιχη δίτιμη αποτίμηση.

Ορισμός 4.1. Λέμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι μια *επέκταση* της $\mathcal{A}$ όταν $|\mathcal{A}| \subseteq |\mathcal{B}|$, οι $I_{\mathcal{A}}$ και $I_{\mathcal{B}}$ συμφωνούν σε σταθερές, συναρτησιακά σύμβολα, και για κάθε κατηγορηματικό σύμβολο P ισχύει:

$$I^{\pm}_{\mathcal{A}}(P) \subseteq I^{\pm}_{\mathcal{B}}(P).$$

Λήμμα 4.2 (Λήμμα Επέκτασης). *Έστω $\mathcal{B}$ μία επέκταση της $\mathcal{A}$. Τότε όλες οι προτάσεις που αληθεύουν στο $\mathcal{A}$ επίσης αληθεύουν στο $\mathcal{B}$, και όποιες είναι ψευδείς στο $\mathcal{A}$ είναι επίσης ψευδείς και στο $\mathcal{B}$.*

Απόδειξη. Γίνεται με επαγωγή στην πολυπλοκότητα στους τύπους. Για περισσότερα βλέπε [Pri97], [Mor95]. □

Άλλο ένα είδος δομών (εκτός από τις επεκτάσεις) που παίζουν σημαντικό ρόλο σε αυτό το κεφάλαιο είναι τα μοντέλα που προέρχονται από κατάρρευση (collapsed models).

Ορισμός 4.3. Η δομή καλείται *collapsed* όταν είναι της μορφής $\mathcal{A}/{\sim} = \langle D/{\sim}, I/{\sim}\rangle$, όπου η $\sim$ είναι σχέση ισοτιμίας στο D, δηλαδή είναι σχέση ισοδυναμίας που επιπλέον ικανοποιεί τα ακόλουθα:

$$\begin{gathered}\text{αν } a_1 \sim a_2,\ b_1 \sim b_2 \text{ τότε}\\ a_1' \sim a_2',\ a_1 + b_1 \sim a_2 + b_2 \text{ και } a_1 b_1 \sim a_2 b_2.\end{gathered}$$

Το λήμμα που ακολουθεί και που οφείλεται στον G. Priest μας δίνει μια μεθοδολογία κατασκευής LP-μοντέλων για οποιαδήποτε θεωρία Σ.

Λήμμα 4.4 (Λήμμα Κατάρρευσης). *Έστω τυχούσα θεωρία Σ και έστω κάποιο (κλασσικό) μοντέλο $\mathcal{A}$ της θεωρίας αυτής. Τότε για οποιαδήποτε σχέση ισοτιμίας $\sim$, η δομή $\mathcal{A}/{\sim}$ είναι μία LP-δομή με*

$$\mathcal{A}/{\sim} \models_{LP} \Sigma.$$

Απόδειξη. Μιας και εδώ η απόδειξη γίνεται με την επαγωγή στην πολυπλοκότητα του τύπου, αφήνουμε τις λεπτομέρειες, που υπάρχουν στο [Pri97]. □

Πριν κλείσουμε την εισαγωγή, θα παραθέσουμε μια σειρά από ορισμούς και παρατηρήσεις. Ο G. Priest στη προσπάθειά του να μελετήσει την εσωτερική δομή των LP-μοντέλων της πλήρους αριθμητικής,[2] όρισε συγκεκριμένα σύνολα, και για ευκολία αναφοράς σε αυτά, τους έδωσε ονόματα. Ο ρόλος

[2] Η πλήρης θεωρία της αριθμητικής $Th(\mathbb{N})$ είναι το σύνολο των προτάσεων που αληθεύουν στο $\mathbb{N}$.

αυτών των συνόλων θα φανεί στην επόμενη κι όλας ενότητα του κεφαλαίου αυτού.

Έστω M μία LP-δομή και έστω $i \in M$. Καλούμε το σύνολο

$$N(i) := \{x \in M : M \models_{LP} i \leq x \leq i\}$$

πυρήνα του i, όπου όπως συνήθως, $x \leq y$ ορίζεται από τον τύπο $\exists z(x+z=y)$. Εάν υπάρχει p τέτοιο ώστε $i+p=i$ (και εννοούμε την ύπαρξη μέσα στο M), τότε καλούμε το p *περίοδο* του i. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί πως το i ενδέχεται να έχει παραπάνω από μία περιόδους. Παραδείγματος χάριν, αν p είναι μια περίοδος του i, τότε και $p+p$ είναι επίσης περίοδος του i. Επίσης ισχύει ότι για κάθε $j \in N(i)$, αν p είναι περίοδος του i, τότε p είναι και περίοδος του j. Πράγματι, αφού $j \in N(i)$, έπεται ότι $j = i + k$ για κάποιο $k \in M$. Άρα,

$$j = i + k = (i+p) + k = (i+k) + p = j + p.$$

Άλλη μια παρατήρηση είναι πως

$$N(i) = N(j), \text{ για κάθε } j \in N(i).$$

Αυτό μας επιτρέπει να παραλείπουμε τον i, και απλά να γράφουμε N αντί $N(i)$ όταν είναι ξεκάθαρο για ποιον πυρήνα μιλάμε. Εφόσον όλα τα στοιχεία του N έχουν ίδιες περιόδους p, έχει νόημα να ορίσουμε την περίοδο του πυρήνα. Λέμε πως p είναι *περίοδος του πυρήνα* N, εάν υπάρχει $i \in N$ έτσι ώστε $i + p = i$. Όταν η περίοδος p του πυρήνα είναι γνήσια μεγαλύτερη του μηδενός, λέμε ότι ο πυρήνας είναι *γνήσιος*. Ειδάλλως (όταν δηλαδή $p = 0$) ο πυρήνας καλείται *μη γνήσιος*.

Μιας και θα μας απασχολήσουν στην ενότητα 3.3 οι πιθανές μορφές των πυρήνων, ανοίγουμε μια παρένθεση για τους μη γνήσιους πυρήνες. Η δομή τους είναι, όπως θα δούμε τώρα, από τις πιο απλές: είναι μονοσύνολα. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι ένας μη γνήσιος πυρήνας περιέχει δύο διαφορετικά στοιχεία, $x \neq y$, τότε από τις σχέσεις $x = y + k_1$, $y = x + k_2$, για κάποια k_1, k_2, προκύπτει πως $k_1 + k_2$ είναι μια μη μηδενική περίοδος του πυρήνα. Άτοπο. Κατά συνέπεια, δείξαμε ότι κάθε μη γνήσιος πυρήνας είναι μονοσύνολο. Το αντίστροφο δεν ισχύει: Με κατάλληλη σχέση ισοτιμίας, μπορεί να κατασκευαστεί ένας γνήσιος πυρήνας που είναι μονοσύνολο, βλέπε για παράδειγμα τη σχέση ισοτιμίας που ορίζεται στην αρχή της § 4.5. Στην κλασσική περίπτωση, όπως είναι και αναμενόμενο, όλοι οι πυρήνες είναι μη γνήσιοι.

Τελειώνουμε με μια μικρή επισκόπηση των ενοτήτων αυτού του κεφαλαίου. Ο G. Priest έδωσε στο [Pri97] εκτενή μελέτη των πεπερασμένων LP-μοντέλων της πλήρους θεωρίας του $\mathbb{N}$, με απώτερο σκοπό τον ολοκληρωμένο χαρακτηρισμό τους. Την προσπάθεια του ολοκλήρωσαν οι J. Paris και N. Pathmanathan στο [PP06], όπου έδωσαν έναν πλήρη χαρακτηρισμό όλων των πεπερασμένων LP-μοντέλων της πλήρους αριθμητικής. Μάλιστα παρατήρησαν πως ίδιος χαρακτηρισμός δουλεύει και για πεπερασμένα LP-μοντέλα των ασθενέστερων θεωριών από την πλήρη αριθμητική. Σε ένα άλλο άρθρο, το [Pri00], (δεύτερο κατά σειρά για τα LP-μοντέλα), ο G. Priest εστίασε την προσοχή του σε άπειρα LP-μοντέλα της αριθμητικής, για τα οποία διαπίστωσε πως η δομή τους δεν είναι τόσο ξεκάθαρη όσο η δομή των αντίστοιχων πεπερασμένων. Ο δικός μας σκοπός σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δώσουμε απαντήσεις σε ορισμένα από τα προβλήματα που τέθηκαν από τον G. Priest στα [Pri97] και [Pri00], να ρίξουμε κάποιο φως στη δομή των άπειρων LP-μοντέλων και να πάρουμε θέση στην εικασία του G. Priest, την οποία διατύπωσε στο [Pri00]. Συγκεκριμένα, στην ενότητα 4.2, ύστερα από εισαγωγή απαραίτητων εννοιών, δίνουμε αρνητική απάντηση στο δεύτερο πρόβλημα στη λίστα ανοικτών προβλημάτων του [Pri00]. Το πρόβλημα αυτό αφορά μια από τις ιδιότητες των άπειρων LP-μοντέλων. Στη ενότητα 4.3 δίνεται η απάντηση στο πρώτο πρόβλημα από την (διαφορετική με την αναφερόμενη πριν) λίστα ανοικτών προβλημάτων του [Pri97]. Αφορά τον αριθμό όλων των (μη ισομορφικών) LP-μοντέλων με n στοιχεία, όπου $n \in \mathbb{N}$. Το κεφάλαιο κλείνει με την ενότητα 4.4, όπου περιγράφουμε μια προσέγγιση της εικασίας του Priest και τους λόγους μας να πιστεύουμε ότι δεν ισχύει.

4.2 Ιδιότητες των άπειρων LP-δομών

Όπως επισημάναμε στη εισαγωγική ενότητα, ένας πυρήνας μπορεί να έχει παραπάνω από μια περιόδους. Ο G. Priest στο [Pri00] έθεσε το εξής:

Πρόβλημα 4.5. Υπάρχει πυρήνας ώστε οι περίοδοι του να σχηματίζουν άπειρη φθίνουσα ακολουθία;

Στα πεπερασμένα μοντέλα έχουμε το πλεονέκτημα της ύπαρξης ελάχιστης περιόδου σε οποιοδήποτε πυρήνα. Αυτό μας επιτρέπει να συμπεραίνουμε ότι σε κάθε φθίνουσα ακολουθία περιόδων $(p_i)_i$ ενός πυρήνα ισχύει $p_{i+1}|p_i$. Όταν όμως πάμε σε άπειρα μοντέλα, ναι μεν μπορούμε να έχουμε αυτήν την συνθήκη σε κάποιους πυρήνες, αλλά δεν μπορούμε να την εξασφαλίσουμε σε οποιαδήποτε ακολουθία περιόδων. Η απάντηση που δίνουμε στο Πρόβλημα 4.5 είναι θετική και μάλιστα η ακολουθία που προκύπτει πληροί την αναφερόμενη συνθήκη διαιρετότητας.

Πρόταση 4.6. *Υπάρχει LP-δομή με πυρήνα που οι περίοδοί του να σχηματίζουν άπειρη φθίνουσα ακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω M ένα (κλασσικό) nonstandard μοντέλο της $Th(\mathbb{N})$. Θεωρούμε $v \in M$, nonstandard και θέτουμε $u = v!$ και $I := u^{\mathbb{N}}$. Είδαμε στην εισαγωγή (βλέπε ενότητα 1.5) πως I είναι μία nonstandard τομή, κλειστή επιπλέον ως προς πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, και μάλιστα ισχύει $I \subseteq_e M$. Ας πάρουμε τυχαίο $q \in I$, με άπειρους διαιρέτες που να σχηματίζουν γνησίως φθίνουσα ακολουθία $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$, με $p_{i+1} | p_i$, όπου $p_0 = q$. Τέτοιο q υπάρχει, για παράδειγμα το u. Ορίζουμε τη σχέση

$$a \equiv b \iff \begin{cases} a, b \in I \text{ και } a = b \bmod q \\ \qquad \text{ή} \\ a, b > I \text{ και } a = b \bmod p_i, \text{ για κάποιο } i \geq 1. \end{cases}$$

Πρώτα πρέπει να βεβαιωθούμε πως η $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας:

(i) $a \equiv a$ προφανώς ισχύει.

(ii) Αν $a \equiv b$, τότε από την συμμετρικότητα του ορισμού ισχύει $b \equiv a$.

(iii) Έστω $a \equiv b$ και $b \equiv c$. Θα δείξουμε ότι $a \equiv c$. Πράγματι, αν $a \in I$, τότε $b, c \in I$, και τετριμμένα έπεται το $a \equiv c$. Αν $a > I$, τότε $b, c > I$. Σε αυτή την περίπτωση $a = b \bmod p_i$ και $b = c \bmod p_j$, για κάποια i, j. Θέτουμε $p_k = \min\{p_i, p_j\}$. Όμως ισχύει είτε $p_i | p_j$ είτε $p_j | p_i$. Οπότε έπεται $a = b \bmod p_k$, $b = c \bmod p_k$, με $k \geq 1$. Δηλαδή $a \equiv c$.

Συνεχίζουμε δείχνοντας ότι η $\equiv$ είναι σχέση ισοτιμίας.

(iv) Έστω $a \equiv b$. Πάλι διακρίνουμε περιπτώσεις: Αν $a \in I$, τότε $b \in I$. Όμως το I είναι κλειστό ως προς τον επόμενο, άρα και $a', b' \in I$ με $a' \equiv b'$ να ισχύει. Αν $a > I$, τότε και $b > I$. Θα είναι της μορφής $a = b \bmod p_i$. Οπότε ισχύουν $a', b' > I$ και $a' = b' \bmod p_i$, δηλαδή $a' \equiv b'$.

(v) Έστω $a_1 \equiv a_2$, $b_1 \equiv b_2$. Αν $a_1, b_1 \in I$, τότε $a_2, b_2 \in I$. Χρησιμοποιούμε το γεγονός πως το I είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, που μας δίνει ότι $a_1 + b_1, a_2 + b_2 \in I$ και $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2$. Αν $a_1 > I$ είτε $b_1 > I$, τότε $a_1 + b_1 > I$. Άρα ισχύει ότι $a_1 = b_1 \bmod p_i$ και $a_2 = b_2 \bmod p_j$. Θέτουμε $p_k = \min\{p_i, p_j\}$, όπου i ή j (αλλά όχι και οι δύο) μπορεί να είναι μηδέν. Από την στιγμή που $a_1 + b_1, a_2 + b_2 > I$ και $k > 0$, έπεται ότι $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2$.

(vi) Ακολουθούμε την ίδια λογική και εδώ (και για τις δύο περιπτώσεις), μιας και το I είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Εφόσον δείξαμε πως η $\equiv$ είναι σχέση ισοτιμίας, σύμφωνα με το Λήμμα 4.4, το $M/\equiv$ είναι ένα LP-μοντέλο. Τα στοιχεία του $M/\equiv$ είναι κλάσεις συζυγίας, που θα συμβολίζουμε με $[x]$, για $x \in M$. Παρατηρούμε ότι όταν $x \in I$, τότε $[q] \leq [x] \leq [q]$, δηλαδή $[x] \in N([q])$. Ας σταθεροποιήσουμε ένα $r > I$. Κατά συνέπεια, για $x > I$, έπεται πως $[r] \leq [x] \leq [r]$. Έτσι καταλήγουμε σε ύπαρξη δύο ακριβώς πυρήνων στο $M/\equiv$. Ας τους ονομάσουμε $N_1 = N([q])$ και $N_2 = N([r])$, όπου ο N_2 έχει τη ζητούμενη ιδιότητα: οι περίοδοί του σχηματίζουν άπειρη φθίνουσα ακολουθία. Πράγματι, για $x \in N_2$ και $i \geq 1$, έχουμε $x, x+p_i > I$ και $[x] = [x+p_i]$. Πράγμα που σημαίνει πως για κάθε i, $[p_i]$ είναι μια περίοδος του N_2. □

Στο [Pri00], O G. Priest έδειξε ότι στην πεπερασμένη πληθικότητα, όλοι οι γνήσιοι πυρήνες είναι κλειστοί ως προς πρόσθεση και πολλαπλασιασμό. Ήταν επόμενο να θέσει (στο ίδιο άρθρο) το πρόβλημα που ακολουθεί.

Πρόβλημα 4.7. Ισχύει ότι κάθε γνήσιος πυρήνας ενός άπειρου LP-μοντέλου είναι πάντα κλειστός ως προς πρόσθεση και πολλαπλασιασμό;

Στην επομένη πρόταση κατασκευάζουμε ένα άπειρο LP-μοντέλο με το οποίο απαντάμε αρνητικά στο Πρόβλημα 4.7.

Πρόταση 4.8. *Υπάρχει μια άπειρη LP-δομή που περιέχει πυρήνα που δεν είναι κλειστός ούτε ως προς πρόσθεση ούτε ώς προς πολλαπλασιασμό*[3].

Απόδειξη. Ξεκινάμε με τυχαίο (κλασσικό) μοντέλο $M \models Th(\mathbb{N})$, nonstandard. Θεωρούμε $q \in M$, όπως στην Πρόταση 4.6, δηλαδή με άπειρο πλήθος διαιρετών που σχηματίζουν φθίνουσα ακολουθία $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$, με $p_{i+1}|p_i$, όπου $p_0 = q$. Προφανώς, όλα τα p_i είναι nonstandard.

Ορίζουμε την ακόλουθη σχέση.

$$a \equiv b \iff \begin{cases} a, b \in \mathbb{N} \text{ και } a = b \\ \qquad \text{ή} \\ a, b > \mathbb{N}, a = b \bmod p_i, \text{ για κάποιο } i, \text{ και} \\ \quad a - \frac{a}{\lambda} \leq b \leq a + \frac{a}{\lambda}, \text{ για κάποια } \lambda > \mathbb{N}. \end{cases}$$

Έτσι σχηματίζεται ένα άπειρο LP-μοντέλο $M/\equiv$ με άπειρο το πλήθος πυρήνων. Βέβαια για να είμαστε σίγουροι πως πρόκειται για LP-μοντέλο,

[3]Υπάρχουν σύνολα που είναι ενώ δεν είναι κλειστά ως προς πρόσθεση, είναι κλειστά ως προς πολλαπλασιασμό, για παράδειγμα το σύνολο δυνάμεων του 2.

πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι πράγματι η $\equiv$ είναι σχέση ισοτιμίας. Όταν βρισκόμαστε στο πρώτο μέρος διακλάδωσης του ορισμού της $\equiv$, δηλαδή όταν είμαστε στο $\mathbb{N}$, τότε είναι ξεκάθαρο πως η $\equiv$ είναι σχέση ισοτιμίας. Για αυτό το λόγο θα περιοριστούμε στο δεύτερο σκέλος της διακλάδωσης για να δείξουμε αρχικά πως η $\equiv$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

(i) $a \equiv a$, είναι προφανές από τον ορισμό.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι $a \equiv b$, άρα $a = b \bmod p_i$, για κάποιο i, και

$$a - \frac{a}{\lambda} \leq b \leq a + \frac{a}{\lambda}, \tag{4.1}$$

για κάποιο $\lambda > \mathbb{N}$. Οπότε

$$\frac{a}{\lambda - 1} - \frac{a}{\lambda(\lambda - 1)} \leq \frac{b}{\lambda - 1} \leq \frac{a}{\lambda - 1} + \frac{a}{\lambda(\lambda - 1)}. \tag{4.2}$$

Κατά συνέπεια, αθροίζοντας τις 4.1, και 4.2 καταλήγουμε σε

$$a - \frac{a}{\lambda} + \frac{a}{\lambda - 1} - \frac{a}{\lambda(\lambda - 1)} \leq b + \frac{b}{\lambda - 1}.$$

Από την άλλη όμως,

$$-\frac{a}{\lambda} + \frac{a}{\lambda - 1} - \frac{a}{\lambda(\lambda - 1)} = 0,$$

που σημαίνει ότι τελικά

$$a \leq b + \frac{b}{\lambda - 1}.$$

Παρομοίως, εάν αφαιρέσουμε την 4.2 από την 4.1, παίρνουμε

$$b - \frac{b}{\lambda - 1} \leq a.$$

Δηλαδή δείξαμε ότι $b \equiv a$.

(iii) Έστω $a \equiv b$ και $b \equiv c$, δηλαδή έχουμε $a - \frac{a}{\lambda_1} \leq b \leq a + \frac{a}{\lambda_1}$ και $b - \frac{b}{\lambda_2} \leq c \leq b + \frac{b}{\lambda_2}$, για κάποια $\lambda_1, \lambda_2 > \mathbb{N}$.
Θέτουμε $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Τότε από $a - \frac{a}{\lambda} \leq b$ προκύπτει

$$a - \frac{a}{\lambda} - \frac{b}{\lambda} \leq b - \frac{b}{\lambda} \leq c.$$

Από την άλλη $\frac{b}{\lambda} \leq \frac{a}{\lambda} + \frac{a}{\lambda^2}$, άρα

$$a - \frac{a}{\lambda} - \frac{a}{\lambda} - \frac{a}{\lambda^2} \leq c.$$

Αυτό σημαίνει ότι $a - \frac{a}{\frac{\lambda}{3}} \leq c$.

Παρομοίως, $c \leq a + \frac{a}{\frac{\lambda}{3}}$. Από τα παραπάνω έπεται ότι $a \equiv c$.

Συνεχίζουμε να είμαστε στο δεύτερο σκέλος της διακλάδωσης ακόμα, και εξετάζουμε την συμπεριφορά της $\equiv$ ως προς τον επόμενο.

(iv) Έστω $a \equiv b$, δηλαδή, $a - \frac{a}{\lambda} \leq b \leq a + \frac{a}{\lambda}$, για κάποιο $\lambda > \mathbb{N}$. Προσθέτοντας 1 σε όλα τα μέλη, έπεται ότι $a + 1 - \frac{a}{\lambda} \leq b + 1 \leq a + 1 + \frac{a}{\lambda}$, για κάποιο $\lambda > \mathbb{N}$, δηλαδή,

$$a' - \frac{a'}{\lambda} \leq b' \leq a' + \frac{a'}{\lambda}.$$

Οπότε ισχύει το ζητούμενο, $a' \equiv b'$.

Σε αυτά που μας μένει να δούμε (πρόσθεση και πολλαπλασιασμός) πρέπει να εξετάσουμε επιπλέον και την (μη προφανή) περίπτωση, όπου τα a_1, b_1 προέρχονται από διαφορετικά μέρη της διακλάδωσης.

(v) (a) Έστω $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$, με a_1, a_2 να προέρχονται και οι δύο από το δεύτερο μέρος της διακλάδωσης. Τότε $a_1 - \frac{a_1}{\lambda_1} \leq b_1 \leq a_1 + \frac{a_1}{\lambda_1}$ και $a_2 - \frac{a_2}{\lambda_2} \leq b_2 \leq a_2 + \frac{a_2}{\lambda_2}$, για κάποια $\lambda_1, \lambda_2 > \mathbb{N}$.
Θέτουμε ξανά $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Οι δύο προηγούμενες σχέσεις εξακολουθούν να ισχύουν για λ. Οπότε αθροίζοντάς τις έχουμε

$$a_1 + a_2 - \frac{a_1 + a_2}{\lambda} \leq b_1 + b_2 \leq a_1 + a_2 + \frac{a_1 + a_2}{\lambda},$$

δηλαδή, $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2$.

(b) Έστω $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$, με a_1, a_2 να προέρχονται από διαφορετικά μέρη της διακλάδωσης. Τότε $a_1 - \frac{a_1}{\lambda_1} \leq b_1 \leq a_1 + \frac{a_1}{\lambda_1}$, για κάποιο $\lambda_1 > \mathbb{N}$ και $a_2 = b_2$.
Παρατηρούμε πως $a_1 + a_2, b_1 + b_2 > \mathbb{N}$ και πως για $\lambda = \lambda_1$ ισχύει

$$a_1 + a_2 - \frac{a_1}{\lambda} \leq b_1 + b_2 \leq a_1 + a_2 + \frac{a_1}{\lambda}.$$

Κατά συνέπεια, μιας και μιλάμε για θετικές ποσότητες πάντα, ισχύει

$$a_1 + a_2 - \frac{a_1 + a_2}{\lambda} \leq b_1 + b_2 \leq a_1 + a_2 + \frac{a_1 + a_2}{\lambda},$$

δηλαδή έχουμε το ζητούμενο $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2$.

(vi) (a) Έστω $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$, με a_1, a_2 να προέρχονται και οι δύο από το δεύτερο μέρος της διακλάδωσης. Οπότε

$$a_1 - \frac{a_1}{\lambda_1} \leq b_1 \leq a_1 + \frac{a_1}{\lambda_1} \tag{4.3}$$

και

$$a_2 - \frac{a_2}{\lambda_2} \leq b_2 \leq a_2 + \frac{a_2}{\lambda_2}, \tag{4.4}$$

για κάποια $\lambda_1, \lambda_2 > \mathbb{N}$. Για $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ οι σχέσεις 4.3 και 4.4 ισχύουν. Πολλαπλασιάζοντάς τις, προκύπτει ότι

$$a_1a_2 - \frac{2a_1a_2}{\lambda} + \frac{a_1a_2}{\lambda^2} \leq b_1b_2 \leq a_1a_2 + \frac{2a_1a_2}{\lambda} + \frac{a_1a_2}{\lambda^2}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$a_1a_2 - \frac{a_1a_2}{\frac{\lambda^2}{2\lambda-1}} \leq b_1b_2 \leq a_1a_2 + \frac{a_1a_2}{\frac{\lambda^2}{2\lambda-1}}.$$

Όμως έχουμε ότι $\frac{\lambda^2}{2\lambda-1} > \mathbb{N}$, έτσι τελικά $a_1a_2 \equiv b_1b_2$.

(b) Έστω $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$, με a_1, a_2 να προέρχονται από διαφορετικά μέρη της διακλάδωσης. Τότε $a_1 - \frac{a_1}{\lambda_1} \leq b_1 \leq a_1 + \frac{a_1}{\lambda_1}$, για κάποιο $\lambda_1 > \mathbb{N}$ και $b_1 = b_2$.
Όπως και στην περίπτωση (v)(b) έχουμε ότι $a_1 + a_2, b_1 + b_2 > \mathbb{N}$ και για $\lambda = \lambda_1$ κατευθείαν παίρνουμε

$$a_1a_2 - \frac{a_1a_2}{\lambda} \leq b_1b_2 \leq a_1a_2 + \frac{a_1a_2}{\lambda},$$

δηλαδή το ζητούμενο $a_1a_2 \equiv b_1b_2$.

Αφού λοιπόν δείξαμε ότι το $M/\equiv$ είναι πράγματι ένα LP-δομή, διαπιστώνουμε ότι για οποιοδήποτε $a \in M - \mathbb{N}$, τα $[a]$, $[2a]$ και a^2 δεν βρίσκονται (ανά δύο) στον ίδιο (γνήσιο) πυρήνα. Συνεπώς η απάντηση στο Πρόβλημα 4.7 είναι αρνητική. □

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με την εξής παρατήρηση: τα άπειρα LP-μοντέλα οποιασδήποτε θεωρίας T μπορούν να είναι πολύ απλές δομές, ακόμα και αποκρίσιμες, όπως οι αντίστοιχες πεπερασμένες δομές. Θυμίζουμε λίγο τον ορισμό της αποκρίσιμης δομής, και μετά δίνουμε ένα παράδειγμα τέτοιας άπειρης LP-δομής.

Ορισμός 4.9. Ένα σύνολο Σ εκφράσεων (για την $\mathcal{L}$) λέγεται *αποκρίσιμο* αν υπάρχει αποτελεσματική διαδικασία, που να αποφασίζει εάν η τυχούσα έκφραση x ανήκει ή όχι στο Σ.

Ορισμός 4.10. Μια θεωρία Σ καλείται *αξιωματικοποιήσιμη* εάν υπάρχει ένα αποκρίσιμο σύνολο προτάσεων, Σ', τέτοιο ώστε $\Sigma = Cn\Sigma'$, όπου $Cn\Sigma' = \{\varphi : \Sigma' \vdash \varphi\}$, δηλαδή το Σ ισούται με το σύνολο των συνεπειών του Σ'.

Η σύνδεση μεταξύ των αποκρίσιμων και αξιωματικοποιήσιμων θεωριών υπάρχει για παράδειγμα στο δεύτερο κεφάλαιο του [End01] και συνοψίζεται στην ακόλουθη

Πρόταση 4.11 ([End01])**.** *Κάθε αποκρίσιμη θεωρία είναι αξιωματικοποιήσιμη. Για τις πλήρεις θεωρίες ισχύει και το αντίστροφο: αν δηλαδή είναι αξιωματικοποιήσιμη, τότε είναι και αποκρίσιμη.*

Στη δικαιολόγηση της αποκρισιμότητας της LP-δομής που θα κατασκευάσουμε, χρησιμοποιούμε έμμεσα την δομή $(\mathbb{N}, 0,', <, +)$. Οπότε η αμέσως επόμενη πρόταση είναι χρήσιμη, που οφείλεται στον M. Presburger (1929) και η απόδειξή της υπάρχει στο [End01].

Πρόταση 4.12 (Presburger)**.** *Η θεωρία της δομής $(\mathbb{N}, 0,', <, +)$ είναι αποκρίσιμη.*

Πόρισμα 4.13. *Η θεωρία της δομής $(\mathbb{N}, 0,', +)$ είναι αποκρίσιμη.*

Αφού δώσαμε τα απαραίτητα για τις αποκρίσιμες δομές, είμαστε σε θέση να περιγράψουμε την άπειρη LP-δομή με αποκρίσιμη θεωρία.

Πρόταση 4.14. *Για οποιαδήποτε θεωρία T που περιέχει την $\mathrm{I}\Delta_0$ υπάρχει άπειρο LP-μοντέλο της με αποκρίσιμη θεωρία.*

Απόδειξη. Έστω M ένα αριθμήσιμο nonstandard μοντέλο της $T \supsetneqq \mathrm{I}\Delta_0$. Θεωρούμε C_j, $j = 1, 2, \ldots$, μια γνησίως αύξουσα ακολουθία τομών του M, που είναι όλες κλειστές ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό και ικανοποιείται $M = \bigcup_j C_j$. Ένας τρόπος να δούμε ότι τέτοια ακολουθία πράγματι υπάρχει, είναι να διαλέξουμε αρκετά μικρά nonstandard στοιχεία του M,

c_j, έτσι ώστε κάθε c_{j+1} να ξεπερνάει όλες τις φυσικές δυνάμεις του c_j. Οπότε η ζητούμενη ακολουθία τομών είναι η $(c_j^{\mathbb{N}})_j$.

Ορίζουμε τη σχέση ισοτιμίας $\equiv$ στο M ως εξής

$$a \equiv b \iff \begin{cases} a = b = 0 \\ \quad ή \\ a, b \in C_j - C_{j-1} \text{ για κάποιο } j, \text{ όπου } C_0 = \{0\}). \end{cases}$$

Η σχέση αυτή για πεπερασμένη όμως ακολουθία, έχει οριστεί από τους J. Paris και N. Pathmanathan στο [PP06] και εκεί υπάρχει η απόδειξη πως είναι μια σχέση ισοτιμίας, επίσης βλέπε Λήμμα 4.17. Με την ίδια ακριβώς μέθοδο μπορούμε να δείξουμε πως και για άπειρη ακολουθία από τομές, η αναφερόμενη σχέση είναι μια σχέση ισοτιμίας. Έστω $a_0 = 0$ και $a_j \in C_j - C_{j-1}$ για $j > 0$. Τότε το σύμπαν του $M/\equiv$ είναι το σύνολο των a_j, $j \in \mathbb{N}$. Η συνάρτηση του επομένου, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο $M/\equiv$ δίνονται από

$$[a_j]' = \begin{cases} [a_1] & \text{αν } j = 0, \\ [a_j] & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

$$[a_j] + [a_k] = [a_{\max\{j,k\}}],$$

$$[a_j] \times [a_k] = \begin{cases} [a_0] & \text{αν } \min\{j,k\} = 0, \\ [a_{\max\{j,k\}}] & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Έχουμε ότι η αντι-έκταση της ισότητας στο $M/\equiv$ αποτελείται από όλα τα πιθανά ζεύγη πλην του $\langle [a_0], [a_0] \rangle$. Λόγω του ορισμού του είναι εύκολο να δούμε πως αυτό το LP-μοντέλο της T μπορεί να ερμηνευτεί στη $\langle \mathbb{N}, ', +, 0 \rangle$, δηλαδή να ερμηνεύσουμε $[a_j]$ ως j. Αλλά τότε για οποιαδήποτε πρόταση θ μπορούμε να βρούμε μια αντίστοιχη πρόταση θ^* τέτοια ώστε

$$M/\equiv \models_{LP} \theta \iff \langle \mathbb{N}, ', +, =, 0 \rangle \models \theta^*.$$

Και επειδή, όπως αναφέραμε ήδη, η θεωρία της $\langle \mathbb{N}, ', +, =, 0 \rangle$ είναι αποκρίσιμη,έπεται ότι και το σύνολο των προτάσεων που αληθεύουν στο LP-μοντέλο $M/\equiv$ είναι επίσης αποκρίσιμο. □

4.3 Ο αριθμός των πεπερασμένων LP-δομών

Στο πρώτο του άρθρο περί των LP-δομών ([Pri97]), ο G. Priest περιέγραψε τη δομή ενός τυχαίου πεπερασμένου LP-μοντέλου της αριθμητικής. Στο τέλος συγκέντρωσε κάποιες απορίες σε μορφή ανοικτών προβλημάτων, δύο εκ των οποίων είναι τα εξής:

Πρόβλημα 4.15. Πόσα πεπερασμένα (πληθικότητας n) μη ισόμορφα LP-μοντέλα της πλήρους αριθμητικής υπάρχουν;

Πρόβλημα 4.16. Υπάρχει χαρακτηρισμός των πεπερασμένων LP-μοντέλων της αριθμητικής;

Όσο αναφορά το Πρόβλημα 4.16, δίνουμε το αποτέλεσμα των J. Paris και N. Pathmanathan που βρίσκεται στο [PP06], και που δίνει στην ουσία τον πλήρη χαρακτηρισμό, συμπληρώνοντας έτσι τα αποτελέσματα του G. Priest στο [Pri97]. Οι J. Paris και N. Pathmanathan γενίκευσαν τη θεωρία μέσα στην οποία δούλεψε[4] ο G. Priest. Συγκεκριμένα, παρατήρησαν πως τα αξιώματα που χρειάζονται για τις αποδείξεις, εμπεριέχονται στα αξιώματα του PA. Αλλά μιας και έχουμε πρόβλημα με τις συνέπειες, θεωρούμε τις θεωρίες μας πλήρεις. Έτσι, οποιαδήποτε πλήρης θεωρία που επεκτείνει το PA, μπορεί να μπει στη θέση της αριθμητικής, σε όλα τα αποτελέσματα σχετικά με τις LP-δομές.

Για τον ίδιο λόγο, και εμείς σε ό,τι ακολουθεί από δω και ύστερα (σε αυτό το κεφάλαιο εννοείται) με T θα έχουμε στο μυαλό μας μια οποιαδήποτε πλήρη επέκταση του PA. Προς αποφυγήν επαναλήψεων, όλα τα μοντέλα θα θεωρούνται κλασσικά, εκτός αν τονίσουμε ότι πρόκειται για LP-μοντέλα.

Λήμμα 4.17 ([PP06]). *Έστω M ένα nonstandard μοντέλο της T, $p_0, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{N}$, με $p_1 > 0$, $p_{i+1} | p_i$, για όλα τα $i \leq 1$ και $m = 1 \vee p_0 > 0$. Θεωρούμε $C_1, \ldots, C_m$ γνησίως αύξουσα ακολουθία τομών στο M, με $C_m = M$. Για $a, b \in M$ ορίζουμε*

$$a \equiv b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b < p_0 \\ \quad\quad ή \\ a = b \bmod p_i \ \textit{και} \ a, b \in C_i - C_{i-1} \end{cases}$$

Η σχέση $\equiv$ είναι σχέση ισοτιμίας στο M.

Θεώρημα 4.18 ([PP06]). *Το $\widetilde{M}$ είναι ένα πεπερασμένο LP-μοντέλο της T αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο nonstandard μοντέλο M της T και μια σχέση ισοτιμίας $\equiv$ στο M που να ορίζεται ακριβώς όπως στο Λήμμα 4.17, με πεπερασμένο το πλήθος κλάσεων ισοδυναμίας, έτσι ώστε το $\widetilde{M}$ να είναι $M/\equiv$.*

Βασιζόμενοι στην εικόνα που μας δίνει το Θεώρημα 4.18, για την μορφή των LP-μοντέλων της T, κατασκευάζουμε μια αναδρομική συνάρτηση, η οποία δίνει τον ζητούμενο αριθμό του Προβλήματος 4.15. Δηλαδή δείχνουμε την επόμενη

[4]Ο G. Priest στα [Pri97], [Pri00] έχει ως βασική θεωρία την πλήρη αριθμητική.

Πρόταση 4.19. *Υπάρχει αναδρομική συνάρτηση που υπολογίζει τον αριθμό των πεπερασμένων LP-μοντέλων (πληθικότητας n) της T.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.18, κάθε πεπερασμένο LP-μοντέλο της T χαρακτηρίζεται στην ουσία από δύο πράγματα: $k, (p_i)_i$, όπου k είναι ο αριθμός των μη γνήσιων πυρήνων και $(p_i)_i$ είναι η ακολουθία των περιόδων των γνήσιων πυρήνων, με $p_{i+1}|p_i$. Στην εισαγωγική ενότητα του κεφαλαίου αυτού επισημάναμε πως όλοι οι μη γνήσιοι πυρήνες είναι μονοσύνολα με περίοδο ίση με 0. Εσωτερικά στο μοντέλο, πάντα οι μη γνήσιοι πυρήνες (όταν υπάρχουν) σχηματίζουν αρχικό κομμάτι του μοντέλου. Δηλαδή ως προς τη διάταξη, είναι τα μικρότερα στοιχεία του μοντέλου. Πάνω από αυτά (ως προς τη διάταξη πάντα) έπονται οι γνήσιοι πυρήνες.

Υπάρχουν δύο ειδών μονοσύνολα: το πρώτο είδος είναι οι μη γνήσιοι πυρήνες. Αυτό το είδος δεν είναι ποτέ κλειστό ως προς την πρόσθεση. Το δεύτερο είδος είναι πάντα κλειστό ως προς την πρόσθεση και είναι η ειδική περίπτωση που ο γνήσιος πυρήνας αποτελείται από ένα στοιχείο. Όπως αναφέραμε λίγο πιο πάνω, το πρώτο είδος είναι πάντα στον "πάτο" του μοντέλου. Σε αντίθεση με το δεύτερο που όταν υπάρχει βρίσκεται πάντα στη κορυφή. Ο λόγος για αυτό είναι πως η περίοδος του δεύτερου είδους είναι ίση με 1. Οπότε αν υπάρχει κάποιος άλλος γνήσιος πυρήνας με περίοδο p πιο πάνω από το μονοσύνολο αυτό, τότε θα πρέπει (βλέπε [PP06]) $p|1$, δηλαδή $p = 1$. Κατά συνέπεια, και αυτός ο πυρήνας είναι μονοσύνολο.

Ας γυρίσουμε στην απόδειξη της πρότασης. Έστω n η πληθικότητα που εξετάζουμε.

Περίπτωση 1. Ας ξεκινήσουμε με την απλή περίπτωση: όταν έχουμε μόνο ένα γνήσιο πυρήνα. Τονίζουμε πως σε αντίθεση με μη γνήσιους πυρήνες, πάντα το LP-μοντέλο, έστω $M/\equiv$, της T έχει τουλάχιστον ένα γνήσιο πυρήνα, διότι οποιοσδήποτε μη γνήσιος πυρήνας είναι μονοσύνολο πρώτου είδους, έστω $\{[a]\}$, που προέκυψε από το αντίστοιχο στοιχείο $a \in M, a < p_0$. Όμως p_0 πρέπει και αυτό να ανήκει σε κάποιον πυρήνα. Άρα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας γνήσιος πυρήνας.

Έτσι, έχουμε να διαλέξουμε $k < n$, όπου k αντιστοιχεί στον αριθμό των μη γνήσιων πυρήνων. Με απλή συνδυαστική έπεται πως έχουμε n επιλογές, $(k = 0, \ldots, n-1)$, δηλαδή υπάρχουν n μη ισόμορφα μοντέλα που ανήκουν σε αυτή την κατηγορία (με ένα δηλαδή γνήσιο πυρήνα).
Εισάγουμε μερικές νέες έννοιες στη προσπάθεια καλύτερης περιγραφής της εσωτερικής μορφής ενός LP-μοντέλου.

Καλούμε το M_1 *LP-υπομοντέλο* του M_2, αν $p_0^{(1)} = p_0^{(2)}$, $p_i^{(1)}|p_i^{(2)}$, για κάθε $i \leq 1$ και οι αντίστοιχες ακολουθίες περιόδων έχουν το ίδιο μήκος.

Ειδική περίπτωση LP-μοντέλου είναι να υπάρχει μόνο ένας γνήσιος πυρήνας και να μην υπάρχουν άλλα LP-υπομοντέλα του (με έναν πυρήνα). Τέτοια LP-μοντέλα θα τα λέμε *πρώτα.*

Ας δούμε πόσα πρώτα LP-μοντέλα πληθικότητας n υπάρχουν. Θέτουμε $m = n-k$, όπου k είναι όπως και πριν, δηλαδή ο αριθμός μη γνήσιων πυρήνων. Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για το m είναι να είναι πρώτος αριθμός. Άρα υπάρχει μόνο ένας γνήσιος πυρήνας με περίοδο m. Έτσι υπάρχουν $\pi(n)$ τέτοια LP-μοντέλα, όπου $\pi(n)$ είναι ως συνήθως, ο αριθμός πρώτων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με το n.

Περίπτωση 2. Κοιτάμε τώρα για LP-μοντέλα της T με ακριβώς δύο γνήσιους πυρήνες, p_1, p_2 (άρα και οι δύο περίοδοι μεγαλύτερες του 0). Επίσης από τη συνθήκη $m = 1 \vee p_0 > 0$ του Λήμματος 4.17 έπεται ότι k δεν μπορεί να είναι 0. Ο λόγος που εξετάζουμε ξεχωριστά αυτήν την κατηγορία είναι πως υπάρχει αναγκαία και ικανή συνθήκη για τις περιόδους.

Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψη την ανάλυση που κάναμε για τα πρώτα LP-μοντέλα, ξέρουμε ήδη πως τουλάχιστον ο $m := n - k$ δεν πρέπει να είναι πρώτος. Θα δείξουμε παρακάτω πως μια ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι ο m να μην είναι πρώτος. Πράγματι, έστω $m = ab$, με $a, b \neq 1$. Τότε μπορούμε να γράψουμε $m = r_2(1 + r_1)$, με $r_2 > 1, r_1 \geq 1$. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε κατασκευάσει δύο περιόδους $p_2 = r_2, p_1 = r_1 r_2$. Ορίζουμε $\overline{d}(n)$ να είναι ο αριθμός των γνήσιων διαιρετών[5] του n.

Παρατηρούμε ότι για q πρώτο, ισχύει

$$\overline{d}(1) = \overline{d}(q) = 0.$$

Για κάθε επιλογή του r_2 παίρνουμε διαφορετικό (μη ισόμορφο για την ακρίβεια) LP-μοντέλο. Συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός των LP-μοντέλων με δύο ακριβώς πυρήνες είναι

$$\sum_{m=1}^{n-1} \overline{d}(m).$$

Περίπτωση 3. Όταν ένα τυχόν LP-μοντέλο δεν έχει καθόλου μη γνήσιους πυρήνες, δηλαδή $p_0 = 0$, από τη συνθήκη $m = 1 \vee p_0 > 0$ του Λήμματος 4.17 έπεται ότι υπάρχει μόνο ένας γνήσιος πυρήνας και είναι αναγκαστικά με περίοδο n. Κατά συνέπεια υπάρχει μόνο ένα (ως προς ισομορφισμό) LP-μοντέλο πληθικότητας n.

[5] *Γνήσιος διαιρέτης* του n καλείται οποιοσδήποτε l τέτοιος ώστε $l | n, l \neq 1, l \neq n$.

Συνοψίζοντας όλα αυτά που είπαμε μαζί με μια ανάλυση που θα δώσουμε για τις πιθανές αντι-εκτάσεις της $=$, ερχόμαστε τώρα σε γενική περίπτωση, δηλαδή με την ακολουθία $(p)_i$ να έχει απλά την ιδιότητα που πρέπει να πληροί σύμφωνα με το Λήμμα 4.17.

Γενική περίπτωση. Έστω $p_0, p_1, \ldots, p_m$ η ακολουθία των περιόδων ενός LP-μοντέλου πληθικότητας n. Παρατηρούμε ότι $p_1 \geq 1$, οπότε $p_0 < n$. Αναφέραμε στην προηγούμενη περίπτωση τι γίνεται όταν $p_0 = 0$. Ας υποθέσουμε ότι $p_0 > 0$, τότε για τυχούσα τιμή του p_0 το αντίστοιχο LP-μοντέλο M καθορίζεται από την αντι-έκταση της $=$, δηλαδή από το $I^-(=)$. Υπάρχουν συνολικά 2^{p_0} πιθανά τέτοια σύνολα. Επίσης το M καθορίζεται από την ακολουθία $r_1, r_2, \ldots, r_m \geq 1$ τέτοια ώστε $m \geq 1$

$$n - p_0 = (r_1 r_2 \ldots r_m) + (r_2 r_3 \ldots r_m) + \ldots + (r_{m-1} r_m) + r_m, \qquad (4.5)$$

δηλαδή $r_i r_{i-1} \ldots r_m = p_i$.

Έστω $\beta(n - p_0)$ να είναι ο αριθμός των επιλογών των $r_1, r_2, \ldots, r_m$, όπου και το m επίσης μεταβάλλεται. Από τη σχέση (4.5) είναι προφανές πως το r_m πρέπει να είναι διαιρέτης του $n - p_0$, οπότε η συνάρτηση β μπορεί να οριστεί αναδρομικά ως εξής:

$\beta(0) = 1$ και για $k > 0$,

$$\beta(k) = \sum_{d|k} \beta(kd^{-1} - 1).$$

Ο συνολικός αριθμός των LP-μοντέλων της T πληθικότητας n είναι

$$1 + \sum_{p=1}^{n-1} 2^p \beta(n - p).$$

Για να γίνει πιο σαφής ο παραπάνω τύπος, τον p κανείς μπορεί να θεωρήσει στην ουσία p_0.

Κλείνουμε με το εξής απλό παράδειγμα: για $n = 2$ έχουμε τα εξής: υπάρχει ένα LP-μοντέλο με $p_0 = 0, p_1 = 2$ και υπάρχουν δύο LP-μοντέλα με $p_0 = 1, p_1 = 1$.

Το πρώτο LP-μοντέλο M_1 δεν έχει κανέναν μη γνήσιο πυρήνα, οπότε αναγκαστικά έχει έναν μοναδικό γνήσιο πυρήνα, που τυχαίνει να ταυτίζεται με όλο το M_1. Ενώ τα άλλα δύο LP-μοντέλα έχουν από έναν μη γνήσιο πυρήνα και από έναν γνήσιο (όπου και οι δύο είναι μονοσύνολα). Διαφέρουν τα δύο αυτά LP-μοντέλα ως προς την αντι-έκταση. $\square$

4.4 Περί της μορφής των άπειρων LP-δομών

Στην πεπερασμένη περίπτωση είδαμε ότι κάθε LP-μοντέλο προέρχεται από κάποιο nonstandard μοντέλο της θεωρίας $Th(\mathbb{N})$, παίρνοντας κατάλληλη σχέση ισοτιμίας. Ο G. Priest στο [Pri00], ύστερα από τη μελέτη κάποιων συγκεκριμένων άπειρων LP-μοντέλων έθεσε την εξής:

Εικασία 4.20. Κάθε άπειρο LP-μοντέλο της θεωρίας $Th(\mathbb{N})$ προέρχεται από κάποιο nonstandard μοντέλο της $Th(\mathbb{N})$, παίρνοντας κατάλληλη σχέση ισοτιμίας.

Εμείς κάναμε κάποια βήματα προς την αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή προσπαθήσαμε να κατασκευάσουμε ένα άπειρο LP-μοντέλο, το οποίο δεν γίνεται να προέρχεται από κανένα nonstandard μοντέλο της $Th(\mathbb{N})$, και με καμία σχέση ισοτιμίας. Ακολουθώντας τη γενίκευση που έκαναν οι J. Paris και N. Pathmanathan που αντικατέστησαν τη θεωρία $Th(\mathbb{N})$ με τυχαία πλήρη επέκταση T της PA, θέτουμε ως ερώτημα μια πιο ισχυρή δήλωση.

Πρόβλημα 4.21. Ισχύει ότι κάθε άπειρο LP-μοντέλο της T προέρχεται από κάποιο nonstandard μοντέλο της T, παίρνοντας κατάλληλη σχέση ισοτιμίας;

Στην πεπερασμένη περίπτωση οι J. Paris και N. Pathmanathan έδωσαν θετική απάντηση όπως είδαμε στο Θεώρημα 4.18. Για την άπειρη περίπτωση όμως θα δούμε πως η απάντηση (στο Πρόβλημα 4.21 δηλαδή) είναι αρνητική.

Θεώρημα 4.22. *Υπάρχει πλήρης επέκταση T της PA και ένα άπειρο LP-μοντέλο της T, το οποίο δεν γίνεται να προέρχεται από κανένα nonstandard μοντέλο της ίδιας θεωρίας μέσω σχέσης ισοτιμίας.*

Για να δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.22, θα χρειαστεί να δώσουμε έναν νέο συμβολισμό και να δείξουμε μερικές προτάσεις πρώτα.

Ορισμός 4.23. Έστω K ένα nonstandard μοντέλο της τυχούσας θεωρίας Σ. Συμβολίζουμε με K^- το LP-μοντέλο που προκύπτει όταν επεκτείνουμε την σχέση $\neq$ να είναι όλα τα δυνατά ζεύγη από στοιχεία του K.

Από το Λήμμα της επέκτασης του G. Priest (βλέπε [Pri97] ή [Pri00]), τέτοιες επεκτάσεις εξακολουθούν να είναι LP-μοντέλα της PA.

Πρόταση 4.24. *Έστω K ένα nonstandard μοντέλο της PA και το αντίστοιχο LP-μοντέλο K^-. Τότε για κάθε τύπο $\theta(\vec{x})$, υπάρχουν $\theta^+(\vec{x})$ και $\theta^-(\vec{x})$ τέτοιοι ώστε για όλα $\vec{\alpha} \in K^-$*

$$K^- \models_{LP} \theta(\vec{\alpha}) \iff K \models \theta^+(\vec{\alpha})$$
$$K^- \models_{LP} \neg\theta(\vec{\alpha}) \iff K \models \theta^-(\vec{\alpha}).$$

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του θ.

- ατομικός τύπος: $\theta(x,y) \equiv x = y$. Τότε θέτουμε $\theta^+(x,y)$ να είναι $\theta(x,y)$ και $\theta^-(x,y)$ να είναι $x = x$.

  Από τον ορισμό του K^-, έχουμε ότι για όλα τα $\alpha, \beta \in K^-$

  $$\begin{aligned} K^- \models_{LP} \alpha = \beta &\iff K \models \alpha = \beta \\ K^- \models_{LP} \alpha \neq \beta &\iff K \models \alpha = \alpha. \end{aligned}$$

- $\theta(\vec{x}) \equiv \neg\phi(\vec{x})$, με επαγωγική υπόθεση να ισχύει για $\phi(\vec{x})$. Άρα υπάρχουν $\phi^+(\vec{x})$ και $\phi^-(\vec{x})$ τέτοιοι ώστε για όλα τα $\vec{\alpha} \in K^-$

  $$\begin{aligned} K^- \models_{LP} \neg\neg\phi(\vec{\alpha}) &\iff K \models \phi^+(\vec{\alpha}) \\ K^- \models_{LP} \neg\phi(\vec{\alpha}) &\iff K \models \phi^-(\vec{\alpha}). \end{aligned}$$

  Παίρνουμε $\theta^+(\vec{x})$ να είναι ο τύπος $\phi^-(\vec{x})$ και $\theta^-(\vec{x})$ να είναι ο τύπος $\phi^+(\vec{x})$. Τότε για όλα τα $\vec{\alpha} \in K^-$

  $$\begin{aligned} K^- \models_{LP} \theta(\vec{\alpha}) &\iff K \models \theta^+(\vec{\alpha}) \\ K^- \models_{LP} \neg\theta(\vec{\alpha}) &\iff K \models \theta^-(\vec{\alpha}). \end{aligned}$$

- $\theta(\vec{x}) \equiv \phi(\vec{x}) \wedge \psi(\vec{x})$, με την επαγωγική υπόθεση να ισχύει για τους $\phi(\vec{x})$ και $\psi(\vec{x})$. Θεωρούμε $\theta^+(\vec{x})$ να είναι ο τύπος $\phi^+(\vec{x}) \wedge \psi^+(\vec{x})$, ενώ ως $\theta^-(\vec{x})$ παίρνουμε $\phi^-(\vec{x}) \vee \psi^-(\vec{x})$. Οπότε πράγματι, για όλα τα $\vec{\alpha} \in K^-$

  $$\begin{aligned} K^- \models_{LP} \theta(\vec{\alpha}) \iff K^- \models_{LP} \phi(\vec{\alpha}) \wedge \psi(\vec{\alpha}) &\iff K \models \theta^+(\vec{\alpha}) \\ K^- \models_{LP} \neg\theta(\vec{\alpha}) \iff K^- \models_{LP} \neg\phi(\vec{\alpha}) \vee \neg\psi(\vec{\alpha}) &\iff K \models \theta^-(\vec{\alpha}). \end{aligned}$$

- $\theta(\vec{x}) \equiv \phi(\vec{x}) \to \psi(\vec{x})$, με την επαγωγική υπόθεση να ισχύει για τους $\phi(\vec{x})$ και $\psi(\vec{x})$. Θέτουμε $\theta^+(\vec{x})$ να είναι $\phi^-(\vec{x}) \vee \psi^+(\vec{x})$ και $\theta^-(\vec{x})$ να είναι $\phi^+(\vec{x}) \wedge \psi^-(\vec{x})$. Παρομοίως έπεται το ζητούμενο και σε αυτήν τη περίπτωση.

- $\theta(\vec{x}) \equiv \forall y \phi(y, \vec{x})$, με την επαγωγική υπόθεση να ισχύει για τον $\phi(y, \vec{x})$. Παίρνουμε ως $\theta^+(\vec{x})$ τον τύπο $\forall y \phi^+(y, \vec{x})$ και στον $\theta^-(\vec{x})$ αντιστοιχούμε $\exists y \phi^-(y, \vec{x})$. Οπότε πάλι για όλα τα $\vec{\alpha} \in K^-$

  $$\begin{aligned} K^- \models_{LP} \theta(\vec{\alpha}) &\iff K \models \theta^+(\vec{\alpha}) \\ K^- \models_{LP} \neg\theta(\vec{\alpha}) &\iff K \models \theta^-(\vec{\alpha}). \end{aligned}$$ □

Πρόταση 4.25. *Έστω K μοντέλο κάποιου υποσυστήματος του PA και το αντίστοιχο K^-, όπως το ορίσαμε στο 4.23. Τότε για κάθε τύπο $\theta(\vec{x})$,*

$$\begin{aligned} &\textit{είτε} \;\; K \models \forall\vec{x}\theta^+(\vec{x}) \\ &\textit{είτε} \;\; K \models \forall\vec{x}\theta^-(\vec{x}). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Θα το δείξουμε με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του τύπου.

- ατομικός τύπος: $\theta(x,y) \equiv x = y$. Τότε

$$\begin{aligned} K^- \models_{LP} \forall x \forall y\, x \neq y \quad &\iff \quad K \models (\forall x \forall y (x \neq y))^+ \;\; \text{από την Πρόταση 4.24} \\ &\iff \quad K \models \forall x \forall y (x = y)^- \\ &\iff \quad K \models \forall x \forall y\, x = x. \end{aligned}$$

- $\theta(\vec{x}) \equiv \neg\phi(\vec{x})$, με την επαγωγική υπόθεση να ισχύει για τον $\phi(\vec{x})$. Άρα,

$$K \models \forall\vec{x}\phi^+(\vec{x}) \text{ ή } K \models \forall\vec{x}\phi^-(\vec{x}).$$

  Συνεπώς
$$K \models \forall\vec{x}(\neg\phi(\vec{x}))^- \text{ ή } K \models \forall\vec{x}(\neg\phi(\vec{x}))^+.$$

- $\theta(\vec{x}) \equiv \phi(\vec{x}) \wedge \psi(\vec{x})$, με την επαγωγική υπόθεση να ισχύει για τους $\phi(\vec{x})$ και $\psi(\vec{x})$. Άρα,
$$K \models \forall\vec{x}\phi^+(\vec{x}) \text{ ή } K \models \forall\vec{x}\phi^-(\vec{x})$$

  και
$$K \models \forall\vec{x}\psi^+(\vec{x}) \text{ ή } K \models \forall\vec{x}\psi^-(\vec{x}).$$

  Εάν ισχύει ότι

$$K \models \forall\vec{x}\phi^+(\vec{x}) \text{ και } K \models \forall\vec{x}\psi^+(\vec{x}) \tag{4.6}$$

  τότε αυτό συνεπάγεται

$$K \models \forall\vec{x}\phi^+(\vec{x}) \wedge \forall\vec{x}\psi^+(\vec{x}).$$

  Όμως αυτό μας δίνει

$$K \models \forall\vec{x}(\phi^+(\vec{x}) \wedge \psi^+(\vec{x})).$$

  Σε αντίθετη περίπτωση, εάν δεν ισχύει δηλαδή η 4.6, καταλήγουμε πως ισχύει
$$K \models \forall\vec{x}\phi^-(\vec{x}) \vee \forall\vec{x}\psi^-(\vec{x}). \tag{4.7}$$

Και αυτό με τη σειρά μας δίνει

$$K \models \forall \vec{x}(\phi^-(\vec{x}) \vee \psi^-(\vec{x})). \tag{4.8}$$

Παρατηρούμε ότι η συνεπαγωγή 4.8 $\Rightarrow$ 4.7 δεν είναι πάντα αληθής, αλλά η κατεύθυνση που θέλουμε για την απόδειξη είναι πάντα αληθής.

Κατά συνέπεια δείξαμε ότι

$$K \models \forall \vec{x}(\phi(\vec{x}) \wedge \psi(\vec{x}))^-.$$

- $\theta(\vec{x}) \equiv \phi(\vec{x}) \rightarrow \psi(\vec{x})$, με την επαγωγική υπόθεση να ισχύει για τους $\phi(\vec{x})$ και $\psi(\vec{x})$. Οπότε πάλι έχουμε

  $$K \models \forall \vec{x}\phi^+(\vec{x}) \text{ ή } K \models \forall \vec{x}\phi^-(\vec{x})$$

  και

  $$K \models \forall \vec{x}\psi^+(\vec{x}) \text{ ή } K \models \forall \vec{x}\psi^-(\vec{x}).$$

  Εάν έχουμε

  $$K \models \forall \vec{x}\phi^-(\vec{x}) \text{ ή } K \models \forall \vec{x}\psi^+(\vec{x})$$

  τότε αυτό συνεπάγεται

  $$K \models \forall \vec{x}\phi^-(\vec{x}) \vee \forall \vec{x}\psi^+(\vec{x}).$$

  Δηλαδή δείξαμε ότι

  $$K \models \forall \vec{x}(\phi(\vec{x}) \rightarrow \psi(\vec{x}))^+.$$

  Σε αντίθετη περίπτωση, παρόμοια δείχνουμε ότι

  $$K \models \forall \vec{x}(\phi(\vec{x}) \rightarrow \psi(\vec{x}))^-.$$

- $\theta(\vec{x}) \equiv \forall y \phi(y, \vec{x})$, με την επαγωγική υπόθεση να ισχύει για τον $\phi(y, \vec{x})$. Άρα

  $$K \models \forall \vec{x} \forall y \phi^+(y, \vec{x}) \text{ ή } K \models \forall \vec{x} \forall y \phi^-(y, \vec{x}). \tag{4.9}$$

  Αν αληθεύει η πρώτη περίπτωση, τότε αυτό μας δίνει

  $$K \models \forall \vec{x}(\forall y \phi(y, \vec{x}))^+.$$

  Εάν αληθεύει η δεύτερη, τότε

  $$K \models \forall \vec{x} \exists y \phi^-(y, \vec{x}),$$

  και τότε ισχύει

  $$K \models \forall \vec{x}(\forall y \phi(y, \vec{x}))^-. \qquad \square$$

Είδαμε την αρχή της υπερχείλισης (Λήμμα 3.9) για τα υποσυστήματα $I\Sigma_n$. Συνεπώς όταν έχουμε όλο το PA, ισχύει η αρχή αυτή για όλους τους τύπους της $\mathcal{L}$. Αυτό θα μας είναι χρήσιμο στο αμέσως επόμενο θεώρημα, στο οποίο δίνουμε αρνητική απάντηση στο Πρόβλημα 4.21.

Θεώρημα 4.26. *Υπάρχει LP-μοντέλο του PA τέτοιο ώστε δεν είναι της μορφής $M/\equiv$, για κάποιο M nonstandard μοντέλο του PA και κάποια $\equiv$ σχέση ισοτιμίας στο M.*

Απόδειξη. Έστω J ένα nonstandard μοντέλο του PA και α κάποιο nonstandard στοιχείο του J. Θέτουμε K να είναι η υποδομή του J με σύμπαν το σύνολο των μη αρνητικών τιμών $p(\alpha)$, καθώς διατρέχουμε όλα τα πολυώνυμα $p(x)$ με ακέραιους συντελεστές. Τότε ο τύπος

$$\phi(x) := \exists y[y^2 < \alpha \land x < y]$$

ορίζει το σύνολο των φυσικών στο K, διότι κάθε $n \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί $\phi(x)$, αλλά δεν υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ επί του $\mathbb{Z}$ με $K \models (p(b))^2 < b$ και $p(b) > \mathbb{N}$. Συνεπώς το $\mathbb{N}$ είναι $\exists_1$-ορίσιμο στο K. Όμως είναι γνωστό ότι

$$PA \vdash \forall z[0 < z \rightarrow \exists y(y^2 < z \leq (y+1)^2)].$$

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να συνάγουμε πως το K δεν είναι μοντέλο του PA. Είναι θέμα ρουτίνας να διαπιστώσουμε πως το K ικανοποιεί όλα τα αξιώματα του PA, εκτός από το επαγωγικό σχήμα.

Θεωρούμε το K^- όπως το έχουμε ξαναορίσει προηγουμένως. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που δώσαμε νωρίτερα, το K^- επίσης ικανοποιεί όλα τα αξιώματα του PA^-. Στην πραγματικότητα, το K^- ικανοποιεί τελικά όλο το PA. Για να το δούμε καλύτερα, ας πάρουμε τυχόντα τύπο $\phi(y,\vec{z})$,και ας γράψουμε το στιγμιότυπο της επαγωγής για αυτόν τον τύπο

$$\phi(0,\vec{z}) \land \forall y\,(\phi(y,\vec{z}) \rightarrow \phi(y',\vec{z})) \rightarrow \forall y\,\phi(y,\vec{z}).$$

Όπως είδαμε στη Πρόταση 4.24, για να ισχύσει στο K^- πρέπει

$$[\phi(0,\vec{z}) \land \forall y\,(\phi(y,\vec{z}) \rightarrow \phi(y',\vec{z})) \rightarrow \forall y\,\phi(y,\vec{z})]^+$$

να ισχύσει στο K. Με άλλα λόγια, αυτό είναι ισοδύναμο με

$$\phi(0,\vec{z})^- \lor \forall y\,[\phi^+(y,\vec{z}) \lor \phi^-(y',\vec{z})] \lor \forall y\,\phi^+(y,\vec{z})$$

να ισχύει στο K, το οποίο πραγματικά ισχύει, διότι η Πρόταση 4.25 μας βεβαιώνει πως τουλάχιστον ένα από τα:

$$\phi(0,\vec{z})^- \text{ και } \forall y\,\phi^+(y,\vec{z})$$

ισχύει στο K. Κατά συνέπεια, δείξαμε ότι το K^- είναι όντως μοντέλο του PA.

Λοιπόν, αφού είδαμε ότι το K^- είναι ένα LP-μοντέλο του PA, τώρα θα δούμε πως δεν είναι της γνωστής μορφής: $M/\equiv$, για κάποιο μοντέλο $M \models PA$ με κάποια σχέση $\equiv$ ισοτιμίας στο M. Πράγματι, αν υποθέσουμε το αντίθετο, και έστω M τέτοιο nonstandard μοντέλο. Τότε από την αρχή υπερχείλισης, θα έπρεπε να υπάρχει κάποιο nonstandard στοιχείο που ικανοποιεί $\phi(x)$ και το αντίστοιχο στοιχείο θα ικανοποιούσε τον τύπο αυτό και θα παρέμεινε nonstandard στο $M/\equiv$. Αυτό όμως είναι άτοπο. □

Πόρισμα 4.27. *Το Πρόβλημα 4.21 έχει αρνητική απάντηση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μοντέλα του Θεωρήματος 4.26, K και K^-. Τότε το $Th(K^-)$, δηλαδή το σύνολο όλων των προτάσεων που αληθεύουν στο K^-, είναι μια πλήρης θεωρία που επεκτείνει το PA. Επίσης προφανώς το K^- είναι ένα μοντέλο της $Th(K^-)$, το οποίο όμως δεν προέρχεται σύμφωνα με το Θεώρημα 4.26 από κανένα nonstandard μοντέλο της $Th(K^-)$ μέσω κάποιας σχέσης ισοτιμίας. □

Σχόλιο 4.28. Το LP-μοντέλο K^- που κατασκευάσαμε στο Θεώρημα 4.26, δεν αποτελεί αντιπαράδειγμα στην Εικασία 4.20, διότι ναι μεν δείξαμε πως είναι μοντέλο του PA, αλλά είναι άγνωστο ακόμα αν υπάρχει κάποια πλήρης επέκταση του PA που να ικανοποιείται από το K^-.

Σχόλιο 4.29. Αξίζει επίσης να προσθέσουμε πως το επαγωγικό στιγμιότυπο

$$[\phi^+(0) \wedge \forall y(\phi^+(y) \rightarrow \phi^+(y')) \rightarrow \forall y \phi^+(y)]$$

είναι ακριβώς το ίδιο (ταυτίζεται δηλαδή) με το αντίστοιχο (κλασσικό) επαγωγικό στιγμιότυπο του $\phi(x)$.

4.5 Συνέπειες της εικασίας του G. Priest

Άλλη μια προσέγγιση που κάναμε προς την (αρνητική) επίλυση της Εικασίας 4.20, είναι να ερευνήσουμε τις πιθανές (ακραίες) συνέπειες που προκύπτουν εάν δεχτούμε την εικασία. Με αυτόν τον σκοπό λοιπόν συνεχίζουμε με μια νέα κατασκευή μιας LP-δομής.

Έστω M ένα nonstandard μοντέλο του PA, και $a \in M$ με $\mathbb{N} < a$. Θέτουμε $K = a^{\mathbb{N}}$ και ορίζουμε την ακόλουθη σχέση ισοτιμίας $\sim$ στο M:

$$c \sim d \iff \begin{cases} c = d < a^{\mathbb{N}} \\ \quad \text{ή} \\ a^{\mathbb{N}} < c, d \end{cases}$$

Δηλαδή το $M/\sim$ μοιάζει να είναι σαν το K με ένα επιπλέον στοιχείο, ας το πούμε ∞, 'κολλημένο' στην κορυφή του K. Σύμφωνα με τον Priest, ξέρουμε ότι πρόκειται για ένα LP-μοντέλο της θεωρίας $Th(\mathbb{N})$. Επίσης ο τρόπος ορισμού του μας εξασφαλίζει άπειρο το πλήθος πυρήνων. Όλοι οι πυρήνες είναι μη γνήσιοι, εκτός από τον τελευταίο, που είναι ο μοναδικός γνήσιος πυρήνας, και μάλιστα είναι και μονοσύνολο.

Μπορούμε να δώσουμε και κατάλληλη ερμηνεία στις συναρτήσεις $+, \times, '$ του $M/\sim$, όπως και τις εκτάσεις των $=$ και $\neq$ μέσα στο K. Για την ακρίβεια, δείχνουμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 4.30. *Για οποιονδήποτε τύπο $\theta(\vec{x})$ υπάρχουν τύποι $\theta^+(\vec{x}), \theta^-(\vec{x})$ τέτοιοι ώστε για όλες τις n-άδες $c_1, \ldots, c_n \in M/\sim$,*

$$M/\sim \models_{LP} \theta(c_1, \ldots, c_n) \iff K \models \theta^+(\dot{c}_1, \ldots, \dot{c}_n),$$

$$M/\sim \models_{LP} \neg\theta(c_1, \ldots, c_n) \iff K \models \theta^-(\dot{c}_1, \ldots, \dot{c}_n),$$

όπου $\dot{c}$ είναι ο κωδικός στο K για το $c \in M$ (για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε $\dot{\infty} = \langle 1, 0\rangle$, $\dot{b} = \langle 0, b\rangle$ για $b \in K$).

Απόδειξη. Όπως πάντα, με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του τύπου.

- Ατομικός τύπος: $\theta(x, y) \equiv x = y$. Τότε θέτουμε $\theta^+(x, y)$ να είναι ο τύπος $x = y$, ενώ $\theta^-(x, y)$ είναι $(x \neq y) \vee (x = \langle 1, 0\rangle) \vee (y = \langle 1, 0\rangle)$. Έτσι, από τον ορισμό του $M/\sim$, έχουμε ότι για κάθε $c_1, c_2 \in M/\sim$

$$\begin{aligned} M/\sim \models_{LP} c_1 = c_2 &\iff c_1 = [b] = c_2 \text{ για κάποιο } b \in K \text{ ή } c_1 = \infty = c_2 \\ &\iff K \models \dot{c}_1 = \dot{c}_2 \\ &\iff K \models \theta^+(\dot{c}_1, \dot{c}_2) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} M/\sim \models_{LP} c_1 \neq c_2 &\iff c_1 = [b_1], c_2 = [b_2] \text{ και είτε } b_1, b_2 \in K \text{ και } b_1 \neq b_2 \\ &\qquad \text{ή } b_1 \notin K \text{ ή } b_2 \notin K \\ &\iff \dot{c}_1 \neq \dot{c}_2 \text{ ή } \dot{c}_1 = \infty \text{ ή } \dot{c}_2 = \infty \\ &\iff K \models \theta^-(\dot{c}_1, \dot{c}_2). \end{aligned}$$

- $\theta(\vec{x}) \equiv \neg\phi(\vec{x})$, με την επαγωγική υπόθεση να ισχύει για τον $\phi(\vec{x})$. Οπότε υπάρχουν $\phi^+(\vec{x})$ και $\phi^-(\vec{x})$ τέτοιοι ώστε για όλα τα $\vec{\alpha} \in K^-$
$$K^- \models_{LP} \neg\neg\phi(\vec{\alpha}) \iff K \models \phi^+(\vec{\alpha})$$
$$K^- \models_{LP} \neg\phi(\vec{\alpha}) \iff K \models \phi^-(\vec{\alpha}).$$
Θέτουμε $\theta^+(\vec{x})$ να είναι $\phi^-(\vec{x})$ και $\theta^-(\vec{x})$ να είναι $\phi^+(\vec{x})$. Έτσι έχουμε για όλα τα $\vec{\alpha} \in K^-$
$$K^- \models_{LP} \theta(\vec{\alpha}) \iff K \models \theta^+(\vec{\alpha})$$
$$K^- \models_{LP} \neg\theta(\vec{\alpha}) \iff K \models \theta^-(\vec{\alpha}).$$

- $\theta(\vec{x}) \equiv \phi(\vec{x}) \wedge \psi(\vec{x})$, με την επαγωγική υπόθεση να ισχύει για τους $\phi(\vec{x})$ και $\psi(\vec{x})$. Ακολουθούμε την ίδια λογική με την Πρόταση 4.24, δηλαδή θέτουμε $\theta^+(\vec{x})$ να είναι $\phi^+(\vec{x}) \wedge \psi^+(\vec{x})$ και $\theta^-(\vec{x})$ είναι $\phi^-(\vec{x}) \vee \psi^-(\vec{x})$. Για αυτήν την ερμηνεία έπεται πως για όλα τα $\vec{\alpha} \in K^-$
$$K^- \models_{LP} \theta(\vec{\alpha}) \iff K^- \models_{LP} \phi(\vec{\alpha}) \wedge \psi(\vec{\alpha}) \iff K \models \theta^+(\vec{\alpha})$$
$$K^- \models_{LP} \neg\theta(\vec{\alpha}) \iff K^- \models_{LP} \neg\phi(\vec{\alpha}) \vee \neg\psi(\vec{\alpha}) \iff K \models \theta^-(\vec{\alpha}).$$

- $\theta(\vec{x}) \equiv \phi(\vec{x}) \to \psi(\vec{x})$, με την επαγωγική υπόθεση να ισχύει για τους $\phi(\vec{x})$ και $\psi(\vec{x})$. Ομοίως θέτουμε $\theta^+(\vec{x})$ να είναι $\phi^-(\vec{x}) \vee \psi^+(\vec{x})$ και $\theta^-(\vec{x})$ να είναι $\phi^+(\vec{x}) \wedge \psi^-(\vec{x})$, και προκύπτει το ζητούμενο.

- $\theta(\vec{x}) \equiv \forall y \phi(y, \vec{x})$, με την επαγωγική υπόθεση να ισχύει για τον τύπο $\phi(y, \vec{x})$. Θεωρούμε $\theta^+(\vec{x})$ να είναι ο τύπος $\forall y \phi^+(y, \vec{x})$, ενώ ο τύπος $\theta^-(\vec{x})$ να είναι $\exists y \phi^-(y, \vec{x})$. Είναι εύκολο να δει κανείς πως και σε αυτήν τη περίπτωση έχουμε το ζητούμενο. □

Για λόγους πληρότητας, παραθέτουμε αυτά που χρειαζόμαστε για την έννοια της τοπικής παράλειψης τύπων, διότι θα παίξει σημαντικό ρόλο στα παρακάτω.

Συμβολισμός. Με $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ συμβολίζουμε ένα σύνολο τύπων της $\mathcal{L}$, των οποίων όλες οι ελεύθερες μεταβλητές που εμφανίζονται είναι ανάμεσα στις $x_1, \ldots, x_n$.

Ορισμός 4.31. 1. Έστω T μια θεωρία και έστω $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ένας τύπος. Λέμε ότι ο $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ είναι *συνεπής (συμβατός)* με την T αν το σύνολο $T \cup \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ είναι ικανοποιήσιμο. Δηλαδή,
υπάρχει κάποιο μοντέλο $\mathcal{A}$ και κάποια $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|$ τέτοια ώστε
$$\mathcal{A} \models T \cup \varphi(a_1, \ldots, a_n).$$

2. Λέμε ότι μια δομή *ικανοποιεί* το $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ αν υπάρχει κάποια n-άδα $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|$ τέτοια ώστε
$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n), \text{ για κάθε } \varphi \in \Sigma.$$
3. Λέμε ότι μια δομή *παραλείπει* το $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ αν δεν το ικανοποιεί.

Αφού δώσαμε τους επιμέρους απαραίτητους ορισμούς, είμαστε σε θέση να πούμε τι σημαίνει για μια θεωρία να παραλείπει κάποιο σύνολο τύπων.

Ορισμός 4.32. Έστω T μια θεωρία και έστω $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ ένα σύνολο τύπων, όπως το περιγράψαμε στο συμβολισμό προηγουμένως. Λέμε ότι η T *τοπικά παραλείπει* το Σ αν για κάθε τύπο $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ που είναι συνεπής με την T υπάρχει $\sigma \in \Sigma$ τέτοιος ώστε $\varphi \wedge \neg\sigma$ συνεπής με την T.

Ένα από τα δομικά θεωρήματα που αφορούν την παράλειψη του Σ είναι το επόμενο θεώρημα. Την απόδειξή του όπως και άλλες επιπλέον πληροφορίες περί παράλειψης τύπων μπορεί κανείς να βρεί στο 2.2 του [CK90].

Θεώρημα 4.33 (Θεώρημα παράλειψης τύπων). *Έστω T μια συνεπής θεωρία σε μια αριθμήσιμη γλώσσα $\mathcal{L}$, και έστω $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ ένα σύνολο τύπων. Εάν η T τοπικά παραλείπει το Σ, τότε η T έχει αριθμήσιμο μοντέλο που παραλείπει το Σ.*

Γυρίζουμε τώρα στο ζητούμενο μας: να μελετήσουμε μια από τις συνέπειες αποδοχής της Εικασίας του Priest. Για το μοντέλο $M/\sim$ που ορίσαμε στην αρχή αυτής της ενότητας, ξέρουμε (βλέπε Λήμμα 4.4) ότι $M/\sim \models_{LP} Th(M)$. Αυτό όμως προκαλεί μεγάλη έκπληξη, διότι K έχει (συγκριτικά με το PA) "φτωχή" δομή. *Φαίνεται* πως όλο και κάτι πρέπει να υπάρχει γύρω από το K (κάποια συνέπεια για παράδειγμα) που να μας οδηγήσει στην βεβαιότητα πως το "K με ∞ στην κορυφή του " δεν είναι δυνατόν να προέρχεται από μοντέλο του PA μέσω σχέσης ισοτιμίας.

Από την άλλη, αν κρατήσουμε την θεωρία του K ως έχει και δίνοντας την ερμηνεία της Πρότασης 4.24, δηλαδή ερμηνεύοντας τον ϕ με τους ϕ^+ και ϕ^-, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να κρατήσουμε όλη τη θεωρία $Th(M)$ μέσα στο LP-μοντέλο "K με ∞ στην κορυφή του".

Συμβολισμός. Με (PC) στην αρχή του θεωρήματος, εννοούμε πως υποθέτουμε την θετική επίλυση της Εικασίας 4.20 και το χρησιμοποιούμε ως γεγονός.

Το θεώρημα και το πόρισμα που ακολουθούν έχουν στόχο την ανάδειξη συνεπειών της (PC), οι οποίες 'φαινομενικά' μοιάζουν να είναι αδύνατες.

Δηλαδή, αν για παράδειγμα, δείξουμε ότι η (PC) συνεπάγεται την θετική επίλυση του Προβλήματος 1.39 τότε είναι 'σχεδόν σίγουρο' ότι η (PC) δεν είναι αληθής.

Θεώρημα 4.34. (PC) *Έστω $M \models Th(\mathbb{N})$, K τυχόν αρχικό τμήμα*[6] *του M και $\vec{a} \in K$. Τότε για τυχούσα δομή H και τυχόντα $\vec{b} \in H$:*
αν $\langle H, \vec{b}\rangle \equiv \langle K, \vec{a}\rangle$ τότε υπάρχει κάποια δομή G τέτοια ώστε $H \subseteq_e G \equiv M$.

Απόδειξη. Για λόγους συντόμευσης θέτουμε $T = Th(\mathbb{N})$.

Όταν $K = \mathbb{N}$, τότε ουσιαστικά

$$\langle H, \vec{b}\rangle \equiv \langle K, \vec{a}\rangle \equiv \mathbb{N}.$$

Κατά συνέπεια $H \models T$ και άρα το ζητούμενο G είναι το H.

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η PC και έστω K nonstandard αρχικό τμήμα του M. Έστω $\vec{a} \in K \subseteq_e M$ και έστω $\langle H, \vec{b}\rangle \equiv \langle K, \vec{a}\rangle$ για κάποια δομή H και κάποια $\vec{b} \in H$. Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τα LP-μοντέλα $\langle K, \vec{a}, \infty\rangle$, $\langle H, \vec{b}, \infty\rangle$ σύμφωνα με το Λήμμα 4.30. Η ερμηνεία αυτή μας δίνει τη στοιχειώδη ισοδυναμία των LP-μοντέλων $\langle K, \vec{a}, \infty\rangle \equiv \langle H, \vec{b}, \infty\rangle$. Άρα και η LP-δομή $\langle H, \vec{b}, \infty\rangle$ είναι μοντέλο της T, οπότε λόγω της PC έχουμε ότι το $\langle H, \vec{b}, \infty\rangle$ είναι της μορφής $G/{\sim}$ για κάποιο μοντέλο G της T και $\sim$ κάποια σχέση ισοτιμίας στο G. Παρατηρούμε ότι το H πρέπει να είναι αρχικό τμήμα του G, διότι διαφορετικά $G/{\sim} \models_{LP} c \neq c$ για κάποιο $c \in H$. Άρα το G είναι το ζητούμενο μοντέλο του T, διότι το T είναι πλήρης θεωρία και αυτό έχει ως συνέπεια $G \equiv M$. □

Πόρισμα 4.35. (PC) *Για δοσμένο $m \in \mathbb{N}$ και K τυχόν αρχικό τμήμα του $M \models Th(\mathbb{N})$ υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο τύπων $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ τέτοιο ώστε για κάθε $e_1, e_2, \ldots, e_m < a \in K$, να υπάρχει $1 \leq i \leq n$ τέτοιος ώστε:*

για όλους τους Δ_0 τύπους $\theta(z, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ισχύει ότι

$$K \models \theta(a, e_1, e_2, \ldots, e_m) \iff K \models \chi_i(\ulcorner\theta\urcorner, a, e_1, e_2, \ldots, e_m).$$

Απόδειξη. Όταν $K = \mathbb{N}$, τότε το πόρισμα ισχύει τετριμμένα. Οπότε υποθέτουμε ότι το K είναι ένα nonstandard αρχικό τμήμα του M και $e_1, e_2, \ldots, e_m < a \in K$. Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο $\Sigma(x, \vec{y}, z)$ από τύπους:

$$\{\, \ulcorner\theta(x,\vec{y})\urcorner \in z \leftrightarrow Sat_0(\ulcorner\theta\urcorner, a, \vec{e}) \,|\, \theta(x,\vec{y}) \text{ είναι standard τύπος} \,\},$$

όπου $\ulcorner\theta(x,\vec{y})\urcorner$ είναι ο κωδικός Gödel του $\theta(x,\vec{y})$ (λεπτομέρειες περί κωδικοποίησης κατά Gödel υπάρχουν για παράδειγμα στο [HP93]) και Sat_0 είναι ο Δ_0-πλήρης τύπος που ορίσαμε στην §1.6.

[6] Ο ορισμός του αρχικού τμήματος έχει δοθεί στην §1.2.

Το σύνολο $\Sigma(x,\vec{y},z)$ ικανοποιείται στο $\langle M,a,\vec{e}\rangle$, διότι M είναι μοντέλο του T και αυτό μας εξασφαλίζει την ύπαρξη του κωδικού z. Ο κωδικός αυτός μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρός (nonstandard) και έχουμε ότι $K \subseteq_e M$, άρα το $\Sigma(x,\vec{y},z)$ ικανοποιείται και στο $\langle K,a,\vec{e}\rangle$.

Ας πάρουμε τυχόν μοντέλο $\langle H,a,\vec{e}\rangle$ της $Th(K,a,\vec{e})$, δηλαδή $\langle K,a,\vec{e}\rangle \equiv \langle H,a,\vec{e}\rangle$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.34 έχουμε πως το H πρέπει να είναι αρχικό τμήμα κάποιου $G \equiv M$. Άρα καταρχάς $a,\vec{e} \in G$.

Επίσης έπεται πως το $\Sigma(x,\vec{y},z)$ ικανοποιείται στο $\langle G,a,\vec{e}\rangle$, οπότε ικανοποιείται και στο $\langle H,a,\vec{e}\rangle$ για ίδιους λόγους που δώσαμε στην περίπτωση του $\langle K,a,\vec{e}\rangle$.

Συμπεραίνουμε ότι όλα τα μοντέλα της $Th(K,a,\vec{e})$ ικανοποιούν το $\Sigma(x,\vec{y},z)$. Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα 4.33 έπεται ότι το $\Sigma(x,\vec{y},z)$ δεν παραλείπεται από το $Th(K,a,\vec{e})$. Άρα υπάρχει κάποιος τύπος $\psi(x,\vec{y},z)$ τέτοιος ώστε

$$\exists z\, \psi(a,\vec{e},z) \in Th(K,a,\vec{e})$$

και για κάθε Δ_0 τύπο $\theta(x,\vec{y})$, η πρόταση

$$\forall z\, [\psi(a,\vec{e},z) \to (\ulcorner\theta(x,\vec{y})\urcorner \in z \leftrightarrow Sat_0(\ulcorner\theta\urcorner,a,\vec{e}))]$$

ανήκει στο $Th(K,a,\vec{e})$.

Έστω $\chi_{a,\vec{e}}(w,x,\vec{y})$ ο τύπος

$$\exists z\, [\psi(x,\vec{y},z) \wedge w \in z].$$

Τότε έχουμε πως για όλους τους Δ_0 τύπους $\theta(x,\vec{y})$ ισχύει το ακόλουθο

$$\chi_{a,\vec{e}}(\ulcorner\theta(x,\vec{y})\urcorner,a,\vec{e}) \in Th(K,a,\vec{e}) \iff \langle K,a,\vec{e}\rangle \models \theta(a,\vec{e}).$$

Παρατηρούμε πως ο τύπος $\chi_{a,\vec{e}}$ εξαρτάται από τα $\vec{e}$ και a. Όμως εάν σταθεροποιήσουμε το πλήθος m των $\vec{e} < a$ τότε *κάποιο* πεπερασμένο σύνολο από τους $\chi_{a,\vec{e}}$ θα περιέχει "ορισμούς αλήθειας" που θα δουλεύουν για όλα τα $e_1,\ldots e_m < a$, δηλαδή υπάρχουν οι $\chi_1,\ldots,\chi_n$ τέτοιοι ώστε για κάθε $e_1,e_2,\ldots,e_m < a \in K$ υπάρχει $1 \leq i \leq n$ με την ιδιότητα:

για όλους τους Δ_0 τύπους $\theta(z,x_1,x_2,\ldots,x_m)$,

$$K \models \chi_i(\ulcorner\theta\urcorner,a,e_1,e_2,\ldots,e_m) \iff K \models \theta(a,e_1,e_2,\ldots,e_m).$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο πεπερασμένο υποσύνολο που ισχυριζόμαστε, τότε και στη δομή που προκύπτει από το υπεργινόμενο (βλέπε [CK90]) των δομών $\langle K,a,\vec{e}\rangle$ (με δείκτη να διατρέχει τα $\vec{e}$) δεν θα υπήρχε τέτοιο πεπερασμένο σύνολο και αυτό έρχεται σε αντίφαση με το PC. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε πως τελικά οι χ_i μπορούν να επιλεγούν ανεξάρτητα από οποιαδήποτε πλήρη επέκταση T του PA. Άρα έπεται το ζητούμενο. $\square$

Στο παραπάνω Πόρισμα δείξαμε την ύπαρξη πεπερασμένου συνόλου "ορισμών αλήθειας." Ένα επόμενο βήμα θα είναι να δείξουμε την ύπαρξη μονοσυνόλου, δηλαδή να καταλήξουμε στην ύπαρξη ενός "ορισμού αλήθειας," του χ. Αλλά και η ύπαρξη πεπερασμένου συνόλου "ορισμών αλήθειας" φαίνεται να μην είναι πραγματοποιήσιμη. Ο λόγος είναι πως όταν K δεν είναι κλειστό ως προς το εκθετικό, δεν υπάρχει ένδειξη για τον τρόπο που θα μπορούσαμε να ορίσουμε την "αλήθεια" μέσα στο K. Αν το σύνολο του Πορίσματος 4.35 αποδειχθεί να είναι μονοσύνολο, τότε η θετική επίλυση της Εικασίας 4.20 θα έχει ως συνέπεια την απόδειξη του Θεωρήματος 1.43 χωρίς να υποθέσουμε ότι το Πρόβλημα 1.39 έχει θετική λύση. Πιστεύεται όμως από πολλούς πως το συμπέρασμα του Θεωρήματος 1.43 είναι "απίθανο" να ισχύσει και αυτός είναι ο λόγος που πιστεύουμε στην αρνητική επίλυση της Εικασίας 4.20.

Βιβλιογραφία

[Bek03] L.D. Beklemishev. On the induction schema for decidable predicates. *J. Symbolic Logic*, 68:17–34, 2003.

[Ben62] J. Bennett. *On Spectra.* PhD thesis, Princeton University, 1962.

[BI91] A. Berarducci and B. Intrigila. Combinatorial principles in elementary number theory. *Ann. Pure Appl. Logic*, 55:35–50, 1991.

[CFL06] A. Cordón-Franko, A. Fernández-Margarit, and F. F. Lara-Martín. Envelopes, indicators and conservativeness. *Math. Log. Quart.*, 52:51–70, 2006.

[CK90] C. Chang and H. Keisler. *Model Theory.* Elsevier, 3rd edition, 1990.

[CK93] P. Clote and J. Krajiček. *Open problems*, volume 23 of *Oxford Logic Guides*, pages 1–19. Oxford University Press, 1993.

[Dim80] C. Dimitracopoulos. *Matiyasevič's theorem and fragments of arithmetic.* PhD thesis, University of Manchester, 1980.

[DP86] C. Dimitracopoulos and J. Paris. The pigeonhole principle and fragments of arithmetic. *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, 32:73–80, 1986.

[End01] H. B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic.* Harcourt Academic Press, 2001.

[FL04] A. Fernández-Margarit and F. F. Lara-Martín. Induction, minimization and collection for $\Delta_{n+1}(T)$-formulas. *Arch. Math. Logic*, 43:505–541, 2004.

[GD82] H. Gaifman and C. Dimitracopoulos. *Fragments of Peano's arithmetic and the MRDP theorem*, volume 30 of *Monograph. Enseign. Math.* Univ. Geneva, 1982.

[Grz55] A. Grzegorczyk. Some classes of recursive functions. *J. Symbolic Logic*, 20:71–72, 1955.

[HP93] P. Hájek and P. Pudlák. *Metamathematics of first-order arithmetic*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Kay91] R. Kaye. *Models of Peano Arithmetic*, volume 15 of *Oxford Logic Guides*. Clarendon Press, 1991.

[KPD88] R. Kaye, J. Paris, and C. Dimitracopoulos. On parameter free induction schemas. *J. Symbolic Logic*, 53:1082–1097, 1988.

[Les78] H. Lessan. *Models of Arithmetic*. PhD thesis, University of Manchester, 1978.

[Mat70] Y. Matijasevič. The diophantineness of enumerable sets. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 191:279–282, 1970.

[MM84] R. Meyer and C. Mortensen. Inconsistent models for relevant arithmetics. *J. Symbolic Logic*, 49:917–929, 1984.

[Mor] C. Mortensen. Inconsistent mathematics. http://plato.stanford.edu/entries/mathematics-inconsistent/ .

[Mor95] C. Mortensen. *Inconsistent Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[Par70] C. Parsons. On a number theoretic choice schema and its relation to induction. In *Intuitionism and Proof Theory (Proc. Conf., Buffalo, N.Y., 1968)*, pages 459–473. North-Holland, Amsterdam, 1970.

[Par71] R. Parikh. Existence and feasibility in arithmetic. *J. Symbolic Logic*, 36:494–508, 1971.

[Par72] C. Parsons. On n-quantifier induction. *J. Symbolic Logic*, 37:466–482, 1972.

[Par81] J. B. Paris. Some conservation results for fragments of arithmetic. In *Model theory and arithmetic (Paris, 1979–1980)*, Lecture Notes in Math., pages 251–262. Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[PD82] J. B. Paris and C. Dimitracopoulos. *Truth definitions for Δ_0 formulae*, volume 30 of *Monograph. Enseign. Math.* Univ. Geneva, 1982.

[PK78] J. B. Paris and L. Kirby. Σ_n-collection schemas in arithmetic. In *Logic Colloquium '77*, pages 199–209. North-Holland, Amsterdam, 1978.

[PP06] J. B. Paris and N. Pathmanathan. A note on Priest's finite inconsistent arithmetics. *J. Philos. Logic*, 35:529–537, 2006.

[Pri87] G. Priest. *In Contradiction.* Nijhoff, Dordrecht, 1987.

[Pri97] G. Priest. Inconsistent models of arithmetic, Part I: Finite models. *J. Philos. Logic*, 26:223–235, 1997.

[Pri00] G. Priest. Inconsistent models of arithmetic, Part II: General Case. *J. Symbolic Logic*, 65:1519–1529, 2000.

[PW85] J. B. Paris and A. J. Wilkie. Counting problems in bounded arithmetic. In C. A. Di Prisco, editor, *Methods in Mathematical logic (Proc. 6^{th} Latin American Symp. on Mathematical Logic Caracas, 1983)*, volume 1130 of *Lecture Notes in Math.*, pages 317–340. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[PWW88] J. B. Paris, A. J. Wilkie, and A. R. Woods. Provability of the pigeonhole principle and the existence of infinitely many primes. *J. Symbolic Logic*, 53:1235–1244, 1988.

[Rit63] R. W. Ritchie. Classes of predictably computable functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106:139–173, 1963.

[Sla04] T. Slaman. Σ_n-bounding and Δ_n-induction. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132:2449–2456, 2004.

[Tha05] N. Thapen. A note on Δ_1 induction and Σ_1 collection. *Fund. Math.*, 1:79–84, 2005.

[Wil80a] A. Wilkie. *Applications of complexity theory to Σ_0 definability problems in arithmetic*, volume 834 of *SLNM.* Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[Wil80b] A. Wilkie. Some results and problems on weak systems of arithmetic. In *Logic Colloquium '77*, pages 285–296. North-Holland, Amsterdam, 1980.

[Woo81] A. Woods. *Some problems in logic and number theory and their connections.* PhD thesis, University of Manchester, 1981.

[WP87] A. J. Wilkie and J. B. Paris. On the scheme of induction for bounded arithmetic formulas. *Ann. Pure Appl. Logic*, 35:261–302, 1987.

[WP89] A. Wilkie and J. Paris. On the existence of end extensions of models of bounded induction. In *Logic, methodology and philosophy of science, VIII (Moscow, 1987)*, volume 126 of *Stud. Logic Found. Math*, pages 143–161. North-Holland, Amsterdam, 1989.